ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

SUPERFICI DI RIEMANN COMPATTE DI GENERE ZERO E UNO

Tesi di Laurea Triennale in Analisi Complessa

Relatore:
Chiar.mo Prof.
SERGIO VENTURINI

Presentata da:
MATTEO UGOLINI

Anno Accademico 2017/2018

Indice

Introduzione

In questo elaborato ci proponiamo di caratterizzare le superfici di Riemann compatte di genere zero e uno. Lo scopo è quello di mostrare che una superficie di Riemann ha genere zero se e solo se è equivalente dal punto di vista olomorfo alla sfera di Riemann, mentre ha genere uno se e solo se è equivalente ad un toro complesso.

Nel primo capitolo introdurremo la nozione di superficie di Riemann e di funzioni definite su di esse mostrando alcuni esempi, quali il piano complesso $\mathbb{C}$, la sfera di Riemann $\mathbb{P}^1$ e i tori complessi. Successivamente, esporremo alcuni concetti fondamentali sempre riguardanti tali superfici, in particolare l'estensione del Teorema d'Identità e del Teorema della mappa aperta su $\mathbb{C}$ alle superfici di Riemann. Nell'ultima parte del capitolo riporteremo dal libro *Lectures on Riemann Surfaces*, [2], alcune proprietà delle 1-forme e 2-forme differenziali e olomorfe, supponendo note tutte le definizioni formali che si possono trovare su questo testo. Presenteremo i concetti di integrazione lungo cammini di 1-forme differenziali e di integrazione su superfici di 2-forme differenziali. Infine dimostreremo un teorema molto importante, il corollario 1.32, che afferma che su una superficie di Riemann compatta ogni funzione meromorfa ha lo stesso numero di poli e di zeri contati con molteplicità.

Nel secondo capitolo definiremo il genere di una superficie di Riemann compatta X come la dimensione del $\mathbb{C}$-spazio vettoriale delle 1-forme olomorfe su X, che verrà denotato con $\Omega(X)$. Mostreremo che tale definizione è ben posta, cioè che $\Omega(X)$ ha dimensione finita, sfruttando alcuni risultati di Topologia e di Analisi Funzionale, tra cui, in particolare, il Teorema di

Hahn-Banach.

Nel terzo capitolo studieremo le proprietà della sfera di Riemann e dei tori complessi. Nella prima parte mostreremo che in P^1 l'equazione $\bar{\partial} f = \sigma$ è risolubile per ogni forma liscia σ di tipo $(0, 1)$ e che ogni superficie di Riemann compatta in cui vale tale proprietà ha genere zero. Nella seconda parte vedremo che il genere di ogni toro complesso è uno e dimostreremo in modo elementare che i tori sono le uniche superfici di Riemann sulle quali esiste una forma differenziale olomorfa il cui integrale lungo ogni cammino aperto sia non nullo.

Nel quarto e ultimo capitolo termineremo la caratterizzazione di P^1 e dei tori complessi come superfici di Riemann compatte di genere rispettivamente zero ed uno. Per raggiungere tale scopo utilizzeremo, senza darne la dimostrazione, un risultato che segue dalla decomposizione di Hodge delle forme differenziali che permette di caratterizzare le forme differenziali σ di tipo $(0, 1)$ per le quali l'equazione $\bar{\partial} f = \sigma$ sia risolubile.

Capitolo 1

Superfici di Riemann

1.1 Definizione di superficie di Riemann

Introduciamo le definizioni di superfici di Riemann e funzioni differenziabili, olomorfe e meromorfe su superfici di Riemann.

Definizione 1.1. Sia X una 2-varietà topologica. Chiamiamo *carta complessa* su X un omeomorfismo $\varphi \colon U \to V$ dove $U \subset X$ è un aperto di X e $V \subset \mathbb{C}$.

Due carte complesse $\varphi_1 \colon U_1 \to V_1$ e $\varphi_2 \colon U_2 \to V_2$ sono dette *olomorficamente compatibili* se la mappa

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} \colon \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2)$$

è biolomorfa.

Un *atlante complesso* su X è una famiglia di carte complesse $\mathcal{U} = \{\varphi_i \colon U_i \to V_i\}_{i \in I}$ olomorficamente compatibili tra loro tali che $\bigcup_{i \in I} U_i = X$.

Due atlanti complessi $\mathcal{U}$ e $\mathcal{U}'$ sono detti *analiticamente equivalenti* se ogni carta di $\mathcal{U}$ è olomorficamente equivalente a ogni carta di $\mathcal{U}'$.

Osservazione. Si mostra facilmente che l'equivalenza analitica è una relazione di equivalenza, poiché composizioni di funzioni biolomorfe è ancora una funzione biolomorfa.

Definizione 1.2. Sia X è una 2-varietà. Chiameremo *struttura complessa* su X una classe d'equivalenza di atlanti analiticamente equivalenti su X.

Una *superficie di Riemann* è una coppia (X, Σ), dove X è una 2-varietà topologica connessa e Σ è una struttura complessa su X.

Definizione 1.3. Sia X una superficie di Riemann e sia Y un aperto di X. Una funzione $f\colon Y \to \mathbb{C}$ è detta *differenziabile* (rispettivamente *olomorfa*) se per ogni carta $\varphi\colon U \to V$ su X la funzione

$$f \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U \cap Y) \to \mathbb{C}$$

è differenziabile (rispettivamente olomorfa). L'insieme di tutte le funzioni differenziabili su Y si denota con $\mathscr{E}(Y)$, mentre l'insieme delle funzioni olomorfe su Y con $\mathcal{O}(Y)$. Chiaramente abbiamo $\mathcal{O}(Y) \subset \mathscr{E}(Y)$.

Osservazione. Ogni carta $\psi\colon Y \to V$ su X è in particolare una funzione a valori complessi su U. È ovviamente olomorfa, poiché $\psi \circ \psi^{-1}\colon V \to V$ è l'identità su V, che è olomorfa. La carta ψ sarà detta *coordinata locale* e (U, ψ) *carta locale.* Di solito si usa la lettera z anzichè ψ.

Definizione 1.4. Siano X superficie di Riemann e Y aperto di X. Con *funzione meromorfa* su Y intendiamo una funzione $f\colon Y' \to \mathbb{C}$ olomorfa, con $Y' \subset Y$ aperto tale che $Y \setminus Y'$ contiene solo punti isolati e per ogni $p \in Y \setminus Y'$

$$\lim_{x \to p} |f(x)| = \infty.$$

I punti di $Y \setminus Y'$ sono detti *poli* di f. L'insieme delle funzioni meromorfe su Y si indica $\mathcal{M}(Y)$.

Esempi di superfici di Riemann

Il piano complesso

La sua struttura complessa è definita dall'atlante con un unica carta, l'identità $id\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Analogamente su $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

La sfera di Riemann

Definiamo la sfera di Riemann $\mathbb{P}^1 := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, con $\infty \notin \mathbb{C}$ detto *punto all'infinito*.

Su $\mathbb{P}^1$ introduciamo la seguente topologia: $U \subset \mathbb{P}^1$ è un aperto se $U \subset \mathbb{C}$ e U è aperto, oppure $U = V \cup \{\infty\}$ dove $V \subset \mathbb{C}$ è il complementare di un compatto $K \subset \mathbb{C}$. Con questa topologia $\mathbb{P}^1$ è uno spazio di Hausdorff omeomorfo alla sfera S^2.

Siano

$$U_1 := \mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\} = \mathbb{C}$$
$$U_2 := \mathbb{P}^1 \setminus \{0\} = \mathbb{C}^* \cup \{\infty\} \cong \mathbb{C}.$$

e definiamo le mappe $\varphi_i \colon U_i \to \mathbb{C}$ con $i = 1, 2$, tale che φ_1 è l'identità e

$$\varphi_2(z) := \begin{cases} 1/z & \text{se } z \in \mathbb{C}^* \\ 0 & \text{se } z = \infty. \end{cases}$$

Tali mappe sono omeomorfismi e quindi $\mathbb{P}^1$ è una 2-varietà. Osserviamo che U_1 e U_2 sono connessi con intersezione non nulla, e quindi anche $\mathbb{P}^1$ è connesso. Definiamo una struttura complessa su $\mathbb{P}^1$.

Consideriamo la famiglia di carte $\mathcal{U} := \{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$. Allora $\mathcal{U}$ è un atlante, infatti $\varphi_1(U_1 \cap U_2) = \varphi_2(U_1 \cap U_2) = \mathbb{C}^*$ e

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} \colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*, \qquad z \mapsto 1/z,$$

è un biolomorfismo.

I tori

Siano $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ tali che $Im(\frac{w_1}{w_2}) \neq 0$, cioè tali che siano vettori di $\mathbb{R}^2$ linearmente indipendenti. Chiamiamo *reticolo generato da* ω_1 *e* ω_2 il gruppo discreto

$$\Gamma := \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 = \{n\omega_1 + m\omega_2 \colon n, m \in \mathbb{Z}\}.$$

Definiamo una relazione di equivalenza $\sim$ su $\mathbb{C}$ in questo modo: per ogni $z, z' \in \mathbb{C}$ poniamo $z \sim z'$ se e solo se $z - z' \in \Gamma$. L'insieme delle classi di equivalenza è denotato con $\mathbb{C}/\Gamma$ ed è detto *toro complesso*.

Su $\mathbb{C}/\Gamma$ introduciamo la seguente topologia (topologia quoziente): $U \subset \mathbb{C}/\Gamma$ è un aperto se e solo se $\pi^{-1}(U) \subset \mathbb{C}$ è aperto, dove $\pi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Gamma$ è la proiezione canonica. Con questa topologia $\mathbb{C}/\Gamma$ è uno spazio di Hausdorff e π è continua. Osserviamo che $\mathbb{C}/\Gamma$ è connesso perché è immagine attraverso un'applicazione continua di $\mathbb{C}$ che è connesso. Inoltre $\mathbb{C}/\Gamma$ è compatto poiché $\mathbb{C}/\Gamma = \pi(P)$, dove P è il parallelogramma compatto $P := \{\lambda w_1 + \mu w_2 \colon \lambda, \mu \in [0,1]\}$. Osserviamo infine che π è aperta, cioè per ogni aperto $V \subset \mathbb{C}$ l'insieme $\pi(V)$ è aperto in $\mathbb{C}/\Gamma$. Infatti $\pi(V)$ è aperto se e solo se $V' := \pi^{-1}(\pi(V)) \subset \mathbb{C}$ è aperto, ma

$$V' = \bigcup_{w \in \Gamma} (w + V) = \bigcup_{w \in \Gamma} \{w + v \colon v \in V\},$$

cioè V' si scrive come unione numerabile di aperti, cioè V' è aperto.

Definiamo ora una struttura complessa su $\mathbb{C}/\Gamma$.

Sia $V \subset \mathbb{C}$ un aperto tale che per ogni $z, z' \in V$ con $z \neq z'$ abbiamo $z - z' \notin \Gamma$. Posto $U := \pi(V)$ mostriamo che $\pi|V \colon V \to U$ è un omeomorfismo. Sappiamo che $\pi|V$ è continua, aperta e ovviamente suriettiva, quindi mostriamo che è iniettiva. Siano $z_1, z_2 \in V$ tali che $\pi(z_1) = \pi(z_2)$. Allora esistono $w_1, w_2 \in \Gamma$ tali che $z_1 + w_1 = z_2 + w_2$, cioè $z_1 - z_2 = w_1 - w_2 \in \Gamma$, quindi $z_1 = z_2$, cioè π è iniettiva e quindi è un omeomorfismo. La sua inversa $\varphi := \pi^{-1} \colon U \to V$ è una carta su $\mathbb{C}/\Gamma$. Definiamo $\mathcal{U}$ la famiglia di carte costruite in questo modo. Mostriamo che $\mathcal{U}$ è un atlante, cioè scelte $\varphi_1 \colon U_1 \to V_1$ e $\varphi_2 \colon U_2 \to V_2$ carte in $\mathcal{U}$, allora $\psi \colon \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2)$ tale che $\psi := \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ è una mappa biolomorfa.

Sia $z \in \varphi_1(U_1 \cap U_2)$. Allora

$$\pi(\psi(z)) = \pi(\varphi_2(\varphi_1^{-1}(z))) = \varphi_2^{-1}(\varphi_2(\varphi_1^{-1}(z))) = \varphi_1^{-1}(z) = \pi(z),$$

quindi $\psi(z) - z \in \Gamma$. Dato che ψ è continua e Γ è discreto, $\psi(z) - z$ è costante sulle componenti connesse di $\varphi_1(U_1 \cap U_2)$, e quindi ψ è olomorfa. Ripetendo questo discorso per ψ^{-1} otteniamo che ψ è un biolomorfismo, quindi $\mathcal{U}$ è un atlante complesso.

Osservazione. La proiezione $\pi \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Gamma$ è una applicazione olomorfa tra superfici di Riemann. Infatti se consideriamo le carte $\psi \colon U \to V$ su $\mathbb{C}/\Gamma$ e $id \colon V \to V$ su $\mathbb{C}$, allora π è olomorfa se e solo se è olomorfa $\psi \circ \pi \circ id = id$.

Osservazione. Sia $\Gamma = \mathbb{Z}v + \mathbb{Z}w$ reticolo su $\mathbb{C}$ e consideriamo il toro complesso $\mathbb{C}/\Gamma$. Siano $V := <v>$ e $W := <w>$ gli $\mathbb{R}$-spazi vettoriali generati rispettivamente da v e w visti come vettori di $\mathbb{R}^2$. Se $\simeq$ è il simbolo che indica omeomorfismo tra due spazi topologici, allora

$$\mathbb{C}/\Gamma \simeq \frac{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}{\mathbb{Z}v+\mathbb{Z}w} \simeq \frac{V\times W}{\mathbb{Z}v+\mathbb{Z}w} \simeq \frac{V}{\mathbb{Z}v}\times\frac{W}{\mathbb{Z}w} \simeq \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}}\times\frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1.$$

Abbiamo mostrato che ogni toro complesso è omeomorfo al toro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Diversamente, dal punto di vista olomorfo esistono infiniti tori complessi, poiché, in generale, dati due reticoli Γ_1, Γ_2 su $\mathbb{C}$ non esiste un biolomorfismo $\alpha \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tale che $\alpha(\Gamma_1) = \Gamma_2$ e quindi non esiste biolomorfismo tra $\mathbb{C}/\Gamma_1$ e $\mathbb{C}/\Gamma_2$.

Per dimostrare questa affermazione osserviamo che se α è un biolomorfismo allora per ogni $z \in \mathbb{C}$ abbiamo $\alpha(z) = cz$ con $c \in \mathbb{C}$, cioè α è una mappa conforme essendo una roto-omotetia. Tutto ciò si può trovare su [1]. Ne segue che se per ogni reticolo Γ poniamo $\delta(\Gamma) := \{w_1/w_2 \colon w_1, w_2 \in \Gamma \setminus \{0\}\}$ allora presi due reticoli Γ_1 e Γ_2 se esiste $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tale che $\Gamma_2 = \alpha(\Gamma_1)$ allora necessariamente $\delta(\Gamma_1) = \delta(\Gamma_2)$. Preso quindi un arbitrario reticolo Γ_1, osservando che $\delta(\Gamma_1)$ è numerabile, possiamo scegliere $w \in \mathbb{C} \setminus (\delta(\Gamma_1) \cup \mathbb{R})$ e quindi concludere che il reticolo Γ_1 e $\Gamma_2 := \mathbb{Z} + w\mathbb{Z}$ non sono isomorfi.

1.2 Proprietà elementari

In questa sezione introdurremo alcune proprietà fondamentali delle superfici di Riemann e di funzioni olomorfe tra superfici di Riemann.

Innanzitutto estendiamo la definizione 1.3 di funzione olomorfa.

Definizione 1.5. Siano X, Y superfici di Riemann e sia $f\colon X \to Y$ mappa continua. Diciamo che f è olomorfa se per ogni coppia di carte $\psi_1\colon U_1 \to V_1$ su X e $\psi_2\colon U_2 \to V_2$ su Y con $f(U_1) \subset U_2$, la mappa $\psi_2 \circ f \circ \psi_1^{-1}\colon V_1 \to V_2$ è olomorfa su $\mathbb{C}$.

Una mappa $f\colon X \to Y$ è detta *biolomorfismo* se è olomorfa, biunivoca e se f^{-1} è olomorfa. In tal caso X e Y si dicono *biolomorfe* e si indica $X \cong Y$.

Teorema 1.6 (**Teorema d'Identità**)**.** *Siano X e Y superfici di Riemann e siano $f_1, f_2\colon X \to Y$ due mappe olomorfe tali che $f_1|A = f_2|A$, dove A è un aperto di X non vuoto. Allora $f_1 \equiv f_2$.*

Dimostrazione. Sia G l'insieme dei punti $x \in X$ tali che esiste $W \subset X$ intorno aperto di x tale che $f_1|W = f_2|W$. Mostriamo che G è una componente connessa di X, cioè che G è sia aperto che chiuso. Per definizione G è aperto. Per mostrare che G è chiuso mostriamo che $\overline{G} = G$.

Supponiamo che la frontiera di G, indicata con ∂G, sia l'insieme vuoto. Allora sappiamo che $\mathring{G} \subset G \subset \overline{G}$ e che $\overline{G} = \mathring{G} \cup \partial G = \mathring{G}$, perché abbiamo supposto $\partial G = \emptyset$. Allora $\mathring{G} = G = \overline{G}$, cioè G è chiuso e quindi è una componente connessa di X.

Supponiamo quindi che $\partial G \neq \emptyset$ e consideriamo $b \in \partial G$. Osserviamo che $f_1(b) = f_2(b)$, per continuità di f_1 e f_2. Siano le carte $\varphi\colon U \to V$ su X e $\psi\colon U' \to V'$ su Y tali che $b \in U$, U è connesso e $f_i(U) \subset U'$ con $i = 1, 2$. Le mappe $g_i := \psi \circ f_i \circ \varphi^{-1}\colon V \to V' \subset \mathbb{C}$ sono olomorfe su $\mathbb{C}$ per definizione di funzione olomorfa su superfici di Riemann. Su $G \cap U$ abbiamo che $f_1 = f_2$, quindi $g_1 = g_2$. Dato che U è un intorno aperto di $b \in \partial G$, allora $G \cap U$ è un aperto non vuoto di X, quindi per il Teorema d'Identità su $\mathbb{C}$, [1], le funzioni g_1 e g_2 coincidono su tutto il loro dominio, quindi $f_1|U = f_2|U$. Quindi abbiamo mostrato che $b \in G$, cioè $\overline{G} = G$ e quindi G è chiuso. Poiché X è connessa allora $G = X$ oppure $G = \emptyset$, ma quest'ultimo caso è escluso dato che $A \subset G$, quindi $f_1 \equiv f_2$ su tutta X. $\square$

Teorema 1.7. *Siano X, Y superfici di Riemann e sia $f\colon X \to Y$ una mappa olomorfa non costante. Allora f è aperta.*

Dimostrazione. Siano $\varphi \colon U_1 \to V_1$ carta su X e $\psi \colon U_2 \to V_2$ carta su Y tali che $f(U_1) \subset U_2$. Possiamo supporre U_1 connesso, dato che X è connessa per definizione. Mostriamo che $f(U_1)$ è un aperto di Y.

Mostriamo innanzitutto che f non può essere costante su U_1. Supponiamo per assurdo che $f(x) \equiv y$ per ogni $x \in U_1$. Allora per 1.6 f sarebbe costante su X e questo è assurdo per ipotesi.

Osserviamo che $(f \circ \varphi^{-1})(V_1) = f(U_1)$, da cui $(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(V_1) = (\psi \circ f)(U_1)$. La funzione $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \colon V_1 \to V_2$ è un'applicazione olomorfa, non costante e definita su V_1 che è aperto e connesso, dato che φ è un omeomorfismo e U_1 è aperto e connesso. Allora, per il Teorema della mappa aperta su $\mathbb{C}$, [1], $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ è un'applicazione aperta, cioè $(\psi \circ f)(U_1)$ è aperto. Quindi $(\psi^{-1} \circ \psi \circ f)(U_1) = f(U_1)$ è un aperto, cioè f è aperta. $\square$

Richiamiamo ora un teorema di Analisi Complessa sul piano.

Proposizione 1.8. *Sia $D \subset \mathbb{C}$ aperto e connesso e sia $f \colon D \to \mathbb{C}$ mappa olomorfa e iniettiva. Allora $f'(z) \neq 0$ per ogni $z \in D$.*

Dimostrazione. Sia $z_0 \in D$ e sia $\varepsilon > 0$ tale che $\Delta(z_0) := \{z \in D \colon |z - z_0| < \varepsilon\} \subset\subset D$. Mostriamo che $f'(z_0) \neq 0$ facendo vedere che f ha uno zero semplice in z_0.

Poniamo $S := \partial\Delta(z_0)$ e $w_0 := f(z_0)$. Osserviamo che $w_0 \notin f(S)$, dato che f è iniettiva e $z_0 \notin S$. Sia $\delta > 0$ tale che $\Delta(w_0) := \{w \in f(D) \colon |w - w_0| < \delta\} \subset\subset f(\Delta(z_0))$. Allora $\Delta(w_0) \cap f(S) = \emptyset$, quindi è ben definita la funzione $g \colon \Delta(w_0) \to \mathbb{Z}$ tale che

$$g(w) := \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{f'(z)}{f(z) - w} dz.$$

Per il Principio dell'Argomento, [1], $g(w) = N_w - M$, dove N_w è il numero di zeri di $f - w$ contati con molteplicità e M è il numero di poli di f contati con molteplicità in $\Delta(z_0)$. Sappiamo che f non ha poli in quanto olomorfa, quindi $M = 0$, cioè $g(w) = N_w$. Mostriamo che $g(w_0) = 1$.

Osserviamo che $f' \not\equiv 0$ su $\Delta(z_0)$ dato che f è iniettiva, quindi f' ha tutti gli zeri isolati. Da questo segue che esiste $z_1 \in \Delta(z_0)$ tale che $f'(z_1) \neq 0$. Se poniamo $w_1 := f(z_1)$ abbiamo che lo sviluppo in serie di Laurent di f in z_1 è

$$f(z) - w_1 = f'(z_1)(z - z_1) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_1)}{n!}(z - z_1)^n.$$

Dato che $f'(z_1) \neq 0$ allora $f - w_1$ ha uno zero semplice in z_1, quindi $g(w_1) = N_{w_1} = 1$. Ora, g è una funzione continua a valori in $\mathbb{Z}$, quindi è costante sulle componenti connesse, ma $\Delta(w_0)$ è connesso, quindi $g \equiv 1$. Ma allora $g(w_0) = 1$, cioè f ha uno zero semplice in z_0 e quindi $f'(z_0) \neq 0$. □

Teorema 1.9. *Siano X, Y superfici di Riemann e sia $f\colon X \to Y$ una mappa olomorfa iniettiva. Allora f è un biolomorfismo tra X e $f(X)$.*

Dimostrazione. Osserviamo che $f\colon X \to f(X)$ è una mappa biunivoca, continua e aperta per 1.7, quindi è un omeomorfismo e quindi esiste $f^{-1}\colon f(X) \to X$ continua. Mostriamo che f^{-1} è olomorfa.

Siano $\varphi\colon U_1 \to V_1$ carta su X e $\psi\colon U_2 \to V_2$ carta su Y e supponiamo che U_1 sia aperto e connesso. La mappa $F := \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ è olomorfa, iniettiva e definita su V_1 che è un aperto e connesso di $\mathbb{C}$, quindi per 1.8 $F' \neq 0$ su V_1. Sappiamo che ogni applicazione olomorfa, iniettiva e con derivata diversa da zero è localmente invertibile con inversa olomorfa [1]. Ciò implica che $F^{-1} = \varphi \circ f^{-1} \circ \psi^{-1}$ è olomorfa, ma quindi f^{-1} è olomorfa. Quindi f è un biolomorfismo tra X e $f(X)$. □

Teorema 1.10. *Siano X, Y superfici di Riemann e supponiamo X compatta. Sia $f\colon X \to Y$ una mappa olomorfa e non costante. Allora Y è compatta e f è suriettiva.*

Dimostrazione. Per 1.7 $f(X)$ è aperto. Inoltre X è compatta e f è continua, quindi $f(X)$ è chiuso, cioè $f(X)$ è una componente connessa di Y. Dato che Y è connessa allora $f(X) = Y$ o $f(X) = \emptyset$, quindi $f(X) = Y$, i.e. f è suriettiva e Y è compatta. □

1.3 Forme differenziali su superfici di Riemann

In questa sezione studieremo le forme differenziali e olomorfe su superfici di Riemann. Ci limiteremo a osservare alcune proprietà elementari, per poi passare a studiare l'integrazione di tali forme su curve e superfici.

Non daremo le definizioni formali di 1-forma e di 2-forma; tutte le definizioni mancanti si possono trovare su [2].

Definizione 1.11. Sia X superficie di Riemann, $Y \subset X$ aperto di X. Una 1-forma ω su Y è detta *differenziale*, rispettivamente *olomorfa*, se, rispetto ad una carta (U, z) su X, ω si può rappresentare come $\omega = fdz + gd\bar{z}$, con $f, g \in \mathscr{E}(U \cap Y)$, rispettivamente $\omega = fdz$, con $f \in \mathcal{O}(U \cap Y)$.

Denoteremo con $\mathscr{E}^{(1)}(Y)$ l'insieme delle 1-forme differenziali su Y e con $\Omega(Y)$ l'insieme delle 1-forme olomorfe su Y. Denoteremo anche con $\mathscr{E}^{1,0}(Y)$, rispettivamente con $\mathscr{E}^{0,1}(Y)$, l'insieme delle $\omega \in \mathscr{E}^{(1)}(Y)$ che su ogni carta (U, z) si scrivono come $\omega = fdz$, rispettivamente $\omega = fd\bar{z}$, con $f \in \mathscr{E}(U \cap Y)$.

Definizione 1.12. Sia X superficie di Riemann e sia $Y \subset X$ aperto. Una 2-forma ω su Y è detta *differenziale* se rispetto ad una carta (U, z) su X, ω si può rappresentare come $\omega = fdz \wedge d\bar{z}$, con $f \in \mathscr{E}(U \cap Y)$ e $\wedge$ il prodotto esterno (o prodotto wedge).

Denoteremo con $\mathscr{E}^{(2)}(Y)$ l'insieme delle 2-forme differenziali su Y.

Osservazione. Ricordiamo che poiché $\wedge$ è un prodotto wedge allora $dz \wedge dz = 0$, $d\bar{z} \wedge d\bar{z} = 0$ e $dz \wedge d\bar{z} = -d\bar{z} \wedge dz$.

Se X è una superficie di Riemann e (U, z) è una carta su X, allora possiamo scrivere $z = x + iy$. Abbiamo

$$dz \wedge d\bar{z} = d(x + iy) \wedge d(x - iy) = -idx \wedge dy - idx \wedge dy = -2idx \wedge dy,$$

cioè $dz \wedge d\bar{z} = -2idx \wedge dy$.

Definizione 1.13. Sia X superficie di Riemann e sia $f \in \mathscr{E}(X)$. Su ogni carta (U, z) su X definiamo la 1-forma differenziale detta *differenziale di f*

ponendo
$$df := \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}.$$
Denotiamo
$$\bar{\partial} f := \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z} \in \mathscr{E}^{0,1}(X).$$

Siano ora una carta (U, z) su X e $\omega \in \mathscr{E}^{(1)}(X)$. Allora su U abbiamo $\omega = gdz + hd\bar{z}$ con $g, h \in \mathscr{E}(U)$. Possiamo definire la 2-forma differenziale detta *differenziale di* ω ponendo
$$d\omega := \left(\frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial \bar{z}}\right) dz \wedge d\bar{z}.$$

Osservazione. Nel seguito, per semplificare le notazioni confonderemo sempre la coordinata locale z su una superficie di Riemann con la variabile z su $\mathbb{C}$.

Proposizione 1.14. *Sia X superficie di Riemann, $Y \subset X$ aperto di X. Siano $f \in \mathscr{E}(Y)$, $\omega \in \mathscr{E}^{(1)}(Y)$. Allora $d(f\omega) = df \wedge \omega + fd\omega$.*

Dimostrazione. Siano (U, z) carta su X e $\omega|(U \cap Y) = g_1dz + g_2d\bar{z}$, con $g_1, g_2 \in \mathscr{E}(U \cap Y)$. Osserviamo che
$$d\omega = \left(\frac{\partial g_2}{\partial z} - \frac{\partial g_1}{\partial \bar{z}}\right) dz \wedge d\bar{z}.$$
Osserviamo inoltre che
$$df \wedge \omega = \left(\frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}\right) \wedge (g_1dz + g_2d\bar{z}) = \frac{\partial f}{\partial z}g_2dz \wedge d\bar{z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}g_1d\bar{z} \wedge dz.$$
Quindi abbiamo
$$\begin{aligned} d(f\omega) &= d(fg_1dz) + d(fg_2d\bar{z}) \\ &= \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}g_1d\bar{z} \wedge dz + \frac{\partial f}{\partial z}g_2dz \wedge d\bar{z} + f\left(\frac{\partial g_2}{\partial z} - \frac{\partial g_1}{\partial \bar{z}}dz \wedge d\bar{z}\right) \\ &= df \wedge \omega + fd\omega. \end{aligned}$$
□

Mostriamo un teorema di caratterizzazione delle 1-forme olomorfe che ci sarà utile più avanti.

Teorema 1.15. *Sia X superficie di Riemann e consideriamo una famiglia di carte $\mathcal{U} = \{(U_i, z_i)\}_{i\in I}$ tali che $\bigcup_{i\in I} U_i = X$. Per ogni $i \in I$ sia $f_i \in \mathcal{O}(U_i)$. Allora per ogni $i, j \in I$, su $U_i \cap U_j$ vale*

$$f_i = f_j \frac{\partial z_j}{\partial z_i} \tag{1.1}$$

se e solo se esiste $\omega \in \Omega(X)$ tale che $\omega|U_i = f_i dz_i$.

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che z_i e z_j sono biolomorfismi per ogni $i, j \in I$, cioè $\bar{\partial} z_i = 0$ e $\bar{\partial} z_j = 0$. Allora

$$dz_i = \frac{\partial z_i}{\partial z_j} dz_j + \frac{\partial z_i}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j = \frac{\partial z_i}{\partial z_j} dz_j$$

e

$$dz_j = \frac{\partial z_j}{\partial z_i} dz_i + \frac{\partial z_j}{\partial \bar{z}_i} d\bar{z}_i = \frac{\partial z_j}{\partial z_i} dz_i.$$

Supponiamo ora che valga la formula (1.1). Su ogni U_i poniamo $\omega = f_i dz_i$; è ovviamente olomorfa, ma dobbiamo mostrare che è ben definita.

Se $i, j \in I$, su $U_i \cap U_j$ abbiamo

$$f_i dz_i = f_j \frac{\partial z_j}{\partial z_i} dz_i = f_j dz_j,$$

cioè ω è ben definita e olomorfa.

Viceversa, sia $\omega \in \Omega(X)$ tale che $\omega|U_i = f_i dz_i$. Su $U_i \cap U_j$ abbiamo

$$f_j dz_j = f_i dz_i = f_i \frac{\partial z_i}{\partial z_j} dz_j,$$

cioè vale la formula (1.1). □

Definizione 1.16. Siano X superficie di Riemann e $Y \subset X$ aperto. Una 1-forma differenziale ω è detta *chiusa* se $d\omega = 0$, *esatta* se esiste una primitiva di ω, i.e. se esiste una funzione $f \in \mathscr{E}(Y)$ tale che $\omega = df$.

Osservazione. Osserviamo che se ω è una 1-forma esatta allora è anche chiusa. Infatti, se f è una funzione differenziabile tale che $df = \omega$, allora

$$d(df) = d\left(\frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}\right) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}}\right) dz \wedge d\bar{z} = 0.$$

Teorema 1.17. *Siano X superficie di Riemann, $Y \subset X$ un aperto di X e $\omega \in \mathscr{E}^{1,0}(Y)$. Allora ω è chiusa se e solo se è olomorfa.*

Dimostrazione. Se (U, z) carta su X, allora su U abbiamo $\omega = f dz$ con $f \in \mathscr{E}(U \cap Y)$. Abbiamo che

$$d\omega = df \wedge dz = \left(\frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}\right) \wedge dz = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}dz \wedge d\bar{z}.$$

Quindi abbiamo $d\omega = 0$ se e solo se $f \in \mathcal{O}(U \cap Y)$. □

Definizione 1.18. Sia $F\colon X \to Y$ una mappa olomorfa tra superfici di Riemann. Allora per ogni $U \subset Y$ aperto, F induce un'applicazione, detta *Pull-Back*, definita come $F^*\colon \mathscr{E}(U) \to \mathscr{E}(F^{-1}(U))$ tale che $F^*(f) := f \circ F$.

Il Pull-Back si può generalizzare alle 1-forme e alle 2-forme differenziali.

Consideriamo una carta (U, z) su Y e sia F definita come prima. Chiameremo Pull-Back la funzione $F^*\colon \mathscr{E}^{(j)}(U) \to \mathscr{E}^{(j)}(F^{-1}(U))$, con $j = 1$, rispettivamente $j = 2$, definita ponendo

$$F^*(f dz + g d\bar{z}) := (F^* f)d(F^* z) + (F^* g)d(F^* \bar{z}) = (f \circ F)d(F) + (g \circ F)d(\bar{F}),$$

rispettivamente

$$F^*(f dz \wedge d\bar{z}) := (F^* f)d(F^* z) \wedge d(F^* \bar{z}) = (f \circ F)d(F) \wedge d(\bar{F}).$$

Proposizione 1.19. *Siano X, Y, Z superfici di Riemann, $F\colon X \to Y$ e $G\colon Y \to Z$ mappe olomorfe. Allora $(G \circ F)^* = F^* \circ G^*$.*

Proposizione 1.20. *Sia X superficie di Riemann e sia (U, z) carta su X. Siano $f \in \mathscr{E}(U)$ e $F\colon V \to U$ mappa biolomorfa con $V \subset \mathbb{C}$. Allora $F^*(df) = d(F^* f)$.*

Dimostrazione. Osserviamo che F è un biolomorfismo, quindi $\partial/\partial\bar{z}F, \partial/\partial z\bar{F} = 0$. Allora

$$\begin{aligned}
F^*(df) &= F^*\left(\frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}\right) \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial z}\circ F\right)dF + \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\circ F\right)d\bar{F} \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial z}\circ F\right)\frac{\partial F}{\partial z}dz + \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\circ F\right)\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}d\bar{z} \\
&= \frac{\partial}{\partial z}(f\circ F)dz + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(f\circ F)d\bar{z} = d(f\circ F) = d(F^* f).
\end{aligned}$$

□

Mostriamo il Teorema di esistenza locale di primitive su superfici di Riemann sfruttando il Teorema analogo su $\mathbb{C}$. La dimostrazione di quest'ultimo si può trovare su [1].

Teorema 1.21. *Sia $U \subset \mathbb{C}$ aperto e semplicemente connesso e sia $\omega \in \mathscr{E}^{(1)}(U)$. Allora esiste una primitiva di ω su U.*

Teorema 1.22. *Siano X superficie di Riemann e $\varphi\colon U \to V$ carta su X con U semplicemente connesso. Sia $\omega \in \mathscr{E}^{(1)}(U)$ chiusa. Allora ω è esatta, i.e. esiste $f \in \mathscr{E}(U)$ tale che $\omega = df$.*

Dimostrazione. Dato che φ è un omeomorfismo allora V è semplicemente connesso, quindi per 1.21 la forma $(\varphi^{-1})^*\omega$ è esatta su V, cioè esiste $F \in \mathscr{E}(V)$ tale che $dF = (\varphi^{-1})^*\omega$. Per 1.19 e per 1.20 abbiamo

$$d(\varphi^* F) = \varphi^*(dF) = \varphi^*((\varphi^{-1})^*\omega) = (\varphi^{-1}\circ\varphi)^*\omega = \omega,$$

cioè $\varphi^* F$ è una primitiva di ω che quindi è esatta. □

Integrazione di forme differenziali

Definizione 1.23. Siano X superficie di Riemann e $\omega \in \mathscr{E}^{(1)}(X)$. Consideriamo un cammino su X $\gamma\colon [0,1] \to X$. Vogliamo definire $\int_\gamma \omega$.

Scegliamo una partizione $0 = t_0 < ... < t_n = 1$ di $[0, 1]$ e per ogni $j = 1, ..., n$ siano $(U_j, z_j = x_j + iy_j)$ carte su X tali che $\gamma([t_{j-1}, t_j]) \subset U_j$ e tali che le funzioni $(x_j \circ \gamma|[t_{j-1}, t_j])$ e $(y_j \circ \gamma|[t_{j-1}, t_j])$ siano differenziabili.

Se su U_j abbiamo $\omega = f_j dx_j + g_j dy_j$ con $f_j, g_j \in \mathscr{E}(U_j)$ per ogni j, allora definiamo

$$\int_\gamma \omega := \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left(f_j(\gamma(t)) \frac{dx_j(\gamma(t))}{dt} + g_j(\gamma(t)) \frac{dy_j(\gamma(t))}{dt} \right) dt.$$

Si può verificare facilmente che tale definizione è indipendente dalla scelta delle carte.

Teorema 1.24. *Sia X superficie di Riemann e sia $\gamma \colon [0, 1] \to X$ cammino su X. Se $F \in \mathscr{E}(X)$, allora*

$$\int_\gamma dF = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)).$$

Dimostrazione. Scegliamo una partizione $0 = t_0 < ... < t_n = 1$ di $[0, 1]$ e delle carte $(U_1, z_1), ..., (U_n, z_n)$ in modo analogo alla definizione appena data. Su U_j abbiamo

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x_j} dx_j + \frac{\partial F}{\partial y_j} dy_j.$$

Allora

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \omega &= \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left(\frac{\partial F}{\partial x_j}(\gamma(t)) \frac{dx_j(\gamma(t))}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y_j}(\gamma(t)) \frac{dy_j(\gamma(t))}{dt} \right) dt \\
&= \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left(\frac{d}{dt} F(\gamma(t)) dt \right) = \sum_{j=1}^{n} (F(\gamma(t_j)) - F(\gamma(t_{j-1}))) \\
&= F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)).
\end{aligned}$$

$\square$

Definizione 1.25. Sia X superficie di Riemann e sia $\omega \in \mathscr{E}^{(1)}(X)$. Chiamiamo *supporto di* ω, e lo indichiamo con $\mathrm{Supp}(\omega)$, la chiusura dell'insieme dei punti $a \in X$ tale che per ogni (U, z) carta su X con $a \in X$ abbiamo che $\omega = f dz + g d\bar{z}$ con $f \neq 0$ oppure $g \neq 0$.

Si definisce in modo analogo il supporto di una 2-forma differenziale.

Ora vogliamo definire l'integrazione di 2-forme a supporto compatto su superfici di Riemann. Per farlo definiamo innanzitutto l'integrazione di 2-forme su $\mathbb{C}$.

Definizione 1.26. Sia $U \subset \mathbb{C}$ aperto e sia $\omega \in \mathscr{E}^{(2)}(U)$ a supporto compatto in U. Su U abbiamo $\omega = f dx \wedge dy = -(2/i) f dz \wedge d\bar{z}$ con $f \in \mathscr{E}(U)$. Definiamo

$$\iint_U \omega := \iint_U f(x,y) dx dy,$$

dove il termine a destra dell'uguale è un integrale di Lebesgue su $\mathbb{C}$.

Osservazione. Siano $U, V \subset \mathbb{C}$ aperti e sia $\varphi\colon V \to U$ una mappa biolomorfa. Allora osserviamo che

$$\varphi^*(dz \wedge d\bar{z}) = d\varphi \wedge d\bar{\varphi} = (\varphi' dz) \wedge (\bar{\varphi}' d\bar{z}) = |\varphi'|^2 dz \wedge d\bar{z}$$

e anche

$$\varphi^*(dx \wedge dy) = |\varphi'|^2 dx \wedge dy.$$

Quindi se su U abbiamo $\omega = f dx \wedge dy \in \mathscr{E}^{(2)}(U)$, allora

$$\iint_U \omega = \iint_V \varphi^* \omega.$$

Definizione 1.27. Sia X superficie di Riemann e sia $\omega \in \mathscr{E}^{(2)}(X)$ a supporto compatto. Definiamo $\iint_X \omega$.

Consideriamo una carta $\varphi\colon U \to V$ su X e supponiamo inizialmente che il supporto di ω sia contenuto in U. Allora $(\varphi^{-1})^*\omega$ è una forma differenziale a supporto compatto in $V \subset \mathbb{C}$, quindi possiamo definire

$$\iint_X \omega := \iint_U \omega := \iint_V (\varphi^{-1})^* \omega.$$

Sia ora $\mathrm{Supp}(\omega)$ compatto su X. Allora esistono $\varphi_j\colon U_j \to V_j$, con $j = 1, ..., n$ tale che $\mathrm{Supp}(\omega) \subset \bigcup_{j=1}^n U_j$.

Consideriamo ora una *partizione dell'unità* rispetto a $U_1, ..., U_n$ (l'esistenza è su [2]), cioè funzioni $f_j \in \mathscr{E}(X)$ tali che $\mathrm{Supp}(f_j) \subset U_j$ e per ogni $x \in \mathrm{Supp}(\omega)$ abbiamo

$$\sum_{j=1}^n f_j(x) = 1.$$

Per ogni j poniamo $\omega_j := f_j\omega$. Abbiamo

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} f_j\omega = \sum_{j=1}^{n} \omega_j,$$

quindi, dato che $\mathrm{Supp}(\omega_j)$ è compatto e contenuto in U_j per ogni j, possiamo definire

$$\iint_X \omega := \sum_{j=1}^{n} \iint_X \omega_j = \sum_{j=1}^{n} \iint_{U_j} \omega_j = \sum_{j=1}^{n} \iint_{V_j} (\varphi_j^{-1})^*\omega_j,$$

dove $\varphi_j \colon U_j \to V_j$ è una carta su X per ogni j.

Osservazione. Si può verificare facilmente che tale definizione è ben posta, cioè che è indipendente dalla scelta delle carte φ_j.

Mostriamo un teorema molto importante, il quale afferma che ogni funzione meromorfa su una superficie di Riemann compatta ha lo stesso numero di zeri e di poli contati con molteplicità. Per farlo definiamo il residuo di una 1-forma differenziale e dimostriamo il Teorema dei Residui.

Definizione 1.28. Siano X superficie di Riemann, $Y \subset X$ aperto e $a \in Y$. Sia $\omega \in \Omega(Y \setminus \{a\})$ e consideriamo una carta (U, z) tale che $a \in U \subset Y$ e $z(a) = 0$. Sappiamo che su $U \setminus \{a\}$ abbiamo $\omega = f dz$ con $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{a\})$. Se

$$f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$$

è lo sviluppo in serie di Laurent di f in a, allora definiamo il *residuo di* ω come $\mathrm{Res}_a(\omega) := c_{-1}$.

Osservazione. Su [2] si può trovare la dimostrazione del fatto che il residuo di una 1-forma non dipenda dalla scelta della carta locale.

Richiamiamo ora l'enunciato del Teorema di Stokes, [5]. Ci sarà utile anche nell'ultimo capitolo.

Teorema 1.29 (**Teorema di Stokes**). *Sia X una 2-varietà, con ∂X frontiera di X. Allora per ogni 1-forma $\omega \in \mathscr{E}^{(1)}(X)$ a supporto compatto*

$$\iint_X d\omega = \int_{\partial X} \omega.$$

Lemma 1.30. *Siano X superficie di Riemann e $\omega \in \mathscr{E}^{(1)}(X)$ a supporto compatto. Allora*
$$\iint_X d\omega = 0.$$

Dimostrazione. Consideriamo $(U_1, z_1), ..., (U_n, z_n)$ carte su X e una partizione dell'unità rispetto a $(U_1, z_1), ..., (U_n, z_n)$ in modo da poter scrivere $\omega = \omega_1 + ... + \omega_n$ in modo analogo alla definizione di integrale di una 2-forma, con $\mathrm{Supp}(\omega_j)$ compatto e contenuto in U_j. Applicando 1.29 abbiamo
$$\iint_X d\omega = \sum_{j=1}^{n} \int_{U_j} d\omega_j = \sum_{j=1}^{n} \int_{\partial U_j} \omega_j = 0.$$
□

Teorema 1.31 (Teorema dei residui). *Sia X superficie di Riemann compatta e siano $a_1, ..., a_n \in X$. Se poniamo $X' := X \setminus \{a_1, ..., a_n\}$ allora per ogni $\omega \in \Omega(X')$ abbiamo*
$$\sum_{j=1}^{n} Res_{a_j}(\omega) = 0.$$

Dimostrazione. Siano $(U_1, z_1), ..., (U_n, z_n)$ carte disgiunte su X tali che $a_j \in U_j$ e $z_j(a_j) = 0$ per ogni $j = 1, ..., n$. Supponiamo che $z_j(U_j)$ sia il disco unitario. Per ogni j consideriamo degli intorni aperti U'_j di a_j tali che $U'_j \subset\subset U_j$. Scegliamo delle funzioni $f_j \in \mathscr{E}(X)$ a supporto compatto e contenuto in U_j tali che $f_j|U'_j \equiv 1$. Il fatto che tali funzioni esistano si può trovare su [3]. Poniamo ora $g := 1 - (f_1 + ... + f_n)$. Abbiamo che $g|U'_j \equiv 0$ per ogni j, quindi possiamo estendere $g\omega$ su tutto X ponendola zero su ogni a_j. Dato che X è compatta allora il supporto di $g\omega$ è compatto, quindi per 1.30
$$\iint_X d(g\omega) = 0.$$
Osserviamo che $d\omega = 0$ su X' in quanto ω è olomorfa su X', quindi dato che su $X' \cap U'_j$ abbiamo $f_j\omega = \omega$, allora $d(f_j\omega) = 0$. Di conseguenza possiamo estendere $d(f_j\omega)$ su tutto X ponendola zero su ogni a_j. Allora
$$0 = \iint_X d(g\omega) = \iint_X d\omega - \sum_{j=1}^{n} \iint_X d(f_j\omega) = -\sum_{j=1}^{n} \iint_X d(f_j\omega).$$

Per concludere mostriamo che

$$-\iint_X d(f_j\omega) = 2\pi i \mathrm{Res}_{a_j}(\omega).$$

Sia j fissato. Sappiamo che esistono $\varepsilon, R > 0$, tali che $\mathrm{Supp}(f_j) \subset A := \{x \in U_j \colon |z_j(x)| < R\}$ e $K := \{x \in U_j \colon |z_j(x)| \leq \varepsilon\} \subset U'_j$. Osserviamo che su K abbiamo $f_j|K \equiv 1$, quindi $d(f_j\omega) = d\omega = 0$. Allora per il Teorema dei Residui su $\mathbb{C}$, [1], e per 1.29 abbiamo

$$\begin{aligned} -\iint_X d(f_j\omega) &= -\iint_{A\setminus K} d(f_j\omega) \overset{*}{=} -\int_{\partial A} f_j\omega + \int_{\partial K} f_j\omega \\ &= \int_{\partial K} f_j\omega = 2\pi i \mathrm{Res}_{a_j}(\omega), \end{aligned}$$

dove il segno in $*$ è motivato dall'orientazione della corona circolare $A \setminus K$ su cui si sta integrando. □

Corollario 1.32. *Sia X superficie di Riemann compatta. Allora ogni mappa $f \in \mathcal{M}(X)$ ha lo stesso numero di poli e di zeri contati con molteplicità.*

Dimostrazione. Sia $f \in \mathcal{M}(X)$ e consideriamo la forma $\omega = df/f$. Ovviamente ω è olomorfa tranne che negli zeri e nei poli di f. Osserviamo che se $a \in X$ è uno zero di f di ordine m allora esiste una carta (U, z) con $a \in U$ e $z(a) = 0$ tale che su U abbiamo $f(z) = z^m g(z)$ con $g \in \mathcal{O}(U)$ e $g \neq 0$. Quindi abbiamo

$$\frac{df}{f} = \frac{mz^{m-1}g + z^m dg}{z^m g} = \frac{m}{z} + \frac{dg}{g},$$

cioè $\mathrm{Res}_a(\omega) = m$. Con conti analoghi si mostra che se a è un polo di f di ordine m allora $\mathrm{Res}_a(\omega) = -m$. La tesi segue da 1.31. □

Capitolo 2

Genere di una superficie di Riemann compatta

In questo capitolo definiremo il genere di una superficie di Riemann come la dimensione del $\mathbb{C}$-spazio vettoriale $\Omega(X)$. Dimostrare che tale definizione è ben posta non è scontato. Mostreremo quindi che ogni spazio normato localmente compatto ha dimensione finita sfruttando alcuni risultati di analisi funzionale, in particolare il Teorema di Hahn-Banach, e di topologia riguardo la locale compattezza di spazi di Hausdorff. Di conseguenza definiremo su $\Omega(X)$ una norma e mostreremo che è uno spazio normato localmente compatto. Fatte queste considerazioni seguirà facilmente che il genere è ben definito.

Notazione. Sia $(X, \|\cdot\|)$ un generico spazio normato. Denoteremo con $B \subset X$ la palla chiusa di raggio unitario centrata nell'origine, i.e. $B := \overline{B(0,1)} = \{x \in X \colon \|x\| \leq 1\}$.

2.1 Spazi normati di dimensione finita

Definizione 2.1. Uno spazio di Hausdorff X è detto *localmente compatto* se per ogni $x \in X$ esiste $K \subset X$ intorno di x compatto.

Osservazione. Ogni spazio normato è, in particolare, uno spazio metrico con la distanza indotta dalla norma, e sappiamo che ogni spazio metrico è uno spazio di Hausdorff. Da tale osservazione segue che la definizione 2.1 si estende agli spazi normati.

Enunciamo un teorema di caratterizzazione degli spazi normati localmente compatti.

Teorema 2.2. *Sia* $(X, \|\cdot\|)$ *spazio normato. Allora* X *è localmente compatto se e solo se* B *è compatta in* X*.*

Dimostrazione. Supponiamo X localmente compatto e sia $K \subset X$ intorno compatto dell'origine. Poiché K è intorno di 0 esiste un aperto $U \subset K$ tale che $0 \in U$, quindi sia $\varepsilon > 0$ tale che $B(0, \varepsilon) \subset U$. Dato che $\overline{B(0, \varepsilon)}$ è un chiuso contenuto in K che è compatto, allora $\overline{B(0, \varepsilon)}$ è compatta. La funzione $\varphi \colon B \to \overline{B(0, \varepsilon)}$ tale che $\varphi(x) := \varepsilon x$ è un omeomorfismo, ossia $B \simeq \overline{B(0, \varepsilon)}$, e quindi B è compatta.

Viceversa supponiamo che B sia compatta in X. Sia $x \in X$ e mostriamo che esiste un intorno di x compatto. Consideriamo $B(x, 1) = \{y \in X \colon \|y - x\| < 1\}$ intorno di x. Poiché la traslazione $\tau \colon B \to \overline{B(x, 1)}$ con $\tau(y) := x + y$ è un omeomorfismo, allora $B \simeq \overline{B(x, 1)}$ e quindi, poiché B è compatta per ipotesi, $\overline{B(x, 1)}$ è compatto, e quindi X è localmente compatto. □

Richiamiamo, senza dimostrazione, il Teorema di Hahn-Banach in una sua particolare versione. Lo useremo nel teorema successivo, che è un teorema di caratterizzazzione degli spazi normati di dimensione finita. La dimostrazione si trova su [3].

Teorema 2.3 (Teorema di Hahn-Banach). *Sia* X *spazio normato,* $V \subset X$ *sottospazio vettoriale. Sia* $x \in X$ *tale che* $x \notin \overline{V}$*. Allora esiste* $f \in X^*$ *tale che* $f(y) = 0$ *per ogni* $y \in V$ *e* $f(x) = 1$*.*

Lemma 2.4. *Sia* V *spazio vettoriale e siano* $H_1, ..., H_n$ *iperpiani di* V*. Se* $H_1 \cap ... \cap H_n = \{0\}$ *allora dim* $V \leq n$*.*

Dimostrazione. Osserviamo che ogni H_i può essere visto come il nucleo di un funzionale, cioè esistono $f_1, ..., f_n \in V^*$ tali che $\ker f_i = H_i$ per ogni $i = 1, ..., n$. Definiamo $F\colon V \to \mathbb{C}^n$ ponendo $F(v) := (f_1(v), ..., f_n(v))$ per ogni $v \in V$. Banalmente F è un applicazione lineare e $\ker F = \ker f_1 \cap ... \cap \ker f_n = H_1 \cap ... \cap H_n = \{0\}$, cioè F è iniettiva. Dunque l'immagine di F è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{C}^n$ isomorfo a V, quindi $\dim V = \dim\,(\mathrm{Im} f) \leq n$. □

Teorema 2.5. *Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato. Allora X è localmente compatto se e solo se ha dimensione finita.*

Dimostrazione. Se X ha dimensione finita allora sappiamo già che X è localmente compatto, [3].

Viceversa, supponiamo che X sia localmente compatto. Poniamo $S^1 := \{x \in X\colon \|x\|= 1\}$ e sia $\mathcal{H}$ la famiglia di tutti gli iperpiani chiusi di X. Mostriamo che esistono $H_1, ..., H_n \in \mathcal{H}$ tali che $H_1 \cap ... \cap H_n = \{0\}$.

Mostriamo innanzitutto che $\bigcap_{H\in\mathcal{H}} H = \{0\}$. Supponiamo per assurdo che esista $x \in \bigcap_{H\in\mathcal{H}} H$ con $x \neq 0$. Ogni $H \in \mathcal{H}$ può essere visto come il nucleo di un funzionale, quindi abbiamo che $f(x) = 0$ per ogni $f \in X^*$. Sia dunque V un sottospazio chiuso di X tale che $x \notin V$. Per 2.3 esiste $f \in X^*$ tale che $f(x) = 1 \neq 0$, quindi abbiamo $\bigcap_{H\in\mathcal{H}} H = \{0\}$.

Quindi $\mathcal{H}^1 := \{H \cap S^1\colon H \in \mathcal{H}\}$ è una famiglia di chiusi di S^1 tali che $\bigcap_{H\in\mathcal{H}^1} H = \emptyset$. Consideriamo S^1 come spazio topologico. Allora abbiamo che

$$S^1 = \emptyset^C = \left(\bigcap_{H\in\mathcal{H}^1} H\right)^C = \bigcup_{H\in\mathcal{H}^1} H^C,$$

dove H^C è un aperto di S^1. Quindi $\mathcal{A} := \{A = H^C\colon H \in \mathcal{H}\}$ è un ricoprimento aperto di S^1.

Per ipotesi X è localmente compatto, dunque per 2.2 abbiamo che B è compatta in X. Dato che $S^1 \subset B$ è un chiuso contenuto in un compatto allora S^1 è compatto. Di conseguenza esistono $A_1, ..., A_n \in \mathcal{A}$ tali che $A_1 \cup ... \cup A_n = S^1$, cioè esistono $H_1, ..., H_n \in \mathcal{H}$ tali che $H_1 \cap ... \cap H_n \cap S^1 = \emptyset$. Mostriamo che $H_1 \cap ... \cap H_n = \{0\}$.

Supponiamo per assurdo che esista $x \in H_1 \cap ... \cap H_n$ con $x \neq 0$. Osserviamo che $<x> \subset H_1 \cap ... \cap H_n$. Allora, dato che $x/\|x\| \in S^1$, abbiamo che $x/\|x\| \in H_1 \cap ... \cap H_n \cap S^1$ e questo è assurdo.

Quindi $H_1 \cap ... \cap H_n = \{0\}$. Per 2.4 abbiamo che $\dim X \leq n$, cioè X ha dimensione finita.

□

2.2 Norma sullo spazio delle 1-forme olomorfe

Lemma 2.6. *Sia X superficie di Riemann compatta. Allora esiste una famiglia di quaterne $\mathcal{U} = \{(U_i, V_i, W_i, z_i)\}_{i=1,...,n}$ tale che*

1. *per ogni $i = 1, ..., n$ (U_i, z_i) è una carta locale;*
2. *per ogni $i = 1, ..., n$ $\overline{V_i} \subset U_i$ compatto in U_i e $\overline{W_i} \subset V_i$ compatto in V_i;*
3. *$X = \bigcup_{i=1}^n W_i$.*

Dimostrazione. Siano $(U_1, z_1), ..., (U_n, z_n)$ carte su X tali che $\bigcup_{i=1}^n U_i = X$. Tali carte esistono, dato che X è compatta. Possiamo identificare $z_i(U_i)$ con il disco unitario Δ. Denotando con $\Delta(r) := \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < r\}$ allora

$$\Delta = \bigcup_{0<r<1} \Delta(r),$$

e quindi per ogni $i = 1, ..., n$

$$U_i = \bigcup_{0<r<1} z_i^{-1}(\Delta(r)).$$

Allora

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{0<r<1} z_i^{-1}(\Delta(r)); \tag{2.1}$$

poiché X è compatta e (2.1) è un ricoprimento aperto di X, esistono $0 < r_1, ..., r_n < 1$ tali che

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} z_i^{-1}(\Delta(r_i)) \subset \bigcup_{i=1}^{n} z_i^{-1}(\Delta(r))$$

dove $r := \max\{r_1, ..., r_n\}$.

Poniamo $W_i := z_i^{-1}(\mathit{\Delta}(r))$ e $V_i := z_i^{-1}(\mathit{\Delta}((r+1)/2))$ e verifichiamo che le condizioni siano soddisfatte. Le condizioni *1.* e *3.* sono soddisfatte banalmente. La *2.* segue dal fatto che $\overline{\mathit{\Delta}(r)}$ è compatto in $(\mathit{\Delta}((r+1)/2))$, $(\overline{\mathit{\Delta}((r+1)/2))}$ è compatto in $\mathit{\Delta}$ e che z_i è continua per ogni i. □

Definizione 2.7. Sia X superficie di Riemann compatta e consideriamo una famiglia di quaterne che soddisfa le proprietà di 2.6

$$\mathcal{U} = \{(U_i, V_i, W_i, z_i)\}_{i=1,...,n}.$$

Data $\omega \in \Omega(X)$, su (U_i, z_i) possiamo scrivere $\omega = f_i dz_i$ con $f_i \in \mathcal{O}(U_i)$ per ogni i. Definiamo

$$\varphi\colon \Omega(X) \to \mathcal{O}(U_i) \times ... \times \mathcal{O}(U_n) \text{ ponendo } \varphi(\omega) := (f_1, ..., f_n). \tag{2.2}$$

Banalmente φ è lineare. Inoltre φ è iniettiva, infatti se $f_i = 0$ per ogni i, allora $\omega \equiv 0$ su X, cioè $\ker\varphi = 0$, quindi φ è iniettiva.

Definiamo

$$\|\omega\|_{\mathcal{U}} := \max_{i\in\{1,...,n\}} \{\sup_{x\in V_i} |f_i(x)|\}.$$

Proposizione 2.8. *Sia X superficie di Riemann compatta. Allora* $(\Omega(X), \|\cdot\|_{\mathcal{U}})$ *è uno spazio normato, con $\|\cdot\|_{\mathcal{U}}$ definita in 2.7.*

Dimostrazione. Denotiamo con $\|\cdot\| := \|\cdot\|_{\mathcal{U}}$ per semplicità e mostriamo che $\|\cdot\|$ è una norma in $\Omega(X)$.

Innanzitutto mostriamo che $\|\cdot\|$ è ben definita. Sia $\omega \in \Omega(X)$; allora per ogni $i = 1, ..., n$ le funzioni f_i sono, in particolare, continue su U_i, ma $\overline{V_i}$ è compatto in U_i per 2.6, e quindi

$$\sup_{x\in V_i} |f_i(x)| < +\infty,$$

cioè $\|\cdot\|$ è ben definita.

Sia ora $\|\omega\| = 0$. Allora per ogni $i = 1, ..., n$

$$\sup_{x\in V_i} |f_i(x)| = 0,$$

cioè $f_i \equiv 0$ su V_i e quindi per il Teorema d'Identità, $f_i \equiv 0$ su U_i, cioè $\omega \equiv 0$ su X.

Sia $\lambda \in \mathbb{C}$. Allora

$$\sup_{x \in V_i} |\lambda f_i(x)| = |\lambda| \sup_{x \in V_i} |f_i(x)|,$$

cioè $\|\lambda\omega\| = |\lambda| \|\omega\|$.

Siano $\omega_1, \omega_2 \in \Omega(X)$. Allora $\|\omega_1 + \omega_2\| \leq \|\omega_1\| + \|\omega_2\|$ per la disuguaglianza triangolare applicata alle singole componenti. □

2.3 Definizione di genere

In quest'ultima sezione del capitolo mostriamo che $(\Omega(X), \|\cdot\|_{\mathcal{U}})$ è uno spazio di dimensione finita, così da poter definire il genere di una superficie di Riemann compatta.

Richiamiamo il teorema di Montel, [1], applicato alle superfici di Riemann.

Teorema 2.9 (**Teorema di Montel**). *Sia X superficie di Riemann, $U \subset X$ un aperto e connesso di X. Sia $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{O}(U)$ successione di funzioni olomorfe equilimitate, i.e. esiste un $M > 0$ tale che $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\forall x \in U$ $|f_n(x)| \leq M$. Allora esiste una sottosuccessione $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ convergente a una funzione olomorfa f uniformemente sui compatti di U.*

Teorema 2.10. *Sia X superficie di Riemann compatta. Allora $\Omega(X)$ è un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale di dimensione finita.*

Dimostrazione. Consideriamo una famiglia di quaterne

$$\mathcal{U} = \{(U_i, V_i, W_i, z_i)\}_{i=1,\dots,m}$$

che soddisfa le proprietà di 2.6. Per dimostrare che $\Omega(X)$ ha dimensione finita mostriamo che $\Omega(X)$ è uno spazio localmente compatto. Per provarlo, facciamo vedere innanzitutto che B è compatta in $(\Omega(X), \|\cdot\|_{\mathcal{U}})$.

Sia $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ successione in $\Omega(X)$ tale che $\|\omega_n\|_{\mathcal{U}} \leq 1$ per ogni n, cioè $\omega_n \in B$ per ogni n. Mostriamo che esiste una sottosuccessione convergente a un elemento di B.

Osserviamo che ogni ω_n della successione viene mappato attraverso l'applicazione φ di (2.2) in un vettore $(f_{1_n}, ..., f_{m_n}) \in \Omega(U_1) \times ... \times \Omega(U_m)$, dove $f_{i_n} \in \mathcal{O}(U_i)$ per ogni $i = 1, ..., m$. Consideriamo una componente generica di tale vettore $f_{i_n} \in \mathcal{O}(U_i)$. Poiché $\|\omega_n\|_{\mathcal{U}} \leq 1$ allora $|f_{i_n}| \leq 1$ su V_i, cioè $(f_{i_n})_{n\in\mathbb{N}}$ è equilimitata su V_i. Per 2.9 si può estrarre una sottosuccessione di $(f_{i_n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergente su $\overline{W_i}$ ad un elemento $f_i \in \mathcal{O}(W_i)$, dato che $\overline{W_i}$ è compatto in V_i per le proprietà di 2.6.

Abbiamo ottenuto che $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha una sottosuccessione $(\omega_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ che ristretta a W_i è convergente a $f_i dz_i$ con $f_i \in \mathcal{O}(W_i)$ per ogni $i = 1, ..., m$. Per concludere basta mostrare che esiste una 1-forma $\omega \in \Omega(X)$ tale che $\omega|W_i = f_i dz_i$ poiché in tal caso ω sarebbe il limite di $(\omega_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ cercato.

Poniamo $\omega_{n_k}|W_i := f_{k_i} dz_i$, con $f_{k_i} \in \mathcal{O}(W_i)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e per ogni $i = 1, ..., m$. Su $W_i \cap W_j$, con $i \neq j$, abbiamo per 1.15

$$f_{k_j} = f_{k_i} \frac{\partial z_i}{\partial z_j}$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$. Tale uguaglianza viene conservata passando al limite, i.e

$$f_j = f_i \frac{\partial z_i}{\partial z_j},$$

e quindi ancora per 1.15 esiste una 1-forma $\omega \in \Omega(X)$ tale che $\omega|W_i = f_i dz_i$.

Quindi abbiamo mostrato che B è compatta in $\Omega(X)$. Per 2.2 $\Omega(X)$ è uno spazio localmente compatto, e quindi ha dimensione finita come $\mathbb{C}$-spazio vettoriale per 2.5. □

Definizione 2.11. Sia X superficie di Riemann compatta. Definiamo il *genere di* X come $g := \dim \Omega(X)$.

La definizione è ben posta per 2.10.

Capitolo 3

Genere della sfera di Riemann e dei tori complessi

Nei prossimi due capitoli mostreremo le caratterizzazioni delle superfici di Riemann di genere zero e uno. Spiegheremo che ogni superficie di Riemann compatta ha genere zero se e solo se è biolomorfa alla sfera di Riemann $\mathbb{P}^1$ e che ha genere uno se e solo se è biolomorfa ad un toro complesso $\mathbb{C}/\Gamma$.

In particolare, in questo capitolo mostreremo che $\mathbb{P}^1$ ha genere zero e che ogni toro complesso ha genere uno. Per farlo utilizzeremo strumenti elementari, cioè le definizioni e le proposizioni che abbiamo già enunciato.

Iniziamo con la sfera di Riemann.

3.1 Proprietà della sfera di Riemann

Facciamo qualche osservazione sulle applicazioni meromorfe e le applicazioni olomorfe a valori in $\mathbb{P}^1$ su superfici di Riemann.

Proposizione 3.1. *Sia X una superficie di Riemann e sia $f \in \mathcal{M}(X)$. Se poniamo $f(p) := \infty$ per ogni $p \in X$ polo di f, allora $f\colon X \to \mathbb{P}^1$ è olomorfa.*

Viceversa, se $f\colon X \to \mathbb{P}^1$ è una mappa olomorfa e non identicamente ∞, allora $f^{-1}(\infty)$ ha solo punti isolati e $f\colon X \setminus f^{-1}(\infty) \to \mathbb{C}$ è meromorfa su X.

Dimostrazione. Sia $f \in \mathcal{M}(X)$ e mostriamo che la mappa che f induce su $\mathbb{P}^1$ è olomorfa. Poniamo $P := \{p \in X \colon f(p) = \infty\}$ l'insieme dei poli di f, $Z := \{p \in X \colon f(p) = 0\}$ l'insieme degli zeri di f, $A := X \setminus P$ e $B := X \setminus Z$. Gli insiemi A e B sono aperti in X e $X = A \cup B$. Mostriamo che f è olomorfa su A e su B.

Consideriamo su $\mathbb{P}^1$ l'atlante $\mathcal{U} := \{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$ già definito, cioè $U_1 = \mathbb{C}$, $\varphi_1 = id$, $U_2 = \mathbb{C}^* \cup \{\infty\}$, e

$$\varphi_2(z) = \begin{cases} 1/z & \text{se } z \in \mathbb{C}^* \\ 0 & \text{se } z = \infty. \end{cases}$$

Dato che $f(A) \subset U_1$ e che $f(B) \subset U_2$, è sufficiente mostrare che le funzioni $f_1 := \varphi_1 \circ f|A$ e $f_2 := \varphi_2 \circ f|B$ sono olomorfe.

La funzione $f_1 = \varphi_1 \circ f|A = id \circ f|A = f|A$ è olomorfa per ipotesi. Per ogni $p \in B$ abbiamo

$$f_2(p) = (\varphi_2 \circ f)(p) = \begin{cases} 1/f(p) & \text{se } p \notin P \\ 0 & \text{se } p \in P. \end{cases}$$

Per ogni $p \in A \cap B$ osserviamo che $f_1(p)f_2(p) = f(p)/f(p) = 1$, cioè f_2 è la reciproca di f_1 che è olomorfa, quindi su $A \cap B$ f_2 è olomorfa. Quindi f_2 è un applicazione continua su B e olomorfa su $B \setminus P$, ma P contiene solo punti isolati per ipotesi, dato che f è meromorfa su X, quindi f_2 è olomorfa su B. Dunque f è olomorfa su tutta X.

Viceversa, se $f \colon X \to \mathbb{P}^1$ è olomorfa e non identicamente ∞, allora per 1.6 $f^{-1}(\infty)$ ha solo punti isolati. La tesi segue dalla definizione di applicazione meromorfa. □

Spieghiamo ora cosa significa avere un biolomorfismo tra una superficie di Riemann compatta e $\mathbb{P}^1$.

Teorema 3.2. *Siano X superficie di Riemann compatta e $f \colon X \to \mathbb{P}^1$ mappa olomorfa e non identicamente ∞. Poniamo $V := X \setminus f^{-1}(\infty)$. Allora f è un biolomorfismo se e solo se $f \colon V \to \mathbb{C}$ è una mappa meromorfa su X con un unico polo semplice.*

Dimostrazione. Supponiamo che f sia un biolomorfismo. Sappiamo da 3.1 che $f|V$ è un'applicazione meromorfa. Inoltre f è iniettiva, quindi $f|V$ ha un unico polo $p \in X$. Osserviamo infine che p è un polo semplice perché $f'(p) \neq 0$ per 1.8.

Viceversa, consideriamo la mappa meromorfa $f|V$ a valori in $\mathbb{C}$ e supponiamo che esista un unico polo semplice $p \in X$ di $f|V$. Mostriamo che f è un biolomorfismo.

Sappiamo che f è olomorfa da 3.1. Poiché X è compatta e f è olomorfa e non costante, segue direttamente da 1.10 che f è suriettiva. Mostriamo che è iniettiva.

Sia $c \in \mathbb{C}$ e definiamo $g\colon V \to \mathbb{C}$ ponendo $g := f|V - c$. Per costruzione, g è meromorfa su X con un unico polo semplice in p, quindi dato che X è compatta, per 1.32 g ha un unico zero semplice $q \in X$. Ovviamente $q \neq p$, cioè $q \in V$, quindi $0 = g(q) = f(q) - c$, cioè $f(q) = c$. Ora, q è zero semplice di g, quindi $|f^{-1}(c)| = 1$, cioè f è iniettiva. Per 1.9 f è un biolomorfismo. □

Mostriamo che la sfera di Riemann ha genere zero. Per farlo ci occorrono due risultati importanti. Uno di questi, il Lemma di Dolbeault, non lo dimostreremo. La dimostrazione si può trovare su [2].

Teorema 3.3 (Lemma di Dolbeault). *Sia $X := \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < R\}$ con $0 < R \leq +\infty$ e sia $g \in \mathscr{E}(X)$. Allora esiste $f \in \mathscr{E}(X)$ tale che*

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = g.$$

Teorema 3.4. *Per ogni $\sigma \in \mathscr{E}^{0,1}(\mathbb{P}^1)$ esiste $f \in \mathscr{E}(\mathbb{P}^1)$ tale che $\bar{\partial} f = \sigma$.*

Dimostrazione. Consideriamo le carte $U_1 = \mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\} \cong \mathbb{C}$ e $U_2 = \mathbb{P}^1 \setminus \{0\} \cong \mathbb{C}^* \cup \{\infty\} \cong \mathbb{C}$ su $\mathbb{P}^1$ (già definite nel Capitolo 1) con $U_1 \cap U_2 \cong \mathbb{C}^*$. Per 3.3 esistono $f_i \in \mathscr{E}(U_i)$ tali che $\bar{\partial} f_i = \sigma|U_i$ con $i = 1, 2$. Su $U_1 \cap U_2$ abbiamo

$$\bar{\partial}(f_1 - f_2) = \bar{\partial} f_1 - \bar{\partial} f_2 = \sigma - \sigma = 0,$$

cioè $f_1 - f_2 \in \mathcal{O}(U_1 \cap U_2) \cong \mathcal{O}(\mathbb{C}^*)$. Quindi $f_1 - f_2$ è sviluppabile in serie di Laurent

$$f_1 - f_2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} \frac{1}{z^n} =: g_1 + g_2.$$

Abbiamo $g_1 \in \mathcal{O}(U_1)$ e $g_2 \in \mathcal{O}(U_2)$. Poiché, per costruzione, su $U_1 \cap U_2$ abbiamo $f_1 - f_2 = g_1 + g_2$, allora $f_1 - g_1 = f_2 + g_2$, quindi è ben definita la funzione $f \in \mathscr{E}(\mathbb{P}^1)$ tale che $f|U_1 := f_1 - g_1$ e $f|U_2 := f_2 + g_2$. A questo punto

$$\bar{\partial} f|U_1 = \bar{\partial} f_1 - \bar{\partial} g_1 = \bar{\partial} f_1 = \sigma|U_1$$

e

$$\bar{\partial} f|U_2 = \bar{\partial} f_2 + \bar{\partial} g_2 = \bar{\partial} f_2 = \sigma|U_2,$$

e quindi $\bar{\partial} f = \sigma$. □

Teorema 3.5. *Sia X superficie di Riemann compatta e supponiamo che per ogni $\sigma \in \mathscr{E}^{0,1}(X)$ esista $f \in \mathscr{E}(X)$ tale che $\bar{\partial} f = \sigma$. Allora X ha genere $g = 0$.*

Dimostrazione. Sia $\omega \in \Omega(X)$ e mostriamo che localmente $\omega \equiv 0$. Consideriamo (U, z) carta su X; su U abbiamo che ω può essere scritta come $\omega = f dz$, con $f \in \mathcal{O}(U)$. Mostriamo che localmente $f \equiv 0$.

Siano $U_1, U_2 \subset U$ aperti di U tali che $U_1 \subset\subset U_2 \subset\subset U$. Sappiamo che esiste una funzione $\varphi \in \mathscr{E}(U)$ tale che $\varphi|U_1 \equiv 1$ e $\varphi|U \setminus U_2 \equiv 0$, [3], e poniamo $\sigma := \varphi \bar{f} d\bar{z} \in \mathscr{E}^{0,1}(U)$. Poiché Supp $\varphi \subset U_2$ possiamo estendere σ a tutto X ponendo $\sigma \equiv 0$ su $X \setminus U$. Per 3.4 esiste $g \in \mathscr{E}(X)$ tale che $\bar{\partial} g = \sigma$. Osserviamo che

$$dg \wedge \omega = \frac{\partial g}{\partial z} dz \wedge f dz + \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge f dz = \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge f dz = \bar{\partial} g \wedge \omega,$$

da cui $\bar{\partial} g \wedge \omega = dg \wedge \omega$. Inoltre per 1.14 abbiamo che $dg \wedge \omega = d(g\omega) - g d\omega$; poiché ω è olomorfa $d\omega = 0$, quindi $\bar{\partial} g \wedge \omega = dg \wedge \omega = d(g\omega)$. Quindi otteniamo

$$\iint_X \sigma \wedge \omega = \iint_X \bar{\partial} g \wedge \omega = \iint_X d(g\omega) = 0.$$

Notiamo che $\sigma \wedge \omega = -\varphi|f|^2 dz \wedge d\bar{z}$. Quindi

$$0 = \iint_X \sigma \wedge \omega = \iint_{U_2} \sigma \wedge \omega = -\iint_{U_2} \varphi|f|^2 dz \wedge d\bar{z} = 2i \iint_{U_2} \varphi|f|^2 dxdy,$$

dato che $dz \wedge d\bar{z} = -2idx \wedge dy$. Poiché $\varphi|f|^2 \geq 0$ e l'integrale di Lebesgue sull'aperto U_2 è nullo, allora $\varphi|f|^2 \equiv 0$ su U_2, e in particolare anche su U_1. Ma $\varphi \equiv 1$ su U_1, quindi $f \equiv 0$ su U_1, cioè localmente $\omega \equiv 0$. Quindi abbiamo $\Omega(X) = 0$ e dunque il genere di X è 0. □

Corollario 3.6. *Il genere di $\mathbb{P}^1$ è 0.*

Dimostrazione. Per 3.4 sappiamo che per ogni $\sigma \in \mathscr{E}^{0,1}(\mathbb{P}^1)$ esiste $f \in \mathscr{E}(\mathbb{P}^1)$ tale che $\bar{\partial} f = \sigma$, quindi segue da 3.5 che il genere di $\mathbb{P}^1$ è zero. □

3.2 Proprietà dei tori complessi

Mostriamo che ogni toro complesso ha genere uno sfruttando un Lemma, la cui dimostrazione si trova su [2] (cap. 10, Theorem 10.13, b.).

Lemma 3.7. *Sia Γ un reticolo su $\mathbb{C}$ e consideriamo $dz \in \Omega(\mathbb{C})$. Allora esiste ed è unica $\omega \in \Omega(\mathbb{C}/\Gamma)$ tale che $\pi^*\omega = dz$, dove π è la proiezione canonica su $\mathbb{C}/\Gamma$. In particolare $\Omega(\mathbb{C}/\Gamma) \neq 0$.*

Teorema 3.8. *Sia Γ un reticolo su $\mathbb{C}$. Allora il toro complesso $\mathbb{C}/\Gamma$ è una superficie di Riemann di genere uno.*

Dimostrazione. Sia $\Gamma = \mathbb{Z}w_1 + \mathbb{Z}w_2$, con $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$. Consideriamo la proiezione canonica $\pi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Gamma$, e sia $\omega \in \Omega(\mathbb{C}/\Gamma)$. Possiamo supporre $\omega \neq 0$ per 3.7. Mostriamo che $\Omega(X)$ ha dimensione uno.

Sappiamo che $\pi^*\omega$ è una 1-forma olomorfa su $\mathbb{C}$, quindi se $(\mathbb{C}, z = id)$ è l'unica carta su $\mathbb{C}$ allora $\pi^*\omega = fdz$, con $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. Mostriamo che f è una mappa costante facendo vedere che f è doppiamente periodica con periodi w_1, w_2. Sia $\alpha\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tale che $\alpha(z) = z + w_1$. Dato che $\pi = \pi \circ \alpha$ allora, applicando 1.19

$$fdz = \pi^*\omega = (\pi \circ \alpha)^*\omega = \alpha^*(\pi^*\omega) = \alpha^*(fdz) = (f \circ \alpha)d(z \circ \alpha) = (f \circ \alpha)dz,$$

da cui $f = f \circ \alpha$, cioè $f(z) = f(z + w_1)$ per ogni $z \in \mathbb{C}$ e quindi f ha periodo w_1. Ripetendo lo stesso ragionamento con w_2 al posto di w_1 si ottiene che f è doppiamente periodica con periodi w_1, w_2. Ma allora abbiamo che f è una funzione olomorfa e doppiamente periodica e quindi è costante, cioè $\pi^*\omega = cdz$, con $c \in \mathbb{C}$. Per 3.7 esiste un'unica $\omega_1 \in \Omega(\mathbb{C}/\Gamma)$ tale che $\pi^*\omega_1 = dz$, quindi $\omega = c\omega_1$, cioè $\Omega(X) = <\omega_1>$. Quindi $\dim(\Omega(X)) = 1$, i.e. il genere di $\mathbb{C}/\Gamma$ è uno. □

Da ora fino al termine del capitolo mostriamo alcune proprietà delle superfici di Riemann compatte utilizzando strumenti elementari. Tali proprietà ci serviranno nell'ultimo capitolo per caratterizzare le superfici di Riemann di genere uno.

Definizione 3.9. Sia X superficie di Riemann, $\gamma\colon [0,1] \to X$ cammino su X. Diciamo che γ è un cammino *aperto* se $\gamma(0) \neq \gamma(1)$, mentre diciamo che è un cammino *chiuso* se $\gamma(0) = \gamma(1)$.

Definizione 3.10. Sia X superficie di Riemann e sia $\omega \in \Omega(X)$. Definiamo l'insieme dei *periodi di* ω come l'insieme

$$\Gamma := \left\{ \int_\sigma \omega \colon \sigma \text{ cammino chiuso su } X \right\}.$$

Proposizione 3.11. *Siano X superficie di Riemann, $\omega \in \Omega(X)$ e $p_0 \in X$. Poniamo*

$$\Gamma(p_0) := \left\{ \int_\sigma \omega \colon \sigma \textit{ cammino chiuso su } X \textit{ passante per } p_0 \right\}.$$

Allora $\Gamma = \Gamma(p_0)$.

Dimostrazione. Ovviamente $\Gamma(p_0) \subset \Gamma$. Sia dunque $c \in \Gamma$ e mostriamo che $c \in \Gamma(p_0)$.

Sia σ cammino chiuso tale che $c = \int_\sigma \omega$. Se $p_0 \in \sigma$ allora $c \in \Gamma(p_0)$. Supponiamo $p_0 \notin \sigma$. Consideriamo $p \in \sigma$ e il cammino aperto α da p_0 a p. Allora $\alpha \cdot \sigma \cdot \alpha^{-1}$ è un cammino chiuso passante per p_0 e

$$\int_{\alpha \cdot \sigma \cdot \alpha^{-1}} \omega = \int_\sigma \omega = c,$$

cioè $c \in \Gamma(p_0)$. Quindi $\Gamma \subset \Gamma(p_0)$, cioè $\Gamma = \Gamma(p_0)$. □

Proposizione 3.12. *Siano X superficie di Riemann e $\omega \in \Omega(X)$. Se Γ è l'insieme dei periodi di ω su X, allora Γ è un sottogruppo di $\mathbb{C}$. D'ora in avanti Γ sarà detto gruppo dei periodi di ω.*

Dimostrazione. Innanzitutto $0 \in \Gamma$, poiché se σ è il cammino banale allora $\int_\sigma \omega = 0$.

Siano $c_1, c_2 \in \Gamma$ e mostriamo che $c_1 + c_2 \in \Gamma$. Siano σ_1, σ_2 cammini chiusi tali che $c_1 = \int_{\sigma_1} \omega$ e $c_2 = \int_{\sigma_2} \omega$. Consideriamo il cammino prodotto $\sigma_1 \cdot \sigma_2$. Allora

$$\int_{\sigma_1 \cdot \sigma_2} \omega = \int_{\sigma_1} \omega + \int_{\sigma_2} \omega = c_1 + c_2,$$

cioè $c_1 + c_2 \in \Gamma$. Quindi Γ è un sottogruppo di $\mathbb{C}$. □

Proposizione 3.13. *Sia X superficie di Riemann. Sia $\omega \in \Omega(X)$ tale che per ogni γ cammino aperto su X $\int_\gamma \omega \neq 0$. Sia Γ il gruppo dei periodi di ω su X. Allora Γ è un sottogruppo discreto di $\mathbb{C}$.*

Dimostrazione. Per mostrare che Γ è discreto, è sufficiente mostrare che esiste un intorno aperto U dell'origine tale che $U \cap \Gamma = \{0\}$.

Sia (U, z) carta su X, siano $p_0, p \in U$ con $p_0 \neq p$ e consideriamo γ cammino aperto su U da p_0 a p. Possiamo supporre che U sia semplicemente connesso. Sappiamo per 1.22 che su U è ben definita la primitiva $G \in \mathcal{O}(U)$ di ω tale che $G(p_0) = 0$. Osserviamo che $\int_\gamma \omega = G(p) - G(p_0) = G(p)$ per 1.24. Dalle ipotesi segue che $\omega \neq 0$, poiché altrimenti $\int_{\gamma'} \omega = 0$ per ogni cammino γ' su X, quindi $dG = \omega | U \neq 0$. Dunque G è olomorfa e non costante, quindi G è aperta per 1.7, i.e. $G(U)$ è aperto. Poiché $G(p_0) = 0$, allora $0 \in G(U)$, cioè $G(U)$ è un intorno aperto di 0. Mostriamo che $G(U) \cap \Gamma = \{0\}$.

Sia $c \in \Gamma$ con $c \neq 0$. Per 3.11 abbiamo $\Gamma = \Gamma(p_0)$, quindi esiste σ cammino chiuso passante per p_0 tale che $c = \int_\sigma \omega$. Supponiamo per assurdo che esista $p \in U$ tale che $G(p) = c$. Poiché il cammino prodotto $\sigma^{-1} \cdot \gamma$ è un cammino aperto da p_0 a p allora

$$0 \neq \int_{\sigma^{-1} \cdot \gamma} \omega = \int_\gamma \omega - \int_\sigma \omega = \int_\gamma \omega - c = G(p) - c,$$

e questo è assurdo, quindi $G(U) \cap \Gamma = \{0\}$ e quindi Γ è un sottogruppo discreto di $\mathbb{C}$. $\square$

Osservazione. Sotto le ipotesi della proposizione consideriamo Γ gruppo dei periodi di $\omega \in \Omega(X)$.

Ricordiamo che se Λ è un sottogruppo discreto di $\mathbb{C}$ allora si possono verificare soltanto le due situazioni seguenti, [1]:

1. esiste $w \in \mathbb{C}$ tale che $\Lambda = \{nw : n \in \mathbb{Z}\}$;
2. esistono $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ tali che $\Lambda = \{n_1 w_1 + n_2 w_2 : n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$, i.e. Λ è un reticolo.

Se Γ fosse del tipo 1. allora

$$\mathbb{C}/\Gamma \cong \frac{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \cong \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \cong \mathbb{C}^*,$$

cioè avremmo $\mathbb{C}/\Gamma \cong \mathbb{C}^*$ non compatto.

Se invece Γ fosse del tipo 2. allora $\mathbb{C}/\Gamma$ sarebbe un toro complesso, che è compatto.

Definizione 3.14. Siano X superficie di Riemann, $p_0 \in X$ e $\omega \in \Omega(X)$. Consideriamo Γ il gruppo dei periodi di ω e sia $\pi \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Gamma$ la proiezione canonica. Definiamo $F \colon X \to \mathbb{C}/\Gamma$ ponendo per ogni $p \in X$

$$F(p) := \pi \left(\int_\gamma \omega \right),$$

dove γ è un cammino da p_0 a p.

Osservazione. Usando le notazioni precedenti mostriamo che la funzione F è ben definita. Se γ_1 e γ_2 sono cammini da p_0 a p su X allora dobbiamo mostrare che

$$\int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega \in \Gamma,$$

ma abbiamo

$$\int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1 \cdot \gamma_2^{-1}} \omega \in \Gamma$$

dato che $\gamma_1 \cdot \gamma_2^{-1}$ è un cammino chiuso. Quindi F è ben definita.

Fino alla fine del Capitolo consideriamo X, p_0, ω, Γ, F come nella definizione 3.14. Da ora cercheremo di porre delle condizioni affinchè Γ sia un reticolo, quindi $\mathbb{C}/\Gamma$ un toro complesso, e la funzione F sia un biolomorfismo tra la superficie di Riemann X e $\mathbb{C}/\Gamma$.

Lemma 3.15. *Siano $U \subset X$ un aperto e $G \in \mathcal{O}(U)$ primitiva di ω su U. Sia $p \in U$ e supponiamo che $\pi(G(p)) = F(p)$. Allora $\pi \circ G = F|U$.*

Dimostrazione. Sia $q \in U$ e poniamo γ_p e γ_q, rispettivamente, cammini da p_0 a p, e da p_0 a q. Mostriamo che $F(q) = \pi(G(q))$, cioè mostriamo che

$$\int_{\gamma_q} \omega - G(q) \in \Gamma.$$

Sia $q_0 \in U$ e supponiamo che $G(q_0) = 0$. Poniamo α e β, rispettivamente, cammini da q_0 a p, e da q_0 a q. Dato che G è una primitiva di ω, per 1.24 abbiamo $G(p) = \int_\alpha \omega$ e $G(q) = \int_\beta \omega$. Per ipotesi abbiamo $F(p) = \pi(G(p))$, cioè

$$\int_{\gamma_p} \omega - \int_\alpha \omega \in \Gamma.$$

Allora

$$\int_{\gamma_q} \omega - G(q) = \int_{\gamma_q} \omega - \int_\beta \omega = \int_{\gamma_q \cdot \beta^{-1}} \omega = \int_{\gamma_p \cdot \alpha^{-1}} \omega = \int_{\gamma_p} \omega - \int_\alpha \omega \in \Gamma.$$

□

Lemma 3.16. *Sia Γ un sottogruppo discreto di $\mathbb{C}$. Allora $\mathbb{C}/\Gamma$ è una superficie di Riemann e F è olomorfa.*

Dimostrazione. Sappiamo che se Γ è discreto allora $\mathbb{C}/\Gamma$ è biolomorfo a $\mathbb{C}^*$ o a $\mathbb{C}/\Gamma$, entrambe superfici di Riemann. Mostriamo che F è una mappa olomorfa tra superfici di Riemann.

Siano $(U_i, z_i)_{i \in I}$ carte su X tali che $\bigcup_{i \in I} U_i = X$ e fissiamo dei punti p_i per ogni U_i. Possiamo supporre che ogni U_i sia semplicemente connesso. Allora da 1.22 esiste $G_i \in \mathcal{O}(U_i)$ primitiva di ω tale che $G_i(p_i) = F(p_i)$ per ogni i. Per 3.15 abbiamo che F è composizione di mappe olomorfe, da cui F è olomorfa. □

Lemma 3.17. *Siano $p, q \in X$, con $p \neq q$. Allora $F(p) = F(q)$ se e solo se esiste γ cammino aperto da p a q tale che*

$$\int_\gamma \omega \in \Gamma.$$

Dimostrazione. Poniamo γ_p e γ_q, rispettivamente, cammini da p_0 a p, e da p_0 a q e sia γ cammino aperto da p a q. Osserviamo che $F(p) = F(q)$ se e solo se

$$\int_{\gamma_p} \omega - \int_{\gamma_q} \omega \in \Gamma.$$

Abbiamo che il cammino $\gamma_p \cdot \gamma \cdot \gamma_q^{-1}$ è chiuso, da cui

$$\int_{\gamma_p} \omega + \int_\gamma \omega - \int_{\gamma_q} \omega \in \Gamma. \tag{3.1}$$

Allora otteniamo

$$F(p) - F(q) = 0 \iff \int_{\gamma_p} \omega - \int_{\gamma_q} \omega \in \Gamma \overset{(3.1)}{\iff} \int_\gamma \omega \in \Gamma,$$

dato che Γ è un gruppo. □

Lemma 3.18. *Sia $\omega \in \Omega(X)$ tale che per ogni γ cammino aperto su X*

$$\int_\gamma \omega \neq 0.$$

Allora per ogni γ cammino aperto su X

$$\int_\gamma \omega \notin \Gamma.$$

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $\int_\gamma \omega \in \Gamma$, cioè esiste σ cammino chiuso su X tale che $\int_\sigma \omega = \int_\gamma \omega$. Poniamo α cammino su X da $\gamma(1)$ ad un punto $p \in \sigma$. Allora $\gamma \cdot \alpha \cdot \sigma^{-1}\alpha^{-1}$ è un cammino da $\gamma(0)$ a $\gamma(1)$, quindi è un cammino aperto. Di conseguenza

$$0 \neq \int_{\gamma\cdot\alpha\cdot\sigma^{-1}\alpha^{-1}} \omega = \int_\gamma \omega - \int_\sigma \omega,$$

che è assurdo, cioè $\int_\gamma \omega \notin \Gamma$. □

Teorema 3.19. *Sia X superficie di Riemann compatta e supponiamo esista $\omega \in \Omega(X)$ tale che per ogni γ cammino aperto su X*

$$\int_\gamma \omega \neq 0.$$

Sia Γ il gruppo dei periodi di ω. Allora Γ è un reticolo e $F\colon X \to \mathbb{C}/\Gamma$ è un biolomorfismo, i.e. X è biolomorfo ad un toro complesso.

Dimostrazione. Per 3.16 sappiamo che F è una mappa olomorfa tra superfici di Riemann. Per mostrare che è un biolomorfismo facciamo vedere innanzitutto che F è iniettiva.

Supponiamo per assurdo che esistano $p, q \in X$ con $p \neq q$ tali che $F(p) = F(q)$. Per 3.17 esiste un cammino aperto γ da p a q tale che $\int_\gamma \omega \in \Gamma$ e questo è assurdo per 3.18.

Dunque F è un'applicazione olomorfa e iniettiva su X che è compatta; in particolare F non è costante, quindi per 1.10 F è suriettiva e $\mathbb{C}/\Gamma$ è compatto, quindi necessariamente è un toro complesso. Per 1.9 F è un biolomorfismo tra X e il toro complesso $\mathbb{C}/\Gamma$. $\square$

Capitolo 4

Superfici di Riemann di genere zero e uno

In questo ultimo capitolo caratterizzeremo le superfici di genere zero e uno. Per farlo, introdurremo i concetti di divisore su una superficie di Riemann e di soluzione debole di un divisore. Sfrutteremo nell'ultimo paragrafo un teorema di cui omettiamo la dimostrazione.

4.1 Determinazione del logaritmo

Definizione 4.1. Sia X spazio topologico, $f\colon X \to \mathbb{C}^*$ funzione continua. Una *determinazione del logaritmo di* f è una funzione continua $F\colon X \to \mathbb{C}$ tale che $e^F = f$.

In questa sezione faremo alcune osservazioni sulle determinazioni del logaritmo di funzioni, in particolare ponendo delle condizioni affinchè esista la determinazione del logaritmo di $(z - z_1)/(z - z_0)$.

Teorema 4.2. *Siano $X \subset \mathbb{C}$ aperto, $f\colon X \to \mathbb{C}^*$ olomorfa. Allora esiste una determinazione del logaritmo di f se e solo se df/f è una forma esatta.*

Dimostrazione. Supponiamo esista una determinazione del logaritmo di f, i.e. esiste $F\colon X \to \mathbb{C}$ tale che $e^F = f$. Allora

$$\frac{df}{f} = \frac{d(e^F)}{e^F} = \frac{e^F dF}{e^F} = dF,$$

cioè df/f è esatta.

Viceversa supponiamo che df/f sia esatta, e sia G una sua primitiva. Allora $dG = df/f$, da cui

$$d(e^{-G}f) = -e^{-G}dGf + e^{-G}df = e^{-G}(f\frac{df}{f} - df) = 0,$$

quindi $e^{-G}f = c \in \mathbb{C}$. Osserviamo che $c \neq 0$, dato che $f \neq 0$ e l'esponenziale non sia annulla mai, quindi poiché $exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ è suriettiva, esiste $z \in \mathbb{C}$ tale che $e^z = c$. Ponendo $F := G + z$ si ottiene

$$e^F = e^{G+z} = e^G e^z = \frac{f}{c}c = f,$$

e quindi F è una determinazione del logaritmo di f. □

Teorema 4.3. *Sia $K \subset \mathbb{C}$ compatto e connesso e siano $z_0, z_1 \in K$ tali che $z_0 \neq z_1$. Allora esiste $F \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus K)$ tale che*

$$e^F = \frac{z - z_1}{z - z_0}.$$

Dimostrazione. Poniamo $f\colon \mathbb{C} \setminus K \to \mathbb{C}$ tale che $f(z) := (z - z_1)/(z - z_0)$ e mostriamo che esiste una determinazione del logaritmo di f. Innanzitutto f è olomorfa e non si annulla mai. Poiché è olomorfa

$$\frac{df}{f} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{1}{f}dz = \frac{f'}{f}dz,$$

dato che $\bar{\partial} f = 0$. Mostriamo che df/f è una 1-forma esatta.

$$f'(z) = \frac{z - z_0 - (z - z_1)}{(z - z_0)^2} = \frac{z_1 - z_0}{(z - z_0)^2}$$

da cui

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{z_1 - z_0}{(z - z_1)(z - z_0)} = \frac{(z - z_0) - (z - z_1)}{(z - z_1)(z - z_0)} = \frac{1}{(z - z_1)} - \frac{1}{z - z_0}$$

Un teorema di caratterizzazione delle 1-forme esatte afferma che una 1-forma ω è esatta su $U \subset \mathbb{C}$ se e solo se

$$\int_\gamma \omega = 0$$

per ogni γ cammino chiuso su U. Sia quindi γ curva chiusa su $\mathbb{C} \setminus K$. Applicando il Principio dell'Argomento [1] otteniamo

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_\gamma \frac{1}{z - z_1} dz - \int_\gamma \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi i \, [\mathrm{Ind}_\gamma(z_1) - \mathrm{Ind}_\gamma(z_0)],$$

dove $\mathrm{Ind}_\gamma(z_i)$ è l'indice di avvolgimento di z_i lungo γ, con $i = 1, 2$. Ora, $z \mapsto \mathrm{Ind}_\gamma(z)$ è una funzione continua a valori in $\mathbb{Z}$, e quindi è costante sulle componenti connesse di $\mathbb{C}$, ma K è connesso per ipotesi e $z_0, z_1 \in K$, e quindi df/f è esatta. Per 4.2 esiste una determinazione del logaritmo di f. $\square$

4.2 Divisori e soluzioni deboli

Definizione 4.4. Sia X superficie di Riemann. Un *divisore su* X è una mappa $D \colon X \to \mathbb{Z}$ tale che per ogni compatto $K \subset X$ l'insieme $\{x \in K \colon D(x) \neq 0\}$ è finito. Se X è una superficie di Riemann compatta allora $\{x \in X \colon D(x) \neq 0\}$ è finito.

Rispetto all'addizione l'insieme dei divisori su X è un gruppo abeliano che si denota con $\mathrm{Div}(X)$. Introduciamo un ordinamento parziale su $\mathrm{Div}(X)$ ponendo, per ogni $D, D' \in \mathrm{Div}(X)$, $D \leq D'$ se $D(x) \leq D'(x)$ per ogni $x \in X$.

Definizione 4.5. Sia X superficie di Riemann e Y un aperto di X. Sia f funzione meromorfa su Y e sia $a \in Y$. Si definisce

$$\mathrm{ord}_a(f) := \begin{cases} 0 & \text{se } f \text{ è olomorfa e diversa da 0 in } a, \\ k & \text{se } f \text{ ha uno zero di ordine } k \text{ in } a, \\ -k & \text{se } f \text{ ha un polo di ordine } k \text{ in } a, \\ \infty & \text{se } f \text{ è identicamente zero su un intorno di } a. \end{cases}$$

La mappa $x \mapsto \mathrm{ord}_a(f)$ è un divisore di X. Tale divisore è detto *divisore di f* e si denota con (f). La funzione f è detta *multiplo* del divisore D se $(f) \geq D$. Osserviamo che f è olomorfa se e solo se $(f) \geq 0$.

Osservazione. È ovvio che date due funzioni f, g meromorfe non nulle su un aperto $Y \subset X$, allora $(fg) = (f) + (g)$ e $(1/f) = -(f)$.

Definizione 4.6. Sia X superficie di Riemann compatta. Definiamo la mappa $\deg\colon \mathrm{Div}(X) \to \mathbb{Z}$, detta *grado*, tale che

$$\deg D := \sum_{x \in X} D(x).$$

La definizione è ben posta, dato che $\sum_{x \in X} D(x)$ è una somma finita.

Osservazione. Sia X superficie di Riemann compatta. Per 1.32 ogni $f \in \mathscr{M}(X)$ ha lo stesso numero di poli e di zeri contati con la relativa molteplicità. Quindi se abbiamo $f \in \mathscr{M}(X)$, allora $\deg(f) = 0$.

Definizione 4.7. Sia X superficie di Riemann compatta e sia D divisore su X. Una funzione meromorfa $f \in \mathscr{M}(X)$ è detta *soluzione (propria)* di D se $(f) = D$, i.e. f ha esattamente i poli e gli zeri indicati da D. Se $\deg D \neq 0$ allora D non ha soluzioni.

Sia ora $X_D := \{x \in X \colon D(x) \geq 0\}$. Con *soluzione debole* di D si indica una funzione $f \in \mathscr{E}(X_D)$ tale che per ogni punto $a \in X$ esistono una carta (U, z) con $z(a) = 0$ e una funzione $\psi \in \mathscr{E}(U)$ con $\psi(a) \neq 0$, tale che

$$f = \psi z^k \text{ su } U \cap X_D, \text{ dove } k = D(a).$$

Una soluzione debole è propria, i.e. meromorfa, se $f \in \mathcal{O}(X_D)$, chiaramente. Se f_1 (risp. f_2) è soluzione debole di D_1 (risp. D_2), allora $f_1 f_2$ è soluzione debole di $D_1 + D_2$, e f_1/f_2 è soluzione debole di $D_1 - D_2$, se ben definita.

Osservazione. Sia f una soluzione debole di un divisore D. Allora il *differenziale logaritmico di f*, df/f è una 1-forma liscia su $\mathrm{Supp}(D)^C = \{x \in$

$X\colon D(x) \neq 0\}^C$. Sia $a \in \operatorname{Supp}(D)$ e $k = D(a)$. Allora esiste una carta (U, z) con $z(a) = 0$ tale che

$$\frac{df}{f} = k\frac{dz}{z} + \frac{d\psi}{\psi}. \tag{4.1}$$

Infatti, usando la definizione di soluzione debole si ottiene proprio

$$\frac{df}{f} = \frac{kz^{k-1}\psi dz + z^k d\psi}{\psi z^k} = k\frac{dz}{z} + \frac{d\psi}{\psi}.$$

Dato che $\psi(a) \neq 0$, allora $\psi \neq 0$ su un intorno di a, e quindi $d\psi/\psi$ non ha singolarità su un intorno di a. Osserviamo che la 1-forma $\bar{\partial}f/f$ è differenziabile su tutto X, poiché $f = \psi z^k$ implica che $\bar{\partial}f/f = \bar{\partial}\psi/\psi \in \mathscr{E}^{0,1}(X)$.

Ora dimostreremo un risultato fondamentale che sfrutteremo nell'ultimo paragrafo. Per farlo ci occorrerà il Teorema di Stokes, quindi ne richiamiamo l'enunciato.

Teorema 4.8 (**Teorema di Stokes**). *Sia X una 2-varietà, con ∂X frontiera di X. Allora per ogni 1-forma $\omega \in \mathscr{E}^{(1)}(X)$ a supporto compatto*

$$\iint_X d\omega = \int_{\partial X} \omega.$$

Lemma 4.9. *Sia X superficie di Riemann e $D \in Div(X)$ divisore su X. Siano f soluzione debole di D e $g \in \mathscr{E}(X)$ tali che $Supp(df/f) \cap Supp(dg)$ sia compatto. Allora*

$$\frac{1}{2\pi i}\iint_X \frac{df}{f} \wedge dg = \sum_{x \in X} D(x)g(x).$$

Dimostrazione. Siano $a_1, ..., a_n$ tutti i punti di X tale che $D(a_j) \neq 0$, e siano $k_j := D(a_j)$ con $j = 1, ..., n$. Scegliamo carte disgiunte (U_j, z_j) tale che $\forall j = 1, ..., n$ si ha $a_j \in U_j$ e $z_j(a_j) = 0$, con

$$f = \psi_j z_j^{k_j}, \text{ dove } \psi_j \in \mathscr{E}(U_j),\ \psi_j(x) \neq 0 \text{ per ogni } x \in U_j.$$

Si può assumere che $z_j(U_j) \subset \mathbb{C}$ sia il disco unitario Δ, per ogni $j = 1, ..., n$.

Siano $0 < r_1 < r_2 < 1$ e poniamo $A_j := \{x \in U_j\colon |z_j(x)| < r_2\}$ e $K_j := \{x \in U_j\colon |z_j(x)| \leq r_1\}$ per ogni j. Abbiamo che K_j e A_j sono intorni di a_j, K_j è chiuso, A_j è aperto e $K_j \subset A_j$ per ogni j. Sappiamo che esistono funzioni $\varphi_j \in \mathscr{E}(X)$ tali che $\mathrm{Supp}(\varphi_j) \subset A_j$ e $\varphi_j|K_j = 1$, [3]. Siano $g_j := \varphi_j g$ e $g_0 := g - (g_1 + ... + g_n)$. Sappiamo che $g_0 \equiv 0$ sull'unione disgiunta $\bigcup_{j=1}^n K_j$ e che per 1.14

$$d\left(g_0 \frac{df}{f}\right) = -\frac{df}{f} \wedge dg_0.$$

Dato che $\mathrm{Supp}(df/f) \cap \mathrm{Supp}(dg)$ è compatto, allora $\mathrm{Supp}(df/f) \cap \mathrm{Supp}(dg_0)$ è compatto in $X' = X \setminus \bigcup_{j=1}^n K_j$. Quindi per 4.8 otteniamo

$$\iint_X \frac{df}{f} \wedge dg_0 = -\iint_{X'} d\left(g_0 \frac{df}{f}\right) = -\iint_{\partial X'} g_0 \frac{df}{f} = -\sum_{j=1}^n \iint_{\partial K_j} g_0 \frac{df}{f} = 0.$$

Dalla formula (4.1), su ogni U_j

$$\frac{df}{f} \wedge dg_j = k_j \frac{dz_j}{z_j} \wedge dg_j + \frac{d\psi_j}{\psi_j} \wedge dg_j$$

Su ogni U_j la 1-forma $\frac{d\psi_j}{\psi_j} \wedge dg_j$ è differenziabile e a supporto compatto, quindi è nulla su ∂U_j. Applicando ancora 1.14 a $\frac{d\psi_j}{\psi_j} \wedge dg_j$ e 4.8 otteniamo

$$\begin{aligned}\iint_X \frac{df}{f} \wedge dg &= \sum_{j=1}^n \iint_{U_j} \frac{df}{f} \wedge dg_j = \sum_{j=1}^n \left(k_j \iint_{U_j} \frac{dz_j}{z_j} \wedge dg_j + \iint_{U_j} \frac{d\psi_j}{\psi_j} \wedge dg_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^n \left(k_j \iint_{U_j} \frac{dz_j}{z_j} \wedge dg_j - \iint_{\partial U_j} d\left(g_j \frac{d\psi_j}{\psi_j}\right)\right) \\ &= \sum_{j=1}^n k_j \iint_{U_j} \frac{dz_j}{z_j} \wedge dg_j.\end{aligned}$$

Dobbiamo mostrare che

$$\iint_{U_j} \frac{dz_j}{z_j} \wedge dg_j = 2\pi i g(a_j).$$

Sia $j \in \{1, ..., n\}$ e poniamo $K_\varepsilon := \{x \in X \colon |z_j(x)| \leq \varepsilon\}$ e $U_\varepsilon := U \setminus K_\varepsilon$. Abbiamo

$$\lim_{\varepsilon \to 0} U_\varepsilon = U \setminus \{a_j\}.$$

Quindi, ricordando che l'integrale di Lebesgue su insiemi di misura nulla è nullo e sfruttando ancora 4.8, otteniamo

$$\begin{aligned}\iint_{U_j} \frac{dz_j}{z_j} \wedge dg_j &= -\iint_{U_j\setminus\{a_j\}} d\left(g_j \frac{dz_j}{z_j}\right) = -\lim_{\varepsilon\to 0} \iint_{U_\varepsilon} d\left(g_j \frac{dz_j}{z_j}\right) \\ &= -\lim_{\varepsilon\to 0} \iint_{\partial U_\varepsilon} g_j \frac{dz_j}{z_j} \\ &\overset{(*)}{=} -\int_{\partial U} g_j \frac{dz_j}{z_j} + \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\partial K_\varepsilon} g_j \frac{dz_j}{z_j} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\partial K_\varepsilon} g_j \frac{dz_j}{z_j} \\ &= 2\pi i g_j(a_j) = 2\pi i g(a_j),\end{aligned}$$

dove il cambio di segno in $(*)$ è motivato dall'orientazione della corona circolare $\{x \in X : \varepsilon \le |z_j(x)| \le r_2\}$ su cui si sta integrando. □

Definizione 4.10. Siano X una superficie di Riemann, $c\colon [0,1] \to X$ curva su X. Si indica con ∂c il divisore su X tale che $\partial c(c(1)) = +1$, $\partial c(c(0)) = -1$ e $\partial c = 0$ in tutti gli altri punti. Se c è una curva chiusa, i.e. $c(0) = c(1)$, allora $\partial c = 0$.

Teorema 4.11. *Sia X superficie di Riemann, $c\colon [0,1] \to X$ una curva e U un intorno aperto e precompatto di $c([0,1])$. Allora esiste una soluzione debole f del divisore ∂c con $f|X\setminus U = 1$ tale che per ogni 1-forma differenziale chiusa $\omega \in \mathscr{E}^{(1)}(X)$ vale la relazione*

$$\int_c \omega = \frac{1}{2\pi i} \iint_X \frac{df}{f} \wedge \omega. \tag{4.2}$$

Dimostrazione. Innanzitutto si consideri il caso in cui (U, z) sia una carta su X tale che $z(U) \subset \mathbb{C}$ sia il disco unitario Δ e che la curva c giaccia interamente in U. Per semplicità si identifichi U con il disco Δ.

Siano $a := c(0)$ e $b := c(1)$. Esiste $r < 1$ tale che $c([0,1]) \subset \{|z| < r\}$. Sia $K := \{|z| \le r\}$. Per 4.3 esiste una $F \in \mathcal{O}(U \setminus K)$ determinazione del logaritmo di $(z-b)/(z-a)$. Poniamo $K' := \{|z| \ge r'\}$ con $r < r' < 1$ e si scelga una funzione $\psi \in \mathscr{E}(U)$ con $\psi|K = 1$ e $\psi|K' = 0$. Sia $f_0 \in \mathscr{E}(U \setminus \{a\})$ tale che

$$f_0 := \begin{cases} e^{\psi F(z)} & \text{se } r < |z| < 1, \\ \frac{z-b}{z-a} & \text{se } |z| \le r. \end{cases}$$

Poiché $f_0|U \setminus K' = 1$, si può estendere in modo continuo f_0 ad una opportuna funzione $f \in \mathscr{E}(X \setminus \{a\})$, ponendola 1 su $X \setminus U$. Per costruzione f è una soluzione debole del divisore ∂c, dato che f ha uno zero semplice in b, un polo semplice in a e non si annulla in ogni altro punto di X.

Sia ora $\omega \in \mathscr{E}^{(1)}(X)$ una forma differenziale chiusa e mostriamo la formula (4.2). Per 1.22 esiste una funzione $g' \in \mathscr{E}(U)$ tale che $\omega = dg'$. Poniamo $K'' := \{|z| \leq r'\}$ e sia $g \in \mathscr{E}(X)$ tale che $g|K'' \equiv g|K''$. Il fatto che tale funzione esista sempre si può trovare su [3].

Osserviamo che su $X \setminus K''$ abbiamo $df/f \equiv 0$, in quanto $f \equiv 1$. Dunque $Supp(df/f) \cap Supp(dg)$ è un chiuso contenuto in K'' che è compatto, quindi è compatto. Applicando 4.9 otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \iint_X \frac{df}{f} \wedge \omega = \frac{1}{2\pi i} \iint_{K''} \frac{df}{f} \wedge dg = \frac{1}{2\pi i} \iint_X \frac{df}{f} \wedge dg \\ = g(b) - g(a) = \int_c \omega. \end{aligned}$$

Nel caso generale siano una partizione $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = 1$ di $[0,1]$ e carte (U_j, z_j), $j = 1, ..., n$ su X in modo che $c([t_{j-1}, t_j]) \subset U_J \subset U$ e $z_j(U_j) \subset \mathbb{C}$ sia il disco unitario $\forall j = 1, ..., n$.

Ponendo $c_j := c|([t_{j-1}, t_j])$, analogamente a quanto fatto precedentemente, si costruisce una soluzione debole f_j del divisore ∂c_j tale che $f_j|X \setminus U_j = 1$ e

$$\int_{c_j} \omega = \frac{1}{2\pi i} \iint_X \frac{df_j}{f_j} \wedge \omega$$

per ogni forma differenziale chiusa $\omega \in \mathscr{E}(X)$. Mostriamo che il prodotto $f := f_1 \cdots f_n$ soddisfa le condizioni del teorema. Osserviamo che

$$\frac{df}{f} = \frac{d(f_1 \cdots f_n)}{f_1 \cdots f_n} = \sum_{j=1}^{n} \frac{df_j}{f_j}, \text{ quindi } \frac{df}{f} \wedge \omega = \sum_{j=1}^{n} \frac{df_j}{f_j} \wedge \omega.$$

Quindi abbiamo

$$\int_c \omega = \sum_{j=1}^{n} \int_{c_j} \omega = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{n} \iint_X \frac{df_j}{f_j} \wedge \omega = \frac{1}{2\pi i} \iint_X \frac{df}{f} \wedge \omega.$$

□

Corollario 4.12. *Sia X superficie di Riemann, $c\colon [0,1] \to X$ una curva su X. Allora esiste una soluzione debole $f \in \mathscr{E}(X)$ del divisore ∂c.*

4.3 Caratterizzazione delle superfici di Riemann di genere zero

Teorema 4.13. *Sia X superficie di Riemann compatta e sia $\sigma \in \mathscr{E}^{0,1}(X)$. Allora esiste $f \in \mathscr{E}(X)$ tale che $\bar\partial f = \sigma$ se e solo se $\iint_X \sigma \wedge \omega = 0$ per ogni $\omega \in \Omega(X)$.*

La dimostrazione di questo teorema segue dalla decomposizione di Hodge, la cui dimostrazione si può trovare in [4].

Teorema 4.14. *Sia X superficie di Riemann compatta. Allora $X \cong \mathbb{P}^1$ se e solo se per ogni $\sigma \in \mathscr{E}^{0,1}(X)$ esiste $f \in \mathscr{E}(X)$ tale che $\bar\partial f = \sigma$.*

Dimostrazione. Se supponiamo che $X \cong \mathbb{P}^1$ allora la tesi segue da 3.4.

Viceversa, supponiamo che per ogni $\sigma \in \mathscr{E}^{0,1}(X)$ esiste $f \in \mathscr{E}(X)$ tale che $\bar\partial f = \sigma$ e mostriamo che esiste un biolomorfismo da X a $\mathbb{P}^1$. Costruiamo una funzione $F \in \mathcal{M}(X)$ con un unico polo semplice in X.

Sia $c\colon [0,1] \to X$ curva su X con $p = c(0)$, $q = c(1)$ tali che $p \neq q$. Per 4.12 esiste una soluzione debole $f \in \mathscr{E}(X \setminus \{p\})$ di ∂c, cioè con un unico polo semplice in p. Sia (U, z) una carta su X con U intorno di p e $z(p) = 0$. Allora $f = \frac{1}{z}\psi(z)$, con $\psi \in \mathscr{E}(X)$ e $\psi \neq 0$. Quindi da (4.1) abbiamo

$$\frac{df}{f} = \frac{dz}{z} + \frac{d\psi}{\psi} \Longrightarrow \frac{\bar\partial f}{f} = \frac{\bar\partial \psi}{\psi}$$

e quindi $\bar\partial f/f \in \mathscr{E}^{0,1}(X)$. Per ipotesi esiste $g \in \mathscr{E}(X)$ tale che $\bar\partial g = \bar\partial f/f$. Definiamo $F\colon X \to \mathbb{C}$ ponendo $F := e^{-g} f$. Poiché $e^{-g} \in \mathscr{E}(X)$ allora F ha un unico polo semplice in p ed un unico zero semplice in q. Allora

$$\bar\partial F = -e^{-g}\bar\partial g f + e^{-g}\bar\partial f = e^{-g}(-\bar\partial g f + \bar\partial f) = e^{-g}\left(-\frac{\bar\partial f}{f} f + \bar\partial f\right) = 0.$$

Quindi abbiamo che F è meromorfa con un unico polo semplice, cioè F è un biolomorfismo per 3.2. $\square$

Corollario 4.15. *Sia X superficie di Riemann compatta di genere g. Allora*

$$X \cong \mathbb{P}^1 \text{ se e solo se } g = 0.$$

Dimostrazione. Sappiamo da 3.6 che se $X \cong \mathbb{P}^1$ allora il genere di X è 0.

Viceversa, supponiamo che $g = \dim \Omega(X) = 0$ e mostriamo che $X \cong \mathbb{P}^1$.

Se consideriamo $\sigma \in \mathscr{E}^{0,1}(X)$ allora ovviamente $\iint_X \sigma \wedge \omega = 0$ per ogni $\omega \in \Omega(X)$, dato che $\Omega(X) = 0$. Le ipotesi di 4.13 sono dunque verificate, quindi esiste $f \in \mathscr{E}(X)$ tale che $\bar{\partial} f = \sigma$. A questo punto la tesi segue da 4.14. □

4.4 Caratterizzazione delle superfici di Riemann di genere uno

Teorema 4.16. *Sia X superficie di Riemann compatta di genere $g = 1$ con $\Omega(X) = <\omega>$. Sia γ cammino aperto su X. Allora*

$$\int_\gamma \omega \neq 0.$$

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $\int_\gamma \omega = 0$ e mostriamo che esiste un biolomorfismo tra X e $\mathbb{P}^1$. Per 4.11 abbiamo

$$0 = \int_\gamma \omega = \frac{1}{2\pi i} \iint_X \frac{df}{f} \wedge \omega,$$

dove $f \in \mathscr{E}(X)$ è una soluzione debole di $\partial\gamma$. Osserviamo che dato che $\omega \in \Omega(X)$ allora

$$\frac{df}{f} \wedge \omega = \left(\frac{\partial f}{\partial z} \frac{1}{f} dz + \frac{\bar{\partial} f}{\partial \bar{z}} \frac{1}{f} d\bar{z} \right) \wedge \omega = \frac{\bar{\partial} f}{f} \wedge \omega.$$

Poniamo $\sigma := \bar{\partial} f / f \in \mathscr{E}^{0,1}(X)$. Se $\omega_1 \in \Omega(X)$ allora per ipotesi $\omega_1 = \lambda\omega$ con $\lambda \in \mathbb{C}$. Allora

$$\iint_X \sigma \wedge \omega_1 = \iint_X \frac{\bar{\partial} f}{f} \wedge \lambda\omega = \lambda \iint_X \frac{df}{f} \wedge \omega = 0.$$

Quindi $\iint_X \sigma \wedge \omega_1 = 0$ per ogni $\omega_1 \in \Omega(X)$, dunque per 4.13 esiste $F \in \mathscr{E}(X)$ tale che $\bar{\partial}F = \sigma$.

Poniamo ora $G := e^{-F}f$ e mostriamo che G è il biolomorfismo cercato, cioè mostriamo che G è meromorfa con un unico polo semplice. Dato che f è soluzione debole di $\partial\gamma$ allora G ha un unico polo semplice in $\gamma(0)$. Inoltre su $X \setminus \{\gamma(0)\}$ abbiamo

$$\bar{\partial}G = -e^{-F}\bar{\partial}Ff + e^{-F}\bar{\partial}f = e^{-F}f\left(-\bar{\partial}F + \frac{\bar{\partial}f}{f}\right) = e^{-F}f(-\sigma + \sigma) = 0,$$

cioè G è una mappa meromorfa su X con un unico polo semplice. Quindi per 3.2 G è un biolomorfismo tra X e $\mathbb{P}^1$, ma questo implica per 4.15 che X ha genere zero, che è assurdo. Quindi $\int_\gamma \omega \neq 0$. $\square$

Teorema 4.17. *Sia X superficie di Riemann di genere g. Allora*

$$X \cong \mathbb{C}/\Gamma \textit{ se e solo se } X \textit{ ha genere } g = 1,$$

dove Γ è un reticolo su $\mathbb{C}$.

Dimostrazione. Sappiamo già per 3.8, che se $X \cong \mathbb{C}/\Gamma$ allora X è di genere 1.

Supponiamo che X abbia genere 1 e mostriamo che $X \cong \mathbb{C}/\Gamma$. Sia $\Omega(X) = <\omega>$. Applicando 4.16 otteniamo che per ogni cammino aperto γ su X, $\int_\gamma \omega \neq 0$, ma allora le ipotesi di 3.19 sono soddisfatte, e quindi $X \cong \mathbb{C}/\Gamma$. $\square$

Bibliografia

[1] Gamelin W. Theodore. *Complex Analysis*. Springer, 2001.

[2] Forster Otto. *Lectures on Riemann Surfaces*. Springer, 1981.

[3] Brezis Haim. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, 2011.

[4] Warner W. Framk. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Springer, 1971.

[5] Lanconelli Ermanno. *Lezioni di analisi matematica 2. Vol. 2*. Pitagora, 1997.