

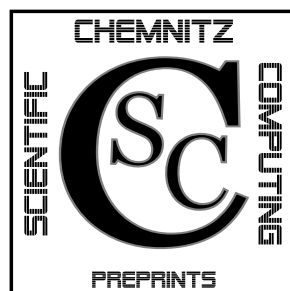


TECHNISCHE UNIVERSITÄT CHEMNITZ

Uwe-Jens Görke    Anke Bucher    Reiner Kreißig

**Zur Numerik der inversen Aufgabe für  
gemischte (u/p) Formulierungen am  
Beispiel der nahezu inkompressiblen  
Elastizität bei großen Verzerrungen**

CSC/07-07



**Chemnitz Scientific Computing  
Preprints**

**Impressum:**

**Chemnitz Scientific Computing Preprints** — ISSN 1864-0087

(1995–2005: Preprintreihe des Chemnitzer SFB393)

**Herausgeber:**

Professuren für  
Numerische und Angewandte Mathematik  
an der Fakultät für Mathematik  
der Technischen Universität Chemnitz

**Postanschrift:**

TU Chemnitz, Fakultät für Mathematik  
09107 Chemnitz

**Sitz:**

Reichenhainer Str. 41, 09126 Chemnitz

<http://www.tu-chemnitz.de/mathematik/csc/>



TECHNISCHE UNIVERSITÄT CHEMNITZ

**Chemnitz Scientific Computing  
Preprints**

Uwe-Jens Görke    Anke Bucher    Reiner Kreißig

**Zur Numerik der inversen Aufgabe für  
gemischte (u/p) Formulierungen am  
Beispiel der nahezu inkompressiblen  
Elastizität bei großen Verzerrungen**

CSC/07-07

**Zusammenfassung**

In dieser Publikation werden ein numerisches Verfahren zur Kalibrierung von Materialmodellen für die Simulation großer, nahezu inkompressibler hyperelastischer Verzerrungen sowie dessen numerische Realisierung im Rahmen einer gemischten Finite Elemente Formulierung dargestellt. Dabei werden die Parameter der konstitutiven Beziehungen auf der Grundlage experimentell erfasster Verschiebungsfelder (vorzugsweise inhomogener) bzw. globaler Informationen ermittelt. Dieses inkorrekte, inverse Problem wird mit Hilfe eines deterministischen Optimierungsverfahrens vom trust-region-Typ gelöst. Wesentlicher Bestandteil ist dabei die halbanalytische Sensitivitätsanalyse, die ein effizientes und hochgenaues Verfahren zur Ermittlung des Gradienten der Zielfunktion darstellt. Sie erfordert die einmalige Lösung eines zur direkten Aufgabe analogen Gleichungssystems pro Parameter und Lastschritt und basiert auf der impliziten Differentiation der schwachen Formulierung des gemischten Randwertproblems nach den Materialparametern. Genauigkeit und Konvergenzverhalten der numerischen Algorithmen werden an illustrativen Beispielen mit synthetischen Messwerten demonstriert. Im Mittelpunkt stehen dabei Untersuchungen zur Abhängigkeit des Optimierungsergebnisses von den Startwerten für unterschiedliche konstitutive Ansätze der kompressiblen und nahezu inkompressiblen Elastizität.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Kalibrierung von Materialmodellen: Ein inkorrektes inverses Problem</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Parameteridentifikation als Optimierungsaufgabe</b>	<b>5</b>
3.1	Zielfunktion . . . . .	6
3.2	Optimierungsverfahren . . . . .	8
3.3	Elemente der Parameterschätzung . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Materialmodell der isotropen, nahezu inkompressiblen Elastizität bei großen Verzerrungen</b>	<b>11</b>
4.1	Kinematik . . . . .	11
4.2	Thermodynamisch konsistentes Deformationsgesetz . . . . .	12
4.3	Spezielle konstitutive Gleichungen . . . . .	14
<b>5</b>	<b>Sensitivitätsanalyse</b>	<b>15</b>
5.1	Schwache Formulierung des Randwertproblems und seine Linearisierung: Direkte Aufgabe . . . . .	16
5.2	Parameterableitung der schwachen Formulierung des Randwertproblems: Inverse Aufgabe . . . . .	19
<b>6</b>	<b>Numerische Beispiele</b>	<b>23</b>
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>47</b>

Author's addresses:

Uwe-Jens Görke  
Anke Bucher  
Reiner Kreißig  
TU Chemnitz  
Fakultät für Maschinenbau  
Professur Festkörpermechanik  
Straße der Nationen 62  
D-09111 Chemnitz

<http://www.tu-chemnitz.de/mb/FestKoerpMech/>

# 1 Einführung

Die realitätsnahe numerische Simulation des mechanischen Verhaltens von Bauteilen, Konstruktionen und biologischem Gewebe erfordert unabhängig von der betrachteten Längenskala die Entwicklung und Implementierung geeigneter konstitutiver Modelle. Diese enthalten Materialparameter bzw. Materialfunktionen, die in der Regel nicht gemessen werden können. Sie beeinflussen jedoch die numerischen Resultate entscheidend. Der Prozess ihrer Ermittlung durch Anpassung berechneter an experimentelle Ergebnisse wird Materialparameteridentifikation, in neuerer Literatur häufig auch Kalibrierung (engl.: *calibration*) von Materialmodellen genannt. Diese Anpassung erfolgt in Rahmen von Optimierungsverfahren (für einen Überblick siehe Bruhns und Anding [5], Steck et al. [47] u. a.).

Liegt im Messgebiet der Probe ein homogener Zustand vor, muss zur Berechnung des Wertes der zu minimierenden Zielfunktion sowie eventuell benötigter Ableitungen lediglich das Deformationsgesetz im materiellen Punkt integriert werden (Anfangswertproblem). In diesem Fall werden neben gradientenbasierten (deterministischen) Optimierungsverfahren auch bei komplizierterem Materialverhalten vereinzelt gradientenlose Ansätze (stochastische Methoden, Evolutionsstrategien) in der Literatur untersucht (vgl. Harth et al. [20]).

Bei der Auswertung von Proben mit einem inhomogenen Zustand im Messgebiet ist der Informationsgehalt der Experimente größer. Für die Parameteridentifikation ist es dann jedoch notwendig, den Wert der Zielfunktion durch Lösung eines Anfangs-Randwert-Problems zu bestimmen, wozu in der Regel die Finite-Elemente-Methode (FEM) eingesetzt wird. Gradientenlose Verfahren sind wegen des großen zeitlichen Aufwandes in diesem Zusammenhang nicht geeignet – hingegen haben sich deterministische Optimierungsverfahren bewährt. Bezüglich ihrer mathematischen Grundlagen sei u. a. auf die Monografien von Beck und Arnold [3], Dennis und Schnabel [9], Rao [43] sowie Nocedal und Wright [40] verwiesen. Ihre Anwendung auf Probleme der Parameteridentifikation hat in den vergangenen zwei Dekaden zu einer Vielzahl relevanter Publikationen geführt. Dabei steht die Frage der Ermittlung der erforderlichen Ableitungen für die Gradienten der Zielfunktion im Mittelpunkt des Interesses.

An der Professur Festkörpermechanik der TU Chemnitz orientierten sich bisherige Untersuchungen zur numerischen Ermittlung von Materialparametern aus inhomogenen Verschiebungsfeldern insbesondere an den frühen Veröffentlichungen von Mahnken und Stein [34] sowie Gelin und Ghouati [14] für kleine inelastische Verzerrungen. In diesen Arbeiten wird das so genannte Verfahren der halbanalytischen Sensitivitätsanalyse ausführlich vorgestellt. Dieses Verfahren basiert auf der impliziten Differentiation der schwachen Formulierung des Gleichgewichts sowie des ausiterierten Deformationsgesetzes und führt auf ein globales Gleichungssystem mit der aus der direkten Aufgabe bekannten Systemmatrix, aber veränderten

rechten Seiten. Dessen Lösung sind die Ableitungen der Verschiebungskoordinaten nach den Materialparametern in den Knoten des FE-Netzes. Weiterführende Untersuchungen für große Verzerrungen, spezielle Materialmodelle und unterschiedliche Formulierungen des Optimierungsproblems sind u. a. bei Mahnken et al. [32, 33, 35, 36, 37], Steck et al. [47] sowie Johansson und Runesson [22, 23] zu finden.

Es ist offensichtlich, dass die erwähnte Vorgehensweise zur Kalibrierung von Materialmodellen auf der Basis von Optimierungsverfahren bezüglich der grundsätzlichen mathematischen Algorithmen nicht auf spezielle Materialklassen beschränkt ist. In einigen (allerdings nicht sehr zahlreichen) Arbeiten wurden somit auch numerische Verfahren zur Parameteridentifikation bei gemischten konstitutiven Ansätzen vorgestellt. Ogden et al. [41] diskutieren dabei Probleme bei der in der Praxis üblichen Auswertung homogener Felder am Beispiel nahezu inkompressibel elastischer Modelle. Die Anwendung nichtlinearer gradientenbasierter Optimierungsverfahren mit halbanalytischer Sensitivitätsanalyse auf das gemischte Problem eines gesättigten Zweiphasenmediums wird von Mahnken und Steinmann [38] sowie Lecampion und Constantinescu [31] ausführlich diskutiert. In beiden Fällen wird geometrisch lineares Verhalten betrachtet. Dabei nehmen Lecampion und Constantinescu elastisches Materialverhalten für die feste Phase an, Mahnken und Steinmann jedoch elastisch-plastisches (isotrope Drucker-Plastizität).

Die eigenen Untersuchungen befassten sich in den vergangenen Jahren mit der Entwicklung einer durchgängigen Lösung für die automatisierte Parameteridentifikation elastisch-plastischer Deformationsgesetze durch Auswertung inhomogener Verschiebungsfelder und globaler Informationen (wie Kraft-Verschiebungskurven). Kern des Verfahrens ist ein gradientenbasierter Optimierungsalgorithmus (das Levenberg-Marquardt-Verfahren hat sich besonders bewährt – vgl. [4, 25]) mit halbanalytischer Sensitivitätsanalyse. Das Gesamtverfahren wurde zunächst auf die Berücksichtigung kleiner Verzerrungen beschränkt (siehe [4, 16, 24, 26, 30]), seine adäquate Anwendung auf große Verzerrungen steht seit 1996 im Mittelpunkt der eigenen Arbeiten [17, 18, 25, 29]. Der hohe Verallgemeinerungsgrad der entwickelten Algorithmen gestattet deren problemlose Erweiterung auf andere Materialklassen (vgl. [42]).

Zusätzlich wird auf einige eigene Untersuchungen hingewiesen, die den Begriff der Parameteridentifikation auf den der Parameterschätzung erweitern, wodurch zusätzliche Aussagen zur Güte der Optimierungsergebnisse ermöglicht werden (vgl. [4, 12, 27]).

In der vorliegenden Arbeit werden die theoretischen Grundlagen und numerischen Algorithmen zur Lösung des inversen Problems der Kalibrierung nahezu inkompressibel elastischer Materialmodelle bei großen Verzerrungen mit Hilfe eines gradientenbasierten Optimierungsverfahrens vorgestellt. Da die Auswertung inhomogener Zustände angestrebt wird, die in jedem Optimierungsschritt die

Lösung eines vollständigen Feldproblems erfordern, sind gradientenlose Verfahren wegen ihres großen Berechnungsaufwandes für die vorgestellten Untersuchungen nicht geeignet.

Die Arbeit ist wie folgt gegliedert: In Abschnitt 2 werden grundsätzliche Fragen der Identifikation von Materialparametern als inverse Aufgabe diskutiert. Die theoretischen Grundlagen der verwendeten Optimierungsalgorithmen einschließlich wichtiger Elemente der Parameterschätzung werden in Abschnitt 3 vorgestellt. Der Abschnitt 4 ist der Herleitung und Erläuterung der Beziehungen für die halbanalytische Sensitivitätsanalyse gewidmet. Sie basiert auf der impliziten Differentiation der Randwertaufgabe für das gemischte direkte Problem. Numerische Beispiele mit synthetischen Messwerten werden ausführlich in Abschnitt 6 analysiert, nachdem im vorherigen Abschnitt Grundlagen des Materialmodells und spezielle konstitutive Ansätze vorgestellt wurden.

## 2 Kalibrierung von Materialmodellen: Ein inkorrektes inverses Problem

Die Materialmodellierung ist ein mehrstufiger Prozess der Abstraktion mit dem Ziel, eine weitestgehend wahrheitsgetreue analysierende bzw. vorausschauende Simulation realer Vorgänge zu ermöglichen (numerisches oder *in silico*-Experiment). Ausgangspunkt ist dabei die wahrgenommene Realität. Von dieser wird zunächst ein physikalisches Modell erstellt, in dem alle für die betrachtete Problematik wesentlichen strukturbedingten Materialcharakteristika erfasst werden. Neben prinzipiellen Fragen nach der Grundstruktur der Stoffe (Festkörper, Flüssigkeit, Gas oder mehrphasiges Gemisch), spielen dabei Effekte wie z. B. Zeitabhängigkeit, Reversibilität oder Abhängigkeit der Prozesse von nichtmechanischen Feldern eine Rolle.

Basierend auf dem physikalischen Modell werden konstitutive Beziehungen formuliert – ein mathematischer Apparat, der im engeren Sinne als Materialmodell bezeichnet wird. Mit dem mathematischen Modell können entweder direkt Vorgänge auf der Strukturebene des Materials beschrieben werden (z. B. im Rahmen der Mikromechanik), oder es werden die strukturbedingten makroskopischen Materialphänomene erfasst. Entsprechend werden letztere Beziehungen als *phänomenologische* Modelle bezeichnet. Diese finden in der Kontinuumsmechanik bis heute wesentlich größere Verbreitung bei der Untersuchung realer Vorgänge, da sie sich deutlich besser für eine numerische Umsetzung eignen.

Konstitutive Gleichungen enthalten Materialparameter oder Materialfunktionen, die das Simulationsergebnis signifikant beeinflussen. Daher können sie im Sinne der numerischen Lösung der direkten Aufgabe als *Ursache* für die Entwicklung

von Feldgrößen in (simulierten) realen Prozessen angesehen werden: Das direkte Problem beinhaltet die Berechnung von Vorgängen der Realität, ausgehend von vorgegebenen Parametern (Geometrie, Randbedingungen, Material). Da wesentliche geometrische Gegebenheiten und Randbedingungen in der Regel durch den Prozess definiert werden, sind das Materialmodell und besonders die darin enthaltenen Konstanten für das spezifische Simulationsergebnis “verantwortlich”.

An dieser Stelle erscheint es sinnvoll zu betonen, dass Materialparameter in der Regel keine den Materialstrukturen zuzuordnenden physikalischen Größen darstellen, sondern vielmehr im engeren Sinn Modellparameter repräsentieren (Parameter in mathematischen Ansätzen). Am Beispiel phänomenologischer Materialmodelle ist das besonders einsichtig und erklärt unmittelbar die im Weiteren angeführten Probleme bei der Kalibrierung konstitutiver Beziehungen.

Im Allgemeinen sind Materialparameter nicht direkt messbar. Sie können daher nur über ihre *Wirkungen* auf die (simulierte) Realität (die Entwicklung von Feldgrößen) durch eine optimale Anpassung von Simulationsergebnissen an Experimente approximativ bestimmt werden. Dieser Prozess wird Materialparameteridentifikation genannt und stellt eine inverse Aufgabe dar (Bestimmung der Ursache aus deren Wirkungen). Zu ihrer Lösung werden Optimierungsverfahren eingesetzt.

Aus den bisherigen Ausführungen wird deutlich, dass das betrachtete inverse Problem inkorrekt (schlecht gestellt) ist – Existenz, Eindeutigkeit und Stabilität der Lösung können nicht garantiert werden. Ursache sind der Verlust an Informationen über die wahrgenommene Realität während des Prozesses der Materialmodellierung sowie der Mangel an Informationen und deren Fehlerhaftigkeit bei der Erfassung experimenteller Daten zur Parameteridentifikation. Für eine zuverlässige Bestimmung von Materialparametern ist daher größte Sorgfalt bei der Gestaltung der konstitutiven Beziehungen und der Durchführung von Experimenten notwendig. Dabei ist besonders darauf zu achten, dass die für das betrachtete Problem wesentlichen Materialeigenschaften durch das Modell erfasst und in den konkreten Experimenten auch angesprochen werden.

Generell gilt, dass die Materialparameteridentifikation in der Regel keinen wirklich optimalen Satz an Konstanten des mathematischen Modells liefert (als allgemein gültiges globales Optimum) sondern Größen, die im mathematischen Sinn optimal an die zur Verfügung gestellten Informationen angepasst sind. Dies kann bereits an einem Beispiel verdeutlicht werden: Für einfache konstitutive Ansätze ist bei Auswertung homogener Zustände das (dann lineare) Optimierungsproblem häufig mathematisch geschlossen und eindeutig lösbar. Dennoch können mit diesen Parametern andere als die zur Optimierung verwendeten Belastungsfälle oftmals nicht realistisch simuliert werden. Hier sind bei der Kalibrierung offensichtlich für andere Problemkreise wesentliche Materialcharakteristika vernachlässigt worden.



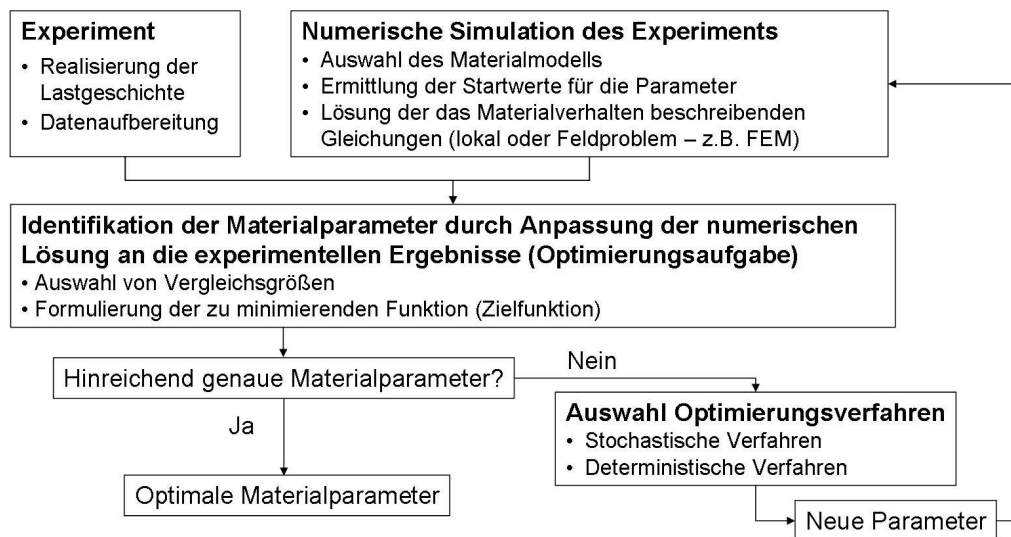


Abbildung 1: Schematische Darstellung des Prozesses der Kalibrierung von Materialmodellen (inverse Aufgabe der Parameteridentifikation).

Wie bereits erwähnt, wird in der modernen Literatur mit der Untersuchung zunehmend komplexerer Materialien (z. B. biologische Gewebe) immer häufiger der Begriff *Kalibrierung von Materialmodellen* anstelle *Materialparameteridentifikation* verwendet. Obwohl diese Begriffe (auch hier) synonym verwendet werden, entspricht die Bezeichnung Kalibrierung mehr dem Wesen der Lösung der damit verbundenen inversen Aufgabe. Darin kommt der spezifische Charakter der Anpassung eines aus einem abstrahierenden Prozess gewonnenen Modells an diskrete experimentelle Informationen deutlicher zum Ausdruck.

In Abb. 1 ist die experimentell-numerische Vorgehensweise der Kalibrierung von Materialmodellen schematisch dargestellt.

### 3 Parameteridentifikation als Optimierungsaufgabe

Wie oben ausführlich erläutert, stellt die Identifikation von Materialparametern ein inverses Problem dar, das in der Analyse ihrer Wirkungen auf messbare Feldgrößen besteht. Im Weiteren soll lediglich das mechanische Problem betrachtet werden, der Einfluss weiterer Felder wird vernachlässigt.

Da der Operator, der die Materialparameter auf mechanische Variable (z. B. die Verschiebungen) abbildet, in der Regel einen impliziten, nichtlinearen Charakter mit unbekannter mathematischer Struktur besitzt, ist seine explizite Inversion in geschlossener Form nicht möglich. Eine Ausnahme bildet die Beschreibung ausgewählter homogener Zustände mit konstitutiven Gleichungen, die bezüglich

der Materialparameter lineare Funktionen darstellen. Diese sollen jedoch wegen ihres stark eingeschränkten Anwendungsbereiches hier nicht betrachtet werden. Folglich führt das Problem der Kalibrierung von Materialmodellen im allgemeinen Fall auf die Lösung einer Optimierungsaufgabe: Die Parameter sind so zu bestimmen, dass eine geeignet gewählte Zielfunktion ihr Minimum erreicht. Der approximative Charakter der Parameter kommt darin zum Ausdruck, dass die Zielfunktion numerisch genau dann ein Minimum erreicht, wenn gemessene und berechnete lokale bzw. globale Größen genügend genau übereinstimmen.

### 3.1 Zielfunktion

Es sei eine Modellfunktion definiert, die eine physikalische Variable  $y$  beschreibt und von einem Variablenvektor  $\mathbf{x}$  sowie einem Vektor der Materialparameter  $\mathbf{c}$  abhängt.

$$y = y(\mathbf{x}, \mathbf{c}) \quad (1)$$

Für den Fall eines mechanischen Problems kann beispielsweise das Verschiebungsfeld in Abhängigkeit von Spannungen, inneren Variablen sowie den Materialparametern eine entsprechende Modellfunktion darstellen.

Die Kalibrierung von Materialmodellen verfolgt das Ziel, Parameter zu ermitteln, mit Hilfe derer eine hinreichend genaue numerische Approximation gemessener Werte  $\hat{y}_i$  für definierte Zustände  $\mathbf{x}_i$  erreicht werden kann. Der in diesem engeren Sinne optimale Parametervektor und somit die beste Approximation der gemessenen Größen können beispielsweise als ermittelt gelten, wenn eine Fehlerquadratsumme ihr Minimum annimmt.

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [\hat{y}_i - y(\mathbf{x}_i, \mathbf{c})]^2 \longrightarrow \min \quad (2)$$

Mit der Definition eines Residuenvektors zwischen gemessenen und berechneten Größen

$$\mathbf{r}(\mathbf{c}) = \{r_i(\mathbf{c})\} \quad \text{mit} \quad r_i(\mathbf{c}) = \hat{y}_i - y(\mathbf{x}_i, \mathbf{c}) \quad (3)$$

kann die Zielfunktion  $\Phi$  wie folgt als Quadratsummennorm formuliert werden:

$$\Phi(\mathbf{c}) = \frac{1}{2} \mathbf{r}^T(\mathbf{c}) \mathbf{r}(\mathbf{c}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n r_i^2(\mathbf{c}) \longrightarrow \min. \quad (4)$$

Dabei sollte die Anzahl  $n$  von Messdaten im Allgemeinen deutlich größer sein als die Anzahl  $n_c$  der gesuchten Parameter.

Die notwendige Optimalitätsbedingung

$$\nabla \Phi(\mathbf{c}^*) = \mathbf{0} \quad (5)$$

resultiert für Modelle, die linear in den Parametern  $\mathbf{c}$  sind, in einem System linearer algebraischer Gleichungen bezüglich der Koordinaten des optimalen Parametervektors  $\mathbf{c}^*$ , das als *Normalengleichung* bekannt ist.

$$\tilde{\mathbf{J}}^T \tilde{\mathbf{J}} \mathbf{c}^* = \tilde{\mathbf{J}}^T \mathbf{r} \quad (6)$$

Hierbei stellt  $\tilde{\mathbf{J}}$  die Jakobi-Matrix der ersten Ableitungen der Residuen nach den Materialparametern dar.

$$\tilde{\mathbf{J}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r_i}{\partial c_j} \end{pmatrix} \quad (7)$$

Ausgehend von den bisherigen Untersuchungen zur Elastoplastizität (vgl. z. B. [18, 25, 29]) wird für die Kalibrierung von Materialmodellen der nahezu inkompressiblen Elastizität bei großen Verzerrungen folgende verallgemeinerte Zielfunktion formuliert:

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{c}) &= \frac{\kappa_U}{2} \sum_{i=1}^{n_{LU}} \sum_{j=1}^{n_T} \sum_{K=1}^3 \left( \{U_K(\mathbf{c})\}_{ij} - \{\bar{U}_K\}_{ij} \right)^2 \\ &+ \frac{\kappa_{\mathcal{F}}}{2} \sum_{i=1}^{n_{L\mathcal{F}}} \sum_{K=1}^3 \left( \{\mathcal{F}_K(\mathbf{c})\}_i - \{\bar{\mathcal{F}}_K\}_i \right)^2 \\ &+ \frac{\kappa_{\mathcal{M}}}{2} \sum_{i=1}^{n_{LM}} \sum_{K=1}^3 \left( \{\mathcal{M}_K(\mathbf{c})\}_i - \{\bar{\mathcal{M}}_K\}_i \right)^2 . \end{aligned} \quad (8)$$

In diesem Zusammenhang werden lokale Verschiebungsinformationen sowie Kräfte und Momente als globale Größen berücksichtigt. Hierbei bedeuten:

- $U_K, \bar{U}_K$  – berechnete/gemessene Verschiebungen
- $\mathcal{F}_K, \bar{\mathcal{F}}_K$  – berechnete/gemessene Kräfte
- $\mathcal{M}_K, \bar{\mathcal{M}}_K$  – berechnete/gemessene Momente
- $\kappa_U, \kappa_{\mathcal{F}}, \kappa_{\mathcal{M}}$  – Wichtungsfaktoren
- $n_{LU}, n_{L\mathcal{F}}, n_{LM}$  – Anzahl der Lastschritte für die jeweils ausgewertete Größe
- $n_T$  – Anzahl der lokalen Messpunkte für das Verschiebungsfeld.

Die Ermittlung von  $y(\mathbf{x}, \mathbf{c})$  erfordert in diesem Fall die Lösung eines vollständigen Feldproblems in jedem Optimierungsschritt, beispielsweise mit Hilfe der FEM.

## 3.2 Optimierungsverfahren

Für Modelle, die nichtlinear in den Parametern  $\mathbf{c}$  sind, muss zu deren Ermittlung im Rahmen von deterministischen Optimierungsstrategien eine iterative Vorgehensweise gewählt werden.

$$\mathbf{c}_{k+1} = \mathbf{c}_k + \mathbf{s}_k \quad (9)$$

Die am häufigsten zitierte Methode im Zusammenhang mit der nichtlinearen Approximation auf der Basis von Quadratsummennormen ist das Gauß-Newton-Verfahren. Dabei wird der Suchschritt  $\mathbf{s}_k$  aus der Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\tilde{\mathbf{J}}_k^T \tilde{\mathbf{J}}_k \mathbf{s}_k = -\tilde{\mathbf{J}}_k^T \mathbf{r}_k \quad (10)$$

ermittelt. Dieses System kann als die notwendige Optimalitätsbedingung für eine lineare Approximation der Zielfunktion  $\Phi(\mathbf{c}_k)$  interpretiert werden. In diesem Sinne stellt das Gauß-Newton-Verfahren einen Spezialfall der Newton-Approximation dar, wobei Terme zweiter Ordnung der Hesse-Matrix  $\nabla^2\Phi$  vernachlässigt werden (vgl. [9, 40, 46] u. a.). Damit besteht der Hauptvorteil der Gauß-Newton-Approximation gegenüber einer klassischen Newton-Methode darin, dass lediglich die erste Ableitungen in Form der Jakobi-Matrix  $\tilde{\mathbf{J}}$  benötigt werden.

Die Gauß-Newton-Prozedur konvergiert sehr schnell in einer bestimmten Umgebung der Lösung  $\mathbf{c}^*$ . Als problematisch kann sich das Konvergenzverhalten des Optimierungsvorgangs außerhalb dieser Umgebung erweisen, bzw. wenn  $\tilde{\mathbf{J}}$  rangdefizitär ist. Diese Nachteile können mit Hilfe der so genannten *trust-region*-Algorithmen, wie beispielsweise dem Levenberg-Marquardt-Verfahren, umgangen werden. Dabei wird die Suchschrittweite durch einen zweckmäßig zu wählenden Vertrauensbereich  $\Delta_k$  beschränkt.

$$\|\mathbf{s}_k\| \leq \Delta_k \quad (11)$$

Ein ausgezeichneter aktueller Überblick ist in [40] gegeben.

## 3.3 Elemente der Parameterschätzung

Das Ergebnis der Kalibrierung von Materialmodellen hängt wesentlich von Umfang und Genauigkeit der experimentellen Daten sowie von der Praxisrelevanz der Modellfunktion (mithin der konstitutiven Beziehungen selbst) ab, die das physikalische Verhalten adäquat beschreiben muss.

Bedingt durch die im Allgemeinen sehr komplexe Topologie der Zielfunktion werden in der Praxis häufig in der Umgebung der optimalen Lösung mehr oder weniger ausgeprägte Regionen mit Zielfunktionswerten beobachtet, die wenig vom

detektierten Minimum abweichen. Damit stellt sich die Frage, welche Parameterkombinationen in der Nähe der optimalen Lösung etwa die gleiche Approximationsgüte bezüglich des untersuchten Problems besitzen. Dieses Problem ist äquivalent zur Frage nach der Vertrauenswürdigkeit einer Parameterregion im statistischen Sinne.

Zusätzlich kann beobachtet werden, dass es mitunter bestimmte Suchrichtungen gibt, entlang derer sich der Zielfunktionswert kaum ändert, d.h., Parameterkombinationen können sich nicht immer beliebig zueinander ändern, um die Approximationsgüte des Modells zu verbessern. Aus einem solchen Zielfunktionsverhalten kann auf starke Korrelationen von Parametern untereinander geschlossen werden.

Die Erweiterung des Prozesses der Parameteridentifikation um statistische Elemente, die sich auf Fragen der Vertrauenswürdigkeit und Korrelation beziehen, führt auf Methodologien, die unter dem Begriff *Parameterschätzung* zusammengefasst werden. Im Sinne der Theorie, wie sie in [3] für Modelle beschrieben wird, die nichtlinear in den Parametern sind, ist auch in diesem Rahmen zunächst im herkömmlichen Sinne der optimale Parametervektor  $\mathbf{c}^*$  zu ermitteln.

Für die Fehlerquadratminimum-Schätzung werden folgende Voraussetzungen definiert: Die Residuen  $r_i$  (siehe (3))

- nehmen den Wert Null als Mittelwerte an,
- weisen eine gemeinsame, unbekannte Varianz  $\sigma^2$  auf und
- sind unkorreliert.

Weiterhin

- sind die unabhängigen Variablen  $\mathbf{x}$  frei von Fehlern und
- die Parameter  $\mathbf{c}$  werden als konstant angesehen.

Wird die Gültigkeit dieser Annahmen akzeptiert, dann kann die Kovarianzmatrix  $\mathbf{P}$  des nichtlinearen Modells mit

$$\mathbf{P} = \text{cov}(\mathbf{c}^*) \approx \sigma^2 \left[ \tilde{\mathbf{J}}^T(\mathbf{c}^*) \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{c}^*) \right]^{-1} \quad (12)$$

näherungsweise aus dem linearisierten Modell bezüglich des optimalen Parametervektors  $\mathbf{c}^*$  abgeleitet werden. Für den unbekanntem Wert der Varianz  $\sigma^2$  der Residuen gilt die Schätzung

$$\sigma^2 \approx s^2 = \frac{\mathbf{r}^T(\mathbf{c}^*) \mathbf{r}(\mathbf{c}^*)}{n - n_c}. \quad (13)$$

Hierbei sind  $n$  die Anzahl der Vergleichswerte und  $n_c$  die Anzahl der Parameter. Wenn sowohl die Jakobi-Matrix  $\tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{c}^*)$  als auch der Residuenvektor  $\mathbf{r}(\mathbf{c}^*)$  aus

dem Optimierungsprozess bekannt sind, können Elemente der Fehlerschätzung mit geringem Aufwand ermittelt werden.

Die Kovarianzmatrix  $\mathbf{P}$  beschreibt ein Vertrauensellipsoid im  $n_p$ -dimensionalen Parameterraum. Im Gegensatz zur linearen Regressionsanalyse ist es nicht möglich, dem Vertrauensbereich nichtlinearer Modelle eine bestimmte Wahrscheinlichkeit zuzuordnen.

Da die Diagonalelemente der Kovarianzmatrix  $\mathbf{P} = \{P_{jk}\}$  Schätzwerte bezüglich der Varianzen der zugehörigen Parameter darstellen

$$\sigma^2(c_j) \approx P_{(jj)}, \quad (14)$$

ist es möglich, mit

$$\text{conf}(p_j) = \left[ p_j^* - \sqrt{P_{(jj)}}, p_j^* + \sqrt{P_{(jj)}} \right] \quad (15)$$

Vertrauensintervalle für die Parameter näherungsweise zu definieren. Dabei umschließt der  $n_p$ -dimensionale Kubus dieser Vertrauensintervalle das Vertrauensellipsoid.

Die Korrelationsmatrix  $\mathbf{R} = \{R_{jk}\}$  wird mit der Beziehung

$$R_{jk} = \frac{P_{jk}}{\sqrt{P_{(jj)} P_{(kk)}}} \quad (16)$$

berechnet. Während die Diagonalelemente von  $\mathbf{R}$  nach Definition jeweils den Wert Eins annehmen, erfüllen die Nebendiagonalelemente die Ungleichung  $-1 \leq R_{jk} \leq +1$  und beschreiben die Korrelationen der Parameter untereinander. Werte für  $R_{jk}$  in der Nähe von  $\pm 1$  deuten auf streng korrelierte Parameterpaarungen hin. In diesem Fall ist deren eindeutige Bestimmung unmöglich.

Die diskutierten Elemente der Parameterschätzung reichen aus, um für die weiter unten angegebenen Beispiele eine Analyse der Optimierungsergebnisse im statistischen Sinne vornehmen zu können. Darüber hinaus gehende Erläuterungen zur Parameterschätzung, insbesondere bei Betrachtung multikriterieller Zielfunktionen, sind u. a. in [4, 29] ausführlich dargestellt. An dieser Stelle soll lediglich darauf hingewiesen werden, dass mit diesen Verfahren Hinweise zur Qualität der gefundenen Lösung des Optimierungsproblems, und damit gegebenenfalls zu seinem Inkorrektheitsgrad, gegeben werden können. Die Inkorrektheit der inversen Aufgabe bezüglich der Existenz lokaler Minima und damit die Abhängigkeit des Optimierungsergebnisses von den Startwerten der Parameter werden durch Elemente der Parameterschätzung weder beeinflusst noch bewertet.

## 4 Materialmodell der isotropen, nahezu inkompressiblen Elastizität bei großen Verzerrungen

### 4.1 Kinematik

Es wird eine materielle (Lagrangesche) Beschreibungsweise verwendet, bei der alle Größen als Funktionen der Koordinaten der Ausgangskonfiguration definiert werden. In dieser Konfiguration stellt der betrachtete Körper eine Menge  $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^3$  materieller Punkte mit dem Rand  $\Gamma_0$  dar (ein Gebiet im dreidimensionalen Euklidischen Raum  $\mathbb{E}^3$ ). Der Rand wird in Bereiche  $\Gamma_{0D}$  mit Dirichlet-Randbedingungen und  $\Gamma_{0N}$  mit Neumann-Randbedingungen unterteilt. Dabei gilt:  $\Gamma_0 = \Gamma_{0D} \cup \Gamma_{0N}$  und  $\Gamma_{0D} \cap \Gamma_{0N} = \emptyset$ . Die materiellen Punkte werden durch die Ortsvektoren  $\mathbf{X} \in \Omega_0$  bzw. ihre Koordinaten  $(X_1, X_2, X_3)$  charakterisiert.

Da die Spezifika der Kinematik und konstitutiven Beziehungen für nahezu inkompressible elastische Materialien u. a. in [7, 44] ausführlich erläutert werden, sollen hier nur die wichtigsten Elemente Erwähnung finden, die für das Verständnis der Arbeit erforderlich sind. In diesem Zusammenhang werden o.E.d.A. koaxiale kartesische Koordinatensysteme betrachtet. Dabei vereinfachen sich Ableitungen nach den Ortskoordinaten zu partiellen Ableitungen im Gegensatz zur Verwendung kovarianter Ableitungen in allgemeinen krummlinigen Koordinaten. Der Wechsel des Systems der als unabhängige Variable gewählten Ortskoordinaten reduziert sich in diesem Fall bezüglich der Betrachtung vektorieller Größen auf deren Paralleltransport bei konstanten Koordinaten (vgl. z. B. [7, 19, 39]).

Den Ausgangspunkt der kinematischen Betrachtungen zur Herleitung konstitutiver Gesetze bei großen Verzerrungen bildet der Deformationsgradient  $\mathbf{F}$ , der ein materielles Linienelement von der Ausgangs- in die Momentankonfiguration abbildet. Unter den oben erwähnten Annahmen gilt:

$$\mathbf{F} = (\text{Grad } \mathbf{U})^T + \mathbf{I}. \quad (17)$$

Hierbei stellt  $\mathbf{U} = \mathbf{U}(\mathbf{X}, t)$  den Verschiebungsvektor als Funktion der materiellen Koordinaten und der Zeit dar (für eine ausführliche Diskussion siehe [7]). Basierend auf dem Deformationsgradienten werden zur Beschreibung der Deformation eines Körpers der Rechts-Cauchy-Green Tensor  $\mathbf{C}$  und der Greensche Verzerrungstensor  $\mathbf{E}$  verwendet:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \text{Grad } \mathbf{U} + (\text{Grad } \mathbf{U})^T + \text{Grad } \mathbf{U} (\text{Grad } \mathbf{U})^T + \mathbf{I} \quad (18a)$$

$$2\mathbf{E} = \mathbf{C} - \mathbf{I} = \text{Grad } \mathbf{U} + (\text{Grad } \mathbf{U})^T + \text{Grad } \mathbf{U} (\text{Grad } \mathbf{U})^T. \quad (18b)$$

Die Forderung nach nahezu inkompressiblem Materialverhalten beinhaltet, dass sich das Volumen eines materiellen Volumenelements während der Deformation nicht ändern soll. Das Verhältnis differentieller Volumina im deformierten und undeformierten Zustand kann über die Determinante des Deformationsgradienten erfasst werden:

$$\frac{dV}{dV_0} = \det \mathbf{F} = J. \quad (19)$$

Die Eigenschaft der idealen Inkompressibilität lässt sich damit mathematisch formulieren als:

$$J \equiv 1. \quad (20)$$

Nach der üblichen Vorgehensweise (siehe z. B. [44]) wird im Folgenden für die Betrachtung volumenerhaltender Deformationsprozesse die multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten in zwei Anteile definiert:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_v \mathbf{F}_d. \quad (21)$$

Diese Aufteilung ist auch unter der Bezeichnung *Flory-Split* bekannt. Hierbei präsentiert  $\mathbf{F}_v$  den Anteil der Deformation, der zu einer reinen Volumenänderung des materiellen Volumenelements führt, wohingegen der Anteil  $\mathbf{F}_d$  die reine Gestaltänderung widerspiegelt. Bezüglich des volumetrischen Anteils gilt:

$$\mathbf{F}_v \stackrel{\text{def}}{=} J^{\frac{1}{3}} \mathbf{I} \quad (J \approx 1). \quad (22)$$

Daraus folgt für den isochoren Anteil des Deformationsgradienten

$$\mathbf{F}_d = J^{-\frac{1}{3}} \mathbf{F} \quad \text{mit} \quad \det \mathbf{F}_d \equiv 1. \quad (23)$$

Mit diesen Definitionen kann ein isochorer Anteil des Rechts-Cauchy-Green Tensors formuliert werden.

$$\mathbf{C}_d = \mathbf{F}_d^T \mathbf{F}_d = J^{-\frac{2}{3}} \mathbf{C} \quad (24)$$

## 4.2 Thermodynamisch konsistentes Deformationsgesetz

Den Ausgangspunkt zur Sicherung der thermodynamischen Konsistenz des Deformationsgesetzes, hier für nahezu inkompressible Materialien, bildet die Clausius-Duhem-Ungleichung – eine Kombination der ersten beiden Hauptsätze der Thermodynamik. Im isothermen Fall nimmt sie die Form

$$-\varrho_0 \dot{\psi}(\mathbf{C}) + \frac{1}{2} \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{C}} \geq 0 \quad (25)$$

bezüglich der Ausgangskonfiguration an. Hier stellen  $\varrho_0$  die Dichte,  $\bar{\psi}$  die freie Helmholtz-Energiedichte pro Masseinheit sowie  $\mathbf{T}$  den 2. Piola-Kirchhoffschen



Spannungstensor dar. Wie üblich bezeichnet ein Punkt über einer Variable deren materielle Zeitableitung.

Da elastische Deformationen vollständig reversible Prozesse darstellen, gilt in (25) das Gleichheitszeichen. In diesem Fall kann das folgende Deformationsgesetz der Hyperelastizität abgeleitet werden:

$$\mathbf{T} = 2\rho_0 \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \mathbf{C}} = 2 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C}} \quad (26)$$

Wie in der klassischen Kontinuumsmechanik wird die freie Energiedichte als isotrope Tensorfunktion eines geeigneten Verzerrungsmaßes betrachtet. Im Fall des nahezu inkompressiblen Materialverhaltens wird angenommen (siehe z. B. [44]), dass diese additiv in einen deviatorischen (isochoren) Anteil  $\psi_d$ , der vom Verzerrungstensor  $\mathbf{C}_d$  und einen volumetrischen Anteil, der von  $J$  abhängt, zerlegt werden kann:

$$\psi = \psi_d(\mathbf{C}_d) + \tilde{\psi}_v(J). \quad (27)$$

Für die weiteren Betrachtungen ist es zweckmäßig, den volumetrischen Anteil der freien Energiedichte in der Form  $\frac{1}{2}\kappa\psi_v^2(J)$  zu definieren. Hierbei stellt  $\kappa$  den Kompressionsmodul dar, der im Fall von kleinen Verzerrungen aus  $\kappa = \lambda + \frac{2}{3}\mu$  (mit den Lamé-Konstanten  $\lambda$  und  $\mu$ ) ermittelt werden kann. Zusätzlich besitzt  $\psi_v$  die Eigenschaft

$$\psi_v(J = 1) = 0. \quad (28)$$

Damit folgt für (27) die ausführliche Darstellung:

$$\psi = \psi_d(\mathbf{C}_d) + \frac{1}{2}\kappa\psi_v^2(J) = \psi_d(I(\mathbf{C}_d), II(\mathbf{C}_d)) + \frac{1}{2}\kappa\psi_v^2(J). \quad (29)$$

Mit der Definition des hydrostatischen Drucks  $p$

$$p \stackrel{\text{def}}{=} \kappa\psi_v \quad (30)$$

im Sinne einer konstitutiven Annahme wird unter Berücksichtigung von (29) aus Gleichung (26) die hyperelastische Beziehung

$$\mathbf{T} = 2 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C}} = 2 \frac{\partial \psi_d}{\partial \mathbf{C}_d} \cdot \frac{\partial \mathbf{C}_d}{\partial \mathbf{C}} + 2\kappa\psi_v \frac{\partial \psi_v}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{T}_d + \mathbf{T}_v \quad (31)$$

für den 2. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor bei nahezu inkompressiblem Materialverhalten abgeleitet. Bezüglich der Teilspannungen gilt dabei:

$$\mathbf{T}_d = 2J^{-\frac{2}{3}} \frac{\partial \psi_d}{\partial \mathbf{C}_d} \cdot \left( \mathbf{I} - \frac{1}{3}\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C} \right) \quad (32a)$$

$$\mathbf{T}_v = p\mathbf{S}_v \quad \text{mit} \quad \mathbf{S}_v = J \frac{\partial \psi_v}{\partial J} \mathbf{C}^{-1}. \quad (32b)$$

### 4.3 Spezielle konstitutive Gleichungen

Die Beziehung der Hyperelastizität (26) gilt gleichermaßen für kompressibles wie auch vollständig oder nahezu inkompressibles Materialverhalten. Folglich sind die grundsätzlichen Algorithmen für die Lösung der direkten und inversen Aufgaben für elastisches Materialverhalten bei großen Verzerrungen unabhängig von der Bedingung der Volumenkonstanz. Im Fall der Kompressibilität werden die Spannungen jedoch eindeutig durch die Geometrieänderungen während des Deformationsprozesses bestimmt. Eine Aufspaltung in unterschiedliche Spannungsanteile ist dann nicht erforderlich. Damit muss für kompressibel elastische Materialien kein Randwertproblem in gemischter Formulierung gelöst werden, kann jedoch als Sonderfall eines solchen betrachtet werden. Es lag somit nahe, die konkrete Implementierung der entwickelten numerischen Algorithmen für das direkte und das inverse Problem so zu realisieren, dass kompressibles und nahezu inkompressibles elastisches Materialverhalten mit einem Programm simuliert werden können.

Für die unten präsentierten numerischen Untersuchungen wurde die Kalibrierung von hyperelastischen Materialmodellen am Beispiel von drei konkreten Realisierungen für die Funktion der freien Energiedichte analysiert. Dabei wurde jeweils kompressibles sowie nahezu inkompressibles Materialverhalten betrachtet. Zwei der Ansätze (Neo-Hooke und Mooney-Rivlin) finden breite praktische Anwendung bei der Modellierung des Materialverhaltens von Elastomeren und gehören zu den Standardformulierungen in kommerziellen FEM-Programmen. Der dritte Ansatz basiert auf Funktionen, die von Fung (siehe z. B. [13]) vor ca. 30 Jahren untersucht wurden, und das spezifische, versteifende Materialverhalten biologischer Gewebe im elastischen Bereich besser approximieren als Polynomansätze bezüglich der Invarianten geeigneter Verzerrungsmaße.

Wird das elastische Materialverhalten bei großen Verzerrungen als kompressibel angenommen, gelten für Neo-Hooke, Mooney-Rivlin und das modifizierte Fung-Material (in dieser Reihenfolge) folgende Ansätze der Funktion der freien Energiedichte:

$$\psi = c_{10} (I - \ln III - 3) + D_2 (\ln III)^2 \quad (33a)$$

$$\psi = c_{10} (I - 3) + c_{01} (II - 3) - (c_{10} + 2c_{01}) \ln III + D_2 (\ln III)^2 \quad (33b)$$

$$\psi = \frac{c_{10}}{\alpha} [e^{\alpha(I - \ln III - 3)} - 1] + D_2 (\ln III)^2 \quad (33c)$$

Hierbei werden die Hauptinvarianten  $I$ ,  $II$  sowie  $III$  als Funktionen des Tensors der Gesamtverzerrungen  $\mathbf{C}$  betrachtet.

Zur Modellierung nahezu inkompressibel elastischen Materialverhaltens soll für den volumetrischen Anteil der freien Energiedichte der vielfach diskutierte Ansatz

$$\psi_v(J) = \ln J \quad (34)$$

verwendet werden. Im Zusammenhang mit der Teilspannung  $\mathbf{T}_v$  (siehe 32b) führt er auf die einfache Beziehung  $\mathbf{T}_v = p \mathbf{C}^{-1}$ . Bezüglich des deviatorischen Anteils der freien Energiedichte gelten für Neo-Hooke, Mooney-Rivlin und das modifizierte Fung-Material (wiederum in dieser Reihenfolge) die Ansätze:

$$\psi_d = c_{10} (I - 3) \quad (35a)$$

$$\psi_d = c_{10} (I - 3) + c_{01} (II - 3) \quad (35b)$$

$$\psi_d = \frac{c_{10}}{\alpha} [e^{\alpha(I-3)} - 1] \quad (35c)$$

In diesem Fall stellen die Invarianten  $I$  und  $II$  Funktionen des isochoren Anteils  $\mathbf{C}_d$  des Rechts-Cauchy-Green Tensors dar.

Die Größen  $c_{10}$ ,  $c_{01}$ ,  $D_2$  sowie  $\alpha$  stellen Materialparameter dar, deren numerische Identifikation weiter unten an verschiedenen Beispielen, basierend auf synthetischen Messwerten, diskutiert wird.

## 5 Sensitivitätsanalyse

Im Rahmen der Identifikation von Materialparametern wird die Berechnung der Ableitungen  $dr_i/dc_j$  für den Residuenvektor (3) des Optimierungsmodells nach einem beliebigen Materialparameter  $c_j$  des Parametervektors  $\mathbf{c}$  als *Sensitivitätsanalyse* bezeichnet. Hängt die Modellfunktion  $y$  (1) ausschließlich explizit von den Materialparametern ab, kann die Sensitivitätsanalyse auf analytischem Wege ausgeführt werden. Dann gehen die Differentialquotienten  $dr_i/dc_j$  in partielle Ableitungen über (vgl. Beziehung (7)). Bei komplexerem Materialverhalten sind implizite Abhängigkeiten von den Materialparametern zu berücksichtigen, was die Sensitivitätsanalyse deutlich erschwert.

Eine weit verbreitete Methodik zur Sensitivitätsanalyse besteht in der Ermittlung der benötigten Ableitungen mit Hilfe des Verfahrens der finiten Differenzen (siehe z. B. [45, 48]). Diese Vorgehensweise hat Vorteile bezüglich seiner Universalität und Einfachheit, was die Möglichkeit eröffnet, kommerzielle Software für die Lösung des direkten Problems innerhalb der Optimierungsschritte zu verwenden. Die Tatsache, dass für einen einseitigen Differenzenquotienten pro Lastschritt, der zur Zielfunktion bzw. deren Ableitungen beiträgt,  $n_c + 1$  ( $n_c$  – Anzahl zu optimierender Parameter) Berechnungen des vollständigen direkten Problems, bei einem zentralen Differenzenquotienten sogar  $2n_c + 1$  Durchläufe notwendig sind, wirken

sich hingegen nachteilig auf den numerischen Aufwand aus. Zudem ist die Wahl einer geeigneten Parameterdifferenz, für die es keine allgemein gültigen Regeln gibt, entscheidend für Genauigkeit und Stabilität der Optimierungslösung.

Um diese Nachteile der numerischen Sensitivitätsanalyse zu vermeiden, kann ein halbanalytisches Verfahren genutzt werden, das auf der impliziten Differentiation der grundlegenden Beziehungen der Anfangs-Randwert-Aufgabe beruht (für Details siehe u. a. [4, 18, 15, 24, 27, 36]). Das hat den Vorteil, dass analoge algorithmische Strukturen wie bei der Lösung des direkten Problems entstehen. Damit kann in effektiver Weise auf dort genutzte numerische Verfahren zurückgegriffen werden. Zudem werden die Ableitungen auf der Basis der halbanalytischen Sensitivitätsanalyse mit der gleichen Genauigkeit wie die Feldvariablen berechnet. Das kann bei der numerischen Sensitivitätsanalyse nicht gewährleistet werden.

Im Folgenden werden die Grundlagen der halbanalytischen Sensitivitätsanalyse für die Kalibrierung von Materialmodellen der nahezu inkompressiblen Elastizität bei großen Verzerrungen unter Berücksichtigung lokaler Verschiebungsinformationen und globaler Kraft-Verschiebungs-Kurven als Modellvariablen für das Optimierungsproblem vorgestellt.

## 5.1 Schwache Formulierung des Randwertproblems und seine Linearisierung: Direkte Aufgabe

Das Randwertproblem der nahezu inkompressiblen Elastizität wird in Analogie zu den Ansätzen in [44] und anderer Autoren als gemischtes Zweifeldproblem definiert. Ausgangspunkt für die Herleitung der Feldgleichungen in  $\Omega_0$  sind die Variationsformulierungen der Gleichgewichtsbedingungen sowie einer Nebenbedingung zur Erfüllung der Inkompressibilität.

Der Impulssatz ist originär in der Momentankonfiguration definiert. Wie in [7, 19] ausführlich erläutert, kann er nach einigen Umformungen in der lokalen Formulierung

$$\text{Div}(\mathbf{T}\mathbf{F}^T) + \varrho_0(\mathbf{K} - \mathbf{A}) = \mathbf{0}. \quad (36)$$

ausschließlich mit Größen dargestellt werden, die Funktionen der Koordinaten  $\mathbf{X}$  des Ausgangszustandes sind. Hier werden mit  $\mathbf{K}(\mathbf{X})$  massebezogene Kräfte und mit  $\mathbf{A}(\mathbf{X})$  die Beschleunigung bezeichnet.

Im Weiteren wird eine zusätzliche Nebenbedingung zur Erfassung der Inkompressibilität betrachtet. Dabei wird die Annahme genutzt, dass in jedem materiellen Punkt des Körpers der hydrostatische Druck eine Funktion der Volumenänderung sei. Aus der Definition (30) des hydrostatischen Drucks folgt nach einer einfachen

Umformung die lokale Inkompressibilitätsbedingung:

$$\psi_v(J) - \frac{1}{\kappa} p = 0. \quad (37)$$

Aus der Multiplikation von (36) mit einer beliebigen Testfunktion  $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{X})$  (wobei gilt:  $\mathbf{V} \in (H_0^1(\Omega_0))^3$ ,  $\mathbf{V} = \mathbf{0}$  auf  $\Gamma_{0D}$ ) sowie der Beziehung (37) mit einer beliebigen Testfunktion  $q \in L_2(\Omega_0)$  (für die keine expliziten Randbedingungen existieren) und Integration beider Gleichungen über das Volumen des undeformierten Gebietes  $\Omega_0$  folgen die schwachen Formulierungen der Gleichgewichtsbedingungen sowie der Inkompressibilitätsbedingung. Bei Betrachtung quasistatischer Probleme und Vernachlässigung volumenförmiger Kräfte sowie einigen weiteren Umformungen, die in [7] im Detail dargestellt sind, ergeben sich folgende Beziehungen:

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{T} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{U}; \mathbf{V}) d\Omega_0 = \int_{\Gamma_{0N}} \bar{\mathbf{R}} \mathbf{V} d\Gamma_0 \quad (38a)$$

$$\int_{\Omega_0} \left[ \psi_v(J) - \frac{1}{\kappa} p \right] q d\Omega_0 = 0. \quad (38b)$$

Hier stellt  $\bar{\mathbf{R}}$  den Vektor der gegebenen äußeren Belastung am Neumann-Rand dar. Zusätzlich wurde zur Vereinfachung der Darstellung der zweistufige Tensor

$$2 \mathbf{E}(\mathbf{U}; \mathbf{V}) \stackrel{\text{def}}{=} (\text{Grad} \mathbf{V})^T + \text{Grad} \mathbf{V} + \text{Grad} \mathbf{U} (\text{Grad} \mathbf{V})^T + \text{Grad} \mathbf{V} (\text{Grad} \mathbf{U})^T \quad (39)$$

definiert.

Mit den Beziehungen (38a), (38b) besteht somit, unter Berücksichtigung der Spannungszerlegung (31), die gemischte Randwertaufgabe der nahezu inkompressiblen Elastizität bei großen Verzerrungen in der Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems

$$a_0(\mathbf{U}; \mathbf{V}) + b_0(\mathbf{U}; p, \mathbf{V}) = f(\mathbf{V}) \quad \forall \mathbf{V} \in (H_0^1(\Omega_0))^3 \quad (40a)$$

$$b_1(\mathbf{U}; q) - c_0(p, q) = 0 \quad \forall q \in L_2(\Omega_0) \quad (40b)$$

bezüglich der Feldgrößen Verschiebung  $\mathbf{U}$  und hydrostatischer Druck  $p$ .

Dabei gilt für die einzelnen Teile des Systems:

$$a_0(\mathbf{U}; \mathbf{V}) = \int_{\Omega_0} \mathbf{T}_d(\mathbf{U}) \cdot \cdot \mathbf{E}(\mathbf{U}; \mathbf{V}) d\Omega_0 \quad (41a)$$

$$b_0(\mathbf{U}; p, \mathbf{V}) = \int_{\Omega_0} p \mathbf{S}_v(\mathbf{U}) \cdot \cdot \mathbf{E}(\mathbf{U}; \mathbf{V}) d\Omega_0 \quad (41b)$$

$$f(\mathbf{V}) = \int_{\Gamma_{0N}} \bar{\mathbf{R}} \mathbf{V} d\Gamma_0 \quad (41c)$$

$$b_1(\mathbf{U}; q) = \int_{\Omega_0} \psi_v(J(\mathbf{U})) q d\Omega_0 \quad (41d)$$

$$c_0(p, q) = \int_{\Omega_0} \frac{1}{\kappa} p q d\Omega_0. \quad (41e)$$

Zur Lösung des Gleichungssystems (40a) und (40b) mit Hilfe des Newton-Verfahrens macht sich dessen Linearisierung erforderlich. Dazu werden Taylor-Entwicklungen bezüglich beider Feldvariablen  $\mathbf{U}$  und  $p$  betrachtet, die jeweils nach dem ersten Glied abgebrochen werden. In diesem Zusammenhang wird die Lösung des Zweifeldproblems  $(\mathbf{U}_t, p_t) = (\mathbf{U}, p)$  zu einem Zeitpunkt  $t$  als bekannt vorausgesetzt und dessen Lösung  $(\mathbf{U}_{t+\Delta t}, p_{t+\Delta t}) = (\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}, p + \Delta p)$  zum Zeitpunkt  $t + \Delta t$  gesucht. Nach den entsprechenden Umformungen (zu Details siehe [7]) kann die gemischte Randwertaufgabe der nahezu inkompressiblen Elastizität bei finiten Verzerrungen in ihrer linearisierten Form (Iterationsschritt im Lastschritt) als lineares Gleichungssystem dargestellt werden.

$$a(\mathbf{U}; \Delta\mathbf{U}, \mathbf{V}) + b_0(\mathbf{U}; \Delta p, \mathbf{V}) = f(\mathbf{V}) - a_0(\mathbf{U}; \mathbf{V}) - b_0(\mathbf{U}; p, \mathbf{V}) \quad (42a)$$

$$b_0(\mathbf{U}; q, \Delta\mathbf{U}) - c_0(\Delta p, q) = c_0(p, q) - b_1(\mathbf{U}; q) \quad (42b)$$

Selbstverständlich gilt auch dieses System für alle  $\mathbf{V} \in (H_0^1(\Omega_0))^3$  sowie alle  $q \in L_2(\Omega_0)$ . Zusätzlich zu den bereits in (41a)-(41e) definierten Ausdrücken folgt für  $a(\mathbf{U}; \Delta\mathbf{U}, \mathbf{V})$  die Beziehung:

$$\begin{aligned} a(\mathbf{U}; \Delta\mathbf{U}, \mathbf{V}) &= \int_{\Omega_0} \mathbf{E}(\mathbf{U}; \mathbf{V}) \cdot \cdot \frac{\partial \mathbf{T}(\mathbf{E}(\mathbf{U}), p)}{\partial \mathbf{E}} \cdot \cdot \mathbf{E}(\mathbf{U}; \Delta\mathbf{U}) d\Omega_0 \\ &+ \int_{\Omega_0} \mathbf{T}(\mathbf{E}(\mathbf{U}), p) \cdot \cdot \text{Grad} \Delta\mathbf{U} (\text{Grad} \mathbf{V})^T d\Omega_0. \end{aligned} \quad (43)$$

Nach Ortsdiskretisierung kann das System (42a), (42b) in geeigneten Ansatzteilräumen  $\Delta \mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathbb{V}_h^3 \subset \mathbb{V}^3$  und  $\Delta p, q \in \mathbb{X}_h \subset \mathbb{X}$  im Rahmen einer gemischten FE-Formulierung gelöst werden. Werden in diesem Zusammenhang die aus  $b_0$  folgenden Blöcke der Gesamtsteifigkeitsmatrix als Nullmatrizen betrachtet, der aus  $c_0$  folgende Block als Einheitsmatrix sowie die rechte Seite von (42b) als Nullvektor, dann kann, wie bereits erwähnt, das System (42a), (42b) zur Lösung von Randwertaufgaben der kompressiblen Elastizität bei großen Verzerungen eingesetzt werden. Das Ergebnis für den hydrostatischen Druck ist dann eine identische Null. Natürlich ist eine solche Vorgehensweise bei umfangreichen Problemen ineffizient, bietet jedoch für moderate Probleme eine effektive Testmöglichkeit der implementierten Algorithmen. Rechenzeitvergleiche für das später vorgestellte Beispiel der Cook-Membran ergaben im Bereich von 130...25100 Verschiebungsfreiheitsgraden bei 100 Lastinkrementen einen 1,1...2,2fachen Gesamtaufwand für die gemischte Formulierung gegenüber einem reinem Verschiebungsansatz, der erwartungsgemäß fast ausschließlich zu Lasten der Zeit für den Löser geht.

## 5.2 Parameterableitung der schwachen Formulierung des Randwertproblems: Inverse Aufgabe

Die Lösung des gemischten Randwertproblems (38a), (38b) besteht in der Bestimmung der Feldvariablen Verschiebungen und hydrostatischer Druck in Abhängigkeit der Materialparameter. Bei der Behandlung des direkten Problems werden die Materialparameter als bekannt vorausgesetzt und die Feldvariablen numerisch ermittelt. Bei der Lösung der inversen Aufgabe werden diejenigen Feldvariablen gesucht, die bestmöglich mit Messwerten übereinstimmen. Unbekannt sind dabei die Materialparameter, die zu dieser Entwicklung führen. Da die Verteilung der Feldgrößen nicht zeitkontinuierlich ermittelt werden kann, basiert die Sensitivitätsanalyse auf der durch die Linearisierung der Randwertaufgabe vorgegebenen inkrementellen Strategie. Es soll somit an dieser Stelle folgende Aufgabe betrachtet werden, die in jedem Lastschritt zu bearbeiten ist: Zum aktuellen Zeitpunkt  $t + \Delta t$  sei das gemischte Randwertproblem (38a), (38b) mit einem gegebenen Satz von Materialparametern gelöst. Gesucht ist eine neue Lösung in Richtung einer Änderung des Parametervektors in Form der vollständigen Ableitungen der Verschiebungen und des hydrostatischen Drucks nach den Materialparametern.

Ausgangspunkt für die Herleitung der numerischen Beziehungen der halbanalytischen Sensitivitätsanalyse stellt das System (38a), (38b) der schwachen Formulierungen des Gleichgewichts und der Inkompressibilitätsbedingung dar. Dessen implizite Ableitung nach einem einzelnen Materialparameter  $c_j$  führt auf:

$$\int_{\Omega_0} \left[ \frac{d\mathbf{T}}{dc_j} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{U}; \mathbf{V}) + \mathbf{T} \cdot \frac{d\mathbf{E}(\mathbf{U}; \mathbf{V})}{dc_j} \right] d\Omega_0 = \mathbf{0} \quad (44a)$$

$$\int_{\Omega_0} \left[ \frac{d\psi_v(J)}{dc_j} - \frac{1}{\kappa} \frac{dp}{dc_j} \right] q d\Omega_0 = 0 \quad (44b)$$

Dabei wurde vorausgesetzt, dass sowohl die Randbedingungen als äußere Belastung als auch die Testfunktionen  $\mathbf{V}$  und  $q$  unabhängig von den Materialparametern sind. Ebenso ist zu erwähnen, dass der Parameter  $\kappa$  zwar bei kleinen Verzerrungen mit dem Kompressionsmodul approximiert werden kann, im Rahmen der vorgestellten Theorie jedoch kein Materialparameter im eigentlichen Sinne ist, sondern im Grunde genommen einen Penalty-Parameter zur näherungsweise Erfüllung der Volumenkonstanz darstellt.

Für die weiteren Betrachtungen sind die expliziten sowie impliziten Abhängigkeiten der Feldgrößen von den Materialparametern zu berücksichtigen.

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}(\mathbf{c}) \quad (45a)$$

$$p = p(\mathbf{c}) \quad (45b)$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{E}(\mathbf{c}), p(\mathbf{c}), \mathbf{c}) \quad (45c)$$

Daraus ergeben sich unter Berücksichtigung der Spannungszersetzung (31) mit (32b) die folgenden vollständigen Ableitungen nach einem ausgewählten, einzelnen Materialparameter  $c_j$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{T}}{dc_j} &= \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{E}} \cdot \frac{d\mathbf{E}}{dc_j} + \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial p} \frac{dp}{dc_j} + \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{c}} \\ &= \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{E}} \cdot \frac{d\mathbf{E}}{dc_j} + \mathbf{S}_v \frac{dp}{dc_j} + \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{c}} \end{aligned} \quad (46a)$$

$$\frac{d\psi_v}{dc_j} = \frac{\partial \psi_v}{\partial \mathbf{E}} \cdot \frac{d\mathbf{E}}{dc_j} = J \frac{\partial \psi_v}{\partial J} \mathbf{C}^{-1} \cdot \frac{d\mathbf{E}}{dc_j} = \mathbf{S}_v \cdot \frac{d\mathbf{E}}{dc_j}. \quad (46b)$$



Bezüglich der Ableitung von Verzerrungsgrößen nach einem ausgewählten Materialparameter  $c_j$  folgt:

$$\begin{aligned}
2 \frac{d\mathbf{E}(\mathbf{U})}{dc_j} &= \left( \text{Grad} \left( \frac{d\mathbf{U}}{dc_j} \right) \right)^T + \text{Grad} \left( \frac{d\mathbf{U}}{dc_j} \right) \\
&+ \text{Grad}\mathbf{U} \left( \text{Grad} \left( \frac{d\mathbf{U}}{dc_j} \right) \right)^T + \text{Grad} \left( \frac{d\mathbf{U}}{dc_j} \right) (\text{Grad}\mathbf{U})^T \\
&= \mathbf{E} \left( \mathbf{U}; \frac{d\mathbf{U}}{dc_j} \right) \tag{47a}
\end{aligned}$$

$$2 \frac{d\mathbf{E}(\mathbf{U}; \mathbf{V})}{dc_j} = \text{Grad} \left( \frac{d\mathbf{U}}{dc_j} \right) (\text{Grad}\mathbf{V})^T + \text{Grad}\mathbf{V} \left( \text{Grad} \left( \frac{d\mathbf{U}}{dc_j} \right) \right)^T \tag{47b}$$

Unter Berücksichtigung dieser Operationen sowie der Symmetrie des Spannungstensors kann nach einigen Umformungen aus (44a) und (44b) ein lineares Gleichungssystem zur Berechnung der vollständigen Ableitungen der Verschiebungs koordinaten und des hydrostatischen Drucks nach einem einzelnen Materialparameter  $c_j$  hergeleitet werden.

$$a \left( \mathbf{U}; \frac{d\mathbf{U}}{dc_j}, \mathbf{V} \right) + b_0 \left( \mathbf{U}; \frac{dp}{dc_j}, \mathbf{V} \right) = f_c(\mathbf{U}; \mathbf{V}) \quad \forall \mathbf{V} \in (H_0^1(\Omega_0))^3 \tag{48a}$$

$$b_0 \left( \mathbf{U}; q, \frac{d\mathbf{U}}{dc_j} \right) - c_0 \left( \frac{dp}{dc_j}, q \right) = 0 \quad \forall q \in L_2(\Omega_0) \tag{48b}$$

Die rechte Seite der Beziehung (48a) enthält mit

$$f_c(\mathbf{U}; \mathbf{V}) = - \int_{\Omega_0} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial c_j} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{U}; \mathbf{V}) \, d\Omega_0 \tag{49}$$

die partiellen Ableitungen des 2. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors nach dem Materialparameter  $c_j$ . Aus Gleichung (26) folgt dabei:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial c_j} &= 2 \frac{\partial}{\partial c_j} \left( \frac{\partial \psi_d}{\partial \mathbf{C}_d} \cdot \frac{\partial \mathbf{C}_d}{\partial \mathbf{C}} \right) \\
&= 2 J^{-\frac{2}{3}} \frac{\partial}{\partial c_j} \left( \frac{\partial \psi_d}{\partial \mathbf{C}_d} \cdot \left[ \tilde{\mathbf{I}}_4 - \frac{1}{3} \mathbf{C}_d \otimes \mathbf{C}_d^{-1} \right] \right). \tag{50}
\end{aligned}$$

Bei der Herleitung fand die Definition

$$\tilde{\mathbf{I}}_4 = \delta_I^K \delta_L^J \mathbf{G}^I \otimes \mathbf{G}_J \otimes \mathbf{G}_K \otimes \mathbf{G}^L \tag{51}$$

eines vierstufigen isotropen Tensors mit den Koordinaten des Kronecker-Symbols  $\delta$  Berücksichtigung. Zudem wurde vorausgesetzt, dass der Ansatz für den volumetrischen Anteil der freien Energiedichte, wie beispielsweise in (34), keine Materialparameter enthält.

Beim Vergleich der linearen Gleichungssysteme (42a), (42b) und (48a), (48b) wird offensichtlich, dass nach einer Ortsdiskretisierung in geeigneten Ansatzräumen die Teilmatrizen der Systemmatrix in beiden Fällen exakt die gleiche Struktur besitzen. Im Rahmen der halbanalytischen Sensitivitätsanalyse ist in jedem Lastschritt, der zur Zielfunktion bzw. deren Ableitungen beiträgt, das lineare Gleichungssystem (48a), (48b) bezüglich aller zu identifizierender Materialparameter zu lösen. Da in diesem System die Variablen  $\mathbf{U}$  und  $p$  zum Zeitpunkt  $t + \Delta t$  zu betrachten sind, kann die letzte Systemmatrix, die im selben Lastschritt bei der iterativen Lösung des direkten Problems (Newton-Approximation) generiert wurde, unmittelbar für die Sensitivitätsanalyse verwendet werden. Der Aufwand bei der halbanalytischen Vorgehensweise gegenüber der numerischen Sensitivitätsanalyse (s. o.) besteht somit lediglich in  $n_c + 1$  Berechnungen des vollständigen Systems mit unterschiedlichen rechten Seiten pro Lastschritt, der zur Zielfunktion bzw. deren Ableitungen beiträgt. Zur Lösung des direkten Problems sind in der Regel mehrere Newton-Iterationen für das Randwertproblem und das eingebettete Anfangswertproblem notwendig. Das wirkt sich zusätzlich negativ auf den Aufwand der numerischen Sensitivitätsanalyse aus, da sie auf der Lösung mehrerer direkter Probleme mit unterschiedlichen Materialparametern basiert. Im Gegensatz dazu wird im Rahmen der halbanalytischen Sensitivitätsanalyse für die betrachteten Materialmodelle jedes Gleichungssystem (48a), (48b) einmalig, ohne zusätzliche Iterationen, gelöst.

Werden in der Zielfunktion (8) lediglich Verschiebungen berücksichtigt, sind die Ableitungen des hydrostatischen Drucks nach den Materialparametern ohne Bedeutung. Besitzt die Zielfunktion hingegen Kraft- bzw. Momentenanteile, müssen deren vollständige Ableitungen nach den Materialparametern ermittelt werden, wozu auch die Druckableitungen notwendig sind. Dies soll am Beispiel des Kraftvektors erläutert werden.

Die aus der inneren Beanspruchung resultierenden Reaktionskräfte in den Knoten eines Element  $e$  des FE-Netzes werden mit der nach dem Ort diskretisierten Beziehung

$$\mathcal{F}^e = \int_{\Omega_0^e} \mathbf{T} \cdot \cdot \mathbf{E}(\mathbf{U}; \mathbf{V}) d\Omega_0 \quad (52)$$

ermittelt. Somit gilt für die vollständige Ableitung der Kraft nach einem aus-

gewählten, einzelnen Materialparameter  $c_j$  die elementorientierte Beziehung

$$\frac{d\mathcal{F}^e}{dc_j} = \int_{\Omega_0^e} \left[ \frac{d\mathbf{T}}{dc_j} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{U}; \mathbf{V}) + \mathbf{T} \cdot \frac{d\mathbf{E}(\mathbf{U}; \mathbf{V})}{dc_j} \right] d\Omega_0. \quad (53)$$

Zur Berücksichtigung einer globalen Kraftinformation sind diese Integrale bezüglich geeigneter Elemente zu bilden, die Randkanten mit Dirichlet-Bedingungen besitzen. Die Kraft bzw. deren Ableitungen können dann durch Summation entsprechender Knoteninformationen ermittelt werden. Mit (46a), (47a) sowie (47b) stehen weitere Beziehungen zur Verfügung, die in einer Art Post-Prozessing, nach Lösung des Gleichungssystems (48a), (48b), zur Berechnung der vollständigen Ableitungen der Kräfte nach den Materialparametern genutzt werden.

## 6 Numerische Beispiele

Die oben vorgestellte Vorgehensweise zur numerischen Lösung von Anfangs-Randwert-Aufgaben der nahezu inkompressiblen Elastizität bei großen Verzerrungen wurde im hauseigenen FE-Programm SPC-PM2AdNIMix realisiert (für Details siehe [7]). Dieses basiert auf der an der TU Chemnitz entwickelten Programmversion SPC-PMA2dNI zur Simulation des mechanischen Verhaltens hyperelastischer (im Fall ihrer Kompressibilität) und anisotroper elastisch-plastischer Werkstoffe bei großen Verzerrungen (vgl. [6, 28]).

Die vollständige Verfügbarkeit der Programmquellen gestattet die effiziente Nutzung von Datenstrukturen und numerischen Algorithmen für die halbanalytische Sensitivitätsanalyse. Somit wurde, analog zu dem bereits seit längerem genutzten Verfahren bei der finiten Elasto-Plastizität, eine Programmversion für die Kalibrierung von Materialmodellen der kompressiblen und der nahezu inkompressiblen Elastizität bei großen Verzerrungen auf der Basis einer gemischten Formulierung realisiert. Diese beinhaltet die oben beschriebenen Methoden und Algorithmen der halbanalytischen Sensitivitätsanalyse.

Im Folgenden wird die Eignung des Programmes zur Ermittlung der Materialparameter am Beispiel umfangreicher Studien zweier Problemstellungen für unterschiedliche konstitutive Ansätze nachgewiesen. Dabei werden die Reidentifikation vorgegebener Parameter auf der Basis synthetischer (numerisch erzeugter) Messwerte angestrebt und das Verhalten der Optimierungsprozesse bei gestörten Messwerten untersucht. Dazu wurden diese mit normal verteilten numerisch erzeugten Fehlern modifiziert, deren Maximalwert beliebig vorgegeben werden kann.

Für die untersuchten FE-Gitter wurden vorwiegend stabile Taylor-Hood-Viereckelemente  $\mathcal{Q}_2^{(8)} - \mathcal{Q}_1$  (quadratischer Ansatz vom Serendipity-Typ in den Verschiebungsfreiheitsgraden, bilinearer Ansatz für den hydrostatischen Druck) ver-

wendet. Zur Untersuchung des prinzipiellen Lösungsverhaltens kamen vereinzelt Taylor-Hood-Dreieckelemente  $\mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_1$  zum Einsatz. Weiterführende Details zu Elementansätzen und dem Verfahren zur Lösung der linearen Gleichungssysteme sind in [7] dargestellt. Adaptive Verfahren zur Netzanpassung wurden im Rahmen der Parameteridentifikation nicht aktiviert.

Bezüglich des Materialverhaltens wurden sowohl die kompressiblen als auch die nahezu inkompressiblen Versionen der Ansätze für das Neo-Hooke-, Mooney-Rivlin- und modifizierte Fung-Material untersucht. Dazu wurde der Optimierungsprozess für die Parameter im Einzelnen sowie alle möglichen Kombinationen zwischen diesen analysiert.

Am Beispiel des Zugstabes mit über Dirichlet-Randbedingungen simuliertem vollständigen Haften an den Einspannstellen (inhomogene Feldverteilung) wurde zunächst die Kalibrierung der Materialmodelle auf der Basis globaler Kraft-Verschiebungs-Kurven untersucht. Dazu stehen in jedem Lastschritt zwei Kraftinformationen zur Verfügung, die mit einer vorgegebenen Vertikalverschiebung der Einspannstellen korreliert sind. In Abb. 2 sind die Geometrie und die Randbedingungen für den Zugstab sowie zwei Beispiele für verformte Netze dargestellt.

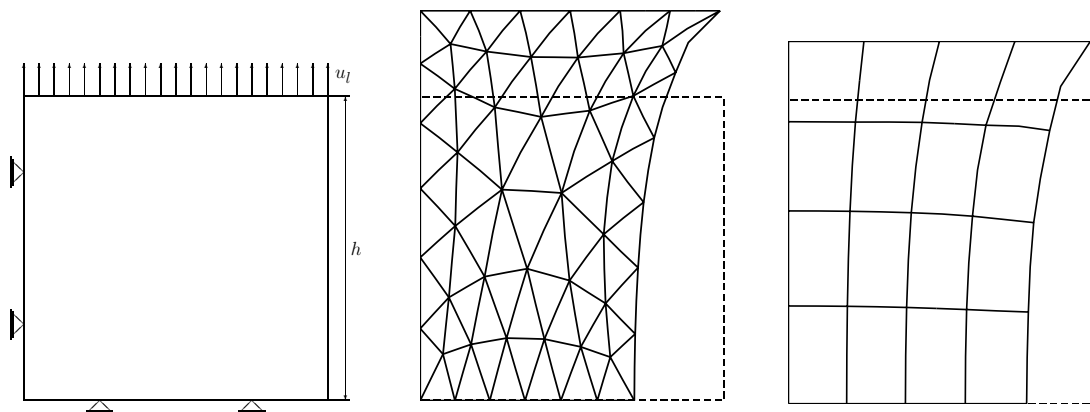


Abbildung 2: Numerische Simulation des inhomogenen Zugversuches eines kreiszylindrischen Probekörpers. Links: Geometrie ( $h = 1,0$  mm) und Randbedingungen. Mitte: Verformtes Netz mit Dreieckelementen bei  $u_l = 0,3$  mm. Rechts: Verformtes Netz mit Viereckelementen bei  $u_l = 0,25$  mm.

Für die Berücksichtigung von Knotenverschiebungen zur Kalibrierung der Materialmodelle wurde das so genannte *Cooksche Membranproblem* analysiert. Dieses Beispiel wurde von Cook [8] zur Analyse des Lösungsverhaltens eines verallgemeinerten Viereckelementes eingeführt. Seither wird es von verschiedenen Autoren gern zur Darstellung der Eigenschaften von gemischten Elementformulierungen verwendet.

Die Cook-Membran ist an einer Seite fest eingespannt und wird an der gegenüber liegenden Seite durch eine kantenbezogene Schubkraft belastet. Es wird die Erfüllung der Bedingungen für den ebenen Verzerrungszustand vorausgesetzt. In Abb. 3 sind links die geometrischen Abmessungen sowie die Randbedingungen der untersuchten Struktur dargestellt. Auf der rechten Seite ist die verformte Geometrie bei Maximallast zu sehen, welche mit SPC-PM2AdNIMix ermittelt wurde.

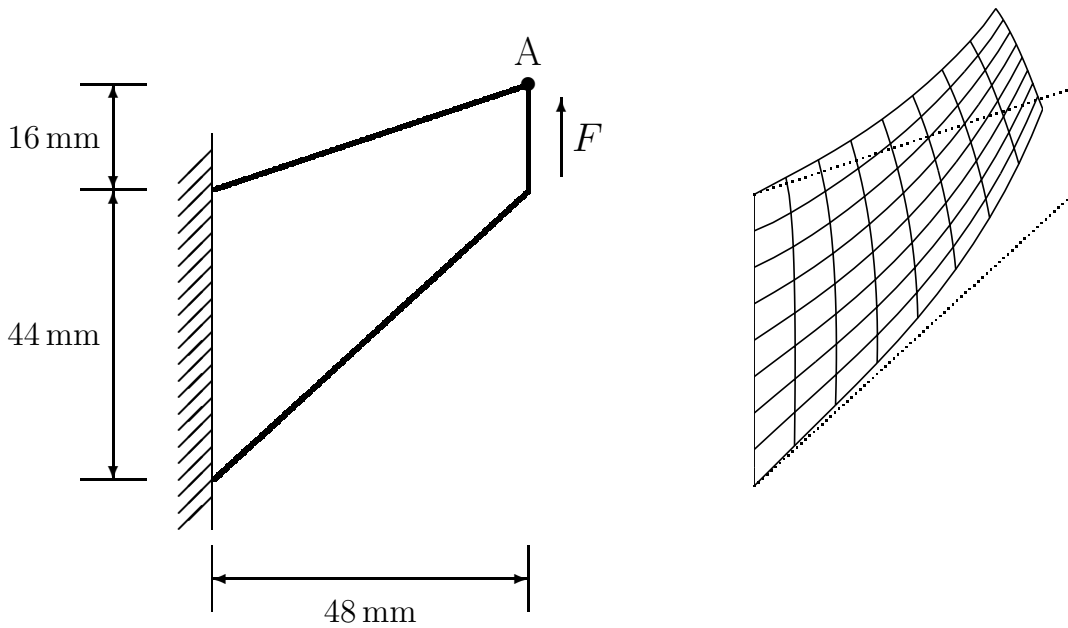


Abbildung 3: Cooks Membranproblem. Links: Geometrie und Randbedingungen nach [2] (hier:  $F = 160 \text{ N}$ ). Rechts: Verformtes Netz mit Viereckelementen.

Bei den Untersuchungen zum Lösungsverhalten des direkten Problems der Cook-Membran sind insbesondere die Verschiebungen im Punkt A interessant (vgl. Abb. 3). Diese hängen sehr stark vom Elementtyp und der Diskretisierung ab und werden von vielen Autoren zum Vergleich herangezogen. Aus diesem Grund wurden für die Parameteridentifikation neben der Auswertung der Verschiebungen aller 225 Knoten alternativ lediglich die Verschiebungskoordinaten des Punktes A berücksichtigt. Die “Messdaten” standen in jedem der 100 Lastinkremente zur Verfügung.

Im Folgenden werden ausgewählte Ergebnisse der Identifikationsberechnungen tabellarisch und grafisch dargestellt. Neben den Startwerten und den Optimierungsergebnissen sind in den Tabellen Angaben zur Anzahl der Optimierungsschritte und der Abweichung des Ergebnisses von den erwarteten Parameterwerten zu finden. Der wesentliche Teil der Diskussion bezieht sich auf die Auswertung von

Verschiebungsfeldern, da diese gegenüber globalen Kraft-Verschiebungs-Kurven deutlich mehr und komplexere Informationen enthalten (unterschiedliche lokale Belastungswege in einzelnen materiellen Punkten).

Tabelle 1: Parameteridentifikation für das Materialmodell (33a) (Neo-Hooke, kompressibel) aus der Kraft-Verschiebungs-Kurve eines inhomogenen Zugversuches. Reidentifikation vorgegebener Parameter auf der Basis synthetischer Messwerte ohne Messfehler in Abhängigkeit von den Startwerten (*nopti*: Anzahl der Optimierungsschritte).

Startwerte der Parameter		Optimierte Werte der Parameter ( $c_{10} = 3,57 \text{ MPa}$ , $D_2 = 3,57 \text{ MPa}$ )				<i>nopti</i>
		absolut		Abw. v. Vorgabe		
$c_{10}$	$D_2$	$c_{10}$	$D_2$	$c_{10}$	$D_2$	
[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	%	%	
<b>Vernetzung mit Dreieckelementen</b>						
3,000	–	3,570	–	0,00	–	3
4,000	–	3,570	–	0,00	–	3
–	3,000	–	3,570	–	0,01	3
–	4,000	–	3,570	–	0,01	3
3,000	3,000	3,570	3,570	0,00	0,01	2
3,000	4,000	3,570	3,570	0,00	0,01	4
4,000	4,000	3,570	3,570	0,00	0,01	2
4,000	3,000	3,570	3,570	0,00	0,01	4
<b>Vernetzung mit Viereckelementen</b>						
3,000	–	3,570	–	0,00	–	3
4,000	–	3,570	–	0,00	–	3
–	3,000	–	3,570	–	0,00	4
–	4,000	–	3,570	–	0,00	3
3,000	3,000	3,570	3,570	0,00	0,01	2
3,000	4,000	3,570	3,570	0,00	0,01	4
4,000	4,000	3,570	3,570	0,00	0,01	2
4,000	3,000	3,570	3,570	0,00	0,01	4

Ein möglicher Einfluss unterschiedlicher Elementklassen auf das Ergebnis der Parameteridentifikation wird hier lediglich am Beispiel der Auswertung von Kraft-Verschiebungs-Kurven für den Neo-Hooke-Ansatz bei kompressibler Elastizität

(33a) diskutiert. Wie die Ergebnisse in Tabelle 1 zeigen, ist ein solcher Einfluss, erwartungsgemäß nicht festzustellen. Die beiden Materialparameter  $c_{10}$  und  $D_2$  konnten einzeln und in Kombination für alle untersuchten Varianten von Startwerten (mit maximal 16% Abweichung von den zu erwartenden Beträgen) reidentifiziert werden. Da im nahezu inkompressiblen Fall der Neo-Hooke-Ansatz nur einen Materialparameter enthält, wurden hierfür keine Untersuchungen an Kraft-Verschiebungs-Kurven vorgenommen.

Die Ergebnisse der Parameteridentifikation am Beispiel der Auswertung von Kraft-Verschiebungs-Kurven für das modifizierte Fung-Modell bei kompressibler Elastizität (33c) sind in Tabelle 2 zusammengefasst. Hier wurden Startwerte untersucht, die im Einzelnen um bis zu 50% von den zu reidentifizierenden Größen abweichen. Auch hier konnten in der Regel die vorgegebenen Materialparameter in wenigen Optimierungsschritten ermittelt werden. Auffällig ist der Optimierungsverlauf für den Fall der Identifikation aller drei Parameter ( $c_{10}, \alpha, D_2$ ) mit Startwerten, die (84%, 50%, 112%) der optimalen Werte entsprechen. Es gelang eine vollständige Reidentifikation der Parameter, wobei jedoch deutlich mehr Optimierungsschritte benötigt wurden. Eine weitere, noch markantere Ausnahme bildet die gemeinsame Identifikation aller drei Parameter mit Startwerten, die (112%, 150%, 84%) der optimalen Werte entsprechen. In diesem Fall konnten die vorgegebenen Parameter nicht reidentifiziert werden. Die Abweichung beträgt beispielsweise für den Parameter  $D_2$  ca. 65%. Offensichtlich weist die Topologie der Zielfunktion selbst bei den wenigen, fehlerfreien Informationen, die aus dem Verlauf der Kraft-Verschiebungs-Kurve zur Verfügung stehen, mehrerer lokale Minima aus.

Zur weiteren Untersuchung dieser Fragestellung wurden für diese Parameterkombination die Startwerte für  $c_{10}$  sowie  $D_2$  unverändert belassen und lediglich der Startwert für  $\alpha$  in kleineren Intervallen variiert. Wie aus Tabelle 3 ersichtlich ist, konnten dabei tatsächlich zwei unterschiedliche Ergebnisvektoren ermittelt werden. Dazu gehört einer zu dem (hier bekannten, in der Regel aber nicht zwingend zu erreichendem) globalen Minimum, der andere zu einem lokalen Minimum, das im untersuchten Spektrum stabil erreicht wird. Interessant ist dabei, dass bei Annäherung an die Startwertkombination, bei der offensichtlich der Wechsel der Suchrichtung zwischen den beiden Minima erfolgt, eine Zunahme der Anzahl der Optimierungsschritte zu verzeichnen ist. Das ist besonders deutlich auf der Seite des globalen Minimums ausgeprägt. Mit diesem Ergebnis kann bereits in einem solch einfachen Fall die Inkorrektheit des inversen Problems der Kalibrierung von Materialmodellen gezeigt werden.

Ergebnisse der Parameteridentifikation für das modifizierte Fung-Modell bei nahezu Inkompressibilität (35c) aus Kraft-Verschiebungs-Kurven werden hier nicht präsentiert, da bei allen untersuchten Startwertvarianten (einzeln und in Kombination) stets die vorgegebenen Parameter in nicht mehr als drei Optimierungsschritten reidentifiziert werden konnten.

Tabelle 2: Parameteridentifikation für das Materialmodell (33c) (Modifizierter Fung, kompressibel) aus der Kraft-Verschiebungs-Kurve eines inhomogenen Zugversuches. Reidentifikation vorgegebener Parameter auf der Basis synthetischer Messwerte ohne Messfehler in Abhängigkeit von den Startwerten (*nopti*: Anzahl der Optimierungsschritte).

Startwerte der Parameter			Optimierte Werte der Parameter ( $c_{10} = 3,57 \text{ MPa}$ , $\alpha = 0,5$ , $D_2 = 3,57 \text{ MPa}$ )						<i>nopti</i>
$c_{10}$	$\alpha$	$D_2$	absolut			Abw. von Vorgabe			
			$c_{10}$	$\alpha$	$D_2$	$c_{10}$	$\alpha$	$D_2$	
[MPa]		[MPa]	[MPa]		[MPa]	%	%	%	
3,000	–	–	3,570	–	–	0,00	–	–	3
4,000	–	–	3,570	–	–	0,00	–	–	3
–	0,250	–	–	0,500	–	–	0,00	–	4
–	0,750	–	–	0,500	–	–	0,00	–	4
–	–	3,000	–	–	3,570	–	–	0,00	3
–	–	4,000	–	–	3,570	–	–	0,00	3
3,000	0,250	–	3,570	0,500	–	0,00	0,00	–	4
3,000	0,750	–	3,570	0,500	–	0,00	0,00	–	3
4,000	0,750	–	3,570	0,500	–	0,00	0,00	–	4
4,000	0,250	–	3,570	0,500	–	0,00	0,00	–	3
3,000	–	3,000	3,569	–	3,574	0,03	–	0,12	2
3,000	–	4,000	3,569	–	3,574	0,03	–	0,12	4
4,000	–	4,000	3,569	–	3,574	0,03	–	0,12	2
4,000	–	3,000	3,569	–	3,574	0,03	–	0,12	5
–	0,250	3,000	–	0,500	3,570	–	0,00	0,01	4
–	0,250	4,000	–	0,500	3,570	–	0,00	0,01	5
–	0,750	4,000	–	0,500	3,570	–	0,00	0,01	4
–	0,750	3,000	–	0,500	3,570	–	0,00	0,01	4
3,000	0,250	3,000	3,568	0,500	3,579	0,06	0,00	0,25	5
3,000	0,250	4,000	3,568	0,500	3,579	0,06	0,00	0,25	14
3,000	0,750	4,000	3,568	0,500	3,579	0,06	0,00	0,25	4
4,000	0,750	4,000	3,568	0,500	3,579	0,06	0,00	0,25	5
4,000	0,750	3,000	4,654	0,457	1,250	30,38	8,66	64,97	9
4,000	0,250	3,000	3,568	0,500	3,579	0,06	0,00	0,25	4
4,000	0,250	4,000	3,568	0,500	3,579	0,06	0,00	0,25	7
3,000	0,750	3,000	3,568	0,500	3,579	0,06	0,00	0,25	6



Tabelle 3: Parameteridentifikation für das Materialmodell (33c) (Modifizierter Fung, kompressibel) aus der Kraft-Verschiebungs-Kurve eines inhomogenen Zugversuches. Reidentifikation vorgegebener Parameter auf der Basis synthetischer Messwerte ohne Messfehler. Nachweis der Existenz lokaler Minima am Beispiel der gleichzeitigen Identifikation aller Parameter in Abhängigkeit des Startwertes für den Parameter  $\alpha$  (*nopti*: Anzahl der Optimierungsschritte).

Startwerte der Parameter			Optimierte Werte der Parameter ( $c_{10} = 3,57 \text{ MPa}$ , $\alpha = 0,5$ , $D_2 = 3,57 \text{ MPa}$ )						<i>nopti</i>
			absolut			Abw. von Vorgabe			
$c_{10}$	$\alpha$	$D_2$	$c_{10}$	$\alpha$	$D_2$	$c_{10}$	$\alpha$	$D_2$	
[MPa]		[MPa]	[MPa]		[MPa]	%	%	%	
4,000	0,720	3,000	3,568	0,500	3,579	0,06	0,00	0,25	5
4,000	0,725	3,000	3,568	0,500	3,579	0,06	0,00	0,25	6
4,000	0,730	3,000	3,568	0,500	3,579	0,06	0,00	0,25	10
4,000	0,735	3,000	3,568	0,500	3,579	0,06	0,01	0,25	14
4,000	0,740	3,000	3,568	0,500	3,579	0,06	0,00	0,25	16
4,000	0,745	3,000	4,654	0,457	1,250	30,38	8,66	64,98	11
4,000	0,750	3,000	4,654	0,457	1,250	30,38	8,66	64,98	9
4,000	0,755	3,000	4,654	0,457	1,250	30,38	8,66	64,98	9
4,000	0,760	3,000	4,655	0,457	1,250	30,38	8,66	64,98	9
4,000	1,000	3,000	4,656	0,457	1,250	30,41	8,66	65,01	9

Die Kalibrierung des Mooney-Rivlin-Modells aus Kraft-Verschiebungs-Kurven wird hier nicht diskutiert, da dessen Spezifika bezüglich der Lösung des inversen Problems später am Beispiel der Nutzung von Verschiebungsinformationen erläutert werden. Im Folgenden kommen ausschließlich Optimierungsergebnisse zur Auswertung, die durch Analyse von Verschiebungsfeldern erzielt wurden.

Zunächst wurden umfangreiche Untersuchungen für das Neo-Hooke-Modell bei kompressiblem Materialverhalten (33a) durchgeführt. Dabei wurden die Verschiebungen aller Knoten der Cook-Membran in die Zielfunktion einbezogen bzw. alternativ nur diejenigen des oberen rechten Eckknotens. Es wurden fehlerfreie synthetische Messwerte verwendet und Messwerte, die mit einem normal verteilten Fehler von maximal 1%, 2% bzw. 5% modifiziert wurden. Ausgewählte Ergebnisse sind in den Tabellen 4, 5 und 6 sowie der Abb. 4 dargestellt.

Tabelle 4: Parameteridentifikation für das Materialmodell (33a) (Neo-Hooke, kompressibel) aus den Verschiebungen aller Knoten der Cook-Membran. Reidentifikation vorgegebener Parameter auf der Basis synthetischer Messwerte in Abhängigkeit vom Messfehler und ausgewählter Startwerte für den Optimierungsprozess (*n<sub>opti</sub>*: Anzahl der Optimierungsschritte).

Startwerte der Parameter		Optimierte Werte der Parameter ( $c_{10} = 3,57 \text{ MPa}$ , $D_2 = 3,57 \text{ MPa}$ )				<i>n<sub>opti</sub></i>
$c_{10}$	$D_2$	absolut		Abw. v. Vorgabe		
		$c_{10}$	$D_2$	$c_{10}$	$D_2$	
[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	%	%	
ohne Messfehler						
0,357	–	3,570	–	0,00	–	7
2,000	–	3,570	–	0,00	–	5
7,000	–	3,570	–	0,00	–	6
–	0,357	–	3,570	–	0,00	7
–	2,000	–	3,570	–	0,00	4
–	10,000	–	3,570	–	0,00	7
–	35,700	–	3,570	–	0,00	9
4,000	4,000	3,570	3,570	0,00	0,00	4
4,000	3,000	3,570	3,570	0,00	0,00	4
0,357	0,357	3,570	3,570	0,00	0,00	9
0,357	50,000	3,570	3,570	0,00	0,00	11
5% Messfehler						
0,357	–	3,569	–	0,01	–	7
2,000	–	3,569	–	0,01	–	5
7,000	–	3,569	–	0,01	–	6
–	0,357	–	3,569	–	0,02	6
–	2,000	–	3,569	–	0,02	4
–	10,000	–	3,569	–	0,02	6
–	35,700	–	3,569	–	0,02	9
4,000	4,000	3,567	3,588	0,08	0,52	4
4,000	3,000	3,567	3,589	0,08	0,52	4
0,357	0,357	3,567	3,593	0,10	0,65	9
0,357	50,000	3,567	3,588	0,08	0,51	25

Tabelle 5: Parameteridentifikation für das Materialmodell (33a) (Neo-Hooke, kompressibel) aus den Verschiebungen des rechten oberen Eckknotens der Cook-Membran (s. Abb. 3 – Knoten A). Reidentifikation vorgegebener Parameter auf der Basis synthetischer Messwerte in Abhängigkeit vom Messfehler und ausgewählter Startwerte für den Optimierungsprozess (*nopti*: Anzahl der Optimierungsschritte).

Startwerte der Parameter		Optimierte Werte der Parameter ( $c_{10} = 3,57 \text{ MPa}$ , $D_2 = 3,57 \text{ MPa}$ )				<i>nopti</i>
		absolut		Abw. v. Vorgabe		
$c_{10}$	$D_2$	$c_{10}$	$D_2$	$c_{10}$	$D_2$	
[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	%	%	
<b>ohne Messfehler</b>						
0,357	–	3,570	–	0,00	–	7
2,000	–	3,570	–	0,00	–	5
7,000	–	3,570	–	0,00	–	6
–	0,357	–	3,570	–	0,00	6
–	2,000	–	3,570	–	0,00	4
–	10,000	–	3,570	–	0,00	6
–	35,700	–	3,570	–	0,00	8
4,000	4,000	3,570	3,569	0,00	0,02	5
4,000	3,000	3,570	3,569	0,00	0,02	4
0,357	0,357	3,570	3,569	0,00	0,02	9
0,357	50,000	3,570	3,569	0,00	0,02	29
<b>5% Messfehler</b>						
0,357	–	3,588	–	0,52	–	7
2,000	–	3,588	–	0,52	–	5
7,000	–	3,588	–	0,52	–	6
–	0,357	–	3,683	–	3,16	6
–	2,000	–	3,683	–	3,16	4
–	10,000	–	3,683	–	3,16	7
–	35,700	–	3,683	–	3,16	8
4,000	4,000	3,744	2,729	4,89	23,57	4
4,000	3,000	3,743	2,735	4,86	23,40	4
0,357	0,357	3,744	2,731	4,88	23,50	9
0,357	50,000	3,747	2,720	4,96	23,82	25

Bei Nutzung der Verschiebungsinformationen aller FE-Knoten der Cook-Membran konnten in allen untersuchten Fällen die Materialparameter reidentifiziert werden. Das trifft auch für fehlerbehaftete Daten zu. Die Abweichung der identifizierten Parameter liegt selbst bei extrem weit entfernten Startwerten deutlich unter dem vorgegebenem maximalem Messfehler (vgl. Tabelle 4 und Abb. 4 oben).

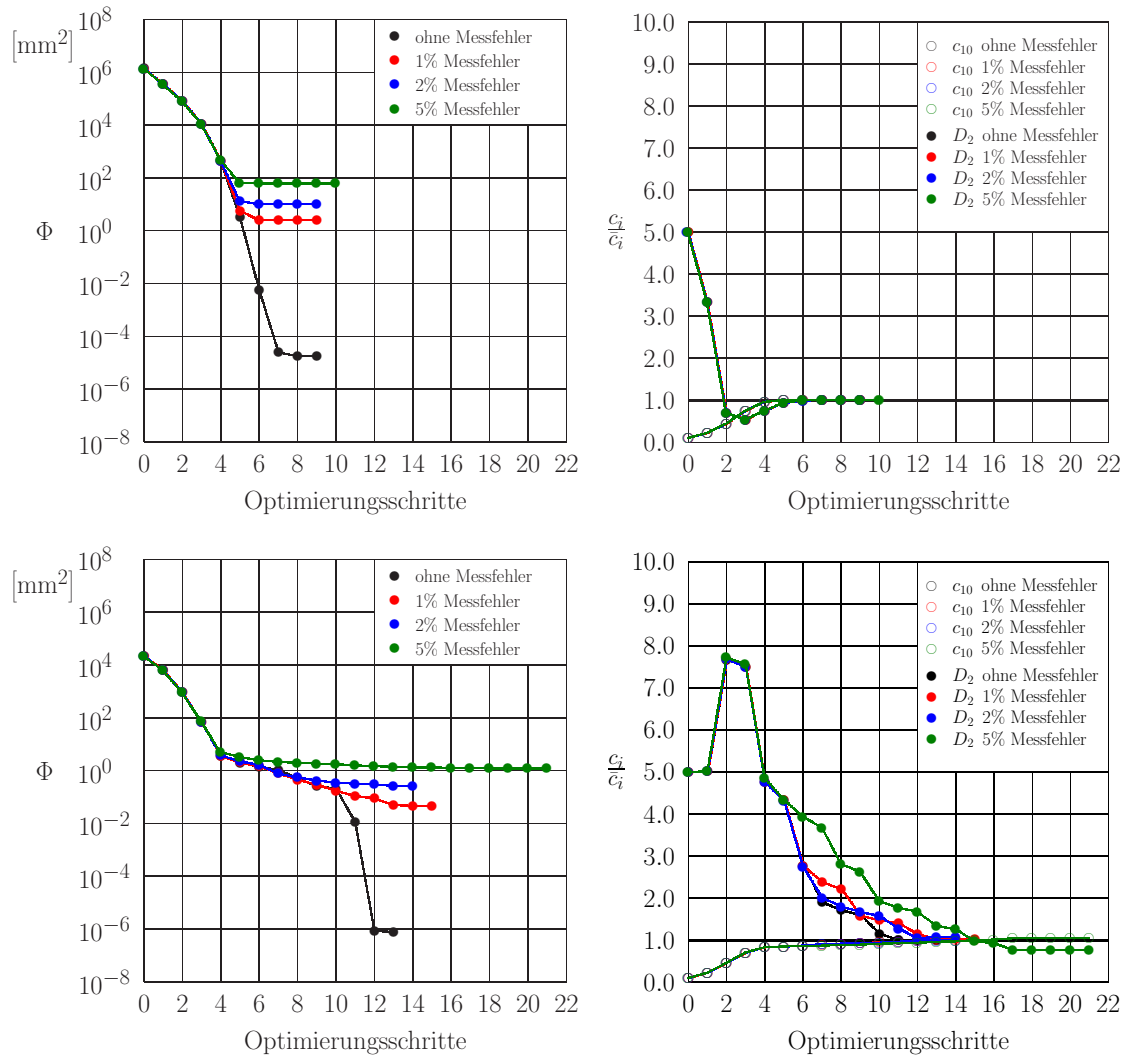


Abbildung 4: Parameteridentifikation für das Materialmodell (33a) (Neo-Hooke, kompressibel) aus den Verschiebungen aller Knoten der Cook-Membran (oben) bzw. des rechten oberen Eckknotens (unten – vgl. Abb. 3 – Knoten A). Optimierungsverlauf für ein ausgewähltes Paar von Startwerten ( $c_{10} = 0,357$  MPa,  $D_2 = 17,85$  MPa) in Abhängigkeit vom Messfehler. Links: Entwicklung der Zielfunktion. Rechts: Entwicklung der Parameter  $c_i$  bezogen auf deren vorgegebenen Werte  $\bar{c}_i$  ( $\bar{c}_{10} = 3,57$  MPa,  $\bar{D}_2 = 3,57$  MPa).

Weiterhin zeigt Abb. 4 oben für eine ausgewählte Startwertkombination in diesem Fall einen vom Messfehler unabhängigen Optimierungsverlauf. Der Zielfunktionswert verschlechtert sich erwartungsgemäß mit zunehmendem Messfehler, die Konvergenzrate wird jedoch nur unwesentlich beeinflusst. Dieses Verhalten deutet für das einfache, nur schwach nichtlineare Materialmodell auf eine Zielfunktions-topologie mit dominierendem und markantem globalem Minimum hin.

Die nachteilige Wirkung eines eingeschränkten Informationsangebotes für den Prozess der Kalibrierung von Materialmodellen wird bereits an diesem einfachen Beispiel deutlich, wenn an Stelle der Verschiebung aller Knoten lediglich jene des rechten oberen Eckknotens der Cook-Membran betrachtet werden. Sind die synthetischen Messwerte fehlerfrei, gelingt auch in diesem Fall für alle untersuchten Startwertvariationen die Reidentifikation der Materialparameter (vgl. Tabelle 5). Da nur die Verschiebungsinformationen eines Knotens berücksichtigt wurden, ist dieses Vorgehen der Untersuchung eines vorgegebenen Kraft-Verschiebungs-Verlaufes gleichzusetzen. In der Praxis sind fehlerfreie Messwerte nicht realisierbar. Beim Auftreten von Messfehlern gibt es aber bereits für das hier analysierte, einfache Problem deutliche Abweichungen des Optimierungsergebnisses von den vorgegebenen Parametern. Wie später an einer anderen konstitutiven Beziehung gezeigt wird, handelt es sich dabei jedoch nicht um fehlerhafte Optimierungsergebnisse. Vielmehr ist dann die Topologie der Zielfunktion so gestaltet, dass die erwarteten Werte zu keinem Minimum mehr führen. Mangel an Informationen sowie deren Fehlerhaftigkeit sind dafür die Ursache. Das zugrunde gelegte Materialmodell kann mit diesen Informationen nur das erzielte Optimierungsergebnis generieren. Konkret zeigt sich im betrachteten Fall, dass bei separater Identifikation der Parameter (und vorgegebenem Wert für den jeweils anderen) das Optimierungsergebnis noch geringere Abweichungen als der Messfehler aufweist. Dabei ist bereits für den Parameter  $D_2$  die größere Differenz zu verzeichnen. Das ist aus dem Grunde erklärlich, da dieser Parameter weniger das allgemeine Steifigkeitsverhalten des Materials beschreibt, sondern dessen Volumenänderungseigenschaften. Gerade gegenüber der Kompressibilität des Material ist die Verschiebung des betrachteten rechten oberen Eckknotens sehr sensibel (vgl. auch [7]). Bei gemeinsamer Ermittlung beider Materialparameter zeigt sich dieses Verhalten deutlich verstärkt (vgl. Tabelle 5 und Abb. 4 unten). Dabei ist jedoch zu bemerken, dass selbst bei wiederum extremen Differenzen der Startwerte annähernd das selbe Minimum erreicht wird. Dieses ist lediglich nicht ganz so markant ausgeprägt wie im Fall der Berücksichtigung aller Verschiebungsinformationen.

Abb. 4 unten zeigt in diesem Fall auch für eine ausgewählte Startwertkombination einen vom Messfehler abhängigen Optimierungsverlauf bezüglich des Parameters  $D_2$ . Hierbei verschlechtern sich sowohl der Zielfunktionswert als auch die Konvergenzrate mit zunehmendem Messfehler.

Tabelle 6: Parameteridentifikation für das Materialmodell (33a) (Neo-Hooke, kompressibel). Konfidenzbereiche und Korrelationskoeffizient zwischen den Materialparametern bei gleichzeitiger Identifikation von  $c_{10}$  und  $D_2$  für ein ausgewähltes Beispiel in Abhängigkeit von Charakter und Güte der Messdaten. Reidentifikation der vorgegebenen Parameter  $c_{10} = 3,57$  MPa,  $D_2 = 3,57$  MPa. Startwerte:  $c_{10} = 4,00$  MPa,  $D_2 = 3,00$  MPa.

Konfidenzbereiche		Abw. v. Vorgabe		Korr. koeff.	Messfehler
$c_{10}$	$D_2$	$c_{10}$	$D_2$		
[MPa]	[MPa]	%	%		%
<b>Kraft-Verschiebungs-Kurve (Zugversuch)</b>					
$3,5700 \pm 0,331 \cdot 10^{-3}$	$3,5704 \pm 0,278 \cdot 10^{-2}$	0,00	0,01	0,968	0,0
<b>Knotenverschiebungen (Cook-Membran: alle Knoten)</b>					
$3,5700 \pm 0,232 \cdot 10^{-5}$	$3,5700 \pm 0,165 \cdot 10^{-4}$	0,00	0,00	0,985	0,0
$3,5696 \pm 0,870 \cdot 10^{-3}$	$3,5698 \pm 0,620 \cdot 10^{-2}$	0,01	0,01	0,985	1,0
$3,5695 \pm 0,176 \cdot 10^{-2}$	$3,5702 \pm 0,125 \cdot 10^{-1}$	0,01	0,01	0,985	2,0
$3,5672 \pm 0,434 \cdot 10^{-2}$	$3,5887 \pm 0,312 \cdot 10^{-1}$	0,08	0,52	0,985	5,0
<b>Knotenverschiebungen (Cook-Membran: oberer rechter Eckknoten)</b>					
$3,5701 \pm 0,704 \cdot 10^{-4}$	$3,5692 \pm 0,477 \cdot 10^{-3}$	0,00	0,02	0,993	0,0
$3,5556 \pm 0,175 \cdot 10^{-1}$	$3,6671 \pm 0,124 \cdot 10^0$	0,40	2,72	0,993	1,0
$3,5338 \pm 0,409 \cdot 10^{-1}$	$3,8049 \pm 0,309 \cdot 10^0$	1,01	6,58	0,993	2,0
$3,7434 \pm 0,103 \cdot 10^0$	$2,7346 \pm 0,445 \cdot 10^0$	4,86	23,40	0,994	5,0

In Tabelle 6 sind einige Ergebnisse zur Analyse von Elementen der Fehlerschätzung für das Neo-Hooke-Modell bei kompressiblem Materialverhalten bezüglich einer ausgewählten Startwertkombination zusammengefasst. Diese unterstreichen die bisherigen Aussagen. So macht sich beispielsweise die Zunahme von Messfehlern erwartungsgemäß auch in einer Vergrößerung der Konfidenzintervalle bemerkbar. Diese ist bei Berücksichtigung der Verschiebungen nur eines Knotens ausgeprägter als bei einem umfangreicheren Feldproblem. Auch hierin dokumentiert sich ein möglicher Mangel an Informationen. Überraschend ist jedoch der deutliche Einfluss von Art und Umfang der zur Kalibrierung verwendeten Informationen auf die Aussagen zur Korrelation der Materialparameter untereinander. Die Güte der Daten wirkt sich hingegen diesbezüglich nicht aus. Das deutet darauf hin, bei Feststellung einer vermeintlich strengen Korrelation von Parametern einen Vergleich mit einem weiteren Experiment bzw. eine Verbesserung des Informati-

onsangebotes anzustreben, um Modellmängel von experimentellen Einflüssen auf das Kalibrierungsergebnis trennen zu können.

Tabelle 7: Parameteridentifikation für das Materialmodell (35a) (Neo-Hooke, nahezu inkompressibel) aus den Verschiebungen aller Knoten der Cook-Membran bzw. nur des rechten oberen Eckknotens (s. Abb. 3 – Knoten A). Reidentifikation vorgegebener Parameter auf der Basis synthetischer Messwerte in Abhängigkeit vom Messfehler und ausgewählter Startwerte für den Optimierungsprozess (*nopti*: Anzahl der Optimierungsschritte).

Startwert des Para- meters $c_{10}$	Optimierter Wert des Parameters ( $c_{10} = 3,57 \text{ MPa}$ )					
	ohne Messfehler			10% Messfehler		
	absolut	Abw. v. Vorgabe	<i>nopti</i>	absolut	Abw. v. Vorgabe	<i>nopti</i>
[MPa]	[MPa]	%		[MPa]	%	
<b>Verschiebungen aller Knoten</b>						
0,357	3,570	0,00	7	3,570	0,01	6
2,000	3,570	0,00	5	3,570	0,01	5
5,000	3,570	0,00	5	3,570	0,01	5
7,140	3,570	0,00	7	3,570	0,01	7
20,000	3,570	0,00	6	3,570	0,01	6
35,700	3,570	0,00	10	3,570	0,01	10
<b>Verschiebungen des rechten oberen Eckknotens</b>						
0,357	3,570	0,00	7	3,547	0,65	7
2,000	3,570	0,00	5	3,548	0,62	4
5,000	3,570	0,00	5	3,547	0,65	5
7,140	3,570	0,00	7	3,547	0,65	7
20,000	3,570	0,00	6	3,548	0,63	6
35,700	3,570	0,00	10	3,547	0,65	10

Wie bereits erwähnt, enthält das Neo-Hooke-Modell zur Simulation nahezu inkompressiblen Materialverhaltens (35a) lediglich einen Materialparameter  $c_{10}$ . Es ist der einfachste konstitutive Ansatz der Hyperelastizität mit nur schwach ausgeprägter Nichtlinearität.

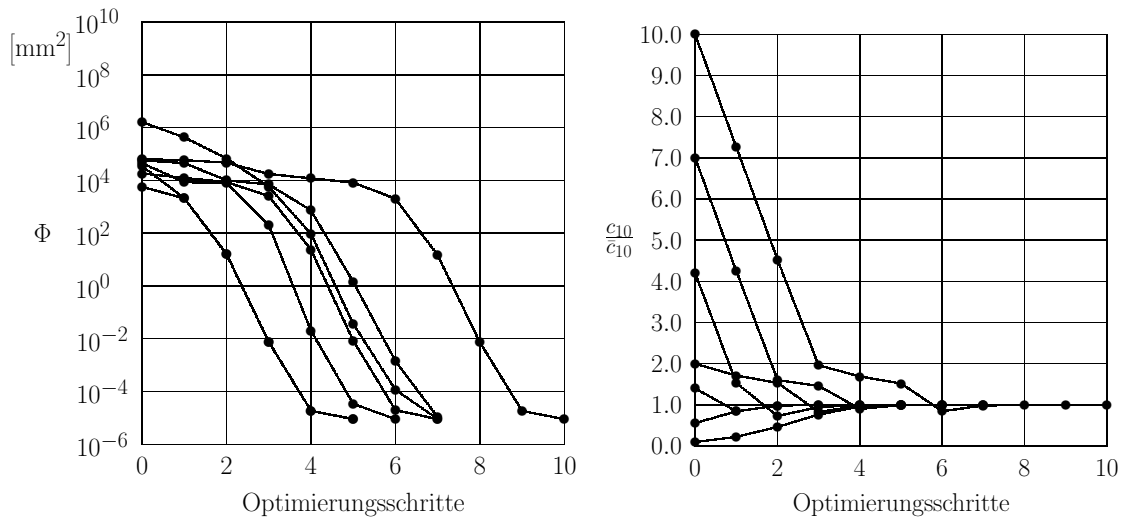


Abbildung 5: Parameteridentifikation für das Materialmodell (35a) (Neo-Hooke, nahezu inkompressibel) aus den Verschiebungen aller Knoten der Cook-Membran. Optimierungsverlauf für ausgewählte Startwerte bei messfehlerfreien synthetischen Daten. Links: Entwicklung der Zielfunktion. Rechts: Entwicklung des Parameters  $c_{10}$  bezogen auf dessen vorgegebenen Wert  $\bar{c}_{10} = 3,57 \text{ MPa}$ .

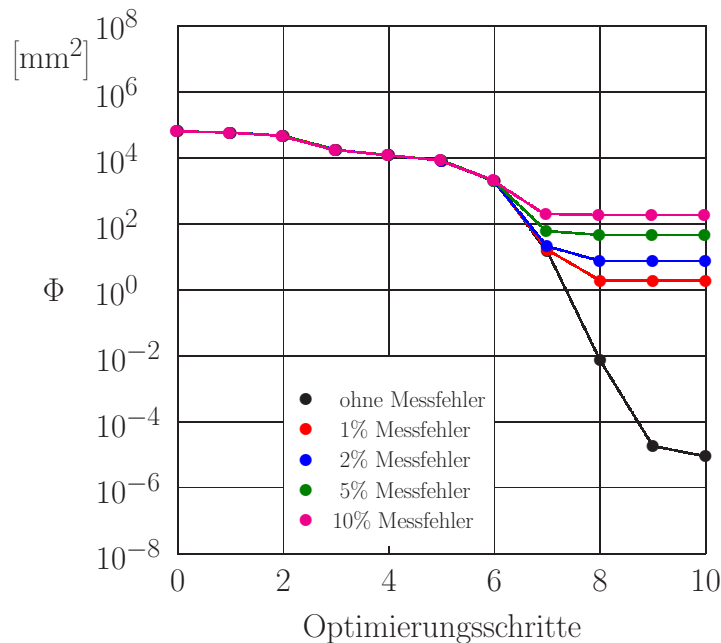


Abbildung 6: Parameteridentifikation für das Materialmodell (35a) (Neo-Hooke, nahezu inkompressibel) aus den Verschiebungen aller Knoten der Cook-Membran. Entwicklung der Zielfunktion während des Optimierungsprozesses für einen ausgewählten Startwert ( $c_{10} = 10,0 \text{ MPa}$ ) in Abhängigkeit vom Messfehler.



Die Untersuchungen zur Kalibrierung dieses Modells aus der Analyse der Verschiebungen aller Knoten bzw. des rechten oberen Eckknotens der Cook-Membran wurden in einem sehr breiten Spektrum von Startwerten und in Fehlerbereichen der synthetischen Messwerte bis maximal 10% durchgeführt. In der Tabelle 7 sowie den Abbildungen 5 und 6 sind ausgewählte Ergebnisse dargestellt. Diese zeigen das ausnahmslos unproblematische Verhalten des Optimierungsprozesses. Der vorgegebene Materialparameter wurde in allen Fällen exakt oder mit Abweichungen reidentifiziert, die deutlich unter dem maximalen Messfehler lagen.

Als Beispiel für ein Materialmodell der Hyperelastizität mit deutlich ausgeprägter Nichtlinearität wurde die Kalibrierung des modifizierten Fung-Ansatzes im kompressiblen Fall (33c) sowie bei nahezu inkompressiblem Verhalten (35c) untersucht. Dabei wurde wegen des großen Aufwandes (Startwertkombinationen für drei Parameter) im kompressiblen Fall keine Analyse mit gestörten synthetischen Messwerten vorgenommen. Prinzipiell abweichende Erkenntnisse gegenüber derartigen Studien an Materialmodellen mit weniger Parametern sind auch nicht zu erwarten. Von den durchgeführten Untersuchungen sind hier lediglich ausgewählte Ergebnisse unter Berücksichtigung der fehlerfreien Verschiebungen aller FE-Knoten der Cook-Membran in Tabelle 8 dargestellt. Dabei konnten in allen Fällen die vorgegebenen Parameter exakt reidentifiziert werden.

Umfangreichere Analysen befassten sich mit der nahezu inkompressiblen Version des modifizierten Fung-Modells. Wie für das kompressible Neo-Hooke-Modell wurden hier fehlerfreie und modifizierte synthetische Messwerte ausgewertet, die einen normal verteilten Fehler von maximal 1%, 2% bzw. 5% enthielten. Untersucht wurden die Verschiebungen aller FE-Knoten der Cook-Membran bzw. alternativ die Verschiebungen deren rechten oberen Eckknotens. Dazu sind ausgewählte Ergebnisse in den Tabellen 9, 10 und 11 sowie der Abb. 7 dargestellt. Diese bestätigen in vollem Umfang die bei der Diskussion zur Kalibrierung des Neo-Hooke-Modells für kompressibles Materialverhalten erwähnten Effekte sowie deren Interpretation und sollen daher hier nicht erneut ausgeführt werden.

Es soll an dieser Stelle lediglich bemerkt werden, dass sich für das modifizierte Fung-Modell die Ermittlung des Parameters  $\alpha$  als problematischer gegenüber dem Faktor  $c_{10}$  erweist. Berechnete Abweichungen vom vorgegebenen optimalen Wert sind hierbei signifikant deutlicher als jene, die für  $D_2$  (Neo-Hooke-Modell) ermittelt wurden. Dieses Verhalten ist mit der starken Beeinflussung der Nichtlinearität im konstitutiven Modell durch den Parameter  $\alpha$  zu erklären und wird wesentlich durch den Umfang des Informationsangebotes für den Kalibrierungsprozess bestimmt.

Tabelle 8: Parameteridentifikation für das Materialmodell (33c) (Modifizierter Fung, kompressibel) aus den Verschiebungen aller Knoten der Cook-Membran. Reidentifikation vorgegebener Parameter auf der Basis synthetischer Messwerte ohne Messfehler in Abhängigkeit von den Startwerten (*n<sub>opti</sub>*: Anzahl der Optimierungsschritte).

Startwerte der Parameter			Optimierte Werte der Parameter ( $c_{10} = 3,57 \text{ MPa}$ , $\alpha = 0,5$ , $D_2 = 3,57 \text{ MPa}$ )						<i>n<sub>opti</sub></i>
$c_{10}$	$\alpha$	$D_2$	absolut			Abw. von Vorgabe			
			$c_{10}$	$\alpha$	$D_2$	$c_{10}$	$\alpha$	$D_2$	
[MPa]		[MPa]	[MPa]		[MPa]	%	%	%	
3,000	–	–	3,570	–	–	0,00	–	–	4
4,000	–	–	3,570	–	–	0,00	–	–	3
–	0,250	–	–	0,500	–	–	0,00	–	3
–	0,750	–	–	0,500	–	–	0,00	–	3
–	–	3,000	–	–	3,570	–	–	0,00	3
–	–	4,000	–	–	3,570	–	–	0,00	3
3,000	0,250	–	3,570	0,500	–	0,00	0,00	–	4
3,000	0,750	–	3,570	0,500	–	0,00	0,00	–	4
4,000	0,750	–	3,570	0,500	–	0,00	0,00	–	4
4,000	0,250	–	3,570	0,500	–	0,00	0,00	–	4
3,000	–	3,000	3,570	–	3,570	0,00	–	0,00	4
3,000	–	4,000	3,570	–	3,570	0,00	–	0,00	4
4,000	–	4,000	3,570	–	3,570	0,00	–	0,00	4
4,000	–	3,000	3,570	–	3,570	0,00	–	0,00	4
–	0,250	3,000	–	0,500	3,570	–	0,00	0,01	4
–	0,250	4,000	–	0,500	3,570	–	0,00	0,01	4
–	0,750	4,000	–	0,500	3,570	–	0,00	0,01	4
–	0,750	3,000	–	0,500	3,570	–	0,00	0,01	4
3,000	0,250	3,000	3,570	0,500	3,570	0,00	0,00	0,00	5
3,000	0,250	4,000	3,570	0,500	3,570	0,00	0,00	0,00	4
3,000	0,750	4,000	3,570	0,500	3,570	0,00	0,00	0,00	4
4,000	0,750	4,000	3,570	0,500	3,570	0,00	0,00	0,00	4
4,000	0,750	3,000	3,570	0,500	3,570	0,00	0,00	0,00	4
4,000	0,250	3,000	3,570	0,500	3,570	0,00	0,00	0,00	4
4,000	0,250	4,000	3,570	0,500	3,570	0,00	0,00	0,00	4
3,000	0,750	3,000	3,570	0,500	3,570	0,00	0,00	0,00	5

Tabelle 9: Parameteridentifikation für das Materialmodell (35c) (Modifizierter Fung, nahezu inkompressibel) aus den Verschiebungen aller Knoten der Cook-Membran. Reidentifikation vorgegebener Parameter auf der Basis synthetischer Messwerte in Abhängigkeit vom Messfehler und ausgewählter Startwerte für den Optimierungsprozess (*nopti*: Anzahl der Optimierungsschritte).

Startwerte der Parameter		Optimierte Werte der Parameter ( $c_{10} = 3,57 \text{ MPa}$ , $\alpha = 0,5$ )				<i>nopti</i>
$c_{10}$	$\alpha$	absolut		Abw. v. Vorgabe		
		$c_{10}$	$\alpha$	$c_{10}$	$\alpha$	
[MPa]		[MPa]		%	%	
<b>ohne Messfehler</b>						
0,357	–	3,570	–	0,00	–	7
2,000	–	3,570	–	0,00	–	5
7,140	–	3,570	–	0,00	–	7
35,700	–	3,570	–	0,00	–	10
–	0,050	–	0,500	–	0,00	4
–	0,250	–	0,500	–	0,00	4
–	2,000	–	0,500	–	0,00	5
–	5,000	–	0,500	–	0,00	5
0,357	0,050	3,570	0,500	0,00	0,00	8
0,357	20,000	3,570	0,500	0,00	0,00	9
35,700	10,000	3,570	0,500	0,00	0,00	10
20,000	0,050	3,570	0,500	0,00	0,00	8
<b>5% Messfehler</b>						
0,357	–	3,570	–	0,01	–	7
2,000	–	3,570	–	0,01	–	5
7,140	–	3,570	–	0,01	–	7
35,700	–	3,570	–	0,01	–	10
–	0,050	–	0,493	–	1,44	6
–	0,250	–	0,493	–	1,40	3
–	2,000	–	0,493	–	1,38	4
–	5,000	–	0,493	–	1,38	4
0,357	0,050	3,570	0,487	0,01	2,60	7
0,357	20,000	3,570	0,486	0,01	2,74	8
35,700	10,000	3,570	0,488	0,01	2,34	10
20,000	0,050	3,570	0,488	0,01	2,36	8

Tabelle 10: Parameteridentifikation für das Materialmodell (35c) (Modifizierter Fung, nahezu inkompressibel) aus den Verschiebungen des rechten oberen Eckknotens der Cook-Membran (s. Abb. 3 – Knoten A). Reidentifikation vorgegebener Parameter auf der Basis synthetischer Messwerte in Abhängigkeit vom Messfehler und ausgewählter Startwerte für den Optimierungsprozess (*nopti*: Anzahl der Optimierungsschritte).

Startwerte der Parameter		Optimierte Werte der Parameter ( $c_{10} = 3,57 \text{ MPa}$ , $\alpha = 0,5$ )				<i>nopti</i>
$c_{10}$	$\alpha$	absolut		Abw. v. Vorgabe		
		$c_{10}$	$\alpha$	$c_{10}$	$\alpha$	
[MPa]		[MPa]		%	%	
ohne Messfehler						
0,357	–	3,570	–	0,00	–	7
2,000	–	3,570	–	0,00	–	5
7,140	–	3,570	–	0,00	–	7
35,700	–	3,570	–	0,00	–	9
–	0,050	–	0,500	–	0,04	5
–	0,250	–	0,500	–	0,04	4
–	2,000	–	0,500	–	0,04	5
–	5,000	–	0,500	–	0,04	6
0,357	0,050	3,570	0,500	0,00	0,08	8
0,357	20,000	3,570	0,500	0,00	0,08	9
35,700	10,000	3,570	0,500	0,00	0,08	11
20,000	0,050	3,570	0,500	0,00	0,08	9
5% Messfehler						
0,357	–	3,600	–	0,83	–	6
2,000	–	3,600	–	0,83	–	4
7,140	–	3,599	–	0,83	–	7
35,700	–	3,599	–	0,82	–	9
–	0,050	–	0,930	–	85,98	5
–	0,250	–	0,930	–	86,02	4
–	2,000	–	0,932	–	86,46	6
–	5,000	–	0,930	–	86,02	5
0,357	0,050	3,607	0,336	1,04	32,72	8
0,357	20,000	3,607	0,350	1,03	29,82	7
35,700	10,000	3,607	0,339	1,04	32,24	9
20,000	0,050	3,607	0,336	1,04	32,78	8

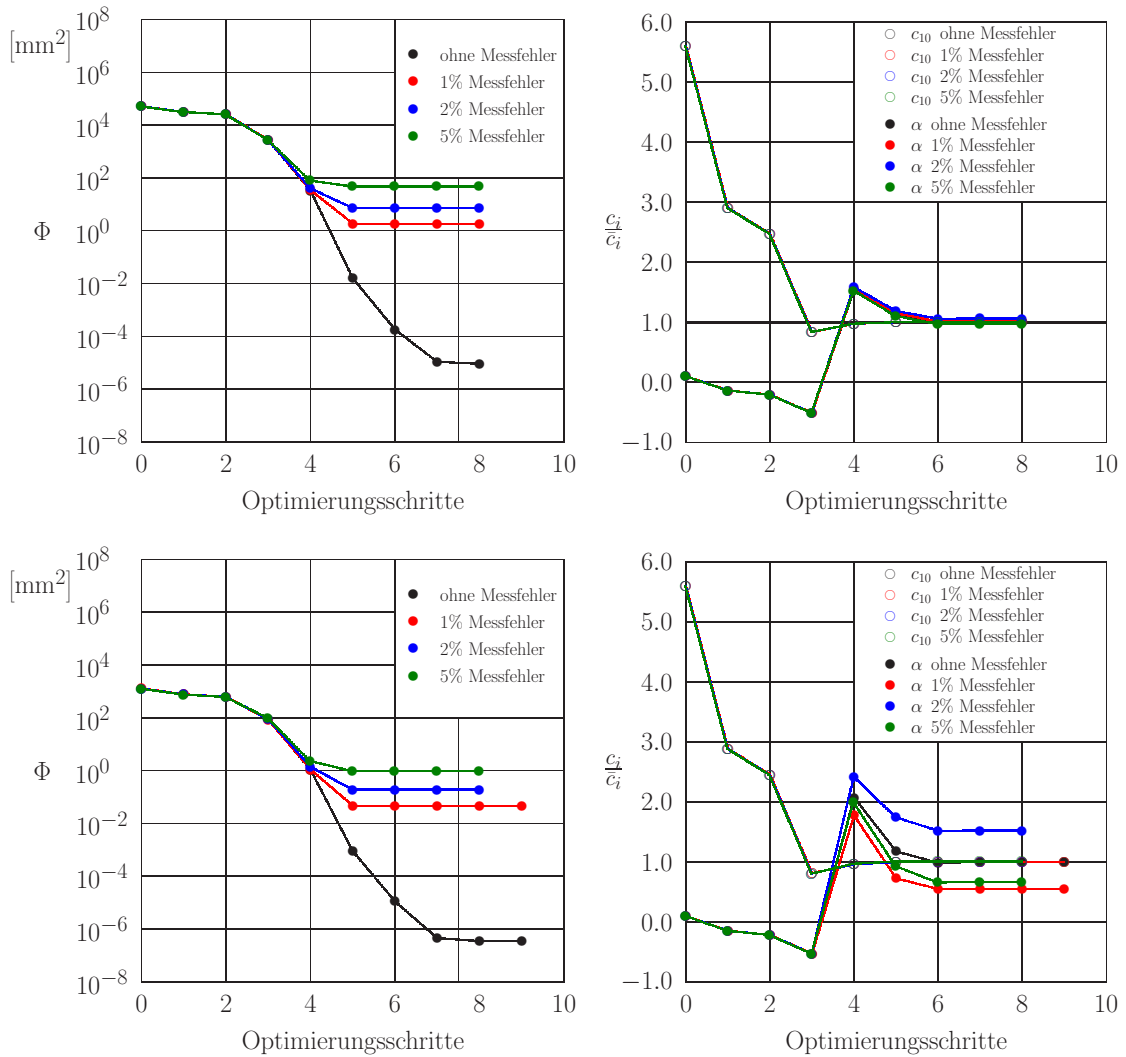


Abbildung 7: Parameteridentifikation für das Materialmodell (35c) (Modifizierter Fung, nahezu inkompressibel) aus den Verschiebungen aller Knoten der Cook-Membran (oben) bzw. des rechten oberen Eckknotens (unten – vgl. Abb. 3 – Knoten A). Optimierungsverlauf für ein ausgewähltes Paar von Startwerten ( $c_{10} = 20,0$  MPa,  $\alpha = 0,05$ ) in Abhängigkeit vom Messfehler. Links: Entwicklung der Zielfunktion. Rechts: Entwicklung der Parameter  $c_i$  bezogen auf deren vorgegebenen Werte  $\bar{c}_i$  ( $\bar{c}_{10} = 3,57$  MPa,  $\bar{\alpha} = 0,5$ ).

Interessante Ergebnisse, auf die bereits weiter oben hingewiesen wurde, sind in Tabelle 12 dargestellt. Hier wurde für das modifizierte Fung-Modell bei nahezu inkompressiblem Materialverhalten untersucht, ob die zur Ermittlung der synthetischen Messwerte vorgegebenen Materialwerte im Fall einer Störung dieser Daten mit normal verteilten Fehlern weiterhin ein Minimum der Zielfunktion generieren.

Tabelle 11: Parameteridentifikation für das Materialmodell (35c) (Modifizierter Fung, nahezu inkompressibel). Konfidenzbereiche und Korrelationskoeffizient zwischen den Materialparametern bei gleichzeitiger Identifikation von  $c_{10}$  und  $\alpha$  für ein ausgewähltes Beispiel in Abhängigkeit von Charakter und Güte der Messdaten. Reidentifikation der vorgegebenen Parameter  $c_{10} = 3,57 \text{ MPa}$ ,  $\alpha = 0,5$ . Startwerte:  $c_{10} = 4,00 \text{ MPa}$ ,  $\alpha = 0,25$ .

Konfidenzbereiche		Abw. v. Vorgabe		Korr. koeff.	Messfehler
$c_{10}$	$\alpha$	$c_{10}$	$\alpha$		
[MPa]		%	%		%
<b>Kraft-Verschiebungs-Kurve (Zugversuch)</b>					
$3,5698 \pm 0,851 \cdot 10^{-4}$	$0,5001 \pm 0,111 \cdot 10^{-3}$	0,01	0,02	0,923	0,0
<b>Knotenverschiebungen (Cook-Membran: alle Knoten)</b>					
$3,5700 \pm 0,726 \cdot 10^{-6}$	$0,5001 \pm 0,129 \cdot 10^{-4}$	0,00	0,02	0,913	0,0
$3,5692 \pm 0,326 \cdot 10^{-3}$	$0,5105 \pm 0,579 \cdot 10^{-2}$	0,02	2,10	0,913	1,0
$3,5691 \pm 0,652 \cdot 10^{-3}$	$0,5302 \pm 0,116 \cdot 10^{-1}$	0,03	6,04	0,913	2,0
$3,5704 \pm 0,166 \cdot 10^{-2}$	$0,4883 \pm 0,294 \cdot 10^{-1}$	0,01	2,34	0,913	5,0
<b>Knotenverschiebungen (Cook-Membran: oberer rechter Eckknoten)</b>					
$3,5700 \pm 0,140 \cdot 10^{-4}$	$0,5005 \pm 0,247 \cdot 10^{-3}$	0,00	0,10	0,910	0,0
$3,5775 \pm 0,507 \cdot 10^{-2}$	$0,2775 \pm 0,887 \cdot 10^{-1}$	0,21	44,50	0,910	1,0
$3,5605 \pm 0,104 \cdot 10^{-1}$	$0,7650 \pm 0,186 \cdot 10^0$	0,27	53,00	0,910	2,0
$3,6072 \pm 0,235 \cdot 10^{-1}$	$0,3358 \pm 0,414 \cdot 10^0$	1,04	32,84	0,910	5,0

Dazu wurden diese vorgegebenen, mithin also für ungestörte Messwerte optimalen, Parameter als Startwerte verwendet. Es zeigt sich, dass insbesondere bei gemeinsamer Identifikation der Parameter, das Optimierungsergebnis mit zunehmendem Messfehler immer mehr von dem angenommenen abweicht. Es entspricht dabei genau den in den Tabellen 9 und 10 sowie der Abb. 7 vorgestellten Werten.

Der Fakt, dass bei fehlerbehafteten synthetischen Messwerten nicht das bekannte Optimum erreicht wurde, weist somit nicht auf algorithmische Mängel, sondern lediglich auf eine veränderte Topologie der Zielfunktion hin. Diese Erkenntnis stützt die These, dass Materialparameter im engeren Sinne Modellparameter sind, die bei einer Kalibrierung konstitutiver Beziehungen ein Abbild modellbedingter Voraussetzungen (verwendeter Ansatz) sowie des experimentell bedingten Informationsangebotes für den Optimierungsprozess sind.

Tabelle 12: Parameteridentifikation für das Materialmodell (35c) (Modifizierter Fung, nahezu inkompressibel) aus den Verschiebungen von Knoten der Cook-Membran. Reidentifikation der Materialparameter auf der Basis synthetischer Messwerte mit den vorgegebenen Parametern als Startwerte. Abhängigkeit der Ergebnisse von Anzahl und Güte der Messdaten (*nopti*: Anzahl der Optimierungsschritte).

Startwerte der Parameter		Optimierte Werte der Parameter ( $c_{10} = 3,57 \text{ MPa}$ , $\alpha = 0,5$ )				Messfehler	<i>nopti</i>
$c_{10}$	$\alpha$	absolut		Abw. Vorgabe			
[MPa]		[MPa]		%	%	%	
<b>Verschiebungen aller Knoten</b>							
3,570	–	3,570	–	0,00	–	0,0	1
3,570	–	3,570	–	0,01	–	1,0	1
3,570	–	3,571	–	0,02	–	2,0	2
3,570	–	3,570	–	0,01	–	5,0	1
–	0,500	–	0,500	–	0,00	0,0	1
–	0,500	–	0,499	–	0,26	1,0	2
–	0,500	–	0,516	–	3,12	2,0	3
–	0,500	–	0,494	–	1,30	5,0	3
3,570	0,500	3,570	0,500	0,00	0,00	0,0	1
3,570	0,500	3,569	0,510	0,02	2,09	1,0	2
3,570	0,500	3,569	0,530	0,03	6,05	2,0	3
3,570	0,500	3,570	0,488	0,01	2,48	5,0	3
<b>Verschiebungen des rechten oberen Eckknotens</b>							
3,570	–	3,570	–	0,00	–	0,0	1
3,570	–	3,566	–	0,12	–	1,0	2
3,570	–	3,575	–	0,13	–	2,0	2
3,570	–	3,599	–	0,83	–	5,0	3
–	0,500	–	0,500	–	0,04	0,0	2
–	0,500	–	0,396	–	20,87	1,0	4
–	0,500	–	0,616	–	23,16	2,0	4
–	0,500	–	0,930	–	86,02	5,0	5
3,570	0,500	3,570	0,500	0,00	0,10	0,0	1
3,570	0,500	3,577	0,282	0,20	43,63	1,0	4
3,570	0,500	3,560	0,769	0,28	53,75	2,0	4
3,570	0,500	3,607	0,337	1,04	32,69	5,0	5

Die Untersuchungen zur Kalibrierung des Mooney-Rivlin-Ansatzes im kompressiblen Fall (33b) sowie bei nahezu inkompressiblem Verhalten (35b) werden bewusst am Ende dieses Abschnittes vorgestellt. In diesem Fall zeigt sich deutlich die spezifische Problematik der Identifikation streng miteinander korrelierter Materialparameter. Für das Mooney-Rivlin-Material ist bei kleinen Verzerrungen die Summe der Parameter  $c_{10} + c_{01}$  proportional zum Elastizitätsmodul. Aussagen zum Verhältnis der beiden Parameter im Einzelnen bezüglich physikalisch relevanter Größen sind nicht möglich.

Somit sind die in Tabelle 13 in Auswertung von Kraft-Verschiebungs-Kurven dargestellten unterschiedlichen Optimierungsergebnisse mit z. T. deutlichen Abweichungen von den vorgegebenen Werten insbesondere bei gleichzeitiger Identifikation aller Parameter des kompressiblen Modells nicht überraschend. In keinem der angegebenen Fälle weicht jedoch die Summe  $c_{10} + c_{01}$  um mehr als 0,006% von dem erwarteten Wert 2,1 MPa ab. Die strenge Korrelation dieser beiden Parameter wird durch Korrelationskoeffizienten verdeutlicht, die bei Verwendung von Elementen der Parameterschätzung nahezu exakt den Wert 1,0 annehmen.

Bei (der hier nicht im Detail dargestellten) Auswertung der Verschiebungen aller Knoten der Cook-Membran zur Parameteridentifikation des kompressiblen Mooney-Rivlin-Modells ergeben sich qualitativ vergleichbare Resultate. Quantitativ sind die Abweichungen der Optimierungsergebnisse von den vorgegebenen Werten bei gleichzeitiger Identifikation aller drei Materialparameter hingegen noch extremer. Unerwartet wirkt sich hier das (bisher immer geforderte) wesentlich vergrößerte Informationsangebot negativ aus. Durch die deutlich komplexere Topologie der Zielfunktion ergeben sich mehr lokale Minima, die den streng korrelierten Parametern in Abhängigkeit von den jeweiligen Startwerten zugänglich sind. Bemerkenswert ist jedoch, dass auch in diesem Fall die maximale Abweichung der Summe  $c_{10} + c_{01}$  von dem erwarteten Wert 2,1 MPa lediglich 0,026% beträgt.

Wie die in Tabelle 14 dargestellten Ergebnisse zeigen, treffen die obigen Aussagen zur Kalibrierung des Mooney-Rivlin-Modells in vollem Umfang auch auf den Fall des nahezu inkompressiblen Materialverhaltens zu. Hier sind die Abweichungen vom angenommenen Optimum teilweise so extrem, dass negative Werte für die Parameter identifiziert werden. Das ist physikalisch in begrenzten Fällen nicht unzulässig (die Summe  $c_{10} + c_{01}$  ist auch dann im erwarteten Bereich), führt jedoch bei großen Verzerrungen mitunter zu nicht konvergentem Lösungsverhalten für das direkte Problem.



Tabelle 13: Parameteridentifikation für das Materialmodell (33b) (Mooney-Rivlin, kompressibel) aus der Kraft-Verschiebungs-Kurve eines inhomogenen Zugversuches. Reidentifikation vorgegebener Parameter auf der Basis synthetischer Messwerte ohne Messfehler in Abhängigkeit von den Startwerten (*nopti*: Anzahl der Optimierungsschritte).

Startwerte der Parameter			Optimierte Werte der Parameter ( $c_{10} = 1,5 \text{ MPa}$ , $c_{01} = 0,6 \text{ MPa}$ , $D_2 = 10 \text{ MPa}$ )						<i>nopti</i>
			absolut			Abw. von Vorgabe			
$c_{10}$	$c_{01}$	$D_2$	$c_{10}$	$c_{01}$	$D_2$	$c_{10}$	$c_{01}$	$D_2$	
[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	%	%	%	
1,00	–	–	1,500	–	–	0,00	–	–	3
2,00	–	–	1,500	–	–	0,00	–	–	3
–	0,20	–	–	0,600	–	–	0,00	–	3
–	1,00	–	–	0,600	–	–	0,00	–	3
–	–	5,00	–	–	10,001	–	–	0,01	5
–	–	15,00	–	–	10,001	–	–	0,01	5
1,00	0,20	–	1,503	0,597	–	0,20	0,50	–	6
1,00	1,00	–	1,503	0,597	–	0,20	0,50	–	4
2,00	1,00	–	1,503	0,597	–	0,20	0,50	–	4
2,00	0,20	–	1,503	0,597	–	0,21	0,52	–	3
1,00	–	5,00	1,500	–	9,998	0,00	–	0,02	4
1,00	–	15,00	1,500	–	9,998	0,00	–	0,02	7
2,00	–	15,00	1,500	–	9,998	0,00	–	0,02	4
2,00	–	5,00	1,500	–	9,998	0,00	–	0,02	5
–	0,200	5,00	–	0,600	9,998	–	0,00	0,02	4
–	0,200	15,00	–	0,600	9,998	–	0,00	0,02	6
–	1,000	15,00	–	0,600	9,998	–	0,00	0,02	4
–	1,000	5,00	–	0,600	9,998	–	0,00	0,02	5
1,00	0,20	5,00	1,818	0,282	10,154	21,20	52,98	1,54	10
1,00	0,20	15,00	1,709	0,391	10,101	13,95	34,85	1,01	9
1,00	1,00	15,00	1,576	0,525	10,036	5,03	12,57	0,36	17
2,00	1,00	15,00	1,772	0,328	10,132	18,11	45,25	1,32	8
2,00	1,00	5,00	1,754	0,346	10,123	16,93	42,32	1,23	8
2,00	0,20	5,00	1,666	0,434	10,080	11,09	27,72	0,80	10
2,00	0,20	15,00	1,546	0,554	10,021	3,09	7,73	0,21	5
1,00	1,00	5,00	1,749	0,351	10,121	16,63	41,55	1,21	9

Tabelle 14: Parameteridentifikation für das Materialmodell (35b) (Mooney-Rivlin, nahezu inkompressibel) aus der Kraft-Verschiebungs-Kurve eines inhomogenen Zugversuches bzw. aus den Verschiebungen aller Knoten der Cook-Membran. Reidentifikation vorgegebener Parameter auf der Basis synthetischer Messwerte ohne Messfehler in Abhängigkeit von den Startwerten (*nopti*: Anzahl der Optimierungsschritte).

Startwerte der Parameter		Optimierte Werte der Parameter ( $c_{10} = 1,5 \text{ MPa}$ , $c_{01} = 0,6 \text{ MPa}$ )					<i>nopti</i>
$c_{10}$	$c_{01}$	absolut			Abw. Vorgabe		
		$c_{10}$	$c_{01}$	$c_{10} + c_{01}$	$c_{10}$	$c_{01}$	
[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	%	%	
<b>Kraft-Verschiebungs-Kurve (Zugversuch)</b>							
1,000	–	1,500	–	2,0999	0,01	–	3
2,000	–	1,500	–	2,0999	0,01	–	3
–	0,200	–	0,600	2,0999	–	0,02	3
–	1,000	–	0,600	2,0999	–	0,02	3
1,000	0,200	1,469	0,632	2,1001	2,09	5,25	7
1,000	1,000	1,467	0,633	2,1000	2,19	5,48	8
2,000	1,000	1,468	0,632	2,1001	2,11	5,28	6
2,000	0,200	1,467	0,633	2,1000	2,20	5,50	10
<b>Knotenverschiebungen (Cook-Membran)</b>							
1,000	–	1,500	–	2,1000	0,0	–	4
2,000	–	1,500	–	2,1000	0,0	–	4
–	0,200	–	0,600	2,1000	–	0,0	4
–	1,000	–	0,600	2,1000	–	0,0	5
1,000	0,200	1,538	0,562	2,1000	2,6	6,4	6
1,000	1,000	0,956	1,144	2,1000	36,3	90,7	29
2,000	1,000	8,028	-5,927	2,1011	435,2	1087,8	6
2,000	0,200	1,990	0,110	2,1000	32,7	81,6	29

Die zuverlässige Ermittlung physikalisch sinnvoller Materialparameter im Fall ihrer (möglichst zu vermeidenden) strengen Korrelation untereinander erfordert die Berücksichtigung zusätzlicher Informationen zum Materialverhalten oder den Parametern selbst. Mathematisch kann in dem Fall das Lösungsverhalten des inkorrekten Problems durch Regularisierungsverfahren verbessert werden. In der Literatur werden dazu verschiedene Verfahren beschrieben (siehe u.a. [1]),

von denen die Mehrparameterregularisierung in letzter Zeit stärkere Beachtung findet (vgl. hierzu u. a. [21, 10, 11]).

Abschließend soll erwähnt werden, dass im Rahmen der vorgestellten Untersuchungen stichprobenartig Vergleiche mit numerischer Sensitivitätsanalyse durchgeführt wurden. Die Optimierungsergebnisse sowie das Konvergenzverhalten erwiesen sich dabei als vergleichbar. Im Fall des modifizierten Fung-Modells mit zwei Materialparametern lagen die auf einen Optimierungsschritt bezogenen Rechenzeiten mit numerischer Sensitivitätsanalyse (Verwendung eines einseitigen Differenzenquotienten) um ca 66% über denen mit dem beschriebenen halbanalytischen Verfahren.

## 7 Zusammenfassung und Ausblick

Es wurde ein numerisches Verfahren zur Kalibrierung von Materialmodellen für die Simulation großer, nahezu inkompressibler hyperelastischer Verzerrungen vorgestellt. Die Lösung des inkorrekten, inversen Problems basiert auf einem deterministischem Optimierungsverfahren vom trust-region-Typ zur Auswertung einer verallgemeinerten Zielfunktion in Form einer Fehlerquadratsummennorm. Für die Zielfunktion werden experimentell ermittelte Verschiebungen als lokale Größen sowie globale Kraft- bzw. Momenteninformationen berücksichtigt.

Der Gradient der Zielfunktion enthält Ableitungen von Modellvariablen nach den Materialparametern. Diese werden im Rahmen eines effizienten und hochgenauen halbanalytischen Verfahrens ermittelt. Zur Herleitung der erforderlichen Beziehungen werden die schwachen Formulierungen des Gleichgewichts und der Inkompressibilitätsbedingung in materieller Beschreibungsweise implizit nach einem ausgewählten Materialparameter differenziert. Im Zusammenhang mit einer geeigneten Ortsdiskretisierung entsteht daraus ein lineares Gleichungssystem, das in jedem Optimierungsschritt für jeden Materialparameter zu lösen ist. Dabei ist die Systemmatrix mit derjenigen aus der Lösung des direkten Problems in gemischter Formulierung identisch.

Die entwickelten numerischen Algorithmen wurden in ein hauseigenes FE-Programm implementiert. Für die stabile Lösung werden Elementansätze nach Taylor-Hood in Verbindung mit einem effizienten iterativen Gleichungssystemlöser verwendet, der auf modernen Vorkonditionierungsstrategien basiert.

Das Deformationsgesetz der isotropen Hyperelastizität basiert auf einer multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten – dem so genannten Flory-Split – sowie der additiven Aufspaltung der freien Energiedichte in einen deviatorischen und einen volumetrischen Anteil. Eine Erweiterung auf anisotrop-elastische Modelle ist problemlos möglich. Für numerische Tests wurden von konstitutiver

Seite der Neo-Hooke-Ansatz, das Mooney-Rivlin-Modell sowie ein modifizierter Fung-Ansatz genutzt. An den Beispielen des inhomogenen Zugstabes und des Cookschen Membranproblems wurden unter Berücksichtigung globaler bzw. lokaler Informationen die Leistungsfähigkeit und Stabilität der entwickelten Modelle und Algorithmen getestet. In diesem Zusammenhang wurden synthetische Messwerte mit vorgegebenen Materialparametern generiert und deren Reidentifikation angestrebt.

Es wurden Hinweise für eine Verbesserung der Zuverlässigkeit der Lösung des inkorrekten, inversen Problems gegeben. In diesem Zusammenhang ist für praktische Anwendungen beispielsweise grundsätzlich zu empfehlen, möglichst wenige Parameter gleichzeitig auf der Basis möglichst vieler Informationen zu ermitteln. Das beinhaltet die Kalibrierung von Teilen des gesamten Parametersatzes aus unterschiedlichen Experimenten, die die entsprechend modellierten physikalischen Phänomene signifikant aktivieren. Ein weiteres Problem für die Optimierung stellen streng korrelierte Parameter dar. Sind diese nicht zu vermeiden, ist es sinnvoll, Zusatzinformationen in den Optimierungsprozess einzubeziehen. In diesem Zusammenhang ist die Erweiterung der Kalibrierungsverfahren um Methoden der Mehrparameterregularisierung geplant.

Weitere beabsichtigte Entwicklungen beziehen sich auf die Lösung des direkten und des inversen Problems zweiphasiger Medien bei großen Verzerrungen. Dabei können Analogien der Problemstellung zur gemischten Formulierung der nahezu inkompressiblen Elastizität effektiv ausgenutzt werden. Anwendungsgebiete für die Modelle und Verfahren finden sich insbesondere im Elastomerbereich und der Biomechanik. Die grundsätzliche Vorgehensweise lässt sich zudem für weitere Problemstellungen aus dem *multiphysics*-Bereich verallgemeinern.

## Literatur

- [1] G. Anger, R. Gorenflo, H. Jochmann, H. Moritz and W. Webers (Eds.). Inverse Problems: Principles and Applications in Geophysics, Technology, and Medicine. Band 74 der *Mathematical Research*, Akademie-Verlag, Berlin, 1993.
- [2] F. Armero. On the locking and stability of finite elements in finite deformation plane strain problems. *Comput. Struct.*, 75:261-290, 2000.
- [3] J. V. Beck and K. J. Arnold. *Parameter Estimation in Engineering and Science*. Wiley, New York, 1977.

- [4] U. Benedix. *Parameterschätzung für elastisch-plastische Deformationsgesetze bei Berücksichtigung lokaler und globaler Vergleichsgrößen*. Dissertation, Institut für Mechanik der TU Chemnitz, Bericht 4/2000, 2000.
- [5] O. Bruhns and D. K. Anding. On the simultaneous estimation of model parameters used in constitutive laws for inelastic material behaviour. *Int. J. Plast.*, 15/12:1311-1340, 1999.
- [6] A. Bucher, U.-J. Görke and R. Kreißig. A material model for finite elastoplastic deformations considering a substructure. *Int. J. Plast.*, 20:619-642, 2004.
- [7] A. Bucher, U.-J. Görke, P. Steinhorst, R. Kreißig and A. Meyer. *Ein Beitrag zur adaptiven gemischten Finite-Elemente-Formulierung der nahezu inkompressiblen Elastizität bei großen Verzerrungen*. Chemnitz Scientific Computing Preprint CSC/07-06, TU Chemnitz, 2007.
- [8] R.D. Cook. Improved two-dimensional finite element. *J. Struct. Div. ASCE*, 100:1851-1863, 1974.
- [9] J. E. Dennis and R. B. Schnabel. *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1983.
- [10] D. Düvelmeyer and B. Hofmann. Ill-posedness of parameter estimation in jump diffusion processes. In: *Tagungsband zum Workshop „Stochastische Analysis“ Bärenstein 2003* (Ed.: J. vom Scheidt). Technische Universität, Fakultät für Mathematik, Chemnitz, 5-20, 2004.
- [11] D. Düvelmeyer. *Inkorrektheitsphänomene und Regularisierung bei der Parameterschätzung für Jump-Diffusions-Prozesse*. Dissertation, Technische Universität Chemnitz, 2005.
- [12] T. Flöck. *Zur Identifikation von Materialparametern unter Berücksichtigung der Messfehler*. Dissertation, Institut für Mechanik der TU Chemnitz, Bericht 2/2000, 2000.
- [13] Y.-C. Fung. *Biomechanics: mechanical properties of living tissues*. Springer, New-York, 2nd ed. 1993.
- [14] J.-C. Gelin and O. Ghouati. An inverse method for material parameter estimation in the inelastic range. *Comp. Mech.*, 16:143-150, 1995.
- [15] O. Ghouati and J.-C. Gelin. A finite element-based identification method for complex metallic material behaviours. *Comp. Mat. Sci.*, 21:57-68, 2001.

- [16] U.-J. Görke, S. Kretzschmar and R. Kreißig. Analysis of inhomogeneous displacement fields for identification of parameters for elasto-plastic deformation laws. In: *Material Identification Using Mixed Numerical Experimental Methods, Proceedings of the Euromech-Symposium 359*, H. Sol and C.W.J. Oomens (Eds.), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 61-70, 1997.
- [17] U.-J. Görke, A. Bucher and R. Kreißig. Sensitivity analysis for the identification of elasto-plastic material parameters in case of large deformations. In: *Proceedings of the 4th Euromech Solid Mechanics Conference*, Metz, France 2000.
- [18] U.-J. Görke, A. Bucher and R. Kreißig. *Ein Beitrag zur Materialparameteridentifikation bei finiten elastisch-plastischen Verzerrungen durch Analyse inhomogener Verschiebungsfelder mit Hilfe der FEM*. TU Chemnitz, Preprint SFB393/01-03, 2001.
- [19] U.-J. Görke, A. Bucher, R. Kreißig and D. Michael. *Ein Beitrag zur Lösung von Anfangs-Randwert-Problemen einschließlich der Materialmodellierung bei finiten elastisch-plastischen Verzerrungen mit Hilfe der FEM*. Preprint SFB393/00-09, TU Chemnitz, 2000.
- [20] T. Harth, S. Schwan, J. Lehn and F. G. Kollmann. Identification of material parameters for inelastic constitutive models: statistical analysis and design of experiments. *Int. J. Plast.*, 20:1403-1440, 2004.
- [21] B. Hofmann. *Regularization for Applied Inverse and Ill-Posed Problems*. Teubner Leipzig, 1986.
- [22] H. Johansson and K. Runesson. Parameter identification in constitutive models via optimization with a posteriori error control. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 62:1315-1340, 2005.
- [23] H. Johansson and K. Runesson. Calibration of a class of non-linear viscoelasticity models with sensitivity assessment based on duality. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 69:2513-2537, 2007.
- [24] R. Kreißig. Auswertung inhomogener Verschiebungsfelder zur Identifikation der Parameter elastisch-plastischer Deformationsgesetze. *Forsch. Ingenieurwes.*, 64:99-109, 1998.
- [25] R. Kreißig, U.-J. Görke and A. Bucher. Parameteridentifikation bei finiten elastisch-plastischen Verzerrungen. In: *Tagungsband zum 7. Workshop Numerische Methoden der Plastomechanik des Institutes für Mechanik der Universität Hannover*, Neustadt am Rübenberge 2001.
- [26] R. Kreißig, J. Naumann, U. Benedix, P. Bormann, G. Grewolls and S. Kretzschmar. Parameter Identification of Inelastic Deformation Laws

- Analyzing Inhomogeneous Stress-Strain States. In: *Plasticity of Metals: Experiments, Models, Computation*, WILEY-VCH Verlag GmbH, 149-173 2001.
- [27] R. Kreißig, U. Benedix and U.-J. Görke. Statistical aspects of the identification of material parameters for elasto-plastic models. *Arch. Appl. Mech.*, 71:123-134., 2001.
- [28] R. Kreißig, A. Bucher and U.-J. Görke. Hierarchical adaptive FEM at finite elastoplastic deformations, In: *Parallel Algorithms and Cluster Computing – Implementations, Algorithms, and Applications*(Springer Lecture Notes in Computational Science and Engineering), K.H. Hoffmann and A. Meyer (Eds.), Springer, Berlin, 105-127, 2006.
- [29] R. Kreißig, U. Benedix, U.-J. Görke and M. Lindner. Identification and estimation of constitutive parameters for material laws in elastoplasticity. *GAMM-Mitteilungen*, 30(2):458-470, 2007.
- [30] S. Kretzschmar. *Parameteridentifikation elastisch-plastischer Deformationsgesetze durch Anpassung numerischer an experimentell ermittelte Verschiebungsfelder*. Dissertation, Institut für Mechanik der TU Chemnitz, Bericht 3/1998, 1998.
- [31] B. Lecampion and A. Constantinescu. Sensitivity analysis for parameter identification in quasi-static poroelasticity. *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech.*, 29/2:163-185, 2005.
- [32] R. Mahnken. Aspects on the finite-element implementation of the Gurson model including parameter identification. *Int. J. Plast.*, 15(11):1111-1137, 1999.
- [33] R. Mahnken. Theoretical, numerical and identification aspects of a new model class for ductile damage. *Int. J. Plast.*, 18(7):801-831, 2002.
- [34] R. Mahnken and E. Stein. The parameter-identification for visco-plastic models via Finite-Element-Methods and gradient methods. *Modelling Simul. Mater. Sci. Eng.*, 2:597-616, 1994.
- [35] R. Mahnken and E. Stein. A unified approach for parameter identification of inelastic material models in the frame of the finite element method. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 136:225-258, 1996.
- [36] R. Mahnken and E. Stein. Parameter identification for finite deformation elasto-plasticity in principal directions. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 147:17-39, 1997.

- [37] R. Mahnken and E. Kuhl. Parameter identification of gradient enhanced damage models with the finite element method. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 18:819-835, 1999.
- [38] R. Mahnken and P. Steinmann. Finite element algorithm for parameter identification of material models for fluid saturated porous media. *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech.*, 25/5:415-434, 2001.
- [39] M.N.L. Narasimhan. *Principles of continuum mechanics*. Wiley, New York, 1993.
- [40] J. Nocedal and S. J. Wright. *Numerical Optimization*. Springer, 1999.
- [41] R.W. Ogden, G. Saccomandi and I. Sgura. Fitting hyperelastic models to experimental data. *Comp. Mech.*, 34:484-502, 2004.
- [42] S. Panhans, R. Kreißig and S. Meinel. Identifikation der Materialparameter eines viskoplastischen Materialmodells vom Überspannungstyp für den Einsatzstahl 20MoCrS4. *Technische Mechanik*, 24/2:105-115, 2004.
- [43] S. S. Rao. *Engineering Optimization: Theory and Practice*. Wiley, New York, 3rd ed., 1996.
- [44] M. Rüter and E. Stein. Analysis, finite element computation and error estimation in transversely isotropic nearly incompressible finite elasticity. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 190:519-541, 2000.
- [45] D. S. Schnur and N. Zabarar. An inverse method for determining elastic material properties and a material interface. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 33:2039-2057, 1992.
- [46] H. Schwetlick and H. Kretzschmar. *Numerische Verfahren für Naturwissenschaftler und Ingenieure*. Fachbuchverlag, Leipzig, 1991.
- [47] E. Steck, R. Ritter, U. Peil and A. Ziegenbein (Hrsg.). *Plasticity of Metals: Experiments, Models, Computation*. Final Report of the Collaborative Research Centre 319, Wiley, Weinheim 2001.
- [48] K. M. Zhao and J. K. Lee. Inverse estimation of material properties for sheet metals. *Commun. Numer. Meth. Engrg.*, 20:105-118, 2004.



Some titles in this CSC and the former SFB393 preprint series:

- 05-01 C. Pester. A residual a posteriori error estimator for the eigenvalue problem for the Laplace-Beltrami operator. January 2005.
- 05-02 J. Badía, P. Benner, R. Mayo, E. Quintana-Ortí, G. Quintana-Ortí, J. Saak. Parallel Order Reduction via Balanced Truncation for Optimal Cooling of Steel Profiles. February 2005.
- 05-03 C. Pester. CoCoS – Computation of Corner Singularities. April 2005.
- 05-04 A. Meyer, P. Nestler. Mindlin-Reissner-Platte: Einige Elemente, Fehlerschätzer und Ergebnisse. April 2005.
- 05-05 P. Benner, J. Saak. Linear-Quadratic Regulator Design for Optimal Cooling of Steel Profiles. April 2005.
- 05-06 A. Meyer. A New Efficient Preconditioner for Crack Growth Problems. April 2005.
- 05-07 A. Meyer, P. Steinhorst. Überlegungen zur Parameterwahl im Bramble-Pasciak-CG für gemischte FEM. April 2005.
- 05-08 T. Eibner, J. M. Melenk. Fast algorithms for setting up the stiffness matrix in hp-FEM: a comparison. June 2005.
- 05-09 A. Meyer, P. Nestler. Mindlin-Reissner-Platte: Vergleich der Fehlerindikatoren in Bezug auf die Netzsteuerung Teil I. June 2005.
- 05-10 A. Meyer, P. Nestler. Mindlin-Reissner-Platte: Vergleich der Fehlerindikatoren in Bezug auf die Netzsteuerung Teil II. July 2005.
- 05-11 A. Meyer, R. Unger. Subspace-cg-techniques for clinch-problems. September 2005.
- 05-12 P. Ciarlet, Jr, B. Jung, S. Kaddouri, S. Labrunie, J. Zou. The Fourier Singular Complement Method for the Poisson Problem. Part III: Implementation Issues. October 2005.
- 05-13 T. Eibner, J. M. Melenk. Multilevel preconditioning for the boundary concentrated hp-FEM. December 2005.
- 05-14 M. Jung, A. M. Matsokin, S. V. Nepomnyaschikh, Yu. A. Tkachov. Multilevel preconditioning operators on locally modified grids. December 2005.
- 05-15 S. Barrachina, P. Benner, E. S. Quintana-Ortí. Solving Large-Scale Generalized Algebraic Bernoulli Equations via the Matrix Sign Function. December 2005.
- 05-16 B. Heinrich, B. Jung. Nitsche- and Fourier-finite-element method for the Poisson equation in axisymmetric domains with re-entrant edges. December 2005.
- 05-17 M. Randrianarivony, G. Brunnett.  $C^0$ -paving of closed meshes with quadrilateral patches. December 2005.
- 05-18 M. Randrianarivony, G. Brunnett. Quadrilateral removal and 2-ear theorems. December 2005.
- 05-19 P. Benner, E. S. Quintana-Ortí, G. Quintana-Ortí. Solving linear-quadratic optimal control problems on parallel computers. December 2005.

- 06-01 T. Eibner, J. M. Melenk. p-FEM quadrature error analysis on tetrahedra. October 2006.
- 06-02 P. Benner, H. Faßbender. On the solution of the rational matrix equation  $X = Q + LX^{-1}L^T$ . September 2006.
- 06-03 P. Benner, H. Mena, J. Saak. On the Parameter Selection Problem in the Newton-ADI Iteration for Large Scale Riccati Equations. October 2006.
- 06-04 J. M. Badía, P. Benner, R. Mayo, E. S. Quintana-Ortí, G. Quintana-Ortí, A. Remón. Balanced Truncation Model Reduction of Large and Sparse Generalized Linear Systems. November 2006.
- 07-01 U. Baur, P. Benner. Gramian-Based Model Reduction for Data-Sparse Systems. February 2007.
- 07-02 A. Meyer. Grundgleichungen und adaptive Finite-Elemente-Simulation bei „Großen Deformationen“. Februar 2007.
- 07-03 P. Steinhorst. Rotationssymmetrie für piezoelektrische Probleme. Februar 2007.
- 07-04 S. Beuchler, T. Eibner, U. Langer. Primal and Dual Interface Concentrated Iterative Substructuring Methods. April 2007.
- 07-05 T. Hein, M. Meyer. Simultane Identifikation voneinander unabhängiger Materialparameter - numerische Studien. Juni 2007.

The complete list of CSC and SFB393 preprints is available via  
<http://www.tu-chemnitz.de/mathematik/csc/>



