



# Finite-Elemente-Mortaring nach einer Methode von J. A. Nitsche für elliptische Randwertaufgaben

Von der Fakultät für Mathematik der Technischen Universität Chemnitz  
genehmigte

## DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades

Doctor rerum naturalium

(Dr. rer. nat.)

vorgelegt

von Dipl.-Math. techn. Kornelia Pönitz

geboren am 18. Juli 1975 in Görlitz

Gutachter: Prof. Dr. rer. nat. habil. Bernd Heinrich, TU Chemnitz  
Prof. Dr. rer. nat. habil. Hans-Görg Roos, TU Dresden  
Prof. Dr. rer. nat. habil. Barbara Wohlmuth, Universität Stuttgart

Tag der Verleihung: 29. Juni 2006

Viele technische Prozesse führen auf Randwertprobleme mit partiellen Differentialgleichungen, die mit Finite-Elemente-Methoden näherungsweise gelöst werden können. Spezielle Varianten dieser Methoden sind Finite-Elemente-Mortar-Methoden. Sie erlauben das Arbeiten mit an Teilgebietschnittträgern nichtzusammenpassenden Netzen, was für Probleme mit komplizierten Geometrien, Randschichten, springenden Koeffizienten sowie für zeitabhängige Probleme von Vorteil sein kann. Ebenso können unterschiedliche Diskretisierungsmethoden in den einzelnen Teilgebieten miteinander gekoppelt werden.

In dieser Arbeit wird das Finite-Elemente-Mortaring nach einer Methode von Nitsche für elliptische Randwertprobleme auf zweidimensionalen polygonalen Gebieten untersucht. Von besonderem Interesse sind dabei nichtreguläre Lösungen ( $u \in H^{1+\delta}(\Omega)$ ,  $\delta > 0$ ) mit Eckensingularitäten für die Poisson-Gleichung sowie die Lamé-Gleichung mit gemischten Randbedingungen. Weiterhin werden singular gestörte Reaktions-Diffusions-Probleme betrachtet, deren Lösungen zusätzlich zu Eckensingularitäten noch anisotropes Verhalten in Randschichten aufweisen.

Für jede dieser drei Problemklassen wird das Nitsche-Mortaring dargelegt. Es werden einige Eigenschaften der Mortar-Diskretisierung angegeben und a-priori-Fehlerabschätzungen in einer  $H^1$ -artigen sowie der  $L_2$ -Norm durchgeführt. Auf lokal verfeinerten Dreiecksnetzen können auch für Lösungen mit Eckensingularitäten optimale Konvergenzordnungen nachgewiesen werden. Bei den Lösungen mit anisotropem Verhalten werden zusätzlich anisotrope Dreiecksnetze verwendet. Es werden auch hier Konvergenzordnungen wie bei klassischen Finite-Elemente-Methoden ohne Mortaring erreicht. Numerische Experimente illustrieren die Methode und die Aussagen zur Konvergenz.

**Key Words.** Finite-Elemente-Methode, Mortar-Methode, lokal nichtkonforme Netze, Eckensingularität, Randschichten, Netzgraduirung, anisotrope Netze, a-priori-Fehlerabschätzung

**AMS subject classification.** 65N30

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Poissongleichung mit gemischten Randbedingungen</b>	<b>5</b>
2.1	Analytische Vorbetrachtungen . . . . .	5
2.2	Methode des Nitsche-Mortarings . . . . .	7
2.3	Eigenschaften der Nitsche-Diskretisierung . . . . .	11
2.4	Abschätzungen für Eckensingularitäten und graduierte Netze . . . . .	19
2.4.1	Abschätzungen mit gewichteten $L_2$ -Normen . . . . .	19
2.4.2	Graduierte Netzverfeinerung . . . . .	24
2.4.3	Fehlerabschätzung in der Norm $\ \cdot\ _{1,h}$ . . . . .	26
2.4.4	Fehlerabschätzung in der $L_2$ -Norm . . . . .	36
2.4.5	Abschätzung der Konditionszahl der Systemmatrix . . . . .	38
2.5	Numerische Ergebnisse . . . . .	42
2.5.1	Neumann-Neumann-Randbedingungen über L-förmigem Gebiet . . . . .	42
2.5.2	Dirichlet-Dirichlet-Randbedingungen über polygonalem Gebiet . . . . .	47
2.5.3	Dirichlet-Neumann-Randbedingungen über Rechteck . . . . .	50
<b>3</b>	<b>Singulär gestörtes Reaktions-Diffusions-Problem</b>	<b>52</b>
3.1	Aufgabenstellung und Methode des Nitsche-Mortarings . . . . .	52
3.2	Eigenschaften der Nitsche-Diskretisierung . . . . .	54
3.3	Abschätzung des Fehlers in der Norm $\ \cdot\ _{1,h}$ . . . . .	58
3.3.1	Lösungsdarstellung . . . . .	58
3.3.2	Grundlegende Sätze für anisotrope Dreiecke . . . . .	59
3.3.3	Netzverfeinerung mit Graduierung und Anisotropie . . . . .	61
3.3.4	Fehlerabschätzung in der Norm $\ \cdot\ _{1,h}$ . . . . .	63
3.4	Numerische Ergebnisse . . . . .	78
<b>4</b>	<b>Lamé-Gleichung mit gemischten Randbedingungen</b>	<b>83</b>
4.1	Analytische Vorbetrachtungen . . . . .	83
4.1.1	Problembeschreibung und klassische Variationsformulierung . . . . .	83
4.1.2	Regularität der Lösung . . . . .	85
4.2	Methode des Nitsche-Mortarings . . . . .	89
4.3	Eigenschaften des Nitsche-Mortarings . . . . .	90
4.4	Abschätzungen für Eckensingularitäten und graduierte Netze . . . . .	94

4.4.1 Fehlerabschätzung in der Norm $\ \cdot\ _{1,h}$ . . . . .	94
4.4.2 Fehlerabschätzung in der $L_2$ -Norm . . . . .	100
4.5 Numerisches Beispiel . . . . .	102
<b>5 Weitere Betrachtungen für die Poissongleichung</b>	<b>107</b>
5.1 Numerische Untersuchungen zum Parameter $\gamma$ . . . . .	107
5.2 Vergleich des Nitsche-Mortarings mit einer Inneren Strafmethode . . . . .	113
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>120</b>
<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>125</b>

# 1 Einleitung

Computersimulationen spielen in vielen Industriezweigen eine große Rolle, so zum Beispiel in der Auto- und Flugzeugkonstruktion, bei der Entwicklung von Halbleiterbauelementen, bei Wettervorhersagen oder der Untersuchung von Schadstoffausbreitungen. Zahlreiche natürliche und technische Prozesse lassen sich in mathematischen Modellen als Randwertaufgaben darstellen, deren exakte Lösung  $u$  nicht analytisch bestimmt werden kann. Statt dessen werden Näherungslösungen  $u_h$  durch Diskretisierung des Originalproblems berechnet. Weit verbreitete Diskretisierungsmethoden sind Finite-Elemente-Methoden, die häufig im Zusammenhang mit Gebietszerlegungsmethoden verwendet werden. Gebietszerlegungsmethoden erleichtern das parallele Arbeiten bei der Vernetzung der Teilgebiete, dem Aufstellen der Systemmatrix und der rechten Seite sowie beim Lösen des Finite-Elemente-Gleichungssystems. Allerdings sind bei Gebietszerlegungsmethoden die Teilgebetslösungen geeignet zu koppeln. Bei den sogenannten Mortar-Methoden wird beispielsweise die übliche Bedingung der Stetigkeit an den Schnittträgern der Teilgebiete durch eine abgeschwächte Stetigkeitsbedingung ersetzt.

In der Literatur werden verschiedene Varianten der Mortar-Methoden betrachtet. Bei der Originalmethode [13, 15] wird die abgeschwächte Stetigkeitsbedingung durch eine Orthogonalitätsbeziehung zwischen dem Sprung an den Schnittträgern und einem modifizierten Spurraum hergestellt. Bei dieser Variante erfüllen bereits die Funktionen des Finite-Elemente-Ansatzraumes diese Orthogonalitätsbeziehung. Durch Verwendung von Lagrangemultiplikatoren erhält man eine Mortar-Methode, die auf eine Sattelpunktformulierung führt [12, 13, 17, 72, 74]. Diese Variante kann durch geeignete Wahl der Basis für den Raum der Lagrangemultiplikatoren noch vereinfacht werden [73, 74]. Weiterhin gibt es ein Verfahren, das als Mortaring nach einer Methode von J. A. Nitsche bezeichnet wird [64, 4]. Bei dieser Variante wird das näherungsweise Übereinstimmen der Teilgebetslösungen durch eine modifizierte Bilinearform erzwungen.

Die Mortar-Methoden haben gegenüber klassischen Finite-Elemente-Methoden den wesentlichen Vorteil, dass mit Triangulationen gearbeitet werden kann, die an den Schnittträgern der Teilgebiete nicht zusammenpassen. Solche nichtzusammenpassenden Netze entstehen zum Beispiel, wenn die verschiedenen Teilgebiete unabhängig voneinander, insbesondere auch parallel, vernetzt werden, ohne dass auf die Zulässigkeit der dadurch entstehenden Triangulation des gesamten Gebietes geachtet wird. Die Verwendung von nichtzusammenpassenden Netzen erleichtert das Koppeln von lokal strukturierten mit global unstrukturierten Netzen sowie das Arbeiten mit hängenden Knoten, die unter anderem bei adaptiver Netzverfeinerung auftreten. Das Benutzen solcher Triangulationen ist wünschenswert, wenn zum Beispiel in der Randwertaufgabe sehr verschiedene Daten (Materialeigenschaften, rechte Seite) in einzelnen Teilgebieten gegeben sind oder wenn das Berechnungsgebiet eine komplizierte Geometrie aufweist, was zu Lösungen mit Singularitäten oder anisotropem Verhalten führen kann. Weiterhin eignen sich Mortar-Methoden zum Verbinden von Teilgebetslösungen, die mit verschiedenen Versionen ( $h$ ,  $p$ ,  $hp$ ) der Finite-Elemente-Methoden bzw. mit Spektral-Methoden berechnet wurden, siehe [14, 61], sowie für zeitabhängige Probleme mit sich gegeneinander bewegenden Teilgebieten. Die Verfahren sind im Allgemeinen leicht parallelisierbar und es werden optimale Fehlerordnungen erreicht.

In der vorliegenden Arbeit wird das bereits erwähnte Finite-Elemente-Mortaring nach einer Methode von Nitsche betrachtet. Die klassische Methode von Nitsche [53] dient der numerischen Lösung von Differentialgleichungen mit Randbedingungen erster Art, wobei das (näherungsweise) Erfülltsein der Randbedingungen nicht im Finite-Elemente-Ansatzraum erzwungen wird, sondern durch zusätzliche Terme in der Bilinearform. Nach [64] ist die Methode von Nitsche robust und einfach implementierbar. Sie wurde in [4] zur Diskretisierung von parabolischen Gleichungen zweiter Ordnung mit unstetigen finiten Elementen (discontinuous finite elements) genutzt. In [63, 65] wurde die Methode von Nitsche weiter ausgearbeitet und durch Stenberg [64] auf innere Ränder (Teilgebietsschnittländer) übertragen, siehe auch [4, 5]. Bei dieser Verallgemeinerung der Methode von Nitsche, dem Finite-Elemente-Mortaring nach Nitsche, wird die Lösung der Differentialgleichung unabhängig auf jedem Teilgebiet approximiert, wobei die Stetigkeit der Lösung an den Teilgebietsschnittländern durch schwache Stetigkeitsbedingungen erzwungen wird. Nach [10, 20, 63] kann das Mortaring nach Nitsche als stabilisierte Variante der Mortar-Methoden betrachtet werden.

Um bei den oben erwähnten Mortar-Varianten, bei denen der Fluss auf den Schnittländern als zusätzliche Unbekannte (Lagrangemultiplikator) eingeführt wird und deren diskrete Variationsformulierung sich als Sattelpunktsproblem darstellt, stabile Approximationsschemen zu erhalten, muss der Raum der Lagrangemultiplikatoren eine gleichmäßige inf-sup-Bedingung und geeignete Approximationseigenschaften erfüllen. Diese Umstände sowie das Berechnen von zusätzlichen Unbekannten entfallen beim Mortaring nach Nitsche, welches zu einer symmetrischen und positiv definiten Bilinearform auf dem Produktraum der unveränderten (gewöhnlichen) Finite-Elemente-Räume der Teilgebiete führt (vorausgesetzt, der Differentialoperator erfüllt diese Eigenschaften). Da sich die netzabhängige Bilinearform von denen der Finite-Elemente-Methoden ohne Mortaring nur durch zusätzliche Terme an den Schnittländern unterscheidet, können vorhandene Softwaresysteme nach Modifikation verwendet werden. Für die Stabilität des Nitsche-Mortaring sorgt ein zusätzlicher Parameter in der Bilinearform. Dieser Parameter  $\gamma$  kann in Abhängigkeit der Gestaltsregularität der Netzelemente, des Polynomgrades der Diskretisierung sowie gegebenenfalls von Materialkonstanten bestimmt werden. Da zudem die diskrete Variationsformulierung unabhängig von  $\gamma$  konsistent mit der Lösung des Randwertproblems ist, stellt das Mortaring nach Nitsche keine Strafmethode dar.

Im Folgenden werden Arbeiten angeführt, die sich mit dem Mortaring nach Nitsche beschäftigen. Grundlegende Aspekte des Nitsche-Mortarings und Fehlerabschätzungen für die Poissongleichung mit Dirichletrandbedingungen für reguläre Lösungen  $u \in H^k(\Omega)$  ( $k \geq 2$ ) auf quasi-uniformen Netzen sind in [64, 10, 11] dargelegt. In [4] wird eine verwandte Methode für parabolische Probleme untersucht. Weitere Betrachtungen für nichtreguläre Lösungen  $u \in H^{\frac{3}{2}+\delta}(\Omega)$  ( $\delta > 0$ ) der Poissongleichung unter Verwendung von lokal verfeinerten Netzen sind in [39] durchgeführt worden. In [37] wurde das Mortaring nach Nitsche für die Poissongleichung mit springenden Koeffizienten (Interface-Problem) und Lösungen  $u \in H^{1+\delta}(\Omega)$  untersucht. Lösungen von singular gestörten Reaktions-Diffusions-Problemen über quadratischen Gebieten mit anisotropen Verhalten wurden in [40] diskutiert. Anhand der Lamé-Gleichung wird in [27] ein Vergleich der klassischen Mortar-Methode mit dem Mortaring nach Nitsche durchgeführt. Mit [36] wird das Nitsche-Mortaring mit der Fourier-Finite-Elemente-Methode kombiniert und für die Poissongleichung mit Dirichletrandbedingungen in axialsymmetrischen Gebieten untersucht.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich nun vorrangig mit dem Mortaring nach Nitsche für allgemeinere Problemstellungen als in den zuvor zitierten Arbeiten. So werden insbesondere die Poisson- und Lamé-Gleichung mit gemischten Randbedingungen und nichtregulären Lösungen ( $u \in H^{1+\delta}(\Omega)$ ,  $\delta > 0$ ) mit Eckensingularitäten behandelt. Außerdem werden singular gestörte Reaktions-Diffusions-Proble-

me über polygonalen Gebieten  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  mit nichtregulären Lösungen und anisotropem Randschichtverhalten mittels Nitsche-Mortaring approximiert und aus der Sicht der numerischen Analysis untersucht. Lösungen dieser Art lassen sich mit lokal verfeinerten Netzen in den Umgebungen der Singularitäten und anisotropen Netzen in den Gebieten mit anisotropen Lösungsverhalten (den Randschichten) optimal approximieren. Allerdings weisen die Netzelemente dabei unterschiedliches asymptotisches Verhalten auf, worauf bei den Untersuchungen des Mortarings nach Nitsche besonderes Gewicht gelegt wird. Bei der lokalen Netzverfeinerung in Eckenumgebungen treten Elemente auf, deren Durchmesser sich zum Beispiel wie  $h^{\frac{1}{\mu}}$  mit  $\mu \in (0, 1]$  verhält. Bei anisotropen Netzen hingegen geht die Gestaltsregularität der Elemente verloren, hier speziell ist das Verhältnis von Durchmesser und Inkreisradius des Elementes nicht mehr gleichmäßig bezüglich des Diffusionsparameters  $\varepsilon$  beschränkt. Damit müssen alle für das Nitsche-Mortaring durchzuführenden Untersuchungen und Fehlerabschätzungen Resultate gleichmäßig bezüglich  $\varepsilon$  aufweisen. Die geringe Regularität der Lösung hat ebenfalls Auswirkungen auf die Betrachtungen. Beim Nitsche-Mortaring ist unter anderem die Normalenableitung  $\frac{\partial u}{\partial n}$  der Lösung  $u$  auf den Schnittträgern  $\Gamma$  der Teilgebiete von Bedeutung. Da hier im Allgemeinen  $\frac{\partial u}{\partial n} \notin L_2(\Gamma)$  gilt, wird unter anderem bei den Fehlerabschätzungen mit gewichteten Sobolev-Räumen gearbeitet. Bei der Konditionszahlabschätzung der Systemmatrix des Nitsche-Mortarings liegt die Schwierigkeiten gegenüber den Abschätzungen bei Finite-Elemente-Methoden ohne Mortaring darin, dass nicht alle Teilgebiete Dirichletrandteile besitzen. Diese Schwierigkeit wird durch Einführen von geeigneten Hilfsfunktionen und Verwenden von Spur- und Fortsetzungssätzen angegangen.

Der auf die Einleitung folgende Hauptteil dieser Arbeit ist in vier weitere Kapitel aufgeteilt. In Kapitel 2 werden das Finite-Elemente-Mortaring nach einer Methode von Nitsche sowie benötigte Bezeichnungen und Räume am Modellproblem der Poissongleichung mit gemischten Randbedingungen eingeführt. Mit Hilfe einiger Lemmas werden Eigenschaften wie die Konsistenz, die  $V_h$ -Elliptizität und  $V_h$ -Beschränktheit bewiesen. Es wird angegeben, in welcher Größenordnung der für die Methode wichtige Parameter  $\gamma$  zu wählen ist. Numerische Untersuchungen dazu werden in Abschnitt 5.1 durchgeführt. Für die Lösung der Poissongleichung mit gemischten Randbedingungen über zweidimensionalen, polygonalen und beschränkten Gebieten  $\Omega$  wird eine Zerlegung in einen regulären und singulären Lösungsanteil angegeben. Auf Grund der geringen Regularität ( $H^{\frac{5}{4}+\delta}(\Omega)$ ,  $\delta > 0$ ) wird bei den durchgeführten Fehlerabschätzungen mit Normen in gewichteten Räumen gearbeitet. Bei Verwendung von ausreichend lokal verfeinerten Netzen können jeweils optimale Konvergenzordnungen in einer  $H^1$ -ähnlichen und der  $L_2$ -Norm gezeigt werden. Die Abschätzung der Konditionszahl der Finite-Elemente-Systemmatrix des Nitsche-Mortarings für lineare Ansatzfunktionen und graduierte Netze ergibt die auch bei der klassischen Finite-Elemente-Methode ohne Mortaring und Graduierung übliche Ordnung von  $\mathcal{O}(h^{-2})$ . Zum Abschluss dieses Kapitels werden die bewiesenen Konvergenzordnungen durch numerische Rechnungen belegt.

Das Kapitel 3 befasst sich mit dem Mortaring nach Nitsche für singular gestörte Reaktions-Diffusions-Probleme. Die Nitsche-Diskretisierung aus Kapitel 2 wird an die Randwertaufgabe angepasst und es werden wieder Eigenschaften wie die Konsistenz, die  $V_h$ -Elliptizität und  $V_h$ -Beschränktheit gezeigt. Es wird die analytische Darstellung der Lösungen von singular gestörten Reaktions-Diffusions-Problemen angegeben, die im Allgemeinen Eckensingularitäten und insbesondere für kleine Diffusionsparameter  $\varepsilon$  anisotropes Verhalten in Teilen des Berechnungsgebietes aufweisen. Auf Grund des anisotropen Lösungsverhaltens wird hier neben lokal verfeinerten Netzen an den einspringenden Ecken mit anisotropen Netzen in den Randschichten gearbeitet, das heißt, es wird auf die Gestaltsregularität der Netzelemente verzichtet. Unter Verwendung der Lösungsdarstellung sowie anisotroper und graduerter

Netze wird in der  $H^1$ -artigen Norm ein Konvergenzverhalten von  $\varepsilon^{\frac{1}{2}} |\ln \varepsilon|^{\frac{3}{2}} h + h^2$  gezeigt, welches auch für die Energienorm bei der Finite-Elemente-Methode ohne Mortaring erhalten wird. Auch hier werden die theoretischen Konvergenzaussagen durch numerische Untersuchungen bestätigt.

In Kapitel 4 wird nun die Lamé-Gleichung, das Gleichungssystem der linearen Elastizität, mit gemischten Randbedingungen über zweidimensionalen, polygonalen und beschränkten Gebieten  $\Omega$  betrachtet. Es wird die Nitsche-Diskretisierung für diese Randwertaufgabe formuliert, wobei im Vergleich zu Kapitel 2 die Funktionen (Lösung, rechte Seite, Randbedingungen) vektorwertig sind und mit anderen Differentialoperatoren gearbeitet wird. Es gelten wieder Eigenschaften wie die Konsistenz, die  $V_h$ -Elliptizität und  $V_h$ -Beschränktheit. Das analytische Lösungsverhalten ( $u \in H^{1+\delta}(\Omega)$ ) wird diskutiert und mit dessen Hilfe die Fehler in der  $L_2$ - und  $H^1$ -artigen Norm abgeschätzt, wobei wieder gewichtete  $L_2$ -Räume und lokal verfeinerte Netze verwendet werden. Den Abschluss bildet auch hier ein numerisches Beispiel, das die unter Benutzung von ausreichend verfeinerten Netzen bewiesenen optimalen Konvergenzordnungen belegt.

Das Kapitel 5 beinhaltet numerische Untersuchungen zum Stabilitätsparameter  $\gamma$ . Es wird der Einfluss des Parameters  $\gamma$  auf das Verhalten des Fehlers, die Konvergenzordnungen und die Konditionszahl angegeben. Die numerischen Tests unterstützen die aus den theoretischen Betrachtungen in Kapitel 2 hervorgehenden Erwartungen. Der Parameter  $\gamma$  muss demnach eine moderate Mindestgröße haben, die in Abhängigkeit von der Gestaltsregularität der Netzelemente und des Polynomgrades der Diskretisierung sowie gegebenenfalls von Materialkonstanten bestimmt werden kann. Die Konditionszahl steigt für festes  $h$  linear mit wachsendem  $\gamma$  an. Für weit über die angegebene untere Schranke gewähltes  $\gamma$  wird der Sprung der Lösung an den Schnitträndern der Teilgebiete so stark bestraft, dass inkorrekte Näherungslösungen erhalten werden. Weiterhin wird im Kapitel 5 das Mortaring nach Nitsche mit der inneren Strafmethode aus [50, 51] verglichen. Um bei der Strafmethode mit einer einfacheren, allerdings nicht konsistenten Variationsformulierung ähnliche Größenordnungen der Fehler und Konvergenzordnungen wie beim Nitsche-Mortaring zu erhalten, muss der Strafparameter in Abhängigkeit von  $h$  groß gewählt werden. Dies führt zu schlechteren Konditionszahlen als beim Nitsche-Mortaring.

Am Ende dieser Arbeit befindet sich ein Verzeichnis der wichtigsten verwendeten Symbole. Generell werden mit  $H^s(X)$  ( $X$  ein Gebiet) die Sobolevräume von der Ordnung  $s \in \mathbb{R}$  bezeichnet und mit  $\|\cdot\|_{s,X} := \|\cdot\|_{H^s(X)}$  bzw.  $|\cdot|_{s,X} := |\cdot|_{H^s(X)}$  die dazugehörigen Normen und Seminormen. Der Raum  $H^0(X)$  wird auch mit  $L_2(X)$  bezeichnet. Die Konstante  $c$  wird in dieser Arbeit als generische und von dem Diskretisierungsparameter  $h$  unabhängige Konstante verwendet. Mit  $a \sim b$  wird die Äquivalenz im Sinne von  $c_1 a \leq b \leq c_2 a$  bezeichnet, wobei  $c_1, c_2$  positive, von  $h$  unabhängige Konstanten sind.



# 2 Poissongleichung mit gemischten Randbedingungen

## 2.1 Analytische Vorbetrachtungen

In diesem Kapitel wird die Poissongleichung über beschränkten und polygonalen Gebieten  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  betrachtet. Der Rand  $\partial\Omega \in C^{0,1}$  von  $\Omega$  ist ein Polygonzug, dessen Ecken im positiven Umlaufsinn durchnummeriert und mit  $P_j$  ( $j = 1, \dots, J$ ) bezeichnet werden. Dadurch ergeben sich für  $j = 1, \dots, J$  und mit  $P_0 \equiv P_J$  geradlinige Randsegmente  $\Gamma_j = (P_{j-1}, P_j)$ , und es gilt  $\partial\Omega = \bigcup_{j=1}^J \bar{\Gamma}_j$ . Für die Innenwinkel  $\omega_j$  von  $\Omega$  an den Ecken  $P_j$  gelte  $0 < \omega_j < 2\pi$  für alle  $j = 1, \dots, J$ . Mit  $(r_j, \varphi_j)$  werden die lokalen Polarkoordinaten an den Ecken  $P_j$  bezeichnet, wobei  $\varphi_j = 0$  auf  $\Gamma_{j+1}$  und entsprechend  $\varphi_j = \omega_j$  auf  $\Gamma_j$  gelten soll, vgl. Abbildung 2.1.

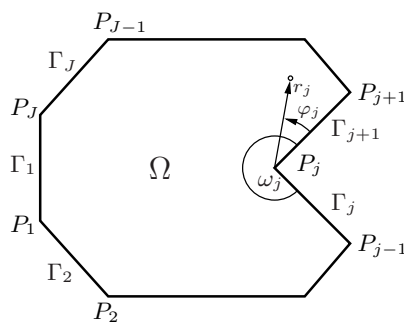


Abbildung 2.1: Randnummerierung und lokale Polarkoordinaten zu  $P_j$

Als Modellaufgabe wird die Poissongleichung mit homogenen Dirichlet- und inhomogenen Neumannrandbedingungen über  $\Omega$  betrachtet, also

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \text{ in } \Omega, \\ u &= 0 \text{ auf } \Gamma_j \text{ für } j \in \mathcal{D}, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= g \text{ auf } \Gamma_j \text{ für } j \in \mathcal{N}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

wobei mit  $\mathcal{D}$  die Menge aller  $j$  bezeichnet wird, für die auf  $\Gamma_j$  Dirichletrandbedingungen gegeben sind, und entsprechend mit  $\mathcal{N}$  die Menge aller  $j$  mit Neumannrandbedingungen auf  $\Gamma_j$ . Die Indexmengen  $\mathcal{D}$  und  $\mathcal{N}$  sind disjunkt und es gilt  $\mathcal{D} \cup \mathcal{N} = \{1, \dots, J\}$ . Man beachte, dass auch Ecken  $P_j$  mit  $\omega_j = \pi$  mit einbezogen werden, wenn dort verschiedene Randbedingungsarten aneinander grenzen. Weiterhin seien  $\mathcal{D} \neq \emptyset$ ,  $f \in L_2(\Omega)$  und  $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_N)$ , wobei mit  $\Gamma_N = \bigcup_{j \in \mathcal{N}} \Gamma_j$  der gesamte Neumannrand bezeichnet wird.

Es ist bekannt, dass die Lösung von Aufgabe (2.1) über polygonalen Gebieten lokale Singularitäten aufweist. Nach [24, 30, 60, 68, 70] lässt sich die Lösung in einen regulären und einen singulären Anteil zerlegen, wobei der Grad der Singularität von den Innenwinkeln  $\omega_j$  und der Art der an den Ecken anliegenden Randbedingungen abhängt. Es kann Satz 2.1 formuliert werden, der sich auf Aussagen aus [60, 68] stützt.

**Satz 2.1.** Sei  $f \in L_2(\Omega)$  und  $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j)$  für alle  $j \in \mathcal{N}$ . Bezeichne  $\lambda_{jk} \in \mathbb{R}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) die Singularitätsexponenten zu jeder Ecke  $P_j$ , die in Abhängigkeit der Art der anliegenden Randbedingungen folgendermaßen definiert sind

$$\lambda_{jk} := \begin{cases} k \frac{\pi}{\omega_j} & \text{für } j, j+1 \in \mathcal{D} \text{ oder } j, j+1 \in \mathcal{N} \\ \left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{\omega_j} & \text{für } j \in \mathcal{D}, j+1 \in \mathcal{N} \text{ oder } j \in \mathcal{N}, j+1 \in \mathcal{D}. \end{cases}$$

Weiterhin werden die ebenfalls von der Art der Randbedingungen abhängigen Winkelfunktionen  $\phi_{jk}(\varphi_j)$  eingeführt. Sie haben die Gestalt

$$\phi_{jk}(\varphi_j) := \begin{cases} \sin(\lambda_{jk}\varphi_j) & \text{für } j+1 \in \mathcal{D} \\ \cos(\lambda_{jk}\varphi_j) & \text{für } j+1 \in \mathcal{N}. \end{cases}$$

Damit kann für  $\lambda_{jk} \neq 1$  die Lösung  $u$  von Aufgabe (2.1) in einen regulären Lösungsanteil  $u_{\text{re}} \in H^2(\Omega)$  und einen singulären Lösungsanteil  $u_{\text{si}}$  zerlegt werden. Es gilt  $u = u_{\text{re}} + u_{\text{si}}$  mit

$$u_{\text{si}} := \sum_{\lambda_{jk} \in (0,1)} c_{jk} \eta_j(r_j) r_j^{\lambda_{jk}} \phi_{jk}(\varphi_j),$$

wobei  $c_{jk}$  reelle Konstanten sind und  $\eta_j(r_j)$  lokal wirkende Abschneidefunktionen um die Ecken  $P_j$  (beschränkt und unendlich glatt).

**Bemerkung 2.2.** In [30, 60, 68] werden entsprechende Sätze zum Lösungsverhalten auch für höhere Glattheiten der Daten ( $f \in H^{m-1}(\Omega)$  und  $g \in H^{m-\frac{1}{2}}(\Gamma_j)$  für  $j \in \mathcal{N}$ ) und inhomogene Dirichletrandbedingungen  $h \in H^{m+\frac{1}{2}}(\Gamma_j)$  für  $j \in \mathcal{D}$  angegeben. Der singuläre Lösungsanteil  $u_{\text{si}}$  enthält dann zusätzlich noch logarithmische Terme in den Winkelfunktionen, wenn  $\lambda_{jk} \in \mathbb{N}$  ( $\lambda_{jk} \in (0, m)$ ) ist. Für den in dieser Arbeit betrachteten Fall (Voraussetzungen von Satz 2.1) gibt es in dem Intervall  $(0, 1)$  maximal zwei Singularitätsexponenten  $\lambda_{jk}$  pro Ecke, wobei bei genauerer Betrachtung dieser  $\lambda_{jk}$  die Beziehung  $\lambda_{jk} \in (\frac{1}{4}, 1)$  verifiziert werden kann.

Für die Lösung  $u$  der Aufgabe (2.1) mit der in Satz 2.1 angegebenen Lösungsdarstellung gilt somit nur  $u \in H^{1+\lambda-\delta}(\Omega)$ , wobei  $\lambda := \min_{\lambda_{jk} \in (0,1)} \lambda_{jk}$  der kleinste Singularitätsexponent und  $\delta \in (0, \lambda)$  beliebig ist.

Der Einfachheit halber wird hier angenommen, dass die Lösung nur an einer Ecke eine Singularität aufweist. Damit kann auf den Index  $j$  bei der Beschreibung des singulären Lösungsanteils verzichtet werden. Für Lösungen mit mehreren Eckensingularitäten müssen die hier beschriebenen Techniken bezüglich der Netzverfeinerung und Fehlerabschätzung für jede dieser Ecken durchgeführt werden, wobei der kleinste Singularitätsexponent  $\lambda_{jk}$  den entscheidenden Einfluss auf die Ordnung der Fehlerabschätzungen hat.

Die folgende a-priori-Abschätzung gegen die Daten ergibt sich aus Abschätzungen in [24] und [54], siehe auch [70].

**Satz 2.3.** Sei  $u$  die Lösung von Aufgabe (2.1) mit der Lösungsdarstellung wie in Satz 2.1. Mit der Abkürzung  $|c_{\text{si}}| := \sum_{\lambda_k \in (0,1)} |c_k|$  gilt dann die Abschätzung

$$\|u_{\text{re}}\|_{2,\Omega} + |c_{\text{si}}| \leq c \left( \|f\|_{0,\Omega} + \sum_{j \in \mathcal{N}} \|g\|_{\frac{1}{2},\Gamma_j} \right).$$

Bei späteren Fehlerbetrachtungen werden häufig Abschätzungen von Normen von  $u_{\text{si}}$  benötigt. Dazu wird in Lemma 2.4 zunächst das Wachstumsverhalten der Ableitungen von  $u_{\text{si}}$  bezüglich des Abstandes  $r$  zur Ecke charakterisiert.

**Lemma 2.4.** Sei  $u_{\text{si}} = \sum_{\lambda_k \in (0,1)} c_k \eta(r) r^{\lambda_k} \phi_k(\varphi)$  der singuläre Lösungsanteil gemäß Satz 2.1. Dann gilt mit  $|c_{\text{si}}| := \sum_{\lambda_k \in (0,1)} |c_k|$  und  $\lambda := \min_{\lambda_k \in (0,1)} \lambda_k$  jeweils für  $m = 0, 1, 2$  die Abschätzung

$$\sum_{|\beta|=m} |D^\beta u_{\text{si}}|^2 \leq c |c_{\text{si}}|^2 r^{2\lambda-2m}.$$

*Beweis.* Zuerst wird der Fall  $m = 1$  also  $|\nabla u_{\text{si}}|^2 := \sum_{|\beta|=1} |D^\beta u_{\text{si}}|^2$  betrachtet. In Polarkoordinaten gilt  $|\nabla u_{\text{si}}|^2 = \left| \frac{\partial u_{\text{si}}}{\partial r} \right|^2 + \left| \frac{1}{r} \frac{\partial u_{\text{si}}}{\partial \varphi} \right|^2$  und somit

$$|\nabla u_{\text{si}}|^2 = \left| \sum_{\lambda_k \in (0,1)} c_k \phi_k(\varphi) \frac{\partial (\eta(r) r^{\lambda_k})}{\partial r} \right|^2 + \left| \sum_{\lambda_k \in (0,1)} c_k \eta(r) r^{\lambda_k-1} \frac{\partial \phi_k(\varphi)}{\partial \varphi} \right|^2.$$

Benutzt man nun  $|\phi| \leq 1$ ,  $\left| \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right| \leq 1$ ,  $\eta \in C^\infty(\bar{\Omega})$  beschränkt und  $\lambda_k \in (0, 1)$ , so erhält man mit  $r \leq 1$  die Beziehung

$$|\nabla u_{\text{si}}|^2 \leq c \left( \sum_{\lambda_k \in (0,1)} |c_k| r^{\lambda_k-1} \right)^2 \leq c \left( \max_{\lambda_k \in (0,1)} r^{\lambda_k-1} \sum_{\lambda_k \in (0,1)} |c_k| \right)^2 \leq c |c_{\text{si}}|^2 r^{2\lambda-2}.$$

Ausgehend von  $\sum_{|\beta|=2} |D^\beta u_{\text{si}}|^2 = \left| \frac{\partial^2 u_{\text{si}}}{\partial r^2} \right|^2 + 2 \left| \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_{\text{si}}}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_{\text{si}}}{\partial \varphi} \right|^2 + \left| \frac{1}{r} \frac{\partial u_{\text{si}}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_{\text{si}}}{\partial \varphi^2} \right|^2$  ergibt sich auf analogem Weg  $\sum_{|\beta|=2} |D^\beta u_{\text{si}}|^2 \leq c |c_{\text{si}}|^2 r^{2\lambda-4}$  und ebenso  $|u_{\text{si}}| \leq c |c_{\text{si}}| r^\lambda$ .  $\square$

## 2.2 Methode des Nitsche-Mortarings

Das Gebiet  $\Omega$  wird der Einfachheit halber nur in zwei disjunkte, polygonale Teilgebiete  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  zerlegt, also  $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$  und  $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ . Die Schnittfläche der beiden Teilgebiete soll mit  $\Gamma$  bezeichnet werden, das heißt  $\Gamma = \bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_2$ . Da hier nur der zweidimensionale Fall betrachtet wird, besteht  $\Gamma$  aus stückweise geraden Abschnitten.

Die Einschränkung auf zwei Teilgebiete ist dabei nicht wesentlich. Sie erhöht lediglich die Übersichtlichkeit der Darstellung. An den Ergebnissen ändert sich bei der Betrachtung mehrerer Teilgebiete nichts Wesentliches. Bei der Wahl von  $\gamma$  fließt allerdings die Anzahl  $n(\Omega_\ell)$  der Nachbargebiete, die eine gemeinsame Kante mit dem Teilgebiet  $\Omega_\ell$  haben, mit ein ( $\gamma > \max_{\forall \ell} \{C_I^\ell n(\Omega_\ell)\}$ ).

Da im Weiteren Funktionen  $v(x)$  ( $x \in \Omega$ ) oft nur eingeschränkt auf die Teilgebiete  $\Omega_1, \Omega_2$  benötigt werden, sei  $v^\ell := v|_{\Omega_\ell}$  mit  $\ell = 1, 2$ . Die Bezeichnung  $v$  wird sowohl als Funktion über  $\Omega$  als auch für

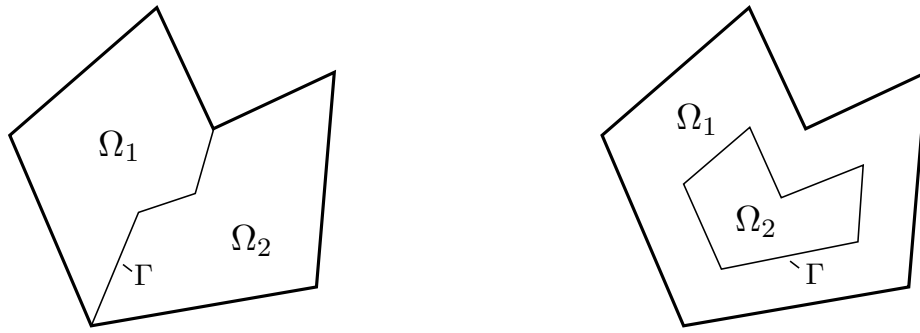


Abbildung 2.2: Zerlegung von  $\Omega$

die vektorielle Darstellung  $v = (v^1, v^2)$  verwendet. Die jeweilige Bedeutung von  $v$  ergibt sich aus dem Zusammenhang.

Mit der geometrischen Zerlegung von  $\Omega$  kann eine zu Problem (2.1) äquivalente Aufgabe mit Kompatibilitätsbedingungen an der Schnittfläche  $\Gamma$  (vgl. [19]) wie folgt formuliert werden: Gesucht ist  $u = (u^1, u^2)$ , so dass

$$\begin{aligned}
 -\Delta u^\ell &= f \quad \text{in } \Omega_\ell, & \ell &= 1, 2, \\
 u^\ell &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega_\ell \cap \Gamma_j \text{ für } j \in \mathcal{D}, & \ell &= 1, 2, \\
 \frac{\partial u^\ell}{\partial n_\ell} &= g \quad \text{auf } \partial\Omega_\ell \cap \Gamma_j \text{ für } j \in \mathcal{N}, & \ell &= 1, 2, \\
 u^1 &= u^2 \quad \text{auf } \Gamma, \\
 \frac{\partial u^1}{\partial n_1} + \frac{\partial u^2}{\partial n_2} &= 0 \quad \text{auf } \Gamma
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

gilt, wobei  $n_\ell$  die äußere Normale an den Rand  $\partial\Omega_\ell$  von  $\Omega_\ell$  für  $\ell = 1, 2$  bezeichnet.

Nach Satz 2.1 gilt  $u \in H^{1+\lambda-\delta}(\Omega)$  mit  $\lambda \in (0, 1)$ ,  $\delta \in (0, \lambda)$  und somit auch  $u \in H_{0,\mathcal{D}}^1 := \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\Gamma_j} = 0 \text{ für alle } j \in \mathcal{D}\}$ . Der Raum  $H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  sei als Spurraum von  $H_{0,\mathcal{D}}^1$  definiert. Je nach Lage des Schnitttrands  $\Gamma$  (vgl. Abbildung 2.2) und der Randbedingungen kann  $H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  als  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  oder  $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  mit der Quotientennorm, siehe zum Beispiel [29, 71], aufgefasst werden. Die Spur von  $u$  auf  $\Gamma$  ist somit aus  $H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  und die Normalenableitungen  $\frac{\partial u}{\partial n}$  auf  $\Gamma$  sind aus  $H_*^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ , dem dualen Raum zu  $H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ .

Es wird der Raum  $V := V^1 \times V^2$  mit  $V^\ell := \left\{v^\ell \in H^1(\Omega_\ell) : v^\ell|_{\partial\Omega_\ell \cap \Gamma_j} = 0 \text{ für alle } j \in \mathcal{D}\right\}$  eingeführt. Das Randwertproblem (2.2) kann in der schwachen Form (vgl. [6]) mit einer eindeutigen Lösung  $u = (u^1, u^2) \in V$  mit  $\Delta u^\ell \in L_2(\Omega_\ell)$  notiert werden, wobei die Stetigkeitsbedingungen  $u^1 = u^2$  und  $\frac{\partial u^1}{\partial n_1} = -\frac{\partial u^2}{\partial n_2}$  auf  $\Gamma$  im  $H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ - bzw.  $H_*^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ -Sinn zu erfüllen sind. Andererseits folgt, analog zu [40], aus (2.2) formal

$$\sum_{\ell=1}^2 \left( (\nabla u^\ell, \nabla v^\ell)_{\Omega_\ell} - \left\langle \frac{\partial u^\ell}{\partial n_\ell}, v^\ell \right\rangle_\Gamma \right) = \sum_{\ell=1}^2 \left( (f, v^\ell)_{\Omega_\ell} + (g, v^\ell)_{\partial\Omega_\ell \cap \Gamma_{\mathcal{N}}} \right) \quad \forall v \in V,$$

wobei  $(\cdot, \cdot)_X$  das  $L_2(X)$ -Skalarprodukt und  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$  die Dualform auf  $H_*^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  bezeichnet. Äquivalent dazu ergibt sich mit  $u^1|_\Gamma = u^2|_\Gamma$ ,  $\frac{\partial u^1}{\partial n_1}|_\Gamma = -\frac{\partial u^2}{\partial n_2}|_\Gamma$  und  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$  für  $\alpha_\ell \geq 0$  ( $\ell = 1, 2$ )

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 (\nabla u^\ell, \nabla v^\ell)_{\Omega_\ell} - \left\langle \alpha_1 \frac{\partial u^1}{\partial n_1} - \alpha_2 \frac{\partial u^2}{\partial n_2}, v^1 - v^2 \right\rangle_\Gamma - \left\langle \alpha_1 \frac{\partial v^1}{\partial n_1} - \alpha_2 \frac{\partial v^2}{\partial n_2}, u^1 - u^2 \right\rangle_\Gamma \\ + (\sigma(u^1 - u^2), v^1 - v^2)_\Gamma = \sum_{\ell=1}^2 \left( (f, v^\ell)_{\Omega_\ell} + (g, v^\ell)_{\partial\Omega_\ell \cap \Gamma_N} \right). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Die beiden zusätzlichen Terme mit  $u^1 - u^2$  sind null und künstlich eingeführt. Der erste sorgt für die Symmetrie in  $u$  und  $v$  auf der linken Seite. Der zweite bestraft nach der Diskretisierung den Sprung der Näherungslösung  $u_h^1 - u_h^2$  auf  $\Gamma$  und garantiert für geeignet gewählte Gewichtsfunktionen  $\sigma > 0$  die Stabilität. Das Finite-Elemente-Mortaring nach der Methode von Nitsche ist die Diskretisierung von (2.3) im Sinne von (2.6). Dabei erlaubt die Verwendung des Finite-Elemente-Raumes  $V_h = V_h^1 \times V_h^2$  (2.4) nichtzusammenpassende Netze und Unstetigkeiten der Finite-Elemente-Näherung entlang  $\Gamma$ . Das Nitsche-Mortaring kann auch ausgehend von den Mortar-Methoden mit Lagrangemultiplikatoren mit Stabilisierungstechniken hergeleitet werden, siehe [10, 20, 63, 9].

Beim Finite-Elemente-Mortaring nach einer Methode von Nitsche werden die einzelnen Teilgebiete unabhängig voneinander durch Dreiecke vernetzt. Die Triangulation des Gebietes  $\Omega_\ell$  wird mit  $\mathcal{T}_h^\ell := \mathcal{T}_h(\Omega_\ell)$  ( $\ell = 1, 2$ ) bezeichnet. Die Knoten der Triangulationen  $\mathcal{T}_h^1$  und  $\mathcal{T}_h^2$  auf der Schnittfläche  $\Gamma$  müssen nicht zusammenpassen, es entstehen „non-matching meshes“. Die Vereinigung der Teilgebiets-triangulationen sei  $\mathcal{T}_h := \mathcal{T}_h^1 \cup \mathcal{T}_h^2$ . Mit  $h := \max\{h_T : T \in \mathcal{T}_h\}$  wird der Diskretisierungsparameter der Triangulation bezeichnet, wobei  $T$  ( $T = \bar{T}$ ) die Elemente der Triangulation sind und  $0 < h \leq h_0$  mit  $h_0$  ausreichend klein gelte. Weiterhin ist  $h_T := \text{diam } T$  der Durchmesser des Dreiecks  $T$ . Die Triangulationen sollen folgende Annahme erfüllen.

**Annahme 2.5.** Die Triangulationen  $\mathcal{T}_h^\ell$  seien jeweils zulässig, das heißt es sei  $\bar{\Omega}_\ell = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h^\ell} T$ , und für alle Elemente  $T, T' \in \mathcal{T}_h^\ell$  mit  $T \neq T'$  ist der Durchschnitt  $T \cap T'$  entweder leer, ein gemeinsamer Punkt oder eine gemeinsame Kante. Weiterhin seien die Elemente geometrisch gestaltsregulär, das heißt für alle Elemente  $T \in \mathcal{T}_h^\ell$  gilt  $h_T \leq c \varrho_T$ , wobei  $h_T$  der Durchmesser des Elementes  $T$ ,  $\varrho_T$  der Radius des Inkreises von  $T$  und  $c$  eine positive, von  $T \in \mathcal{T}_h$  und  $h \in (0, h_0]$  unabhängige Konstante ist.

Es wird der Finite-Elemente-Raum  $V_h := V_h^1 \times V_h^2$  mit

$$V_h^\ell := \{v \in H^1(\Omega_\ell) : v|_T \in \mathbb{P}_k(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h^\ell, \quad v|_{\partial\Omega_\ell \cap \Gamma_j} = 0 \quad \forall j \in \mathcal{D}\}, \quad \ell = 1, 2 \quad (2.4)$$

eingeführt, wobei  $\mathbb{P}_k$  der Raum der Polynome vom Grad kleiner oder gleich  $k$  ist. Weiterhin bezeichne  $\mathcal{E}_h$  eine Zerlegung von  $\Gamma$  in Intervalle  $E$  und  $h_E$  die Länge eines Elementes  $E \in \mathcal{E}_h$ . Es werden außerdem noch eine hinreichend große positive Konstante  $\gamma$  sowie Parameter  $\alpha_1, \alpha_2$  verwendet, die die Bedingungen

$$0 \leq \alpha_\ell \leq 1, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \quad (2.5)$$

erfüllen sollen. Ausgehend von (2.3) ergibt sich durch Diskretisierung die Variationsformulierung des Finite-Elemente-Mortarings nach Nitsche:

Gesucht ist die Nitsche-Näherungslösung  $(u_h^1, u_h^2) = u_h \in V_h$  zu Aufgabe (2.1), so dass

$$\mathcal{B}_h(u_h, v_h) = \mathcal{F}_h(v_h) \quad \forall v_h \in V_h \quad (2.6)$$

## 2 Poissongleichung mit gemischten Randbedingungen

gilt. Dabei seien die Bilinearform  $\mathcal{B}_h(\cdot, \cdot)$  und die Linearform  $\mathcal{F}_h(\cdot)$  der rechten Seite wie folgt definiert

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_h(u_h, v_h) &:= \sum_{\ell=1}^2 (\nabla u_h^\ell, \nabla v_h^\ell)_{\Omega_\ell} - \left\langle \alpha_1 \frac{\partial u_h^1}{\partial n_1} - \alpha_2 \frac{\partial u_h^2}{\partial n_2}, v_h^1 - v_h^2 \right\rangle_{\Gamma} \\ &\quad - \left\langle \alpha_1 \frac{\partial v_h^1}{\partial n_1} - \alpha_2 \frac{\partial v_h^2}{\partial n_2}, u_h^1 - u_h^2 \right\rangle_{\Gamma} + \gamma \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} (u_h^1 - u_h^2, v_h^1 - v_h^2)_E \end{aligned} \quad (2.7)$$

und

$$\mathcal{F}_h(v_h) := \sum_{\ell=1}^2 \left( (f, v_h^\ell)_{\Omega_\ell} + (g, v_h^\ell)_{\partial\Omega_\ell \cap \Gamma_N} \right),$$

wobei  $(\cdot, \cdot)_X$  das  $L_2$ -Skalarprodukt für  $X = \{\Omega_\ell, E, \partial\Omega_\ell \cap \Gamma_N\}$  und  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma}$  die Dualform auf  $H_*^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  bezeichnet.

Die ersten beiden Terme der Bilinearform sorgen für die Konsistenz der Variationsformulierung (siehe Satz 2.9) und der letzte für die  $V_h$ -Elliptizität, dafür muss jedoch der Parameter  $\gamma$  in Abhängigkeit von der Gestaltsregularität der Netzelemente und des Polynomgrades der Diskretisierung geeignet gewählt werden (siehe Satz 2.15 und Bemerkung 2.17). Der dritte Term dient der Symmetrisierung der Bilinearform.

Für die Triangulation  $\mathcal{E}_h$  gibt es verschiedene Möglichkeiten. Eine natürliche Wahl der Zerlegung von  $\Gamma$  ist  $\mathcal{E}_h = \mathcal{E}_h^1$  oder  $\mathcal{E}_h = \mathcal{E}_h^2$  mit

$$\mathcal{E}_h^\ell := \{E : \exists T \in \mathcal{T}_h^\ell \text{ mit } E = T \cap \Gamma \text{ und } \text{meas } E \neq 0\}, \quad \ell = 1, 2. \quad (2.8)$$

Die Triangulation  $\mathcal{E}_h^\ell$  ist die Zerlegung von  $\Gamma$  in Intervalle, die durch die Einschränkung der Triangulation  $\mathcal{T}_h^\ell$  des jeweiligen Teilgebietes  $\Omega_\ell$  ( $\ell = 1, 2$ ) auf die Schnittkante  $\Gamma$  entsteht.

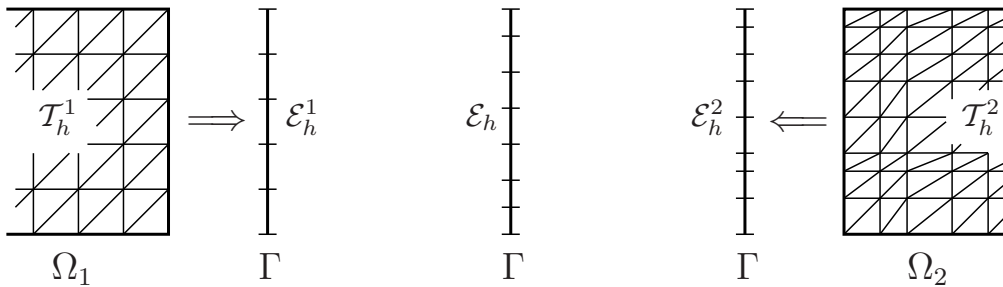


Abbildung 2.3: Vernetzung von  $\Gamma$

Es wird bei den folgenden Untersuchungen von einer beliebigen Triangulation  $\mathcal{E}_h$  von  $\Gamma$  ausgegangen, die nicht notwendig durch Einschränkung von  $\mathcal{T}_h^1$  bzw.  $\mathcal{T}_h^2$  auf  $\Gamma$  entsteht. Allerdings müssen die gewählten Triangulationen  $\mathcal{T}_h^1$ ,  $\mathcal{T}_h^2$  und  $\mathcal{E}_h$  die folgenden Annahmen erfüllen. Mit  $\overset{\circ}{X} = X \setminus \partial X$  wird im Weiteren das Innere eines Gebietes  $X$  bezeichnet.

**Annahme 2.6.** Die Triangulationen  $\mathcal{T}_h^1$ ,  $\mathcal{T}_h^2$  erfüllen die Annahme 2.5 und auch für  $\mathcal{E}_h$  gelten entsprechende Bedingungen. Weiterhin gelte für die Beziehungen zwischen den Triangulationen  $\mathcal{T}_h^1$ ,  $\mathcal{T}_h^2$  und  $\mathcal{E}_h$  mit Ausnahme des Spezialfalls  $\mathcal{E}_h = \mathcal{E}_h^\ell$  und  $\alpha_\ell = 1$  für  $\ell \in \{1, 2\}$  die folgende Bedingung:

Es existiert eine positive, von  $h \in (0, h_0]$  unabhängige Konstante  $C_2$ , so dass die Beziehung

$$h_E \leq C_2 h_F$$

für alle Elemente  $E \in \mathcal{E}_h$  und  $F \in \mathcal{E}_h^\ell$  ( $\ell = 1, 2$ ) mit  $\overset{\circ}{E} \cap \overset{\circ}{F} \neq \emptyset$  erfüllt ist.

Zusätzlich zu Annahme 2.6 wird für die Interpolationsfehlerabschätzungen auch die Beziehung  $C_1 h_F \leq h_E$  benötigt, also Annahme 2.7.

**Annahme 2.7.** Die Triangulationen  $\mathcal{T}_h^1, \mathcal{T}_h^2$  erfüllen die Annahme 2.5 und auch für  $\mathcal{E}_h$  gelten entsprechende Bedingungen. Weiterhin sei für  $\mathcal{T}_h^1, \mathcal{T}_h^2$  und  $\mathcal{E}_h$  im Allgemeinen Bedingung (i) bzw. im Spezialfall die schwächere Bedingung (ii) erfüllt.

(i) Es existieren positive Konstanten  $C_1$  und  $C_2$  unabhängig von  $h \in (0, h_0]$ , so dass die Beziehung

$$C_1 h_F \leq h_E \leq C_2 h_F$$

für alle Elemente  $E \in \mathcal{E}_h$  und  $F \in \mathcal{E}_h^\ell$  ( $\ell = 1, 2$ ) mit  $\overset{\circ}{E} \cap \overset{\circ}{F} \neq \emptyset$  erfüllt ist.

(ii) In dem Spezialfall  $\mathcal{E}_h = \mathcal{E}_h^\ell$  und  $\alpha_\ell = 1$  mit  $\ell \in \{1, 2\}$  wird die Existenz einer positiven, von  $h \in (0, h_0]$  unabhängigen Konstante  $C_1$  gefordert, so dass

$$C_1 h_F \leq h_E$$

für alle Elemente  $E \in \mathcal{E}_h^\ell$  und  $F \in \mathcal{E}_h^{3-\ell}$  mit  $\overset{\circ}{E} \cap \overset{\circ}{F} \neq \emptyset$  gilt.

**Bemerkung 2.8.** Die Annahme 2.7 stellt sicher, dass die Asymptotik der sich überlappenden Intervalle  $E \in \mathcal{E}_h$  und  $F \in \mathcal{E}_h^\ell$  lokal gleich ist. Mit der schwächeren Bedingung im Fall (ii) können Dreiecke  $T_1 \in \mathcal{T}_h^1$  und  $T_2 \in \mathcal{T}_h^2$  mit  $T_1 \cap T_2 \neq \emptyset$  von unterschiedlichem asymptotischen Verhalten bezüglich  $h$  sein.

## 2.3 Eigenschaften der Nitsche-Diskretisierung

In diesem Abschnitt werden die Konsistenz der Variationsformulierung, die  $\mathcal{B}_h$ -Orthogonalität der Fehlers, die  $V_h$ -Elliptizität und -Beschränktheit der Bilinearform sowie einige Hilfsungleichungen untersucht. Weiterhin werden Aussagen über eine Konstante  $C_I$  getroffen, die für die Wahl des Parameters  $\gamma$  in der Bilinearform von Bedeutung ist.

**Satz 2.9 (Konsistenz).** Sei  $u = (u^1, u^2)$  die Lösung von Aufgabe (2.2). Dann erfüllt  $u$  auch die diskrete Variationsformulierung (2.6). Es gilt also

$$\mathcal{B}_h(u, v_h) = \mathcal{F}_h(v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \quad (2.9)$$

*Beweis.* Anstelle der Näherungslösung  $u_h$  wird in die Bilinearform (2.7) die exakte Lösung  $u$  der Aufgabe (2.2) eingesetzt. Da  $u \in H_{0,D}^1$  gilt, ist der Ausdruck  $\mathcal{B}_h(u, v_h)$  definiert. Durch Anwenden der

## 2 Poissongleichung mit gemischten Randbedingungen

Beziehungen  $u^1|_{\Gamma} = u^2|_{\Gamma}$ ,  $\frac{\partial u^1}{\partial n_1}|_{\Gamma} = -\frac{\partial u^2}{\partial n_2}|_{\Gamma}$  und  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ , ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_h(u, v_h) &= \sum_{\ell=1}^2 (\nabla u^\ell, \nabla v_h^\ell)_{\Omega_\ell} - \left\langle \alpha_1 \frac{\partial u^1}{\partial n_1} - \alpha_2 \frac{\partial u^2}{\partial n_2}, v_h^1 - v_h^2 \right\rangle_{\Gamma} \\
&= \sum_{\ell=1}^2 (\nabla u^\ell, \nabla v_h^\ell)_{\Omega_\ell} - \left\langle \alpha_1 \frac{\partial u^1}{\partial n_1} - \alpha_2 \frac{\partial u^2}{\partial n_2}, v_h^1 \right\rangle_{\Gamma} + \left\langle \alpha_1 \frac{\partial u^1}{\partial n_1} - \alpha_2 \frac{\partial u^2}{\partial n_2}, v_h^2 \right\rangle_{\Gamma} \\
&= \sum_{\ell=1}^2 (\nabla u^\ell, \nabla v_h^\ell)_{\Omega_\ell} - \left\langle (\alpha_1 + \alpha_2) \frac{\partial u^1}{\partial n_1}, v_h^1 \right\rangle_{\Gamma} - \left\langle (\alpha_1 + \alpha_2) \frac{\partial u^2}{\partial n_2}, v_h^2 \right\rangle_{\Gamma} \\
&= \sum_{\ell=1}^2 \left( (\nabla u^\ell, \nabla v_h^\ell)_{\Omega_\ell} - \left\langle \frac{\partial u^\ell}{\partial n_\ell}, v_h^\ell \right\rangle_{\Gamma} \right). \tag{2.10}
\end{aligned}$$

Benutzt man für  $\ell = 1, 2$  unter Beachtung der Randbedingungen jeweils die erste Greensche Formel ([24, 29]), also  $(\Delta u^\ell, v_h^\ell)_{\Omega_\ell} = \left\langle \frac{\partial u^\ell}{\partial n_\ell}, v_h^\ell \right\rangle_{\partial\Omega_\ell} - (\nabla u^\ell, \nabla v_h^\ell)_{\Omega_\ell}$  für  $u^\ell \in H^1(\Omega_\ell)$ ,  $\Delta u^\ell \in L_2(\Omega_\ell)$ ,  $v_h^\ell \in V_h^\ell$ , sowie  $-\Delta u^\ell = f$  für  $\ell = 1, 2$ , so erhält man

$$\mathcal{B}_h(u, v_h) = \sum_{\ell=1}^2 \left( (f, v_h^\ell)_{\Omega_\ell} + (g, v_h^\ell)_{\partial\Omega_\ell \cap \Gamma_N} \right) = \mathcal{F}_h(v_h) \quad \forall v_h \in V_h.$$

□

**Bemerkung 2.10.** Aus der Variationsformulierung (2.6) und der Konsistenz (2.9) ergibt sich die  $\mathcal{B}_h$ -Orthogonalität des Fehlers  $u - u_h$  auf  $V_h$ , das heißt

$$\mathcal{B}_h(u - u_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h.$$

Bei den späteren Untersuchungen der  $V_h$ -Elliptizität und der Konvergenz wird häufig eine Abschätzung von  $\sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E \left\| \alpha_1 \frac{\partial v_h^1}{\partial n_1} - \alpha_2 \frac{\partial v_h^2}{\partial n_2} \right\|_{0,E}^2$  für  $v_h \in V_h$  benötigt. Dazu werden vorab noch einige Hilfssätze formuliert.

**Lemma 2.11.** Sei  $T \in \mathcal{T}_h$  ein Dreieck,  $F$  eine Seite von  $T$  und  $h_F^\perp$  die Höhe des Dreiecks  $T$  über der Seite  $F$ . Für Funktionen  $p \in \mathbb{P}_t(T)$  ( $t \in \mathbb{N}$ ) gilt die Abschätzung

$$\|p\|_{0,F}^2 \leq c_{SI} \frac{1}{h_F^\perp} \|p\|_{0,T}^2,$$

wobei  $c_{SI}$  eine von  $h$  unabhängige Konstante ist.

*Beweis.* Sei  $\hat{T}$  das Referenzdreieck mit den Ecken  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  und  $(0, 1)$ . Mit der Transformationsvorschrift

$$x = B\hat{x} + b = \begin{pmatrix} x_{12} - x_{11} & x_{13} - x_{11} \\ x_{22} - x_{21} & x_{23} - x_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix}$$

ist eine affin lineare Abbildung von  $\hat{T}$  nach  $T$  gegeben, wobei  $(x_{1s}, x_{2s})$  ( $s = 1, 2, 3$ ) die Koordinaten der drei Eckpunkte des Dreiecks  $T$  gerade so nummeriert seien, dass die Kante  $F$  zwischen dem ersten



und zweiten Eckpunkt liegt, also  $\hat{F}$  die Länge eins hat. Sei  $h_F = \text{meas } F$  die Länge der Seite  $F$  und  $h_F^\perp$  die Höhe des Dreiecks  $T$  über  $F$ . Somit gilt

$$\frac{1}{|\det B|} = \frac{\text{meas } \hat{T}}{\text{meas } T} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}h_F h_F^\perp} = \frac{1}{h_F h_F^\perp}.$$

Sei  $\hat{p}(\hat{x}) = p(x)$  für  $x \in T$ . Für  $\hat{p}$  gilt auf dem Referenzelement der Spursatz und die Inverse Ungleichung

$$\begin{aligned} \|\hat{p}\|_{0,\hat{F}} &\leq c_S \left( \|\hat{p}\|_{0,\hat{T}} + \|\hat{\nabla} \hat{p}\|_{0,\hat{T}} \right) \quad \text{für } \hat{p} \in H^1(\hat{T}), \\ \|\hat{\nabla} \hat{p}\|_{0,\hat{T}} &\leq c_I \|\hat{p}\|_{0,\hat{T}} \quad \text{für } \hat{p} \in \mathbb{P}_t(\hat{T}). \end{aligned}$$

Beides zusammen ergibt dann mit  $\sqrt{c_{SI}} = c_S(1 + c_I)$  die Abschätzung

$$\|\hat{p}\|_{0,\hat{F}} \leq c_S \left( \|\hat{p}\|_{0,\hat{T}} + c_I \|\hat{p}\|_{0,\hat{T}} \right) \leq \sqrt{c_{SI}} \|\hat{p}\|_{0,\hat{T}}. \quad (2.11)$$

Durch Einsetzen der rücktransformierten  $L_2$ -Normen

$$\begin{aligned} \|\hat{p}\|_{0,\hat{F}}^2 &= \frac{1}{\text{meas } F} \|p\|_{0,F}^2 = \frac{1}{h_F} \|p\|_{0,F}^2, \\ \|\hat{p}\|_{0,\hat{T}}^2 &= \frac{1}{|\det B|} \|p\|_{0,T}^2 = \frac{1}{h_F h_F^\perp} \|p\|_{0,T}^2 \end{aligned}$$

in (2.11) erhält man

$$\frac{1}{h_F} \|p\|_{0,F}^2 \leq c_{SI} \frac{1}{h_F h_F^\perp} \|p\|_{0,T}^2$$

und somit die zu beweisende Beziehung.  $\square$

**Lemma 2.12.** Für die von  $h$  unabhängigen Konstanten  $C_1$  und  $C_2$  sei die Ungleichung  $C_1 h_F \leq h_E$  bzw.  $h_E \leq C_2 h_F$  für alle  $E \in \mathcal{E}_h$  und  $F \in \mathcal{E}_h^\ell$  mit  $\mathring{E} \cap \mathring{F} \neq \emptyset$  erfüllt. Dann gelten für  $v^\ell \in L_2(\Gamma)$  mit  $\ell = 1, 2$  die Beziehungen

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|v^\ell\|_{0,E}^2 \leq C_1^{-1} \sum_{F \in \mathcal{E}_h^\ell} h_F^{-1} \|v^\ell\|_{0,F}^2 \quad \text{für } C_1 h_F \leq h_E, \quad (2.12)$$

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E \|v^\ell\|_{0,E}^2 \leq C_2 \sum_{F \in \mathcal{E}_h^\ell} h_F \|v^\ell\|_{0,F}^2 \quad \text{für } h_E \leq C_2 h_F. \quad (2.13)$$

*Beweis.* Sei  $\mathcal{E}_\cap^\ell := \left\{ \overline{B} : B = \mathring{E} \cap \mathring{F} \neq \emptyset \text{ mit } E \in \mathcal{E}_h, F \in \mathcal{E}_h^\ell \right\}$ , also die Menge aller abgeschlossenen Intervalle, die als Schnittmenge aller Intervalle  $E \in \mathcal{E}_h$  mit den Intervallen  $F \in \mathcal{E}_h^\ell$  entstehen. Wegen  $v^\ell \in L_2(\Gamma)$  und  $\bigcup_{E \in \mathcal{E}_h} E = \bigcup_{D \in \mathcal{E}_\cap^\ell} D = \bigcup_{F \in \mathcal{E}_h^\ell} F = \Gamma$  erhält man mit  $C_1 h_F \leq h_E$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|v^\ell\|_{0,E}^2 &= \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \sum_{\substack{D \in \mathcal{E}_\cap^\ell \\ D \subset E}} h_E^{-1} \|v^\ell\|_{0,D}^2 \leq \sum_{F \in \mathcal{E}_h^\ell} \sum_{\substack{D \in \mathcal{E}_\cap^\ell \\ D \subset F}} C_1^{-1} h_F^{-1} \|v^\ell\|_{0,D}^2 \\ &= C_1^{-1} \sum_{F \in \mathcal{E}_h^\ell} h_F^{-1} \|v^\ell\|_{0,F}^2. \end{aligned}$$

Für  $h_E \leq C_2 h_F$  gilt analog  $\sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E \|v^\ell\|_{0,E}^2 \leq C_2 \sum_{F \in \mathcal{E}_h^\ell} h_F \|v^\ell\|_{0,F}^2$ .  $\square$

**Lemma 2.13.** *Es existiere eine positive, von  $h$  unabhängige Konstante  $C_2$ , so dass die Beziehung  $h_E \leq C_2 h_F$  für alle  $E \in \mathcal{E}_h$  und  $F \in \mathcal{E}_h^\ell$  mit  $\mathring{E} \cap \mathring{F} \neq \emptyset$  erfüllt ist. Dann gilt für  $v_h^\ell \in V_h^\ell$  und  $\ell = 1, 2$  die Abschätzung*

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E \left\| \frac{\partial v_h^\ell}{\partial n_\ell} \right\|_{0,E}^2 \leq C_2 c_{SI} \sum_{F \in \mathcal{E}_h^\ell} \frac{h_F}{h_F^\perp} \|\nabla v_h^\ell\|_{0,T_F}^2,$$

wobei  $h_F^\perp$  die Höhe des Dreiecks  $T_F$  über der Seite  $F$  und  $c_{SI}$  die von  $h$  unabhängige Konstante aus Lemma 2.11 ist.

*Beweis.* Aus  $v_h^\ell \in V_h^\ell$  folgt  $\frac{\partial v_h^\ell}{\partial x_s} \in L_2(\Gamma)$  ( $s = 1, 2$ ). Nach der Ungleichung von Cauchy-Schwarz gilt  $\left| \frac{\partial v_h^\ell}{\partial n_\ell} \right| = |\nabla v_h^\ell \cdot n_\ell| \leq |\nabla v_h^\ell| |n_\ell| \leq |\nabla v_h^\ell|$  und somit

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E \left\| \frac{\partial v_h^\ell}{\partial n_\ell} \right\|_{0,E}^2 \leq \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E \|\nabla v_h^\ell\|_{0,E}^2.$$

Durch Anwenden von (2.13) für  $|\nabla v_h^\ell|$  anstelle  $v^\ell$  und Lemma 2.11 für die Komponenten von  $\nabla v_h^\ell \in \mathbb{P}_{k-1}^2(T)$  ergibt sich die zu beweisende Abschätzung.  $\square$

**Lemma 2.14.** *Unter der Annahme 2.6 gilt für  $v_h \in V_h$  die Abschätzung*

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E \left\| \alpha_1 \frac{\partial v_h^1}{\partial n_1} - \alpha_2 \frac{\partial v_h^2}{\partial n_2} \right\|_{0,E}^2 \leq \sum_{\ell=1}^2 C_I^\ell \|\nabla v_h^\ell\|_{0,\Omega_\ell}^2 \leq C_I \sum_{\ell=1}^2 \|\nabla v_h^\ell\|_{0,\Omega_\ell}^2. \quad (2.14)$$

Dabei sind  $C_I^\ell = C_2 c_{SI} c_\alpha^\ell \sup_{h < h_0} \max_{F \in \mathcal{E}_h^\ell} \frac{h_F}{h_F^\perp}$  und  $C_I = \max_{\ell=1,2} C_I^\ell$  positive, von  $h$  unabhängige Konstanten mit  $C_2$  aus Annahme 2.6,  $c_{SI}$  aus Lemma 2.11 sowie  $c_\alpha^\ell = 2\alpha_\ell^2$  für  $\alpha_\ell \in (0, 1)$  und  $c_\alpha^\ell = \alpha_\ell^2$  sonst.

*Beweis.* Für den Fall  $\alpha_\ell \in (0, 1)$  für  $\ell = 1, 2$  folgt die Abschätzung

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E \left\| \alpha_1 \frac{\partial v_h^1}{\partial n_1} - \alpha_2 \frac{\partial v_h^2}{\partial n_2} \right\|_{0,E}^2 \leq \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E \sum_{\ell=1}^2 c_\alpha^\ell \left\| \frac{\partial v_h^\ell}{\partial n_\ell} \right\|_{0,E}^2,$$

aus der Dreiecksungleichung und der Ungleichung vom arithmetischen und quadratischen Mittel. Für  $\alpha_\ell = 1$  und entsprechend  $\alpha_{3-\ell} = 0$  gilt in obiger Beziehung die Gleichheit. Durch Anwenden von Lemma 2.13 für das jeweilige  $\ell$  und durch Hinzunahme der übrigen Dreieckselemente aus  $\mathcal{T}_h^1$  und  $\mathcal{T}_h^2$  ergibt sich die zu beweisende Ungleichung.  $\square$

Zum Nachweis der Stabilität der diskreten Bilinearform  $\mathcal{B}_h(\cdot, \cdot)$  für  $v_h \in V_h$  wird eine zur „gebrochenen“ Energienorm ähnliche netzabhängige Norm eingeführt, siehe [11, 17, 39, 64]. Diese soll mit  $\|\cdot\|_{1,h}$  bezeichnet und für  $v_h \in V_h$  folgendermaßen definiert werden

$$\|v_h\|_{1,h}^2 := \sum_{\ell=1}^2 \|\nabla v_h^\ell\|_{0,\Omega_\ell}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|v_h^1 - v_h^2\|_{0,E}^2. \quad (2.15)$$

**Satz 2.15** ( $V_h$ -Elliptizität). *Es gelte die Annahme 2.6, und die Konstante  $\gamma$  sei unabhängig von  $h$  so gewählt, dass  $\gamma > C_I$  mit  $C_I$  aus Lemma 2.14 gilt. Dann ist die Beziehung*

$$\mathcal{B}_h(v_h, v_h) \geq \mu_1 \|v_h\|_{1,h}^2 \quad \forall v_h \in V_h$$

erfüllt, wobei  $\mu_1$  eine positive, von  $h$  unabhängige Konstante ist.

*Beweis.* Ausgangspunkt ist die Bilinearform (2.7) mit  $v_h$  anstelle von  $u_h$ . Wegen  $v_h \in V_h$  gilt  $\frac{\partial v_h^\ell}{\partial n_\ell} \in L_2(\Gamma)$  und  $v_h^\ell \in L_2(\Gamma)$  für  $\ell = 1, 2$ . Somit kann die Dualform wie ein  $L_2$ -Skalarprodukt behandelt werden, insbesondere gilt die Zerlegung  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma = \sum_{E \in \mathcal{E}_h} (\cdot, \cdot)_E$  und die Cauchy-Schwarz-Ungleichung  $(\cdot, \cdot)_E \leq \|\cdot\|_{0,E} \|\cdot\|_{0,E}$ . Damit erhält man

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_h(v_h, v_h) &= \sum_{\ell=1}^2 (\nabla v_h^\ell, \nabla v_h^\ell)_{\Omega_\ell} - 2 \left\langle \alpha_1 \frac{\partial v_h^1}{\partial n_1} - \alpha_2 \frac{\partial v_h^2}{\partial n_2}, v_h^1 - v_h^2 \right\rangle_\Gamma \\ &\quad + \gamma \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} (v_h^1 - v_h^2, v_h^1 - v_h^2)_E \\ &\geq \sum_{\ell=1}^2 \|\nabla v_h^\ell\|_{0,\Omega_\ell}^2 - 2 \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \left\| \alpha_1 \frac{\partial v_h^1}{\partial n_1} - \alpha_2 \frac{\partial v_h^2}{\partial n_2} \right\|_{0,E} \|v_h^1 - v_h^2\|_{0,E} \\ &\quad + \gamma \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|v_h^1 - v_h^2\|_{0,E}^2. \end{aligned}$$

Nach der Ungleichung von Young ( $2ab \leq \frac{a^2}{\epsilon} + \epsilon b^2$  für  $a, b, \epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$ ) gilt mit  $\epsilon = \frac{\zeta}{h_E}$

$$2 \left\| \alpha_1 \frac{\partial v_h^1}{\partial n_1} - \alpha_2 \frac{\partial v_h^2}{\partial n_2} \right\|_{0,E} \|v_h^1 - v_h^2\|_{0,E} \leq \frac{h_E}{\zeta} \left\| \alpha_1 \frac{\partial v_h^1}{\partial n_1} - \alpha_2 \frac{\partial v_h^2}{\partial n_2} \right\|_{0,E}^2 + \frac{\zeta}{h_E} \|v_h^1 - v_h^2\|_{0,E}^2.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_h(v_h, v_h) &\geq \sum_{\ell=1}^2 \|\nabla v_h^\ell\|_{0,\Omega_\ell}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \left( -\frac{h_E}{\zeta} \left\| \alpha_1 \frac{\partial v_h^1}{\partial n_1} - \alpha_2 \frac{\partial v_h^2}{\partial n_2} \right\|_{0,E}^2 - \frac{\zeta}{h_E} \|v_h^1 - v_h^2\|_{0,E}^2 \right) \\ &\quad + \gamma \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|v_h^1 - v_h^2\|_{0,E}^2 \\ &= \sum_{\ell=1}^2 \|\nabla v_h^\ell\|_{0,\Omega_\ell}^2 - \frac{1}{\zeta} \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E \left\| \alpha_1 \frac{\partial v_h^1}{\partial n_1} - \alpha_2 \frac{\partial v_h^2}{\partial n_2} \right\|_{0,E}^2 \\ &\quad + (\gamma - \zeta) \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|v_h^1 - v_h^2\|_{0,E}^2. \end{aligned}$$

Durch Benutzung von Lemma 2.14 erhält man

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_h(v_h, v_h) &\geq \sum_{\ell=1}^2 \|\nabla v_h^\ell\|_{0,\Omega_\ell}^2 - \frac{1}{\zeta} \sum_{\ell=1}^2 C_I^\ell \|\nabla v_h^\ell\|_{0,\Omega_\ell}^2 + (\gamma - \zeta) \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|v_h^1 - v_h^2\|_{0,E}^2 \\ &= \sum_{\ell=1}^2 \left( 1 - \frac{C_I^\ell}{\zeta} \right) \|\nabla v_h^\ell\|_{0,\Omega_\ell}^2 + (\gamma - \zeta) \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|v_h^1 - v_h^2\|_{0,E}^2 \\ &\geq \mu_1 \|v_h\|_{1,h}^2 \end{aligned}$$

## 2 Poissongleichung mit gemischten Randbedingungen

mit  $\mu_1 = \min \left\{ 1 - \frac{C_I}{\zeta}, \gamma - \zeta \right\} > 0$ , falls  $\gamma$  gemäß  $\gamma > \zeta > C_I$  gewählt wird. Somit ist die  $V_h$ -Elliptizität bewiesen.  $\square$

Für die Berechnung der Konditionszahl der Systemmatrix des Finite-Elemente-Mortarings nach Nitsche wird neben der  $V_h$ -Elliptizität auch die  $V_h$ -Beschränktheit benötigt.

**Satz 2.16** ( $V_h$ -Beschränktheit). *Wenn die Annahme 2.6 erfüllt ist, dann existiert eine positive Konstante  $\mu_2$ , so dass die Abschätzung*

$$|\mathcal{B}_h(u_h, v_h)| \leq \mu_2 \|u_h\|_{1,h} \|v_h\|_{1,h} \quad \forall u_h, v_h \in V_h$$

gilt.

*Beweis.* Wegen  $u_h, v_h \in V_h$  sind alle Ausdrücke in den Dualformen der Bilinearform  $\mathcal{B}_h(u_h, v_h)$  aus  $L_2(\Gamma)$ . Die Dualformen können somit wie  $L_2$ -Skalarprodukte behandelt werden. Durch Anwenden der Dreiecksungleichung und der Ungleichung von Cauchy-Schwarz in der Bilinearform (2.7) erhält man

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}_h(u_h, v_h)| &\leq \sum_{\ell=1}^2 \|\nabla u_h^\ell\|_{0,\Omega_\ell} \|\nabla v_h^\ell\|_{0,\Omega_\ell} \\ &\quad + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \left\| \alpha_1 \frac{\partial u_h^1}{\partial n_1} - \alpha_2 \frac{\partial u_h^2}{\partial n_2} \right\|_{0,E} \|v_h^1 - v_h^2\|_{0,E} \\ &\quad + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \left\| \alpha_1 \frac{\partial v_h^1}{\partial n_1} - \alpha_2 \frac{\partial v_h^2}{\partial n_2} \right\|_{0,E} \|u_h^1 - u_h^2\|_{0,E} \\ &\quad + \gamma \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|u_h^1 - u_h^2\|_{0,E} \|v_h^1 - v_h^2\|_{0,E}. \end{aligned}$$

Nach Verteilen von Gewichten  $h_E^{\frac{1}{2}}$  und  $h_E^{-\frac{1}{2}}$  ( $h_E^{\frac{1}{2}} h_E^{-\frac{1}{2}} = 1$ ) und Benutzung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung  $\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$  für  $a_i, b_i \in \mathbb{R}$  ergibt sich

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}_h(u_h, v_h)| &\leq \left( \sum_{\ell=1}^2 \|\nabla u_h^\ell\|_{0,\Omega_\ell}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{\ell=1}^2 \|\nabla v_h^\ell\|_{0,\Omega_\ell}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left( \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E \left\| \alpha_1 \frac{\partial u_h^1}{\partial n_1} - \alpha_2 \frac{\partial u_h^2}{\partial n_2} \right\|_{0,E}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|v_h^1 - v_h^2\|_{0,E}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left( \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E \left\| \alpha_1 \frac{\partial v_h^1}{\partial n_1} - \alpha_2 \frac{\partial v_h^2}{\partial n_2} \right\|_{0,E}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|u_h^1 - u_h^2\|_{0,E}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left( \gamma \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|u_h^1 - u_h^2\|_{0,E}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \gamma \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|v_h^1 - v_h^2\|_{0,E}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Die Benutzung von Lemma 2.14 und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung in der Form  $a_1 b_1 + \dots + a_n b_n \leq (a_1^2 + \dots + a_n^2)^{\frac{1}{2}} (b_1^2 + \dots + b_n^2)^{\frac{1}{2}}$  für  $a_k, b_k \in \mathbb{R}$  führt zu der Abschätzung

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{B}_h(u_h, v_h)| &\leq \left( \sum_{\ell=1}^2 \|\nabla u_h^\ell\|_{0, \Omega_\ell}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{\ell=1}^2 \|\nabla v_h^\ell\|_{0, \Omega_\ell}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\quad + \left( \sum_{i=1}^2 C_I^\ell \|\nabla u_h^\ell\|_{0, \Omega_\ell}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|v_h^1 - v_h^2\|_{0, E}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\quad + \left( \sum_{i=1}^2 C_I^\ell \|\nabla v_h^\ell\|_{0, \Omega_\ell}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|u_h^1 - u_h^2\|_{0, E}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\quad + \left( \gamma \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|u_h^1 - u_h^2\|_{0, E}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \gamma \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|v_h^1 - v_h^2\|_{0, E}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq \left( \sum_{\ell=1}^2 (1 + C_I^\ell) \|\nabla u_h^\ell\|_{0, \Omega_\ell}^2 + (1 + \gamma) \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|u_h^1 - u_h^2\|_{0, E}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\quad \cdot \left( \sum_{\ell=1}^2 (1 + C_I^\ell) \|\nabla v_h^\ell\|_{0, \Omega_\ell}^2 + (1 + \gamma) \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|v_h^1 - v_h^2\|_{0, E}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq \mu_2 \|u_h\|_{1, h} \|v_h\|_{1, h},
 \end{aligned}$$

wobei  $\mu_2 = \max\{1 + C_I, 1 + \gamma\}$  ist. □

**Bemerkung 2.17** (Konstante  $C_I$ ). Die Kenntnis des Wertes der Konstanten  $C_I$  aus Lemma 2.14 ist für die Wahl des Parameters  $\gamma$  in der Bilinearform  $\mathcal{B}_h(\cdot, \cdot)$  wichtig. Nach Satz 2.15 muss  $\gamma > C_I$  gewählt werden, damit die Bilinearform  $V_h$ -elliptisch ist.

Die in  $C_I = \max_{\ell=1,2} (C_I^\ell)$  enthaltenen Konstanten  $c_\alpha^\ell$ ,  $C_2$  und  $\sup_{h < h_0} \max_{F \in \mathcal{E}_h^\ell} \left( \frac{h_F}{h_F^\frac{1}{2}} \right)$  sind mit den Werten von  $\alpha_\ell$  und den Triangulationen  $\mathcal{T}_h$ ,  $\mathcal{E}_h^\ell$  und  $\mathcal{E}_h$  gegeben. Zu bestimmen ist also nur die Konstante  $c_{SI}$  aus Lemma 2.11. Dazu wird die sich aus Spursatz und Inverser Ungleichung ergebende Beziehung (2.11) für das Referenzdreieck  $\hat{T}$  mit den Ecken  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  und  $(0, 1)$  und die Seite  $\hat{F} := \{(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \in \mathbb{R} : \hat{x}_1 \in [0, 1], \hat{x}_2 = 0\}$  betrachtet, das heißt

$$\|p\|_{0, \hat{F}}^2 \leq c_{SI} \|p\|_{0, \hat{T}}^2 \quad \forall p \in \mathbb{P}_t(\hat{T}).$$

- (i) Das Bestimmen der Konstante  $c_{SI}$  kann auf ein verallgemeinertes Eigenwertproblem zurückgeführt werden. Sei dazu  $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$  mit  $N = \sum_{j=1}^{t+1} j$  eine Menge von Basisfunktionen von  $\mathbb{P}_t(\hat{T})$ . Somit kann  $p$  als Linearkombination  $p = \sum_{i=1}^N p_i \varphi_i$  dargestellt werden. Der Vektor der Koeffizienten  $p_i$  wird mit  $\underline{p} = (p_1, \dots, p_N)^\top$  bezeichnet. Sei  $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{i,j=1}^N$  die Massematrix auf der Kante  $\hat{F}$  und  $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{i,j=1}^N$  die Massematrix auf dem Dreieck  $\hat{T}$ , also  $a_{ij} = (\varphi_i, \varphi_j)_{\hat{F}}$  und

$b_{ij} = (\varphi_i, \varphi_j)_{\hat{T}}$ . Damit gilt

$$\begin{aligned} \|p\|_{0,\hat{F}}^2 &= (p, p)_{\hat{F}} = \left( \sum_{i=1}^N p_i \varphi_i, \sum_{j=1}^N p_j \varphi_j \right)_{\hat{F}} = \sum_{i,j=1}^N p_i p_j (\varphi_i, \varphi_j)_{\hat{F}} = \underline{p}^\top \mathbf{A} \underline{p}, \\ \|p\|_{0,\hat{T}}^2 &= (p, p)_{\hat{T}} = \left( \sum_{i=1}^N p_i \varphi_i, \sum_{j=1}^N p_j \varphi_j \right)_{\hat{T}} = \sum_{i,j=1}^N p_i p_j (\varphi_i, \varphi_j)_{\hat{T}} = \underline{p}^\top \mathbf{B} \underline{p}. \end{aligned}$$

Die Matrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  sind symmetrisch, und  $\mathbf{B}$  ist positiv definit. Damit gilt

$$\frac{\|p\|_{0,\hat{F}}^2}{\|p\|_{0,\hat{T}}^2} = \frac{\underline{p}^\top \mathbf{A} \underline{p}}{\underline{p}^\top \mathbf{B} \underline{p}} \leq \lambda_{\max}(\mathbf{A}, \mathbf{B}),$$

wobei  $\lambda_{\max}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  den maximalen Eigenwert des verallgemeinerten Eigenwertproblems

$$\mathbf{A} \underline{x} = \lambda \mathbf{B} \underline{x} \quad \text{für } \underline{x} \in \mathbb{R}^N, \underline{x} \neq 0$$

bezeichnet. In Tabelle 2.1 sind die Eigenwerte  $\lambda_{\max}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  und somit Konstanten  $c_{SI}$  in Abhängigkeit vom Polynomgrad  $t$  angegeben. Für die in Tabelle 2.1 angegebenen Polynomgrade ( $t = 0, \dots, 9$ ) gilt offensichtlich  $c_{SI} = (t+1)(t+2)$ .

Polynomgrad $t$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$c_{SI} = \lambda_{\max}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$	2	6	12	20	30	42	56	72	90	110

Tabelle 2.1: Konstante  $c_{SI}$  für verschiedene Polynomgrade

Beim Bestimmen von  $C_I$  ist zu beachten, dass Lemma 2.11 für die Komponenten von  $\nabla v_h \in \mathbb{P}_t^2(T)$  benutzt wird. Für  $v_h \in V_h$  mit Polynomgrad  $k$  gilt somit  $k = t + 1$ .

- (ii) In [60] ist die Abhängigkeit der Konstante  $c_{SI}$  vom Polynomgrad  $t > 0$  für das Referenzdreieck  $\tilde{T}$  mit den Ecken  $(-1, 0)$ ,  $(1, 0)$  und  $(0, \sqrt{3})$  und einer Dreiecksseite  $\tilde{F}$  angegeben. Nach [60, Theorem 4.76] gilt

$$\|\tilde{p}\|_{0,\tilde{F}} \leq c_1 t \|\tilde{p}\|_{0,\tilde{T}} \quad \forall \tilde{p} \in \mathbb{P}_t(\tilde{T}).$$

Die Transformationen auf die Referenzelemente  $\hat{T}$  und  $\hat{F}$  ergeben dann  $\|p\|_{0,\hat{F}} \leq \sqrt[4]{3} c_1 t \|p\|_{0,\hat{T}}$  für  $p \in \mathbb{P}_t(\hat{T})$  und somit erhält man

$$\|p\|_{0,\hat{F}}^2 \leq c_{SI} \|p\|_{0,\hat{T}}^2 \quad \forall p \in \mathbb{P}_t(\hat{T})$$

mit  $c_{SI} = ct^2$ . Die Konstante  $c_{SI}$  ist also wie auch in Tabelle 2.1 von der Ordnung  $\mathcal{O}(t^2)$ .

- (iii) Für den Spezialfall, dass lineare Ansatzfunktionen  $v_h^\ell \in V_h$  mit Polynomgrad  $k = 1$  in  $V_h$  benutzt werden, sowie dass  $\mathcal{E}_h = \mathcal{E}_h^\ell$  und  $\alpha_\ell = 1$  mit  $\ell = 1$  oder  $2$  gewählt wird, kann die Konstanten  $C_I$  bzw.  $C_I^\ell$  direkt abgeschätzt werden, siehe [38]. Sei  $v_h^\ell|_T := a_{T,0} + a_{T,1}x_1 + a_{T,2}x_2 \in \mathbb{P}_1(T)$  für

$T \in \mathcal{T}_h$ . Für alle Dreiecke  $T = T_E$  mit  $E \in \mathcal{E}_h^\ell$  gelten dann  $\left| \frac{\partial v_h^\ell}{\partial n_\ell} \right| = |\nabla v_h^\ell \cdot n_\ell| \leq |\nabla v_h^\ell| |n_\ell| \leq |\nabla v_h^\ell| = (a_{T,1}^2 + a_{T,2}^2)^{\frac{1}{2}}$  und somit die Beziehungen

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial v_h^\ell}{\partial n_\ell} \right\|_{0,E}^2 &\leq \|a_{T,1}^2 + a_{T,2}^2\|_{0,E}^2 = (a_{T,1}^2 + a_{T,2}^2) \int_E 1 \, ds = (a_{T,1}^2 + a_{T,2}^2) h_E, \\ \|\nabla v_h^\ell\|_{0,T}^2 &= \|a_{T,1}^2 + a_{T,2}^2\|_{0,T}^2 = (a_{T,1}^2 + a_{T,2}^2) \int_T 1 \, dx_1 \, dx_2 = (a_{T,1}^2 + a_{T,2}^2) \frac{h_E h_E^\perp}{2}, \end{aligned}$$

wobei  $h_E$  die Länge  $E$  und  $h_E^\perp$  die Höhe des Dreiecks  $T$  über der Seite  $E$  ist. Für alle  $E \in \mathcal{E}_h^\ell$  gilt also

$$h_E \left\| \frac{\partial v_h^\ell}{\partial n_\ell} \right\|_{0,E}^2 \leq 2 \frac{h_E}{h_E^\perp} \|\nabla v_h^\ell\|_{0,T}^2.$$

Summierung über alle  $E \in \mathcal{E}_h^\ell$  ergibt dann Beziehung (2.14)

$$\begin{aligned} \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E \left\| \alpha_1 \frac{\partial v_h^1}{\partial n_1} - \alpha_2 \frac{\partial v_h^2}{\partial n_2} \right\|_{0,E}^2 &= \sum_{E \in \mathcal{E}_h^\ell} h_E \left\| \frac{\partial v_h^\ell}{\partial n_\ell} \right\|_{0,E}^2 \leq C_I^\ell \|\nabla v_h^\ell\|_{0,\Omega_\ell}^2 \\ &= \sum_{\ell=1}^2 C_I^\ell \|\nabla v_h^\ell\|_{0,\Omega_\ell}^2, \end{aligned}$$

mit  $C_I = C_I^\ell = 2 \sup_{h < h_0} \max_{E \in \mathcal{E}_h^\ell} \frac{h_E}{h_E^\perp}$  und  $C_I^{3-\ell} = 0$ , insbesondere gilt  $C_2 = c_\alpha^\ell = 1$  und  $c_{SI} = 2$ .

## 2.4 Abschätzungen für Eckensingularitäten und gradierte Netze

### 2.4.1 Abschätzungen mit gewichteten $L_2$ -Normen

Für die Lösung  $u$  von Aufgabe (2.1) gilt im Allgemeinen  $u \in H^{1+\lambda-\delta}(\Omega)$  mit  $\lambda \in (0, 1)$  und  $\delta \in (0, \lambda)$  (siehe Abschnitt 2.1), so dass  $\frac{\partial u}{\partial x_j} \Big|_\Gamma \notin L_2(\Gamma)$  ( $j = 1, 2$ ) auftreten kann. Bei den Fehlerabschätzungen zum Finite-Elemente-Mortaring nach Nitsche müssen Dualformen der Art  $\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, w_h \rangle_\Gamma$  ( $w_h$  stückweise polynomial) untersucht werden, die somit nicht als  $L_2$ -Skalarprodukt aufgefasst werden können. Mit der Kenntnis der Gestalt der Lösungssingularität vom Typ  $r^\lambda$  erhält man durch Einfügen von  $r$ -Potenzen mit passenden Exponenten  $\beta$

$$\begin{aligned} r^\beta \frac{\partial u}{\partial x_j} \Big|_\Gamma &\in L_2(\Gamma) \quad \text{für } \beta > \frac{1}{2} - \lambda + \epsilon, \\ r^{-\beta} w_h \Big|_\Gamma &\in L_2(\Gamma) \quad \text{für } \beta < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Für  $\beta \in (\frac{1}{2} - \lambda, \frac{1}{2})$  gilt somit die Cauchy-Schwarz-Ungleichung mit gewichteten Normen

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, w_h \right\rangle_\Gamma = \int_\Gamma r^\beta \frac{\partial u}{\partial x_j} r^{-\beta} w_h \, ds \leq \left\| r^\beta \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{0,\Gamma} \left\| r^{-\beta} w_h \right\|_{0,\Gamma}.$$

## 2 Poissongleichung mit gemischten Randbedingungen

Für  $\lambda > \frac{1}{2}$  kann  $\beta = 0$  gewählt werden. Ebenso kann auf die Gewichte  $r^\beta$  und  $r^{-\beta}$  verzichtet werden, wenn  $\Gamma$  den singulären Punkt  $P$  nicht berührt.

Die mit dem Faktor  $r^\beta$  gewichtete  $L_2$ -Norm wird im Weiteren mit

$$\|u\|_{0,\Gamma;\beta}^2 := \|r^\beta u\|_{0,\Gamma}^2 = \int_\Gamma |r^\beta u|^2 ds \quad (2.16)$$

bezeichnet.

**Lemma 2.18.** Für  $u, r^{-\beta}u \in L_2(E)$ ,  $\beta \geq 0$  und  $E = [R_u, R_o]$  mit  $R_u, R_o > 0$  gelten zwischen der  $L_2$ -Norm und der gewichteten  $L_2$ -Norm die Beziehungen

$$\begin{aligned} R_o^{-2\beta} \|u\|_{0,E;\beta}^2 &\leq \|u\|_{0,E}^2 \leq R_u^{-2\beta} \|u\|_{0,E;\beta}^2, \\ R_u^{2\beta} \|u\|_{0,E;-\beta}^2 &\leq \|u\|_{0,E}^2 \leq R_o^{2\beta} \|u\|_{0,E;-\beta}^2. \end{aligned}$$

Für  $E = [0, R_o]$  gelten die Relationen

$$R_o^{-2\beta} \|u\|_{0,E;\beta}^2 \leq \|u\|_{0,E}^2 \quad \text{und} \quad \|u\|_{0,E}^2 \leq R_o^{2\beta} \|u\|_{0,E;-\beta}^2.$$

*Beweis.* Die Ungleichungen folgen durch elementares Abschätzen der Normen.  $\square$

**Lemma 2.19.** Sei  $v_h^\ell \in V_h^\ell$  für  $\ell = 1, 2$  und bezeichne  $E = [0, h_E] \in \mathcal{E}_h$  das Intervall, das den singulären Punkt ( $r = 0$ ) berührt. Weiterhin existiere eine positive, von  $h$  unabhängige Konstante  $C_2$ , so dass die Beziehung  $h_E \leq C_2 h_F$  für alle  $E \in \mathcal{E}_h$  und  $F \in \mathcal{E}_h^\ell$  ( $\ell = 1, 2$ ) mit  $E \cap F \neq \emptyset$  erfüllt ist. Dann gilt für  $\beta \in [0, \frac{1}{2})$  die folgende Beziehung

$$\|v_h^1 - v_h^2\|_{0,E;-\beta}^2 \leq c h_E^{-2\beta} \|v_h^1 - v_h^2\|_{0,E}^2.$$

*Beweis.* Das Intervall  $E$  wird in zwei Teilintervalle  $D_0$  und  $D_1 := \overline{E \setminus D_0}$  zerlegt, so dass  $D_0$  den singulären Punkt berührt und  $v_h^1 - v_h^2|_{D_0} \in \mathbb{P}_k(D_0)$  gilt. Damit ist entweder  $D_0 = E$  oder  $D_0 = F_0$ , wobei  $F_0 \in \mathcal{E}_h^\ell$  ( $\ell = 1$  oder  $2$ ) den singulären Punkt enthält, vgl. Abbildung 2.4 mit  $E \equiv E_0$ . In jedem Fall gilt jedoch  $h_{D_0} \leq h_E$ . Zur Abkürzung wird die Bezeichnung  $p := v_h^1 - v_h^2|_{D_0} \in \mathbb{P}_k(D_0)$  eingeführt. Mit dieser Zerlegung von  $E$ , Lemma 2.18 und der aus  $h_E \leq C_2 h_F$  folgenden Relation  $h_E \leq C_2 h_{D_0}$  erhält man

$$\|v_h^1 - v_h^2\|_{0,E;-\beta}^2 = \|p\|_{0,D_0;-\beta}^2 + \|v_h^1 - v_h^2\|_{0,D_1;-\beta}^2 \leq \|p\|_{0,D_0;-\beta}^2 + c h_E^{-2\beta} \|v_h^1 - v_h^2\|_{0,D_1}^2. \quad (2.17)$$

Die Norm über  $D_0$  wird nun auf das Referenzintervall  $\hat{D}_0 := \{\hat{r} \in \mathbb{R} : 0 \leq \hat{r} \leq 1\}$  transformiert. Für  $\beta < \frac{1}{2}$  gilt

$$\|r^{-\beta} p\|_{0,D_0}^2 = h_{D_0}^{1-2\beta} \|\hat{r}^{-\beta} \hat{p}\|_{0,\hat{D}_0}^2 \sim h_{D_0}^{1-2\beta} \|\hat{p}\|_{0,\hat{D}_0}^2 = h_{D_0}^{-2\beta} \|p\|_{0,D_0}^2 \leq c h_E^{-2\beta} \|p\|_{0,D_0}^2, \quad (2.18)$$

wobei  $r = h_{D_0} \hat{r}$  und die Normäquivalenz  $\|\hat{r}^{-\beta} \hat{p}\|_{0,\hat{D}_0}^2 \sim \|\hat{p}\|_{0,\hat{D}_0}^2$  für  $\beta < \frac{1}{2}$  benutzt wurden. Durch Einsetzen von (2.18) in (2.17) erhält man die zu beweisende Ungleichung.  $\square$



**Lemma 2.20.** Sei  $v \in L_2(\Gamma)$  sowie  $r^\beta \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L_2(\Gamma)$  für  $\beta \in [0, \frac{1}{2})$  und  $i = 1, 2$ . Weiterhin gelte mit positiven, von  $h$  unabhängigen Konstanten  $C_1$  und  $C_2$  die Beziehung  $C_1 h_F \leq h_E \leq C_2 h_F$  für alle Elemente  $E \in \mathcal{E}_h$  und  $F \in \mathcal{E}_h^\ell$  ( $\ell = 1, 2$ ) mit  $\dot{E} \cap \dot{F} \neq \emptyset$ . Dann gelten für  $\ell = 1, 2$  die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|v\|_{0,E}^2 &\leq C_1^{-1} \sum_{F \in \mathcal{E}_h^\ell} h_F^{-1} \|v\|_{0,F}^2 \\ \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{1-2\beta_E} \|\nabla v\|_{0,E;\beta_E}^2 &\leq c \sum_{F \in \mathcal{E}_h^\ell} h_F^{1-2\beta_F} \|\nabla v\|_{0,F;\beta_F}^2 \end{aligned}$$

mit  $\beta_X := \begin{cases} \beta & \text{für } \inf_{r \in X} r = 0 \text{ und } \lambda \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$  für  $X \in \{E, F\}$  mit  $E \in \mathcal{E}_h$  bzw.  $F \in \mathcal{E}_h^\ell$ .

*Beweis.* Die erste Ungleichung gilt nach (2.12) aus Lemma 2.12. Zum Beweis der zweiten Ungleichung sei  $\mathcal{E}_\cap^\ell := \{\bar{B} : B = \dot{E} \cap \dot{F} \neq \emptyset \text{ mit } E \in \mathcal{E}_h, F \in \mathcal{E}_h^\ell\}$  die Menge aller abgeschlossenen Intervalle, die als Schnittmenge aus den Intervallen  $E \in \mathcal{E}_h$  mit den Intervallen  $F \in \mathcal{E}_h^\ell$  entstehen.

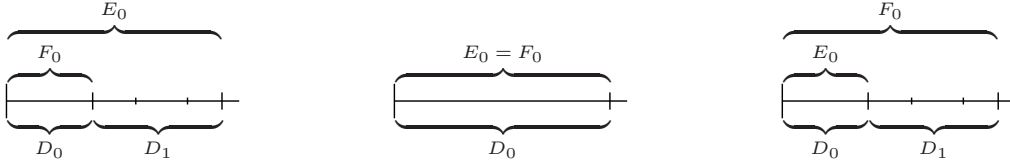


Abbildung 2.4: Mögliche Verteilung der Intervalle  $E_0, F_0, D_0, D_1$  ( $r = 0$  ist jeweils der linke Anfangspunkt der  $\Gamma$ -Ausschnitte)

Mit  $E_0 \in \mathcal{E}_h$ ,  $F_0 \in \mathcal{E}_h^\ell$  und  $D_0 \in \mathcal{E}_\cap^\ell$  werden die Intervalle bezeichnet, die jeweils den Punkt  $P$  mit  $r = 0$  enthalten. Es gilt also  $D_0 = E_0 \cap F_0$ . Weiterhin sei  $D_1 := \overline{(E_0 \cup F_0)} \setminus D_0$ , wobei im Allgemeinen  $D_1 \notin \mathcal{E}_\cap^\ell$  gilt. Zur Abkürzung wird  $\mathcal{S} := \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{1-2\beta_E} \|\nabla v\|_{0,E;\beta_E}^2$  eingeführt. Es werden nun die drei unterschiedlichen Möglichkeiten, wie sich die Intervalle  $E_0 \in \mathcal{E}_h$  und  $F_0 \in \mathcal{E}_h^\ell$  zueinander verhalten können (vgl. Abbildung 2.4), einzeln betrachtet.

(i) Fall  $F_0 \subsetneq E_0$ , das heißt  $D_0 = F_0$  und  $D_1 \neq \emptyset$  (Abbildung 2.4 links):

Die zuvor definierte Summe  $\mathcal{S}$  wird mit  $E_0 = D_0 \cup D_1$  wie folgt aufgeteilt.

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= h_{E_0}^{1-2\beta_{E_0}} \|\nabla v\|_{0,E_0;\beta_{E_0}}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_h \setminus \{E_0\}} \sum_{\substack{D \in \mathcal{E}_\cap^\ell \\ D \subset E}} h_E^{1-2\beta_E} \|\nabla v\|_{0,D;\beta_E}^2 \\ &= h_{E_0}^{1-2\beta_{E_0}} \left( \|\nabla v\|_{0,D_0;\beta_{E_0}}^2 + \|\nabla v\|_{0,D_1;\beta_{E_0}}^2 \right) + \sum_{E \in \mathcal{E}_h \setminus \{E_0\}} \sum_{\substack{D \in \mathcal{E}_\cap^\ell \\ D \subset E}} h_E^{1-2\beta_E} \|\nabla v\|_{0,D;\beta_E}^2 \end{aligned}$$

Für alle Intervalle  $D \in \mathcal{E}_\cap^\ell$  mit  $D \not\subset D_1$  (insbesondere für  $D_0$ ) gilt  $\beta_E = \beta_F$  für alle  $E \in \mathcal{E}_h$ ,  $F \in \mathcal{E}_h^\ell$  mit  $\dot{E} \cap \dot{F} = D \not\subset D_1$ . Unter Verwendung von Lemma 2.18 und von  $\beta_{E_0} = \beta \geq 0$  gilt die Beziehung

$$h_{E_0}^{1-2\beta_{E_0}} \|\nabla v\|_{0,D_1;\beta_{E_0}}^2 \leq h_{E_0} \|\nabla v\|_{0,D_1}^2.$$

## 2 Poissongleichung mit gemischten Randbedingungen

Zusammen mit  $\beta_{E_0} = \beta_{F_0}$  bzw.  $\beta_E = 0$  für alle  $E \in \mathcal{E}_h \setminus \{E_0\}$  ergibt sich

$$\mathcal{S} \leq h_{E_0}^{1-2\beta_{F_0}} \|\nabla v\|_{0,D_0;\beta_{F_0}}^2 + h_{E_0} \|\nabla v\|_{0,D_1}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_h \setminus \{E_0\}} \sum_{\substack{D \in \mathcal{E}_h^\ell \\ D \subset E}} h_E \|\nabla v\|_{0,D}^2.$$

Beim Übergang vom Summationindex  $E \in \mathcal{E}_h$  zum Index  $F \in \mathcal{E}_h^\ell$ , erhält man mit  $h_E \leq C_2 h_F$  sowie  $D_0 = F_0$  und  $\beta_F = 0$  für alle  $F \in \mathcal{E}_h^\ell \setminus \{F_0\}$  die Ungleichung

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &\leq c \left( h_{F_0}^{1-2\beta_{F_0}} \|\nabla v\|_{0,D_0;\beta_{F_0}}^2 + \sum_{F \in \mathcal{E}_h^\ell \setminus \{F_0\}} \sum_{\substack{D \in \mathcal{E}_h^\ell \\ D \subset F}} h_F \|\nabla v\|_{0,D}^2 \right) \\ &= c \left( h_{F_0}^{1-2\beta_{F_0}} \|\nabla v\|_{0,F_0;\beta_{F_0}}^2 + \sum_{F \in \mathcal{E}_h^\ell \setminus \{F_0\}} \sum_{\substack{D \in \mathcal{E}_h^\ell \\ D \subset F}} h_F^{1-2\beta_F} \|\nabla v\|_{0,D;\beta_F}^2 \right) \\ &= c \sum_{F \in \mathcal{E}_h^\ell} \sum_{\substack{D \in \mathcal{E}_h^\ell \\ D \subset F}} h_F^{1-2\beta_F} \|\nabla v\|_{0,D;\beta_F}^2 = c \sum_{F \in \mathcal{E}_h^\ell} h_F^{1-2\beta_F} \|\nabla v\|_{0,F;\beta_F}^2, \end{aligned} \quad (2.19)$$

wobei  $c = \max \{C_2^{1-2\beta}, C_2\}$  gilt.

(ii) Fall  $E_0 = F_0 = D_0$ , also  $D_1 = \emptyset$  (Abbildung 2.4 Mitte):

Für alle  $E \in \mathcal{E}_h$  und  $F \in \mathcal{E}_h^\ell$  mit  $\mathring{E} \cap \mathring{F} = \mathring{D} \neq \emptyset$  gilt hier die Gleichheit  $\beta_E = \beta_F$  sowie  $h_E \leq C_2 h_F$ . Damit folgen mit  $c = \max \{C_2^{1-2\beta}, C_2\}$  für  $\mathcal{S}$  die Beziehungen

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \sum_{\substack{D \in \mathcal{E}_h^\ell \\ D \subset E}} h_E^{1-2\beta_E} \|\nabla v\|_{0,D;\beta_E}^2 \leq c \sum_{F \in \mathcal{E}_h^\ell} \sum_{\substack{D \in \mathcal{E}_h^\ell \\ D \subset F}} h_F^{1-2\beta_F} \|\nabla v\|_{0,D;\beta_F}^2 \\ &= c \sum_{F \in \mathcal{E}_h^\ell} h_F^{1-2\beta_F} \|\nabla v\|_{0,F;\beta_F}^2. \end{aligned} \quad (2.20)$$

(iii) Fall  $E_0 \subsetneq F_0$ , das heißt  $D_0 = E_0$  und  $D_1 \neq \emptyset$  (Abbildung 2.4 rechts)

Die Zerlegung der Summe  $\mathcal{S}$  mit  $E_0 = D_0$  und  $\beta_E = 0$  für alle  $E \in \mathcal{E}_h \setminus \{E_0\}$  ergibt hier

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= h_{E_0}^{1-2\beta_{E_0}} \|\nabla v\|_{0,E_0;\beta_{E_0}}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_h \setminus \{E_0\}} \sum_{\substack{D \in \mathcal{E}_h^\ell \\ D \subset E}} h_E^{1-2\beta_E} \|\nabla v\|_{0,D;\beta_E}^2 \\ &= h_{E_0}^{1-2\beta_{E_0}} \|\nabla v\|_{0,D_0;\beta_{E_0}}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_h \setminus \{E_0\}} \sum_{\substack{D \in \mathcal{E}_h^\ell \\ D \subset E}} h_E \|\nabla v\|_{0,D}^2. \end{aligned}$$

Beim Übergang zum Summationsindex  $F \in \mathcal{E}_h^\ell$  erhält man wegen der Voraussetzung  $h_E \leq C_2 h_F$  und der Beziehung  $F_0 = D_0 \cup D_1$  die Ungleichung

$$\mathcal{S} \leq c \left( h_{F_0}^{1-2\beta_{E_0}} \|\nabla v\|_{0,D_0;\beta_{E_0}}^2 + h_{F_0} \|\nabla v\|_{0,D_1}^2 + \sum_{F \in \mathcal{E}_h^\ell \setminus \{F_0\}} \sum_{\substack{D \in \mathcal{E}_h^\ell \\ D \subset F}} h_F \|\nabla v\|_{0,D}^2 \right).$$

Wie auch im Fall (i) gilt  $\beta_E \neq \beta_{F_0}$  für alle Intervalle  $E \in \mathcal{E}_h$  mit  $\hat{E} \cap \hat{F}_0 \subset D_1$ . Unter Verwendung von Lemma 2.18 mit  $\beta = \beta_{F_0} \geq 0$  und der Voraussetzung  $h_F \leq C_1 h_E$  für alle  $\hat{E} \cap \hat{F} = \hat{D} \neq \emptyset$  gilt die Abschätzung

$$\|\nabla v\|_{0,D_1}^2 \leq h_{E_0}^{-2\beta_{F_0}} \|\nabla v\|_{0,D_1;\beta_{F_0}}^2 \leq c h_{F_0}^{-2\beta_{F_0}} \|\nabla v\|_{0,D_1;\beta_{F_0}}^2.$$

Zusammen mit  $\beta_{E_0} = \beta_{F_0}$  bzw.  $\beta_F = 0$  für alle  $F \in \mathcal{E}_h^\ell \setminus \{F_0\}$ , sowie  $F_0 = D_0 \cup D_1$  erhält man

$$\begin{aligned} S &\leq c \left( h_{F_0}^{1-2\beta_{F_0}} \|\nabla v\|_{0,D_0;\beta_{F_0}}^2 + h_{F_0}^{1-2\beta_{F_0}} \|\nabla v\|_{0,D_1;\beta_{F_0}}^2 + \sum_{F \in \mathcal{E}_h^\ell \setminus \{F_0\}} \sum_{\substack{D \in \mathcal{E}_h^\ell \\ D \subset F}} h_F \|\nabla v\|_{0,D}^2 \right) \\ &\leq c \left( h_{F_0}^{1-2\beta_{F_0}} \|\nabla v\|_{0,F_0;\beta_{F_0}}^2 + \sum_{F \in \mathcal{E}_h^\ell \setminus \{F_0\}} \sum_{\substack{D \in \mathcal{E}_h^\ell \\ D \subset F}} h_F^{1-2\beta_F} \|\nabla v\|_{0,D}^2 \right) \\ &= c \sum_{F \in \mathcal{E}_h^\ell} \sum_{\substack{D \in \mathcal{E}_h^\ell \\ D \subset F}} h_F^{1-2\beta_F} \|\nabla v\|_{0,D}^2 = c \sum_{F \in \mathcal{E}_h^\ell} h_F^{1-2\beta_F} \|\nabla v\|_{0,F}^2 \end{aligned} \quad (2.21)$$

mit  $c = \max \{C_2^{1-2\beta}, C_2\}$ .

Nach (2.19), (2.20) und (2.21) gilt für alle Möglichkeiten der Lage von  $E_0$  und  $F_0$  zueinander die Beziehung

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{1-2\beta_E} \|\nabla v\|_{0,E}^2 \leq \max \{C_2^{1-2\beta}, C_2\} \sum_{F \in \mathcal{E}_h^\ell} h_F^{1-2\beta_F} \|\nabla v\|_{0,F}^2,$$

womit auch die zweite Abschätzung von Lemma 2.20 bewiesen ist.  $\square$

**Lemma 2.21.** Sei  $v^\ell \in H_{0,D}^1(\Omega_\ell)$ , siehe (2.56), und  $r^{-\beta} v^\ell \in L_2(\Gamma)$  für  $\ell = 1, 2$ . Dann gilt für  $\beta \in [0, \frac{1}{2})$  und  $\beta_E$  wie in Lemma 2.20 die Beziehung

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1+2\beta_E} \|v^1 - v^2\|_{0,E;-\beta_E}^2 \leq c \left( \sum_{\ell=1}^2 \|\nabla v^\ell\|_{0,\Omega_\ell}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|v^1 - v^2\|_{0,E}^2 \right).$$

*Beweis.* Für Interface-Probleme mit homogenen Dirichletrandbedingungen ist diese Aussage im Beweis von [37, Lemma 6.1] enthalten. Unter Beachtung der leichten Abweichungen der Definition der Gewichtsexponenten können die Resultate auf analogen Weg (bis auf die letzte Ungleichung im Beweis von [37, Lemma 6.1]) auch für die Poissongleichung mit gemischten Randbedingungen gezeigt werden.

Für den Fall  $\beta_E = 0$  (also für alle  $E \in \mathcal{E}_h$ , die den singulären Punkt nicht berühren ( $r_E > 0$ ) bzw. für  $\lambda > \frac{1}{2}$ ) gilt

$$h_E^{-1+2\beta_E} \|v^1 - v^2\|_{0,E;-\beta_E}^2 = h_E^{-1} \|v^1 - v^2\|_{0,E}^2. \quad (2.22)$$

Für den Fall  $\beta_E = \beta \in (0, \frac{1}{2})$  (also für das den singulären Punkt berührende Intervall  $E = [0, h_E] \in \mathcal{E}_h$  und  $\lambda \leq \frac{1}{2}$ ) ergibt sich durch Transformation auf das Referenzintervall  $\hat{E} = [0, 1]$  mit  $r = h_E \hat{r}$  zunächst die Beziehung

$$h_E^{-1+2\beta_E} \|v^1 - v^2\|_{0,E;-\beta_E}^2 = h_E^{-1+2\beta_E} \left\| r^{-\beta_E} (v^1 - v^2) \right\|_{0,E}^2 = \left\| \hat{r}^{-\beta_E} (\hat{v}^1 - \hat{v}^2) \right\|_{0,\hat{E}}^2. \quad (2.23)$$

## 2 Poissongleichung mit gemischten Randbedingungen

Mit der Raumeinbettung  $H^{\frac{1}{2}}(\hat{E}) \hookrightarrow H^{\frac{1}{2}-\epsilon}(\hat{E})$  für alle  $\epsilon \in (0, \frac{1}{2})$  und den Aussagen aus [29, Corollaries 1.4.4.5 und 1.4.4.10] gilt  $\|\hat{r}^{-\frac{1}{2}+\epsilon}(\hat{v}^1 - \hat{v}^2)\|_{0,\hat{E}} \leq c \|\hat{v}^1 - \hat{v}^2\|_{\frac{1}{2},\hat{E}}$ . Wegen  $\beta_E = \beta \in (0, \frac{1}{2})$  gilt auch  $\beta_E = \frac{1}{2} - \epsilon$  für passendes  $\epsilon \in (0, \frac{1}{2})$  und somit zusammen mit der Definition der  $H^{\frac{1}{2}}$ -Norm sowie der Dreiecksungleichung die Abschätzung

$$\|\hat{r}^{-\beta_E}(\hat{v}^1 - \hat{v}^2)\|_{0,\hat{E}}^2 \leq c \|\hat{v}^1 - \hat{v}^2\|_{\frac{1}{2},\hat{E}}^2 \leq c \left( \|\hat{v}^1 - \hat{v}^2\|_{0,\hat{E}}^2 + \sum_{\ell=1}^2 |\hat{v}^\ell|_{\frac{1}{2},\hat{E}}^2 \right).$$

Durch Einsetzen in (2.23) und Rücktransformation auf  $E$  erhält man

$$h_E^{-1+2\beta_E} \|v^1 - v^2\|_{0,E;-\beta_E}^2 \leq c \left( h_E^{-1} \|v^1 - v^2\|_{0,E}^2 + \sum_{\ell=1}^2 |v^\ell|_{\frac{1}{2},E}^2 \right),$$

und zusammen mit (2.22) gilt dann

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1+2\beta_E} \|v^1 - v^2\|_{0,E;-\beta_E}^2 \leq c \left( \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|v^1 - v^2\|_{0,E}^2 + \sum_{\ell=1}^2 |v^\ell|_{\frac{1}{2},\Gamma}^2 \right).$$

Da  $v^\ell \in H_{0,\mathcal{D}}^1(\Omega_\ell)$  erhält man schließlich mit der sich aus dem Spursatz und Lemma 2.32 ergebenden Beziehung

$$\sum_{\ell=1}^2 \|v^\ell\|_{\frac{1}{2},\Gamma} \leq c \sum_{\ell=1}^2 \|v^\ell\|_{1,\Omega_\ell} \leq c \sum_{\ell=1}^2 \|\nabla v^\ell\|_{0,\Omega_\ell} + c \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|v^1 - v^2\|_{0,E}^2$$

die zu beweisende Aussage. □

### 2.4.2 Graduierte Netzverfeinerung

Eine Möglichkeit, um bei Finite-Elemente-Methoden mit Eckensingularitäten optimale Konvergenzordnungen zu erhalten, ist die Nutzung graduierter Netze, siehe [8, 54, 56, 1, 2, 35, 69]. Da die Singularität nur lokal wirkt, genügt es, mit lokal graduierter Netze zu arbeiten.

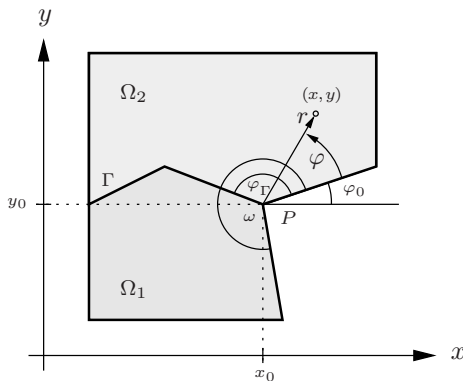


Abbildung 2.5: Polarkoordinaten an Ecke  $P$

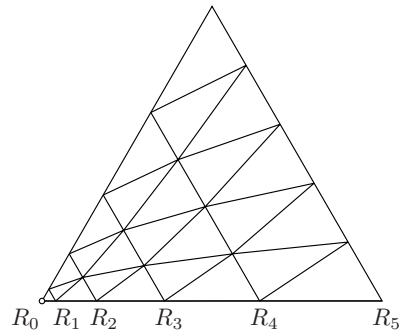


Abbildung 2.6: Radialen  $R_s$

Um solche Netze zu beschreiben, wird ein reeller Parameter  $\mu \in (0, 1]$  eingeführt, der den Grad der lokalen Netzverfeinerung beschreibt. Weiterhin werden Radien

$$R_s := b(sh)^{\frac{1}{\mu}} \quad \forall s = 0, \dots, S \quad (2.24)$$

definiert (vgl. Abbildung 2.6), wobei  $b > 0$  eine reelle Konstante und  $S = S(h) \in \mathbb{N}$  von der Ordnung  $\mathcal{O}(h^{-1})$  ist, etwa  $S = \lceil ah^{-1} \rceil$  mit positiven  $a \in \mathbb{R}$  ( $\lceil \cdot \rceil$  bezeichnet den ganzzahligen Anteil). Die Zahlen  $a$  und  $b$  seien so gewählt, dass mit dem Radius  $R_S$  das gesamte Gebiet, in dem der singuläre Lösungsanteil nicht verschwindet, überdeckt wird.

Die graduierten Triangulationen  $\mathcal{T}_h^\ell$  und  $\mathcal{E}_h$  lassen sich über die Beziehung (2.25) beschreiben.

**Annahme 2.22.** Die Triangulationen  $\mathcal{T}_h^1, \mathcal{T}_h^2$  und  $\mathcal{E}_h$  erfüllen Annahme 2.7 und zusätzlich gelte für den Durchmesser  $h_T$  der Elemente  $T \in \mathcal{T}_h^\ell$  ( $\ell = 1, 2$ ) die Relation

$$h_T \sim \begin{cases} h^{\frac{1}{\mu}} & \text{für } r_T = 0 \\ r_T^{1-\mu} h & \text{für } 0 < r_T < R_S \\ h & \text{für } r_T \geq R_S, \end{cases} \quad (2.25)$$

wobei  $r_T := \inf_{(x,y) \in T} r$  den Abstand des Elementes  $T$  zum singulären Punkt  $P$  bezeichnet. Entsprechende Äquivalenzen gelten auch für die Länge  $h_E$  für jedes  $E \in \mathcal{E}_h$ .

Für die Fehlerabschätzung wird die Triangulation  $\mathcal{T}_h^\ell$ ,  $\ell = 1, 2$ , in mehrere Teilmengen eingeteilt. Da die Singularität nur lokal auftritt und auch die Netzgraduierung nur in einer Umgebung der Ecke  $P$  wirksam ist, wird die Triangulation zunächst in zwei Mengen  $\mathcal{C}_{0h}^\ell, \mathcal{C}_h^\ell \subset \mathcal{T}_h^\ell$  unterteilt. Diese sind wie folgt definiert

$$\mathcal{C}_{0h}^\ell := \{T \in \mathcal{T}_h^\ell : r_T < R_S\}, \quad \mathcal{C}_h^\ell := \{T \in \mathcal{T}_h^\ell : r_T \geq R_S\}. \quad (2.26)$$

Die Menge  $\mathcal{C}_{0h}^\ell$  ( $\ell = 1, 2$ ) wird noch in Teilmengen (Schichten)  $\mathcal{D}_{sh}^\ell$ ,  $s = 0, \dots, S$  zerlegt, so dass  $\mathcal{C}_{0h}^\ell = \bigcup_{s=0, \dots, S} \mathcal{D}_{sh}^\ell$  gilt. Diese sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{0h}^\ell &:= \{T \in \mathcal{T}_h^\ell : r_T = 0\}, \\ \mathcal{D}_{1h}^\ell &:= \{T \in \mathcal{T}_h^\ell : r_T < R_1 \text{ und } r_T \neq 0\}, \\ \mathcal{D}_{sh}^\ell &:= \{T \in \mathcal{T}_h^\ell : R_{s-1} \leq r_T < R_s\} \quad \text{für } s = 2, \dots, S. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Für die Anzahl  $N_s^T$  der Dreiecke  $T \in \mathcal{T}_h^\ell$  bzw. die Anzahl  $N_s^\mathcal{E}$  der Intervalle  $E \in \mathcal{E}_h$  in einer Schicht  $\mathcal{D}_{sh}^\ell$  gelten nach [35] für alle  $s = 1, \dots, S$  mit einer von  $h$  unabhängigen Konstanten  $n_0$  die Beziehungen

$$N_s^T \leq n_0 s, \quad N_s^\mathcal{E} = \mathcal{O}(1). \quad (2.28)$$

Bei graduierten Netzen  $\mathcal{T}_h^\ell$ , die Annahme 2.22 erfüllen, ist die Anzahl der Netzknoten von der Ordnung  $\mathcal{O}(h^{-2})$ , also genauso wie bei quasiumiformen Netzen ohne lokale Netzgraduierung. Auch die Konditionszahl der Finite-Elemente-Gleichungssystem-Matrix ändert sich asymptotisch gesehen nicht, siehe auch Satz 2.33.

### 2.4.3 Fehlerabschätzung in der Norm $\|\cdot\|_{1,h}$

Es soll der Verfahrensfehler  $u - u_h$  zwischen der Lösung  $u$  der Randwertaufgabe (2.1) und der Finite-Elemente-Näherung  $u_h \in V_h$  gemäß (2.6) in der Norm  $\|\cdot\|_{1,h}$  abgeschätzt werden.

Wegen  $u \in H^{1+\lambda-\delta}(\Omega)$ ,  $0 < \delta < \lambda < 1$ , gilt im Allgemeinen  $\frac{\partial u}{\partial n} \notin L_2(E)$ . Dies wird wie in Abschnitt 2.4.1 beschrieben durch die Verwendung von  $r^\beta$ -Gewichten mit dem Exponenten  $\beta \in (\frac{1}{2} - \lambda, \frac{1}{2})$  kompensiert, so dass  $r^\beta \frac{\partial u}{\partial n} \in L_2(\Gamma)$  gilt. Für  $\lambda > \frac{1}{2}$  kann  $\beta = 0$  gewählt werden. Ebenso kann auf die Gewichte  $r^\beta$  verzichtet werden, wenn  $E$  den singulären Punkt  $P$  nicht berührt ( $r_E := \inf_{r \in E} r > 0$ ). Diese Unterscheidung wird durch Einführen des Parameters  $\beta_E$  erreicht, der für alle  $E \in \mathcal{E}_h$  wie folgt definiert ist

$$\beta_E = \begin{cases} \beta & \text{für } r_E = 0 \text{ und } \lambda \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (2.29)$$

wobei  $\beta \in (\frac{1}{2} - \lambda, \frac{1}{2})$  gewählt werden kann. Somit gilt in jedem Fall  $\beta_E \in [0, \frac{1}{2})$ . Analog wird  $\beta_F$  für alle  $F \in \mathcal{E}_h^\ell$  definiert.

Für Funktionen  $v$  mit  $v^\ell \in H^1(\Omega_\ell)$  und  $r^\beta \frac{\partial v^\ell}{\partial n_\ell} \in L_2(\Gamma)$  ( $\ell = 1, 2$ ) wird nun eine zweite aus der Bilinearform resultierende netzabhängige Norm mit Gewichten über  $\Omega$  eingeführt, siehe [37], die mit  $\|\cdot\|_{h,\Omega}$  bezeichnet wird und folgendermaßen definiert ist

$$\|v\|_{h,\Omega}^2 := \sum_{\ell=1}^2 \left( \|\nabla v^\ell\|_{0,\Omega_\ell}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{1-2\beta_E} \left\| \alpha_\ell \frac{\partial v^\ell}{\partial n_\ell} \right\|_{0,E;\beta_E}^2 \right) + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|v^1 - v^2\|_{0,E}^2. \quad (2.30)$$

Diese Norm wird für die folgenden Fehlerabschätzungen benutzt und für  $\beta = 0$  auch in [10, 11, 39, 64] angegeben. Die Normen  $\|\cdot\|_{1,h}$  und  $\|\cdot\|_{h,\Omega}$  von (2.15) bzw. (2.30) sind äquivalent auf  $V_h$ , siehe Lemma 2.23, aber im Allgemeinen nicht für den „gebrochenen“  $H^1$ -Raum.

**Lemma 2.23.** *Es sei Annahme 2.6 erfüllt. Dann sind die Normen  $\|\cdot\|_{1,h}$  und  $\|\cdot\|_{h,\Omega}$ , siehe (2.15) bzw. (2.30), auf dem Raum  $V_h$  äquivalent. Für alle  $v_h \in V_h$  gilt*

$$\|v_h\|_{1,h} \leq \|v_h\|_{h,\Omega} \leq c \|v_h\|_{1,h}.$$

*Beweis.* Es wird hier analog wie in [37, Lemma 5.2] für Interface-Probleme mit homogenen Dirichletrandbedingungen vorgegangen. Die erste Ungleichung folgt sofort aus der Definition der Normen. Um die zweite Ungleichung zu zeigen, wird  $\sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{1-2\beta_E} \left\| \alpha_\ell \frac{\partial v_h^\ell}{\partial n_\ell} \right\|_{0,E;\beta_E}^2$  nach oben gegen  $\|\nabla v_h^\ell\|_{\Omega_\ell}^2$  abgeschätzt. Für  $\lambda \leq \frac{1}{2}$  und das den singulären Punkt berührende Intervall  $E \in \mathcal{E}_h$  gilt nach Lemma 2.18

$$h_E^{1-2\beta_E} \left\| \alpha_\ell \frac{\partial v_h^\ell}{\partial n_\ell} \right\|_{0,E;\beta_E}^2 \leq h_E \left\| \alpha_\ell \frac{\partial v_h^\ell}{\partial n_\ell} \right\|_{0,E}^2 = \alpha_\ell^2 h_E \left\| \frac{\partial v_h^\ell}{\partial n_\ell} \right\|_{0,E}^2.$$

Für alle anderen Intervalle bzw. für  $\lambda > \frac{1}{2}$  gilt diese Beziehung wegen  $\beta_E = 0$  mit Gleichheit. Durch Anwenden von Lemma 2.13 erhält man somit

$$\begin{aligned} \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{1-2\beta_E} \left\| \alpha_\ell \frac{\partial v_h^\ell}{\partial n_\ell} \right\|_{0,E;\beta_E}^2 &\leq \alpha_\ell^2 \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E \left\| \frac{\partial v_h^\ell}{\partial n_\ell} \right\|_{0,E}^2 \leq \alpha_\ell^2 C_2 c_{SI} \sum_{F \in \mathcal{E}_h^\ell} \frac{h_F}{h_F^\perp} \|\nabla v_h^\ell\|_{0,T_F}^2 \\ &\leq c \|\nabla v_h^\ell\|_{\Omega_\ell}^2 \end{aligned}$$

und die Normäquivalenz ist bewiesen.  $\square$

Nun kann der folgende Satz über die Abschätzung des Fehlers des Nitsche-Mortarings in der Norm  $\|\cdot\|_{1,h}$  gegen den Interpolationsfehler formuliert werden.

**Satz 2.24.** *Sei  $u$  die Lösung von Aufgabe (2.1) ( $u \in H^{1+\lambda-\delta}(\Omega)$  mit  $\lambda \in (0,1)$  und  $\delta \in (0,\lambda)$ ), sowie  $\Delta u \in L_2(\Omega)$ ) und  $\gamma > C_I$ . Weiterhin sei Annahme 2.6 erfüllt. Dann gilt die Fehlerabschätzung*

$$\|u - u_h\|_{1,h} \leq \|u - u_h\|_{h,\Omega} \leq c \|u - I_h u\|_{h,\Omega}.$$

Dabei bezeichnet  $I_h u = (I_h u^1, I_h u^2) \in V_h$  die verallgemeinerte Lagrange-Interpolierende von  $u$ , wobei  $I_h u^\ell \in V_h^\ell$  die gewöhnliche Lagrange-Interpolierende von  $u^\ell$  im Raum  $V_h^\ell$  ist. Die Normen  $\|\cdot\|_{1,h}$  und  $\|\cdot\|_{h,\Omega}$  sind wie in (2.15) bzw. (2.30) definiert.

*Beweis.* Der erste Teil der Ungleichung folgt direkt aus den Normdefinitionen. Es wird nun der zweite Teil der Ungleichung betrachtet. Durch Anwenden der Dreiecksungleichung ergibt sich

$$\|u - u_h\|_{h,\Omega} \leq \|u - I_h u\|_{h,\Omega} + \|u_h - I_h u\|_{h,\Omega}.$$

Da  $u_h - I_h u \in V_h$  ist, gilt Lemma 2.23 und damit

$$\|u - u_h\|_{h,\Omega} \leq \|u - I_h u\|_{h,\Omega} + c \|u_h - I_h u\|_{1,h}. \quad (2.31)$$

Aus der  $V_h$ -Elliptizität der Bilinearform  $\mathcal{B}_h(\cdot, \cdot)$  (Satz 2.15) und der  $\mathcal{B}_h$ -Orthogonalität des Fehlers (Bemerkung 2.10) folgt

$$\begin{aligned} \|u_h - I_h u\|_{1,h}^2 &\leq \mu_1^{-1} \mathcal{B}_h(u_h - I_h u, u_h - I_h u) \\ &\leq \mu_1^{-1} (\mathcal{B}_h(u_h - I_h u, u_h - I_h u) + \mathcal{B}_h(u - u_h, u_h - I_h u)) \\ &\leq \mu_1^{-1} \mathcal{B}_h(u - I_h u, u_h - I_h u). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Zur Abkürzung sei  $w := u - I_h u$ . Im Allgemeinen gilt  $w \notin V_h$  und  $v_h := u_h - I_h u \in V_h$ . Es wird nun  $\mathcal{B}(w, v_h)$  betrachtet. Nach Anwenden der Dreiecksungleichung und Aufspaltung der Dualformen (gewichteten  $L_2$ -Skalarprodukten  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma = (r^\beta \cdot, r^{-\beta} \cdot)_\Gamma$ , siehe Abschnitt 2.4.1) wird die Cauchy-Schwarz-Ungleichung  $|\langle \cdot, \cdot \rangle_E| \leq \|\cdot\|_{0,E} \|\cdot\|_{0,E}$  bzw.  $|\langle \cdot, \cdot \rangle_E| \leq \|\cdot\|_{0,E;\beta_E} \|\cdot\|_{0,E;-\beta_E}$  je nach Glattheit der einzelnen Funktionen angewendet. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}_h(w, v_h)| &\leq \sum_{\ell=1}^2 \|\nabla w^\ell\|_{0,\Omega_\ell} \|\nabla v_h^\ell\|_{0,\Omega_\ell} \\ &\quad + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \left\| \alpha_1 \frac{\partial w^1}{\partial n_1} - \alpha_2 \frac{\partial w^2}{\partial n_2} \right\|_{0,E;\beta_E} \|v_h^1 - v_h^2\|_{0,E;-\beta_E} \\ &\quad + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \left\| \alpha_1 \frac{\partial v_h^1}{\partial n_1} - \alpha_2 \frac{\partial v_h^2}{\partial n_2} \right\|_{0,E} \|w^1 - w^2\|_{0,E} \\ &\quad + \gamma \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|w^1 - w^2\|_{0,E} \|v_h^1 - v_h^2\|_{0,E}. \end{aligned}$$

## 2 Poissongleichung mit gemischten Randbedingungen

Weiteres Abschätzen mit  $h_E$ -Potenzen in multiplikativer Zerlegung ( $1 = h_E^{\frac{1}{2}-\beta_E} h_E^{-\frac{1}{2}+\beta_E}$ ,  $1 = h_E^{\frac{1}{2}} h_E^{-\frac{1}{2}}$  und  $h_E^{-1} = h_E^{-\frac{1}{2}} h_E^{-\frac{1}{2}}$ ), sowie der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und Lemma 2.14 für den Ausdruck mit den Normalenableitungen von  $v_h$  führt auf

$$\begin{aligned}
|\mathcal{B}_h(w, v_h)| &\leq \left( \sum_{\ell=1}^2 \|\nabla w^\ell\|_{0,\Omega_\ell} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{\ell=1}^2 \|\nabla v_h^\ell\|_{0,\Omega_\ell} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \left( \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{1-2\beta_E} \left\| \alpha_1 \frac{\partial w^1}{\partial n_1} - \alpha_2 \frac{\partial w^2}{\partial n_2} \right\|_{0,E;\beta_E} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1+2\beta_E} \|v_h^1 - v_h^2\|_{0,E;-\beta_E} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \left( \sum_{\ell=1}^2 C_I^\ell \|\nabla v_h^\ell\|_{0,\Omega_\ell} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|w^1 - w^2\|_{0,E} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \left( \gamma \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|w^1 - w^2\|_{0,E} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \gamma \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|v_h^1 - v_h^2\|_{0,E} \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung von Lemma 2.19 für das Intervall  $E$  mit  $r_E = 0$  bzw. der Definition (2.29) der  $\beta_E$  gilt  $h_E^{-1+2\beta_E} \|v_h^1 - v_h^2\|_{0,E;-\beta_E} \leq c h_E^{-1} \|v_h^1 - v_h^2\|_{0,E}$ . Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
|\mathcal{B}_h(w, v_h)| &\leq \left( \sum_{\ell=1}^2 \|\nabla w^\ell\|_{0,\Omega_\ell}^2 + (1 + \gamma) \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|w^1 - w^2\|_{0,E}^2 \right. \\
&\quad \left. + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{1-2\beta_E} \left\| \alpha_1 \frac{\partial w^1}{\partial n_1} - \alpha_2 \frac{\partial w^2}{\partial n_2} \right\|_{0,E;\beta_E}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \cdot \left( \sum_{\ell=1}^2 (1 + C_I^\ell) \|\nabla v_h^\ell\|_{0,\Omega_\ell}^2 + (c + \gamma) \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|v_h^1 - v_h^2\|_{0,E}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Unter Verwendung der Ungleichung vom arithmetischen und quadratischen Mittel für die Normalenableitungen von  $w$  erhält man

$$|\mathcal{B}_h(w, v_h)| \leq \mu_3 \|w\|_{h,\Omega} \|v_h\|_{1,h}.$$

Durch Einsetzen in (2.32) ergibt sich  $\|u_h - I_h u\|_{1,h} \leq \frac{\mu_3}{\mu_1} \|u - I_h u\|_{h,\Omega}$  und zusammen mit (2.31) schließlich der zweite Teil der zu beweisenden Abschätzung.  $\square$

Im Folgenden werden noch die Interpolationsfehler betrachtet. Dazu wird die bekannte Zerlegung der Lösung  $u$  in einen regulären Lösungsanteil  $u_{\text{re}} \in H^2(\Omega)$  und einen singulären Lösungsanteil  $u_{\text{si}} \in H^{1+\lambda-\delta}(\Omega)$  (siehe Satz 2.1) benutzt. Die Interpolationsfehler dieser Lösungsanteile in der Norm  $\|\cdot\|_{h,\Omega}$  werden getrennt abgeschätzt, zunächst für  $u_{\text{re}} \in H^2(\Omega)$ .

**Lemma 2.25.** *Sei Annahme 2.7 erfüllt, was insbesondere für lokal graduierte Netze aus Annahme 2.22 gegeben ist. Dann gilt für  $u \in H^t(\Omega)$  ( $2 \leq t = k + 1$ ) die Fehlerabschätzung*

$$\|u - I_h u\|_{h,\Omega} \leq c h^{t-1} \|u\|_{t,\Omega},$$



wobei  $k \geq 1$  der Polynomgrad von  $I_h u \in V_h$  ist.

*Beweis.* Zur Abkürzung sei  $w := u - I_h u$ . Es wird mit der Betrachtung von  $\sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|w^1 - w^2\|_{0,E}^2$  und  $\sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{1-2\beta_E} \left\| \alpha_\ell \frac{\partial w^\ell}{\partial n} \right\|_{0,E;\beta_E}^2$ , den Anteilen der Norm  $\|\cdot\|_{h,\Omega}$  (2.30) über der Schnittkante  $\Gamma$ , begonnen. Durch Anwenden der Dreiecksungleichung, der Ungleichung vom arithmetischen und quadratischen Mittel und (2.12), bzw. durch Abschätzen des Betrages der Normalenableitung gegen den des Gradientens, Anwenden von Lemma 2.18 und der Beziehung (2.13) ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|w^1 - w^2\|_{0,E}^2 &\leq 2 \sum_{\ell=1}^2 \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|w^\ell\|_{0,E}^2 \leq c \sum_{\ell=1}^2 \sum_{F \in \mathcal{E}_h^\ell} h_F^{-1} \|w^\ell\|_{0,F}^2, \\ \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{1-2\beta_E} \left\| \alpha_\ell \frac{\partial w^\ell}{\partial n} \right\|_{0,E;\beta_E}^2 &\leq c \alpha_\ell^2 \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E \|\nabla w^\ell\|_{0,E}^2 \leq c \sum_{F \in \mathcal{E}_h^\ell} h_F \|\nabla w^\ell\|_{0,F}^2. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Sei wie bisher  $T = T_F$  das Dreieck mit der Seite  $F$ . Benutzt man für  $w^\ell$  und  $|\nabla w^\ell|$  den verfeinerten Spursatz

$$\|v\|_{0,F}^2 \leq c \left( h_T^{-1} \|v\|_{0,T}^2 + \|v\|_{0,T} \|\nabla v\|_{0,T} \right) \quad \forall v \in H^1(T),$$

siehe [67, Lemma 3.1] oder [65] erhält man die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|w^\ell\|_{0,F}^2 &\leq c \left( h_T^{-1} \|w^\ell\|_{0,T}^2 + \|w^\ell\|_{0,T} |w^\ell|_{1,T} \right), \\ \|\nabla w^\ell\|_{0,F}^2 &\leq c \left( h_T^{-1} |w^\ell|_{1,T}^2 + |w^\ell|_{1,T} |w^\ell|_{2,T} \right). \end{aligned}$$

Mit dem Approximationssatz

$$\|v - I_h v\|_{m,T} \leq c h^{t-m} \|v\|_{t,T} \quad \forall v \in H^t(T), \quad 2 \leq t = k+1 \text{ und } 0 \leq m \leq t, \quad (2.34)$$

siehe zum Beispiel [16, 22, 26, 32], folgt dann

$$\begin{aligned} \|w^\ell\|_{0,F}^2 &\leq c \left( h_T^{-1} h_T^{2t} \|u^\ell\|_{t,T}^2 + h_T^t \|u^\ell\|_{t,T} h_T^{t-1} \|u^\ell\|_{t,T} \right) \leq c h_T^{2t-1} \|u^\ell\|_{t,T}^2, \\ \|\nabla w^\ell\|_{0,F}^2 &\leq c \left( h_T^{-1} h_T^{2t-2} \|u^\ell\|_{t,T}^2 + h_T^{t-1} \|u^\ell\|_{t,T} h_T^{t-2} \|u^\ell\|_{t,T} \right) \leq c h_T^{2t-3} \|u^\ell\|_{t,T}^2. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen in (2.33) ergeben sich mit der Definition von  $h_\ell := \max_{T \in \mathcal{T}_h^\ell} h_T$  ( $\ell = 1, 2$ ), also  $h_T \leq h_\ell$  für  $T \in \mathcal{T}_h^\ell$ , und der aus der geometrischen Gestaltsregularität der Elemente (Annahme 2.5) folgenden Beziehung  $h_F \sim h_T$  die Ungleichungen

$$\begin{aligned} \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|w^1 - w\|_{0,E}^2 &\leq c \sum_{\ell=1}^2 \sum_{F \in \mathcal{E}_h^\ell} h_{T_F}^{2t-2} \|u^\ell\|_{t,T_F}^2 \leq c \sum_{\ell=1}^2 h_\ell^{2t-2} \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\ell} \|u^\ell\|_{t,T}^2, \\ \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{1-2\beta_E} \left\| \alpha_\ell \frac{\partial w^\ell}{\partial n} \right\|_{0,E;\beta_E}^2 &\leq c \sum_{F \in \mathcal{E}_h^\ell} h_{T_F}^{2t-2} \|u^\ell\|_{2,T_F}^2 \leq c h_\ell^{2t-2} \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\ell} \|u^\ell\|_{t,T}^2. \end{aligned} \quad (2.35)$$

## 2 Poissongleichung mit gemischten Randbedingungen

Der Interpolationsfehler  $u^\ell - I_h u^\ell$  über dem Gebiet  $\Omega_\ell$  kann ebenfalls mit dem Approximationssatz (2.34) abgeschätzt werden. Es ergibt sich für  $\ell = 1, 2$

$$\|\nabla(u^\ell - I_h u^\ell)\|_{0,\Omega_\ell}^2 \leq c \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\ell} h_T^{2t-2} \|u^\ell\|_{t,T}^2 \leq c h_\ell^{2t-2} \|u^\ell\|_{t,\Omega_\ell}^2. \quad (2.36)$$

Durch Einsetzen von (2.35) und (2.36) in die Normdefinition (2.30) erhält man

$$\|u - I_h u\|_{h,\Omega}^2 \leq c \sum_{\ell=1}^2 h_\ell^{2t-2} \|u^\ell\|_{t,\Omega_\ell}^2$$

und mit  $h_\ell \leq h$  die zu beweisende Abschätzung.  $\square$

Bei der Interpolationsfehlerabschätzung des singulären, von einer Ecke stammenden Lösungsanteils  $u_{\text{si}}$  treten Summen auf, die mit Lemma 2.26 weiter abgeschätzt werden können.

**Lemma 2.26.** Für  $\alpha, \delta \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \geq 0$  und  $S := [ah^{-1}]$  ( $0 < a \in \mathbb{R}$ ) gilt die Abschätzung

$$\sum_{s=2}^S s^\alpha (s-1)^\delta \leq c \begin{cases} 1 & \text{für } \alpha + \delta < -1 \\ |\ln h| & \text{für } \alpha + \delta = -1 \\ h^{-(\alpha+\delta+1)} & \text{für } \alpha + \delta > -1. \end{cases}$$

*Beweis.* Mit Hilfe der Ungleichung  $s \leq 2(s-1)$  für  $s \geq 2$  ergibt sich für  $\alpha \geq 0$  die Beziehung

$$\sum_{s=2}^S s^\alpha (s-1)^\delta \leq c \sum_{s=2}^S (s-1)^\alpha (s-1)^\delta = c \sum_{s=1}^{S-1} s^{\alpha+\delta},$$

Das weitere Abschätzen hängt von der Größe des Exponenten  $\alpha + \delta$  ab. Für  $\alpha + \delta < -1$  ist obige Summe auch für  $S \rightarrow \infty$  ( $h \rightarrow 0$ ) konvergent, sie kann also durch eine Konstante abgeschätzt werden. Für  $\alpha + \delta \geq -1$  wird die Summe mit Hilfe von majorisierenden Integralen abgeschätzt. Man erhält damit

$$\sum_{s=1}^{S-1} s^{\alpha+\delta} \leq c \begin{cases} 1 & \text{für } \alpha + \delta < -1 \\ \ln S & \text{für } \alpha + \delta = -1 \\ S^{\alpha+\delta+1} & \text{für } \alpha + \delta > -1. \end{cases}$$

Mit  $S = [ah^{-1}] \leq ch^{-1}$  folgt daraus die zu beweisende Beziehung.  $\square$

Nun wird der Interpolationsfehler des singulären Lösungsanteils  $u_{\text{si}}$  untersucht, wobei im Gegensatz zur Interpolationsfehlerabschätzung für den regulären Lösungsanteil  $u_{\text{re}}$  die Netzgraduierung benötigt wird, um optimale Konvergenzordnungen zu erzielen. Der Einfachheit halber wird der Raum  $V_h := V_h^1 \times V_h^2$  nur noch mit Polynomen vom Grad kleiner gleich eins ( $k = 1$ ) betrachtet. Im Folgenden sei also  $V_h^\ell := \{v \in H^1(\Omega_\ell) : v|_T \in \mathbb{P}_1(T) \ \forall T \in \mathcal{T}_h^\ell, v|_{\partial\Omega_\ell \cap \Gamma_j} = 0 \ \forall j \in \mathcal{D}\}$ .

**Lemma 2.27.** Sei  $u_{\text{si}} \in H^{1+\lambda-\delta}(\Omega)$  der singuläre Lösungsanteil aus Satz 2.1 und  $I_h u_{\text{si}} \in V_h$  die verallgemeinerte Lagrange-Interpolierende ersten Grades von  $u_{\text{si}}$  bezüglich der Triangulation  $\mathcal{T}_h$ . Die Triangulationen  $\mathcal{T}_h^1, \mathcal{T}_h^2$  und  $\mathcal{E}_h$  sollen Annahme 2.22 erfüllen. Dann gilt die Abschätzung

$$\|u_{\text{si}} - I_h u_{\text{si}}\|_{h,\Omega} \leq c |c_{\text{si}}| \kappa(h, \mu)$$

mit

$$\kappa(h, \mu) := \begin{cases} h^{\frac{\lambda}{\mu}} & \text{für } \lambda < \mu \leq 1 \\ h |\ln h|^{\frac{1}{2}} & \text{für } \mu = \lambda \\ h & \text{für } 0 < \mu < \lambda < 1. \end{cases} \quad (2.37)$$

*Beweis.* Als erstes wird der Anteil  $\|\nabla(u_{\text{si}}^\ell - I_h u_{\text{si}}^\ell)\|_{0, \Omega_\ell}^2$  der Norm  $\|\cdot\|_{h, \Omega}$  betrachtet. Mit den in Abschnitt 2.4.2 eingeführten  $\mathcal{C}$ - und  $\mathcal{D}$ -Mengen (2.26) und (2.27) sowie der Tatsache, dass  $u_{\text{si}}^\ell|_{T \in \mathcal{C}_h^\ell} = 0$  gilt, ergibt sich für  $\ell = 1, 2$

$$\begin{aligned} \|\nabla(u_{\text{si}}^\ell - I_h u_{\text{si}}^\ell)\|_{0, \Omega_\ell}^2 &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\ell} |u_{\text{si}}^\ell - I_h u_{\text{si}}^\ell|_{1, T}^2 = \sum_{T \in \mathcal{C}_{0h}^\ell} |u_{\text{si}}^\ell - I_h u_{\text{si}}^\ell|_{1, T}^2 \\ &= \sum_{T \in \mathcal{D}_{0h}^\ell} |u_{\text{si}}^\ell - I_h u_{\text{si}}^\ell|_{1, T}^2 + \sum_{s=1}^S \sum_{T \in \mathcal{D}_{sh}^\ell} |u_{\text{si}}^\ell - I_h u_{\text{si}}^\ell|_{1, T}^2. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Die weiteren Abschätzungen werden für  $T \in \mathcal{D}_{0h}^\ell$  und  $T \in \bigcup_{s=1, \dots, S} \mathcal{D}_{sh}^\ell$  getrennt vorgenommen.

(i<sub>a</sub>) Fall:  $T \in \mathcal{D}_{0h}^\ell$  ( $\ell = 1, 2$ ):

Es werden also alle Dreiecke  $T$  mit  $r_T = 0$  betrachtet, das heißt den singulären Punkt  $P$  berührende Dreiecke. Nach der Dreiecksungleichung gilt

$$|u_{\text{si}}^\ell - I_h u_{\text{si}}^\ell|_{1, T} \leq |u_{\text{si}}^\ell|_{1, T} + |I_h u_{\text{si}}^\ell|_{1, T}. \quad (2.39)$$

Die beiden Seminormen werden mittels der expliziten Darstellung von  $u_{\text{si}}$  und  $I_h u_{\text{si}}$  abgeschätzt. Sei dazu  $G := \{(r, \varphi) : 0 < r < h_T, 0 < \varphi < \omega\}$  der Kreissektor um den Punkt  $P$  mit dem Radius  $h_T$ , der  $T$  vollständig enthält. Dann gilt mit Hilfe von Lemma 2.4 und der Beziehung  $h_T \leq ch^{\frac{1}{\mu}}$  aus (2.25) die Abschätzung

$$\begin{aligned} |u_{\text{si}}^\ell|_{1, T}^2 &\leq |u_{\text{si}}^\ell|_{1, G}^2 = \int_0^{\omega} \int_0^{h_T} |\nabla u_{\text{si}}^\ell|^2 r \, dr \, d\varphi \leq c |c_{\text{si}}|^2 \int_0^{\omega} \int_0^{h_T} r^{2\lambda-1} \, dr \, d\varphi \\ &\leq c |c_{\text{si}}|^2 \frac{\omega}{2\lambda} h_T^{2\lambda} \leq c |c_{\text{si}}|^2 h_T^{2\lambda} \leq ch^{\frac{2\lambda}{\mu}}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Die Lagrange-Interpolierende von  $u_{\text{si}}^\ell|_T$  ist ein Polynom ersten Grades. Es wird also  $I_h u_{\text{si}}^\ell|_T = a_0 + a_1 x + a_2 y =: p_T(x, y)$  angesetzt und es gilt

$$|I_h u_{\text{si}}^\ell|_{1, T}^2 \leq |I_h u_{\text{si}}^\ell|_{1, G}^2 \leq (a_1^2 + a_2^2) \int_0^{\omega} \int_0^{h_T} r \, dr \, d\varphi = (a_1^2 + a_2^2) \frac{1}{2} \omega h_T^2. \quad (2.41)$$

Die Koeffizienten  $a_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) des Interpolationspolynoms  $p_T(x, y)$  können durch Lösen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 x_1 + a_2 y_1 &= u_{\text{si}}^\ell(r_1, \varphi_1) \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 y_2 &= u_{\text{si}}^\ell(r_2, \varphi_2) \\ a_0 + a_1 x_3 + a_2 y_3 &= u_{\text{si}}^\ell(r_3, \varphi_3) \end{aligned}$$

## 2 Poissongleichung mit gemischten Randbedingungen

bestimmt werden, wobei  $(x_j, y_j)$  die kartesischen Koordinaten der  $j$ -ten Ecke des Dreiecks  $T \in \mathcal{T}_h$  und  $(r_j, \varphi_j)$  die Koordinaten der  $j$ -ten Ecke in den lokalen Polarkoordinaten sind ( $j = 1, 2, 3$ ). Wegen  $T \in \mathcal{D}_{0h}$  gilt  $r_j = 0$  für ein  $j \in \{1, 2, 3\}$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei hier  $r_1 = 0$ . Damit ist

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2 \operatorname{meas} T} \left( u_{\text{si}}^\ell(r_2, \varphi_2) (x_3 y_1 - x_1 y_3) + u_{\text{si}}^\ell(r_3, \varphi_3) (x_1 y_2 - x_2 y_1) \right), \\ a_1 &= \frac{1}{2 \operatorname{meas} T} \left( u_{\text{si}}^\ell(r_2, \varphi_2) (y_3 - y_1) + u_{\text{si}}^\ell(r_3, \varphi_3) (y_1 - y_2) \right), \\ a_2 &= \frac{1}{2 \operatorname{meas} T} \left( u_{\text{si}}^\ell(r_2, \varphi_2) (x_1 - x_3) + u_{\text{si}}^\ell(r_3, \varphi_3) (x_2 - x_1) \right). \end{aligned}$$

Somit kann  $a_1^2 + a_2^2$  abgeschätzt werden. Mit  $\operatorname{meas} T \leq ch_T^2$  und der Ungleichung vom arithmetischen und quadratischen Mittel, sowie Lemma 2.4 und  $r_j \leq ch_T$  für  $j = 2, 3$  ergibt sich

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 &\leq ch_T^{-4} \left( \left( (x_1 - x_3)^2 + (y_3 - y_1)^2 \right) \left( u_{\text{si}}^\ell(r_2, \varphi_2) \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left( (x_2 - x_1)^2 + (y_1 - y_2)^2 \right) \left( u_{\text{si}}^\ell(r_3, \varphi_3) \right)^2 \right) \\ &\leq ch_T^{-4} h_T^2 \left( |c_{\text{si}}|^2 r_2^{2\lambda} + |c_{\text{si}}|^2 r_3^{2\lambda} \right) \leq c |c_{\text{si}}|^2 h_T^{2\lambda-2}. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen in (2.41) und der Beziehung  $h_T \leq ch^{\frac{1}{\mu}}$  aus (2.25) erhält man die Abschätzung

$$|I_h u_{\text{si}}^\ell|_{1,T}^2 \leq c |c_{\text{si}}|^2 h_T^{2\lambda-2} h_T^2 = c |c_{\text{si}}|^2 h_T^{2\lambda} \leq c |c_{\text{si}}|^2 h^{\frac{2\lambda}{\mu}}.$$

Setzt man dies zusammen mit (2.40) in (2.39) ein, ergibt sich

$$|I_h u_{\text{si}}^\ell - u_{\text{si}}^\ell|_{1,T}^2 \leq c |c_{\text{si}}|^2 h^{\frac{2\lambda}{\mu}} \quad \forall T \in \mathcal{D}_{0h}^\ell. \quad (2.42)$$

(ii<sub>a</sub>) Fall:  $T \in \mathcal{D}_{sh}^\ell$  ( $s = 1, \dots, S$  und  $\ell = 1, 2$ ):

Hier werden alle Dreiecke  $T \in \mathcal{C}_{0h}^\ell \setminus \mathcal{D}_{0h}^\ell = \bigcup_{s=1, \dots, S} \mathcal{D}_{sh}^\ell$  betrachtet. Da diese Elemente  $T$  den singulären Punkt  $P$  nicht berühren, gilt  $u_{\text{si}}|_T \in H^2(T)$ , und es kann der Approximationssatz (2.34) angewendet und die  $H^2$ -Seminorm von  $u_{\text{si}}$  mit Hilfe von Lemma 2.4 abgeschätzt werden. Man erhält

$$\begin{aligned} |I_h u_{\text{si}}^\ell - u_{\text{si}}^\ell|_{1,T}^2 &\leq ch_T^2 |u_{\text{si}}^\ell|_{2,T}^2 \leq ch_T^2 |c_{\text{si}}|^2 \int_T r^{2\lambda-4} dx_1 dx_2 \\ &\leq ch_T^2 |c_{\text{si}}|^2 \sup_{(x,y) \in T} r^{2(\lambda-2)} \operatorname{meas} T \leq c |c_{\text{si}}|^2 h_T^4 r_T^{2(\lambda-2)}, \end{aligned} \quad (2.43)$$

wobei  $r_T := \inf_{(x,y) \in T} r$  ist. Mit der Definition der Radien  $R_s$  (2.24), der  $\mathcal{D}$ -Mengen (2.27) und der Beziehung (2.25) können  $r_T$  und  $h_T$  abgeschätzt werden. Es gilt

$$\begin{aligned} r_T &\geq R_{s-1} = c(s-1)^{\frac{1}{\mu}} h^{\frac{1}{\mu}} && \forall T \in \mathcal{D}_{sh}^\ell \quad s = 2, \dots, S, \\ r_T &\geq R_0 + ch^{\frac{1}{\mu}} = ch^{\frac{1}{\mu}} && \forall T \in \mathcal{D}_{1h}^\ell, \\ h_T &\leq chr_T^{1-\mu} \leq ch \left( (sh)^{\frac{1}{\mu}} \right)^{1-\mu} = cs^{\frac{1}{\mu}-1} h^{\frac{1}{\mu}} && \forall T \in \mathcal{D}_{sh}^\ell \quad s = 1, \dots, S. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Durch Einsetzen dieser Ungleichungen in (2.43) ergibt sich für den Interpolationsfehler des singulären Lösungsanteils für Elemente aus  $\mathcal{C}_{0h}^\ell \setminus \mathcal{D}_{0h}^\ell$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} |I_h u_{\text{si}}^\ell - u_{\text{si}}^\ell|_{1,T}^2 &\leq c |c_{\text{si}}|^2 h^{\frac{2\lambda}{\mu}} s^{\frac{4}{\mu}-4} (s-1)^{\frac{2\lambda-4}{\mu}} \quad \forall T \in \mathcal{D}_{sh}^\ell \quad s = 2, \dots, S, \\ |I_h u_{\text{si}}^\ell - u_{\text{si}}^\ell|_{1,T}^2 &\leq c |c_{\text{si}}|^2 h^{\frac{2\lambda}{\mu}} \quad \forall T \in \mathcal{D}_{1h}^\ell. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Nun wird die Summe der Interpolationsfehleranteile über alle Elemente  $T \in \mathcal{C}_{0h}^\ell$  ( $\ell = 1, 2$ ) gebildet. Durch Einsetzen von (2.42) und (2.45) in (2.38) und Benutzen von Beziehung (2.28) über die Anzahl der Dreiecke pro Schicht sowie von Lemma 2.26 ergibt sich

$$\begin{aligned} \|\nabla(u_{\text{si}}^\ell - I_h u_{\text{si}}^\ell)\|_{0,\Omega_\ell}^2 &\leq c |c_{\text{si}}|^2 h^{\frac{2\lambda}{\mu}} \left( 2 + \sum_{s=2}^S \sum_{T \in \mathcal{D}_{sh}^\ell} s^{\frac{4}{\mu}-4} (s-1)^{\frac{2\lambda-4}{\mu}} \right) \\ &\leq c |c_{\text{si}}|^2 h^{\frac{2\lambda}{\mu}} \left( 1 + \sum_{s=2}^S s^{\frac{4}{\mu}-3} (s-1)^{\frac{2\lambda-4}{\mu}} \right) \\ &\leq c |c_{\text{si}}|^2 \kappa^2(h, \mu), \end{aligned} \quad (2.46)$$

wobei  $\kappa(h, \mu)$  wie in (2.37) definiert ist.

Als nächstes werden die letzten beiden Summen von  $\|u_{\text{si}}^\ell - I_h u_{\text{si}}^\ell\|_{h,\Omega}^2$  betrachtet, also der Term mit dem Sprung des Interpolationsfehlers des singulären Lösungsanteils  $u_{\text{si}}^\ell$  auf dem Schnitttrand  $\Gamma$  sowie der Term mit der Normalenableitung, siehe (2.30). Es wird die Abkürzung  $w^\ell := u_{\text{si}}^\ell - I_h u_{\text{si}}^\ell$  verwendet. Aus der Dreiecksungleichung, der Ungleichung vom arithmetischen und quadratischen Mittel und Lemma 2.20, bzw. durch Abschätzen des Betrages der Normalenableitung gegen den des Gradientens und Lemma 2.20 ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|w^1 - w^2\|_{0,E}^2 &\leq c \sum_{\ell=1}^2 \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|w^\ell\|_{0,E}^2 \leq c \sum_{\ell=1}^2 \sum_{F \in \mathcal{E}_h^\ell} h_F^{-1} \|w^\ell\|_{0,F}^2, \\ \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{1-2\beta_E} \left\| \alpha_\ell \frac{\partial w^\ell}{\partial n_\ell} \right\|_{0,E;\beta_E}^2 &\leq c \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{1-2\beta_E} \|\nabla w^\ell\|_{0,E;\beta_E}^2 \leq c \sum_{F \in \mathcal{E}_h^\ell} h_F^{1-2\beta_F} \|\nabla w^\ell\|_{0,F;\beta_F}^2. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Dabei ist  $\beta_F$  analog wie  $\beta_E$  in Lemma 2.20 definiert. Es wird wieder zwischen  $T_F \in \mathcal{D}_{0h}^\ell$  und  $T_F \in \bigcup_{s=1}^S \mathcal{D}_{sh}^\ell$  unterschieden.

(i<sub>b</sub>) Fall:  $F \in \mathcal{E}_h^\ell$  mit  $T_F \in \mathcal{D}_{0h}^\ell$  ( $\ell = 1, 2$ ):

Mit  $F$  wird jeweils das Intervall betrachtet, das den singulären Punkt  $P$  berührt. Durch Anwenden der Dreiecksungleichung ergibt sich

$$\begin{aligned} h_F^{-1} \|w^\ell\|_{0,F}^2 &\leq 2 \left( h_F^{-1} \|I_h u_{\text{si}}^\ell\|_{0,F}^2 + h_F^{-1} \|u_{\text{si}}^\ell\|_{0,F}^2 \right), \\ h_F^{1-2\beta_F} \|\nabla w^\ell\|_{0,F;\beta_F}^2 &\leq 2 \left( h_F^{1-2\beta_F} \|\nabla(I_h u_{\text{si}}^\ell)\|_{0,F;\beta_F}^2 + h_F^{1-2\beta_F} \|\nabla u_{\text{si}}^\ell\|_{0,F;\beta_F}^2 \right). \end{aligned} \quad (2.48)$$

## 2 Poissongleichung mit gemischten Randbedingungen

Diese Normen werden wieder unter Nutzung der expliziten Darstellung von  $u_{\text{si}}^\ell$  aus Satz 2.1 bzw.  $I_h u_{\text{si}}^\ell$  als Polynom ersten Grades abgeschätzt. Mit Hilfe von Lemma 2.4 und mit  $h_F \leq 1$  erhält man

$$\begin{aligned} h_F^{-1} \|u_{\text{si}}^\ell\|_{0,F}^2 &= h_F^{-1} \int_0^{h_F} |u_{\text{si}}^\ell|^2 dr \leq c |c_{\text{si}}|^2 h_F^{-1} \int_0^{h_F} r^{2\lambda} dr \leq c |c_{\text{si}}|^2 h_F^{2\lambda}, \\ h_F^{1-2\beta_F} \|\nabla u_{\text{si}}^\ell\|_{0,F;\beta_F}^2 &= h_F^{1-2\beta_F} \int_0^{h_F} r^{2\beta_F} |\nabla u_{\text{si}}^\ell|^2 dr \leq c |c_{\text{si}}|^2 h_F^{1-2\beta_F} \int_0^{h_F} r^{2\beta_F+2\lambda-2} dr \\ &= c |c_{\text{si}}|^2 h_F^{1-2\beta_F} h_F^{2\beta_F+2\lambda-1} \leq c |c_{\text{si}}|^2 h_F^{2\lambda}. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Da  $I_h u_{\text{si}}^\ell|_T \in \mathbb{P}_1(T)$  gilt, wird  $I_h u_{\text{si}}^\ell|_F = b_0 + b_1 r := p_F(r)$  angesetzt. Die Koeffizienten dieses Polynoms lassen sich einfach aus dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} b_0 + b_1 r_1 &= u_{\text{si}}^\ell(r_1, \varphi_\Gamma) \\ b_0 + b_1 r_2 &= u_{\text{si}}^\ell(r_2, \varphi_\Gamma) \end{aligned}$$

berechnen. Dabei sind  $(r_1, \varphi_\Gamma)$  und  $(r_2, \varphi_\Gamma)$  die Polarkoordinaten der Intervallenden von  $F$ , wobei  $r_i = 0$  sowie  $r_{3-i} = h_F$  für  $i \in \{1, 2\}$  gilt, und  $\varphi_\Gamma$  der Winkel der Schnittkante  $\Gamma$  ist, vgl. Abbildung 2.5. Man erhält  $b_0 = 0$  und  $b_1 = h_F^{-1} u_{\text{si}}^\ell(h_F, \varphi_\Gamma)$ . Mit Lemma 2.4 gilt somit

$$h_F^{-1} \|I_h u_{\text{si}}^\ell\|_{0,F}^2 = h_F^{-1} \int_0^{h_F} |I_h u_{\text{si}}^\ell|^2 dr \leq h_F^{-1} \int_0^{h_F} c |c_{\text{si}}|^2 h_F^{2\lambda-2} r^2 dr \leq c |c_{\text{si}}|^2 h_F^{2\lambda}. \quad (2.50)$$

Nach (i<sub>a</sub>) gilt für die Interpolierende  $I_h u_{\text{si}}^i|_T = a_0 + a_1 x + a_2 y$  über dem zu  $F$  gehörenden Dreieck  $T$  die Abschätzung

$$|\nabla(I_h u_{\text{si}}^\ell)|^2 = a_1^2 + a_2^2 \leq c |c_{\text{si}}|^2 h_T^{2\lambda-2}.$$

Damit ergibt sich

$$h_F^{1-2\beta_F} \|\nabla(I_h u_{\text{si}}^\ell)\|_{0,F;\beta_F}^2 \leq c |c_{\text{si}}|^2 h_F^{1-2\beta_F} h_T^{2\lambda-2} \int_0^{h_F} r^{2\beta_F} dr \leq c |c_{\text{si}}|^2 h_F^2 h_T^{2\lambda-2}. \quad (2.51)$$

Durch Einsetzen von (2.49), (2.50) und (2.51) in (2.48) erhält man zusammen mit Beziehung (2.25) und  $h_T \sim h_F$ , also  $h_F \leq c h_T^{\frac{1}{\mu}}$  für  $\ell = 1, 2$  und alle  $F \in \mathcal{E}_h^\ell$  mit  $T_F \in \mathcal{D}_{0h}^\ell$  die Abschätzungen

$$\begin{aligned} h_F^{-1} \|w^\ell\|_{0,F}^2 &\leq c |c_{\text{si}}|^2 h^{\frac{2\lambda}{\mu}}, \\ h_F^{1-2\beta_F} \|\nabla w^\ell\|_{0,F;\beta_F}^2 &\leq c |c_{\text{si}}|^2 h^{\frac{2\lambda}{\mu}}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

(ii<sub>b</sub>) Fall:  $F \in \mathcal{E}_h^\ell$  mit  $T_F \in \mathcal{D}_{sh}^\ell$  ( $s = 1, \dots, S$  und  $\ell = 1, 2$ )

Hier werden alle Kanten  $F \in \mathcal{E}_h^\ell$  betrachtet, die Seitenflächen von Dreiecken  $T \in \mathcal{D}_{sh}^\ell$  ( $T = T_F$ )

sind und damit den singulären Punkt  $P$  nicht berühren. Somit gilt  $\beta_F = 0$  und  $u_{\text{si}}^\ell|_T \in H^2(T)$  und es kann wie im Beweis von Lemma 2.25 vorgegangen werden. Es gilt

$$\begin{aligned} h_F^{-1} \|w^\ell\|_{0,F}^2 &\leq ch_T^2 |u_{\text{si}}^\ell|_{2,T}^2, \\ h_F \|\nabla w^\ell\|_{0,F}^2 &\leq ch_T^2 |u_{\text{si}}^\ell|_{2,T}^2. \end{aligned}$$

Analog zu der Abschätzung von  $ch_T^2 |u_{\text{si}}^\ell|_{2,T}^2$  bei dem  $\Omega_\ell$ -Anteil der Norm  $\|\cdot\|_{h,\Omega}$  unter (ii<sub>a</sub>), vgl. (2.43) und (2.45), gilt somit für  $F \in \mathcal{E}_h^\ell$  ( $\ell = 1, 2$ )

$$\begin{aligned} h_F^{-1} \|w^\ell\|_{0,F}^2 &\leq c |c_{\text{si}}|^2 h^{\frac{2\lambda}{\mu}} s^{\frac{4}{\mu}-4} (s-1)^{\frac{2\lambda-4}{\mu}} \quad \text{für } T_F \in \mathcal{D}_{sh}^\ell, \quad s = 2, \dots, S, \\ h_F^{-1} \|w^\ell\|_{0,F}^2 &\leq c |c_{\text{si}}|^2 h^{\frac{2\lambda}{\mu}} \quad \text{für } T_F \in \mathcal{D}_{1h}^\ell, \\ h_F \|\nabla w^\ell\|_{0,F}^2 &\leq c |c_{\text{si}}|^2 h^{\frac{2\lambda}{\mu}} s^{\frac{4}{\mu}-4} (s-1)^{\frac{2\lambda-4}{\mu}} \quad \text{für } T_F \in \mathcal{D}_{sh}^\ell, \quad s = 2, \dots, S, \\ h_F \|\nabla w^\ell\|_{0,F}^2 &\leq c |c_{\text{si}}|^2 h^{\frac{2\lambda}{\mu}} \quad \text{für } T_F \in \mathcal{D}_{1h}^\ell. \end{aligned} \tag{2.53}$$

Wegen  $u_{\text{si}}^\ell|_{T \in \mathcal{C}_h^\ell} = 0$  sind auch die Normanteile der Interpolationsfehler auf der Schnittkante  $\Gamma$  außerhalb des graduierten Bereichs ( $T \in \mathcal{C}_{0h}^\ell$ ) gleich null. Damit erhält man zusammen mit (2.47), (2.52), (2.53) und der Beziehung (2.28) über die Anzahl der Intervalle pro Schicht sowie Lemma 2.26 mit  $s^{\frac{4}{\mu}-4} \leq s^{\frac{4}{\mu}-3}$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{1-2\beta_E} \left\| \frac{\partial w^\ell}{\partial n_\ell} \right\|_{0,E;\beta_E}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|w^1 - w^2\|_{0,E}^2 \\ \leq c |c_{\text{si}}|^2 h^{\frac{2\lambda}{\mu}} \left( 1 + \sum_{s=2}^S s^{\frac{4}{\mu}-4} (s-1)^{\frac{2\lambda-4}{\mu}} \right) \leq c |c_{\text{si}}|^2 \kappa^2(h, \mu). \end{aligned} \tag{2.54}$$

Durch Addition von (2.46) und (2.54) erhält man die zu beweisende Abschätzung.  $\square$

**Bemerkung 2.28.** Betrachtet man den Interpolationsfehler  $u_{\text{si}} - I_h u_{\text{si}}$  nur auf den  $\Gamma$ -Anteilen der  $\|\cdot\|_{h,\Omega}$ -Norm (2.30), so erhält man ausgehend von (2.54) mit Lemma 2.26 sogar

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{1-2\beta_E} \left\| \frac{\partial (u_{\text{si}}^\ell - I_h u_{\text{si}}^\ell)}{\partial n_\ell} \right\|_{0,E;\beta_E}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|(u_{\text{si}}^1 - I_h u_{\text{si}}^1) - (u_{\text{si}}^2 - I_h u_{\text{si}}^2)\|_{0,E}^2 \\ \leq c |c_{\text{si}}|^2 h^{\frac{2\lambda}{\mu}} \left( 1 + \sum_{s=2}^S s^{\frac{4}{\mu}-4} (s-1)^{\frac{2\lambda-4}{\mu}} \right) \\ \leq c |c_{\text{si}}|^2 \begin{cases} h^{\frac{2\lambda}{\mu}} & \text{für } \frac{2}{3}\lambda < \mu \leq 1 \\ h^3 |\ln h| & \text{für } \mu = \frac{2}{3}\lambda \\ h^3 & \text{für } 0 < \mu < \frac{2}{3}\lambda < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Die Interpolationsfehler des singulären Lösungsanteils auf der Schnittkante  $\Gamma$  sind demzufolge für  $\mu < \frac{2}{3}\lambda$  von der Ordnung  $\mathcal{O}(h^3)$ .

## 2 Poissongleichung mit gemischten Randbedingungen

**Satz 2.29.** Sei  $u \in H^{1+\lambda-\delta}(\Omega)$  ( $0 < \delta < \lambda < 1$ ) mit  $\Delta u \in L_2(\Omega)$  die Lösung der Aufgabe (2.1) und  $u_h \in V_h$  mit Polynomgrad  $k = 1$  die Nitsche-Finite-Elemente-Näherung gemäß (2.6) auf graduierten Netzen  $\mathcal{T}_h^1$ ,  $\mathcal{T}_h^2$  und  $\mathcal{E}_h$ , die Annahme 2.22 erfüllen. Mit  $\gamma > C_I$  gelten dann für den Fehler  $u - u_h$  bzw.  $u - I_h u$  die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{1,h} &\leq c \kappa(h, \mu) \left( \|f\|_{0,\Omega} + \sum_{j \in \mathcal{N}} \|g\|_{\frac{1}{2}, \Gamma_j} \right), \\ \|u - u_h\|_{h,\Omega} &\leq c \kappa(h, \mu) \left( \|f\|_{0,\Omega} + \sum_{j \in \mathcal{N}} \|g\|_{\frac{1}{2}, \Gamma_j} \right), \\ \|u - I_h u\|_{h,\Omega} &\leq c \kappa(h, \mu) \left( \|f\|_{0,\Omega} + \sum_{j \in \mathcal{N}} \|g\|_{\frac{1}{2}, \Gamma_j} \right), \end{aligned}$$

wobei  $\kappa(h, \mu)$  wie in (2.37) definiert ist und  $h$  ( $0 < h < h_0$ ) der Diskretisierungsparameter,  $\lambda$  der Singularitätsexponent und  $\mu$  der Graduierungsparameter ist.

*Beweis.* Gemäß Satz 2.1 gilt  $u = u_{\text{re}} + u_{\text{si}}$ . Aus der Dreiecksungleichung folgt

$$\|u - I_h u\|_{h,\Omega} \leq \|u_{\text{re}} - I_h u_{\text{re}}\|_{h,\Omega} + \|u_{\text{si}} - I_h u_{\text{si}}\|_{h,\Omega}.$$

Mit Lemma 2.25 für  $k = 1$ ,  $t = 2$  und Lemma 2.27 ergibt sich zusammen mit Satz 2.24 sowie  $h \leq \kappa(h, \mu)$  die Beziehung

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{1,h} &\leq \|u - u_h\|_{h,\Omega} \leq c \|u - I_h u\|_{h,\Omega} \leq ch \|u_{\text{re}}\|_{2,\Omega} + c |c_{\text{si}}| \kappa(h, \mu) \\ &\leq c \kappa(h, \mu) \left( \|u_{\text{re}}\|_{2,\Omega} + |c_{\text{si}}| \right). \end{aligned}$$

Die Verwendung von Satz 2.3 führt dann zu den zu beweisenden Aussagen. □

Mit dem Finite-Elemente-Mortaring nach Nitsche werden somit auf lokal verfeinerten Netzen ( $0 < \mu < \lambda < 1$ ) auch für Lösungen mit Eckensingularitäten optimale Konvergenzordnungen für den Fehler in einer  $H^1$ -artigen Norm ( $\|\cdot\|_{1,h}$ ) erreicht, also  $\mathcal{O}(h)$  für lineare finite Elemente.

### 2.4.4 Fehlerabschätzung in der $L_2$ -Norm

Für die Fehlerabschätzung in der  $L_2$ -Norm wird das folgende Lemma verwendet.

**Lemma 2.30.** Für alle  $w^\ell, v^\ell \in H_{0,D}^1(\Omega_\ell)$ , siehe (2.56), mit  $r^\beta \frac{\partial w^\ell}{\partial n_\ell}, r^\beta \frac{\partial v^\ell}{\partial n_\ell} \in L_2(\Gamma)$  für  $\beta \in [0, \frac{1}{2}]$  gilt die Beziehung

$$|\mathcal{B}_h(w, v)| \leq c \|w\|_{h,\Omega} \|v\|_{h,\Omega}.$$

*Beweis.* Es wird wie bei der  $V_h$ -Beschränktheit bzw. im Beweis von Satz 2.24 vorgegangen. Nach Anwenden der Dreiecksungleichung und Aufspaltung der Dualformen (gewichteten  $L_2$ -Skalarprodukten  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma = (r^\beta \cdot, r^{-\beta} \cdot)_\Gamma$ ) wird die Cauchy-Schwarz-Ungleichung  $|\langle \cdot, \cdot \rangle_E| \leq \|\cdot\|_{0,E} \|\cdot\|_{0,E}$  angewendet.



Durch Einfügen von  $h_E$ -Potenzen und mehrfaches Anwenden der Cauchy-Schwarz-Ungleichung erhält man

$$|\mathcal{B}_h(w, v)| \leq \prod_{z \in \{w, v\}} \left( \sum_{\ell=1}^2 \|\nabla z^\ell\|_{0, \Omega_\ell}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{1-2\beta_E} \left\| \alpha_1 \frac{\partial z^1}{\partial n_1} - \alpha_2 \frac{\partial z^2}{\partial n_2} \right\|_{0, E; \beta_E}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1+2\beta_E} \|z^1 - z^2\|_{0, E; -\beta_E}^2 + \gamma \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|z^1 - z^2\|_{0, E}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

und mit Lemma 2.21 die zu beweisende Aussage.  $\square$

**Satz 2.31.** *Mit den Annahmen von Satz 2.29 gilt für den Fehler in der  $L_2$ -Norm die Abschätzung*

$$\|u - u_h\|_{0, \Omega} \leq c\kappa^2(h, \mu) \left( \|f\|_{0, \Omega} + \sum_{j \in \mathcal{N}} \|g\|_{\frac{1}{2}, \Gamma_j} \right).$$

*Beweis.* Sei  $u - u_h$  der Fehler der Nitsche-Finite-Elemente-Näherung  $u_h$  gemäß (2.6) zu der Lösung  $u$  von (2.1). Es wird nun die Aufgabe (2.1) mit  $u - u_h$  als rechte Seite und homogenen Dirichlet- und Neumann-Randbedingungen betrachtet und deren Lösung mit  $u_e$  bezeichnet, also

$$\begin{aligned} -\Delta u_e &= u - u_h \quad \text{in } \Omega, \\ u_e &= 0 \quad \text{auf } \Gamma_j \text{ für } j \in \mathcal{D}, \\ \frac{\partial u_e}{\partial n} &= 0 \quad \text{auf } \Gamma_j \text{ für } j \in \mathcal{N}. \end{aligned} \tag{2.55}$$

Die dazugehörige Nitsche-Finite-Elemente-Näherung  $u_{eh}$  ist durch die folgende diskrete Variationsformulierung definiert:

$$\text{Finde } u_{eh} \in V_h : \quad \mathcal{B}_h(u_{eh}, v_h) = (u - u_h, v_h)_{\Omega_\ell} =: \mathcal{F}_h^e(v_h) \quad \forall v_h \in V_h.$$

Weiterhin gelten mit der Konsistenz, siehe Satz 2.9, und mit analogen Argumenten für die Lösung  $u$  die Beziehungen

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_h(u_e, v_h) &= \mathcal{F}_h^e(v_h) \quad \forall v_h \in V_h, \\ \mathcal{B}_h(u_e, u) &= \mathcal{F}_h^e(u). \end{aligned}$$

Subtraktion dieser Gleichungen mit  $u_h$  anstelle von  $v_h$ , sowie Ausnutzen der  $V_h$ -Orthogonalität der Bilinearform ( $\mathcal{B}_h(u - u_h, v_h) = 0$  für alle  $v_h \in V_h$  mit  $v_h = I_h u_e$ , siehe Bemerkung 2.10) und der Symmetrie von  $\mathcal{B}_h(\cdot, \cdot)$  ergibt

$$\|u - u_h\|_{0, \Omega}^2 = \mathcal{F}_h^e(u - u_h) = \mathcal{B}_h(u_e, u - u_h) = \mathcal{B}_h(u - u_h, u_e - I_h u_e).$$

Zusammen mit Lemma 2.30 folgt dann die Abschätzung

$$\|u - u_h\|_{0, \Omega}^2 \leq c \|u - u_h\|_{h, \Omega} \|u_e - I_h u_e\|_{h, \Omega}.$$

Nach Satz 2.24 gilt  $\|u - u_h\|_{h, \Omega} \leq c \|u - I_h u\|_{h, \Omega}$  und somit

$$\|u - u_h\|_{0, \Omega}^2 \leq c \|u - I_h u\|_{h, \Omega} \|u_e - I_h u_e\|_{h, \Omega}.$$

Da (2.55) ein Aufgabe vom Typ (2.1) ist (mit rechter Seite  $u - u_h \in L_2(\Omega)$  und Neumann-Randbedingungen  $0 \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_N)$ ), verhält sich  $u_e$  wie in Satz 2.1 angegeben. Damit kann Satz 2.29 sowohl für  $u - I_h u$  als auch für  $u_e - I_h u_e$  angewendet werden. Es ergibt sich

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega}^2 \leq c \kappa(h, \mu) \left( \|f\|_{0,\Omega} + \sum_{j \in \mathcal{N}} \|g\|_{\frac{1}{2}, \Gamma_j} \right) \cdot \kappa(h, \mu) \|u - u_h\|_{0,\Omega}$$

und somit die zu beweisende Beziehung.  $\square$

Die Konvergenzordnung des Fehlers in der  $L_2$ -Norm beträgt demzufolge auch beim Nitsche-Mortaring das Doppelte der Konvergenzordnung bezüglich der  $H^1$ -artigen Norm ( $\|\cdot\|_{1,h}$ ). Das heißt auf lokal graduierten Netzen mit  $0 < \mu < \lambda < 1$  hat man auch für Lösungen mit Eckensingularitäten die  $L_2$ -Konvergenz  $\|u - u_h\|_{0,\Omega} = \mathcal{O}(h^2)$ .

### 2.4.5 Abschätzung der Konditionszahl der Systemmatrix

Als Vorbereitung zum Abschätzen der Konditionszahl wird Lemma 2.32 formuliert.

**Lemma 2.32.** Sei  $\text{meas } \Gamma_D \neq 0$  mit  $\Gamma_D := \bigcup_{j \in \mathcal{D}} \bar{\Gamma}_j$  und

$$H_{0,\mathcal{D}}^1(\Omega_\ell) := \left\{ v^\ell \in H^1(\Omega_\ell) : v^\ell|_{\partial\Omega_\ell \cap \Gamma_D} = 0 \right\} \quad (2.56)$$

für  $\ell = 1, 2$ . Dann gilt für  $v = (v^1, v^2) \in H_{0,\mathcal{D}}^1(\Omega_1) \times H_{0,\mathcal{D}}^1(\Omega_2)$  die Abschätzung

$$\|v\|_{1,h}^2 \geq c \sum_{\ell=1}^2 \|v^\ell\|_{1,\Omega_\ell}^2.$$

*Beweis.* Zuerst wird der Fall betrachtet, dass Nullrandbedingungen auf nichtleeren Teilmengen von  $\partial\Omega_1$  und  $\partial\Omega_2$  zugleich auftreten, das heißt es gilt  $\text{meas}(\partial\Omega_\ell \cap \Gamma_D) \neq 0$  für  $\ell = 1, 2$ . Somit gilt nach [22, Theorem 1.2.1] in jedem Teilgebiet die Normäquivalenz  $|v^\ell|_{1,\Omega_\ell} \sim \|v^\ell\|_{1,\Omega_\ell}$  für  $v^\ell \in H_{0,\mathcal{D}}^1(\Omega_\ell)$  und man erhält die Abschätzung

$$\|v\|_{1,h}^2 = \sum_{\ell=1}^2 \|\nabla v^\ell\|_{0,\Omega_\ell}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|v^1 - v^2\|_{0,E}^2 \geq \sum_{\ell=1}^2 |v^\ell|_{1,\Omega_\ell}^2 \geq c \sum_{\ell=1}^2 \|v^\ell\|_{1,\Omega_\ell}^2.$$

Jetzt wird angenommen, dass nur noch für eines der beiden Teilgebiete Nullrandbedingungen auf Randstücken vom Maß größer null gegeben sind, also  $\text{meas}(\partial\Omega_\ell \cap \Gamma_D) \neq 0$  für  $\ell = 1$  oder  $\ell = 2$ . Ohne Einschränkung der Allgemeinheit wird hier  $\ell = 1$  gewählt. Es werden zwei Funktionen  $\theta \in H^1(\Omega)$  und  $\vartheta \in H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2) \not\subset H^1(\Omega)$  wie folgt eingeführt

$$\theta := \begin{cases} v^1 & \text{in } \Omega_1 \\ \tilde{v}^1 & \text{in } \Omega_2 \end{cases}, \quad \vartheta := \begin{cases} 0 & \text{in } \Omega_1 \\ v^2 - \tilde{v}^1 & \text{in } \Omega_2 \end{cases}. \quad (2.57)$$

Dabei bezeichnet  $\tilde{v}^1 \in H^1(\Omega_2)$  eine Fortsetzung von  $v^1|_\Gamma \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  auf  $\Omega_2$  mit  $\tilde{v}^1|_\Gamma = v^1|_\Gamma$ , die nach [33, Satz 6.2.40] existiert. Wegen  $v = \theta + \vartheta$  gilt

$$\sum_{\ell=1}^2 \|v^\ell\|_{0,\Omega_\ell}^2 = \|v\|_{0,\Omega}^2 = \|\theta + \vartheta\|_{0,\Omega}^2 \leq 2 \left( \|\theta\|_{0,\Omega}^2 + \|\vartheta\|_{0,\Omega_2}^2 \right).$$

Durch Anwenden von Ungleichungen vom Friedrichs-Poincaré-Typ ( $\|\theta\|_{0,\Omega} \leq c|\theta|_{1,\Omega}$  wegen  $\theta \in H_{0,\mathcal{D}}^1(\Omega)$  bei Nullrandbedingungen auf Randstücken vom Maß größer null und andererseits  $\|\vartheta\|_{0,\Omega_2}^2 \leq c(|\vartheta|_{1,\Omega_2}^2 + \|\vartheta\|_{0,\Gamma}^2)$ , bei der keine Nullrandbedingungen benötigt werden, siehe [28, Kapitel II, Lemma 1.36]) sowie der Definition (2.57) erhält man

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 \|v^\ell\|_{0,\Omega_\ell}^2 &\leq c \left( |\theta|_{1,\Omega}^2 + |\vartheta|_{1,\Omega_2}^2 + \|\vartheta\|_{0,\Gamma}^2 \right) \\ &= c \left( |v^1|_{1,\Omega_1}^2 + |\tilde{v}^1|_{1,\Omega_2}^2 + |v^2 - \tilde{v}^1|_{1,\Omega_2}^2 + \|v^2 - \tilde{v}^1\|_{0,\Gamma}^2 \right) \\ &\leq c \left( |v^1|_{1,\Omega_1}^2 + 3|\tilde{v}^1|_{1,\Omega_2}^2 + 2|v^2|_{1,\Omega_2}^2 + \|v^2 - \tilde{v}^1\|_{0,\Gamma}^2 \right). \end{aligned}$$

Nach [33, Satz 6.2.40] und [22, Theorem 1.2.1] gelten die Beziehungen  $|\tilde{v}^1|_{1,\Omega_2} \leq \|\tilde{v}^1\|_{1,\Omega_2} \leq c\|\tilde{v}^1\|_{\frac{1}{2},\Gamma}$  und  $\|v^1\|_{\frac{1}{2},\Gamma} \leq c\|v^1\|_{1,\Omega_1} \leq c|v^1|_{1,\Omega_1}$ . Zusammen mit  $\tilde{v}^1|_\Gamma = v^1|_\Gamma$  ergibt sich

$$\sum_{\ell=1}^2 |v^\ell|_{1,\Omega_\ell}^2 + \|v^1 - v^2\|_{0,\Gamma}^2 \geq c \sum_{\ell=1}^2 \|v^\ell\|_{0,\Omega_\ell}^2. \quad (2.58)$$

Addieren von  $\sum_{\ell=1}^2 |v^\ell|_{1,\Omega_\ell}^2 + \|v^1 - v^2\|_{0,\Gamma}^2$  sowie Halbieren und Anwenden von  $\|v^1 - v^2\|_{0,\Gamma}^2 \geq 0$  führt zu

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 |v^\ell|_{1,\Omega_\ell}^2 + \|v^1 - v^2\|_{0,\Gamma}^2 &\geq \frac{1}{2} \left( c \sum_{\ell=1}^2 \|v^\ell\|_{0,\Omega_\ell}^2 + \sum_{\ell=1}^2 |v^\ell|_{1,\Omega_\ell}^2 + \|v^1 - v^2\|_{0,\Gamma}^2 \right) \\ &\geq c \left( \sum_{\ell=1}^2 \|v^\ell\|_{0,\Omega_\ell}^2 + \sum_{\ell=1}^2 |v^\ell|_{1,\Omega_\ell}^2 \right) = c \sum_{\ell=1}^2 \|v^\ell\|_{1,\Omega_\ell}^2. \end{aligned}$$

Mit  $h_E \leq 1$  gilt  $\sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|v^1 - v^2\|_{0,E}^2 \geq \|v^1 - v^2\|_{0,\Gamma}^2$  und somit die zu beweisende Ungleichung.  $\square$

Im Folgenden wird die Konditionszahl der Systemmatrix  $\mathbf{K}$  im Fall linearer finiter Elemente betrachtet. Zur Definition von  $\mathbf{K}$  werden die folgenden Bezeichnungen eingeführt. Sei  $\{x_i\}_{i=1}^N$  die Menge aller Knotenpunkte im Gebiet  $\Omega$  und auf den Neumannrändern  $\Gamma_k$  ( $k \in \mathcal{N}$ ), sowie  $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$  die Menge der Knotenbasisfunktionen von  $V_h$  mit  $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$  für  $i, j = 1, \dots, N$ , wobei  $\delta_{ij}$  das Kroneckersymbol bezeichnet. Funktionen  $v_h \in V_h$  können somit als Linearkombination  $v_h = \sum_{i=1}^N v_i \varphi_i$  dargestellt werden. Sei  $\underline{v} = (v_1, \dots, v_N)^\top \in \mathbb{R}^N$  der Vektor der Koeffizienten  $v_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) und  $\mathbf{K} = [k_{ij}]_{i,j=1}^N$  die Matrix des Finite-Elemente-Gleichungssystems mit  $k_{ij} = \mathcal{B}_h(\varphi_i, \varphi_j)$ .

Aus der Symmetrie und der  $V_h$ -Elliptizität der Bilinearform  $\mathcal{B}_h(\cdot, \cdot)$  folgt, dass die Matrix  $\mathbf{K}$  ebenfalls symmetrisch und positiv definit ist.

**Satz 2.33** (Konditionszahl). *Es sei  $\gamma > C_I$ , und die Triangulationen  $\mathcal{T}_h^1$ ,  $\mathcal{T}_h^2$  und  $\mathcal{E}_h$  erfüllen Annahme 2.22. Dann gilt für die Konditionszahl  $\kappa$  der Systemmatrix  $\mathbf{K}$  des Finite-Elemente-Mortarings nach Nitsche die Abschätzung*

$$\kappa(\mathbf{K}) = \mathcal{O}(h^{-2}).$$

## 2 Poissongleichung mit gemischten Randbedingungen

*Beweis.* Ausgangspunkt der Abschätzung der Konditionszahl  $\kappa(\mathbf{K}) = \frac{\lambda_{\max}(\mathbf{K})}{\lambda_{\min}(\mathbf{K})}$  ist der Rayleigh-Quotient  $\frac{\underline{u}^\top \mathbf{K} \underline{u}}{\underline{u}^\top \underline{u}}$  für  $\underline{u} \in \mathbb{R}^N$ . Da  $\mathbf{K}$  symmetrisch und positiv definit ist, gilt

$$\min_{\substack{\underline{u} \in \mathbb{R}^N \\ \underline{u} \neq 0}} \frac{\underline{u}^\top \mathbf{K} \underline{u}}{\underline{u}^\top \underline{u}} = \lambda_{\min}(\mathbf{K}), \quad \max_{\substack{\underline{u} \in \mathbb{R}^N \\ \underline{u} \neq 0}} \frac{\underline{u}^\top \mathbf{K} \underline{u}}{\underline{u}^\top \underline{u}} = \lambda_{\max}(\mathbf{K}).$$

Es wird zuerst der kleinste Eigenwert  $\lambda_{\min}(\mathbf{K})$  nach unten abgeschätzt, das heißt, es wird eine Zahl  $\vartheta_1 > 0$  gesucht, so dass  $\underline{u}^\top \mathbf{K} \underline{u} \geq \vartheta_1 \underline{u}^\top \underline{u}$  für alle  $\underline{u} \in \mathbb{R}^N$ ,  $\underline{u} \neq 0$  gilt. Durch Ausnutzen von Satz 2.15 ( $V_h$ -Elliptizität) und Lemma 2.32 ergibt sich die Abschätzung

$$\begin{aligned} \underline{u}^\top \mathbf{K} \underline{u} &= \sum_{i,j=1}^N u_i k_{ij} u_j = \mathcal{B}_h \left( \sum_{j=1}^N u_j \varphi_j, \sum_{i=1}^N u_i \varphi_i \right) = \mathcal{B}_h(u_h, u_h) \\ &\geq \mu_1 \|u_h\|_{1,h}^2 \geq c\mu_1 \sum_{\ell=1}^2 \|u_h^\ell\|_{1,\Omega_\ell}^2 \geq c\mu_1 \sum_{\ell=1}^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\ell} \|u_h^\ell\|_{1,T}^2. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Die  $H^1$ -Norm wird getrennt für Dreiecke außerhalb und innerhalb des Graduierungsgebietes abgeschätzt.

Außerhalb des Graduierungsgebietes, also für alle  $T \in \mathcal{C}_h^\ell$  ( $\ell = 1, 2$ ), erhält man durch Transformation auf das Referenzelement  $\hat{T} := \{(\hat{x}, \hat{y}) \in \mathbb{R}^2 : \hat{x} \geq 0, \hat{y} \geq 0, \hat{x} + \hat{y} \leq 1\}$  und die Beziehung (2.25) ( $h_T \sim h$ ) die Abschätzung

$$\|u_h^\ell\|_{1,T}^2 \geq \|u_h^\ell\|_{0,T}^2 \geq ch_T^2 \|\hat{u}_h^\ell\|_{0,\hat{T}}^2 \geq ch^2 \|\hat{u}_h^\ell\|_{0,\hat{T}}^2 \quad \forall T \in \mathcal{C}_h^\ell. \quad (2.60)$$

Im Graduierungsgebiet, also für alle  $T \in \mathcal{C}_{0h}^\ell$ , gilt  $\|u_h^\ell\|_{1,T}^2 \geq c \left( \|r^\mu u_h^\ell\|_{0,T}^2 + \|r^\mu \nabla u_h^\ell\|_{0,T}^2 \right)$  für  $\mu > 0$ , wobei  $\mu \in (0, 1]$  der Graduierungsparameter sei. Mit einer aus der Hardyschen Ungleichung resultierenden Raumeinbettung, siehe [48, Formel (0.35)], ergibt sich  $\|r^\mu u_h^\ell\|_{0,T}^2 + \|r^\mu \nabla u_h^\ell\|_{0,T}^2 \geq c \|r^{\mu-1} u_h^\ell\|_{0,T}^2$  für  $\mu > 0$ . Es gilt also

$$\|u_h^\ell\|_{1,T}^2 \geq c \|r^{\mu-1} u_h^\ell\|_{0,T}^2 \geq c\tilde{r}_T^{2(\mu-1)} \|u_h^\ell\|_{0,T}^2 \geq c\tilde{r}_T^{2(\mu-1)} h_T^2 \|\hat{u}_h^\ell\|_{0,\hat{T}}^2,$$

wobei  $\tilde{r}_T := \max_{r \in T} r$  sei. Für alle Elemente  $T \in \mathcal{C}_{0h}^\ell$  gilt unter Verwendung von [39, Formeln (34) und (32)]  $h_T \geq ch_s \geq chR_s^{1-\mu} \geq ch\tilde{r}_T^{1-\mu}$  für  $r_T \in [R_{s-1}, R_s)$  mit  $s = 1, \dots, J$ . Dabei ergibt sich der letzte Schritt für alle  $T$  mit  $r_T, \tilde{r}_T \in [R_{s-1}, R_s)$  sofort und für Elemente, bei denen  $r_T$  und  $\tilde{r}_T$  nicht in der selben Schicht  $[R_{s-1}, R_s)$  liegen, muss nochmals eine der Ungleichungen von [39, Lemma 4] angewendet werden. Somit gilt

$$\|u_h^\ell\|_{1,T}^2 \geq c\tilde{r}_T^{2(\mu-1)} h^2 \tilde{r}_T^{2(1-\mu)} \|\hat{u}_h^\ell\|_{0,\hat{T}}^2 \geq ch^2 \|\hat{u}_h^\ell\|_{0,\hat{T}}^2 \quad \forall T \in \mathcal{C}_{0h}^\ell. \quad (2.61)$$

Durch Einsetzen von (2.60) und (2.61) in (2.59) erhält man die Abschätzung

$$\underline{u}^\top \mathbf{K} \underline{u} \geq c\mu_1 h^2 \sum_{\ell=1}^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\ell} \|\hat{u}_h^\ell\|_{0,\hat{T}}^2. \quad (2.62)$$

Nun wird  $\|\hat{u}_h^\ell\|_{0,\hat{T}}^2$  nach unten abgeschätzt. Sei dazu  $\hat{u}_h^\ell = \sum_{j=1}^3 \hat{u}_j^\ell \hat{\varphi}_j$ , wobei  $\hat{\varphi}_j$  für  $j = 1, 2, 3$  die knotenorientierten Ansatzfunktionen auf dem Referenzelement  $\hat{T}$  sind,  $\hat{\underline{u}}^\ell = (\hat{u}_1^\ell, \hat{u}_2^\ell, \hat{u}_3^\ell)^\top$  und  $\mathbf{G}_{\hat{T}} = [g_{ij}]_{i,j=1}^3$  mit  $g_{ij} = (\hat{\varphi}_i, \hat{\varphi}_j)_{0,\hat{T}}$  die Referenzelementmassematrix mit dem kleinsten Eigenwert  $\lambda_{\min}(\mathbf{G}_{\hat{T}})$ . Damit gilt

$$\|\hat{u}_h^\ell\|_{0,\hat{T}}^2 = (\hat{u}_h^\ell, \hat{u}_h^\ell)_{0,\hat{T}} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \hat{u}_k^\ell (\hat{\varphi}_k, \hat{\varphi}_l)_{0,\hat{T}} \hat{u}_l^\ell = (\hat{\underline{u}}^\ell)^\top \mathbf{G}_{\hat{T}} \hat{\underline{u}}^\ell \geq \lambda_{\min}(\mathbf{G}_{\hat{T}}) (\hat{\underline{u}}^\ell)^\top \hat{\underline{u}}^\ell,$$

wobei der Eigenwert  $\lambda_{\min}(\mathbf{G}_{\hat{T}})$  der Referenzelementmassematrix vom Diskretisierungsparameter  $h$  unabhängig ist. Aufsummieren aller Elemente ergibt dann

$$\sum_{\ell=1}^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\ell} \|\hat{u}_h^\ell\|_{0,\hat{T}}^2 \geq \lambda_{\min}(\mathbf{G}_{\hat{T}}) \underline{u}^\top \underline{u}.$$

Durch Einsetzen in (2.62) erhält man

$$\underline{u}^\top \mathbf{K} \underline{u} \geq \vartheta_1 \underline{u}^\top \underline{u}$$

mit  $\vartheta_1 = c\mu_1 \lambda_{\min}(\mathbf{G}_{\hat{T}}) h^2 = ch^2$ . Für den kleinsten Eigenwert  $\lambda_{\min}(\mathbf{K})$  der Matrix  $\mathbf{K}$  gilt also

$$\lambda_{\min}(\mathbf{K}) \geq \vartheta_1 = ch^2, \quad (2.63)$$

wobei  $c$  eine von  $h$  unabhängige Konstante ist.

Nun wird der größte Eigenwerte der Systemmatrix  $\mathbf{K}$  nach oben abgeschätzt, es wird also eine Zahl  $\vartheta_2 > 0$  gesucht, so dass  $\underline{u}^\top \mathbf{K} \underline{u} \leq \vartheta_2 \underline{u}^\top \underline{u}$  für alle  $\underline{u} \neq 0$  gilt. Mit der  $V_h$ -Beschränktheit der Bilinearform  $\mathcal{B}_h(\cdot, \cdot)$  ergibt sich

$$\underline{u}^\top \mathbf{K} \underline{u} = \sum_{i,j=1}^N u_i k_{ij} u_j = \mathcal{B}_h \left( \sum_{j=1}^N u_j \varphi_j, \sum_{i=1}^N u_i \varphi_i \right) = \mathcal{B}_h(u_h, u_h) \leq \mu_2 \|u_h\|_{1,h}^2.$$

Die Norm  $\|\cdot\|_{1,h}^2$  kann unter Verwendung der Inversen Ungleichung ( $|u_h^\ell|_{1,T} \leq ch_T^{-1} \|u_h^\ell\|_{0,T}$ ), sowie der Dreiecksungleichung, der Ungleichung vom arithmetischen und quadratischen Mittel, (2.12) aus Lemma 2.12, Lemma 2.11 ( $\|u_h^\ell\|_{0,F}^2 \leq ch_F^{-1} \|u_h^\ell\|_{0,T}^2$ ) und der Gestaltsregularität der Elemente, also  $h_F \sim h_F^\perp \sim h_T$  weiter abgeschätzt werden. Man erhält nach Transformation auf das Referenzdreieck  $\hat{T}$  die Beziehung

$$\underline{u}^\top \mathbf{K} \underline{u} \leq \mu_2 \|u_h\|_{1,h}^2 \leq \mu_2 \sum_{\ell=1}^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\ell} h_T^{-2} \|u_h^\ell\|_{0,T}^2 \leq c\mu_2 \sum_{\ell=1}^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\ell} \|\hat{u}_h^\ell\|_{0,\hat{T}}^2.$$

Analog zur Abschätzung von  $\|\hat{u}_h^\ell\|_{0,\hat{T}}$  nach unten, folgt hier  $\underline{u}^\top \mathbf{K} \underline{u} \leq \vartheta_2 \underline{u}^\top \underline{u}$  mit  $\vartheta_2 = c\mu_2 \lambda_{\max}(\mathbf{G}_{\hat{T}})$ , wobei auch der größte Eigenwert der Referenzelementmassematrix  $\mathbf{G}_{\hat{T}}$  und somit auch  $\vartheta_2$  von  $h$  unabhängig ist. Es gilt also

$$\lambda_{\max}(\mathbf{K}) \leq \vartheta_2 = c. \quad (2.64)$$

Mit den Abschätzungen (2.63) und (2.64) der beiden extremalen Eigenwerte ergibt sich für die Konditionszahl die zu beweisende Beziehung

$$\kappa(\mathbf{K}) = \frac{\lambda_{\max}(\mathbf{K})}{\lambda_{\min}(\mathbf{K})} \leq \frac{\vartheta_2}{\vartheta_1} = ch^{-2} = \mathcal{O}(h^{-2}).$$

□

Die Konditionszahl  $\kappa(\mathbf{K})$  des Finite-Elemente-Mortaring nach einer Methode von Nitsche hat also bezüglich  $h$  das gleiche Verhalten wie die Konditionszahlen der Matrizen, die mittels klassischer Finite-Elemente-Methode bei zweidimensionalen elliptischen Randwertaufgaben entstehen, unabhängig davon, ob gradierte Netze benutzt werden oder nicht.

## 2.5 Numerische Ergebnisse

In diesem Abschnitt sollen die theoretisch bewiesenen Konvergenzaussagen mit numerischen Ergebnissen unterlegt werden. Das Verhalten des Fehlers und der Konditionszahl in Abhängigkeit von  $\gamma$  wird in Abschnitt 5.1 angegeben. Hier werden drei Problemstellungen betrachtet, die jeweils an einer Ecke eine Singularität aufweisen. Die an die Ecke angrenzenden Ränder sind dabei mit verschiedenen Randbedingungen versehen und auch der Innenwinkel  $\omega$  an der Ecke variiert. In Abschnitt 2.5.1 liegt die Ecke auf dem Neumannrandanteil, und in Abschnitt 2.5.2 werden ausschließlich homogene Dirichletrandbedingungen betrachtet. In Abschnitt 2.5.3 wird schließlich eine Eckensingularität mit Dirichletrandbedingungen auf dem einen und Neumannrandbedingungen auf dem anderen der an die Ecke grenzenden Randabschnitte untersucht. Mit  $\omega = \pi$  und  $\lambda = \frac{1}{2}$  wird hier der kleinste Singularitätsexponent der durchgeführten Beispielrechnungen betrachtet. Der Vorteil von gradierten Netzen wird somit in diesem Beispiel am deutlichsten.

### 2.5.1 Neumann-Neumann-Randbedingungen über L-förmigem Gebiet

Für die folgenden numerischen Untersuchungen wird die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \text{ in } \Omega, \\ u &= 0 \text{ auf } \Gamma_D, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= g \text{ auf } \Gamma_N, \end{aligned} \tag{2.65}$$

über dem L-förmigen Gebiet  $\Omega := (-a, a) \times (-b, b) \setminus [0, a] \times [-b, 0] \subset \mathbb{R}^2$  mit Neumannrandbedingungen auf  $\Gamma_N := \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  mit  $\Gamma_1 := \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in (-b, 0)\}$  und  $\Gamma_2 := \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, a)\}$  sowie homogenen Dirichletrandbedingungen auf dem Rand  $\Gamma_D := \partial\Omega \setminus \Gamma_N$  betrachtet (vgl. Abbildung 2.7). Dabei seien die rechte Seite  $f$  und die Randdaten  $g$  so gewählt, dass für die exakte Lösung  $u$  der Aufgabe (2.65)

$$u = (a^2 - x^2)(b^2 - y^2) r^\lambda \cos(\lambda\varphi)$$

gilt, wobei  $(r, \varphi)$  die Polarkoordinaten an dem Punkt  $P = (0, 0)$  sind und  $\lambda = \frac{\pi}{\omega} = \frac{2}{3}$  gilt (vgl. Abbildung 2.7). Die Lösung  $u$ , in Abbildung 2.8 dargestellt, ist so gewählt, dass nur eine Eckensingularität mit dem Exponenten  $\lambda = \frac{2}{3}$  am Punkt  $P = (0, 0)$  auf dem Neumannrandanteil auftritt. Es gilt somit  $u \in H^{1+\frac{2}{3}-\delta}(\Omega)$  mit  $\delta \in (0, \frac{2}{3})$ .

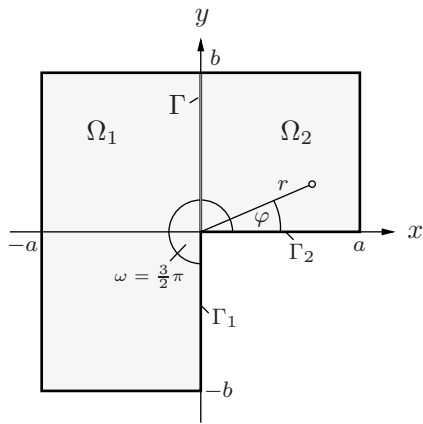
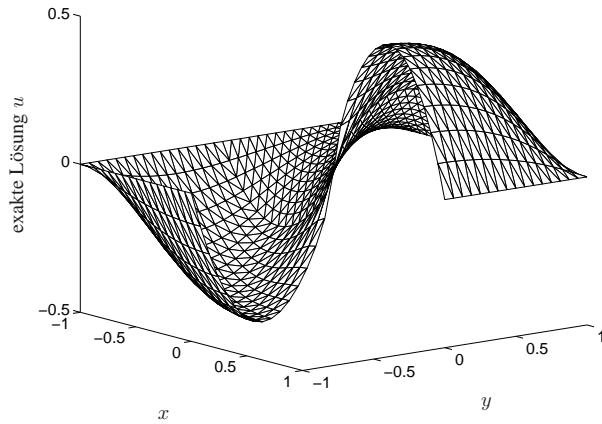
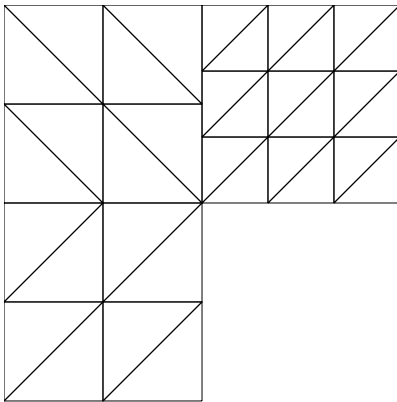
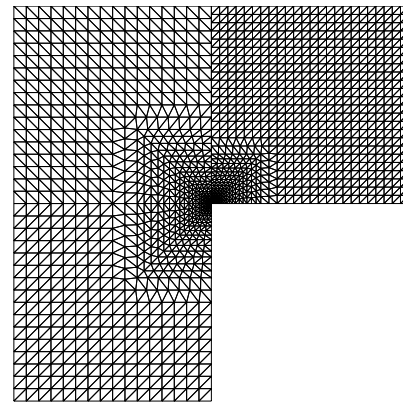


Abbildung 2.7: Berechnungsgebiet

Abbildung 2.8: Lösung auf nichtgraduiertem  $h_3$ -Netz

Für das Finite-Elemente-Mortaring nach Nitsche wird das Gebiet  $\Omega$  mit  $a = b = 1$  in zwei Teilgebiete  $\Omega_1 := (-a, 0) \times (-b, b)$  und  $\Omega_2 := (0, a) \times (0, b)$  zerlegt, die unabhängig voneinander vernetzt werden, so dass ein Anfangsnetz mit dem Diskretisierungsparameter  $h_0$  wie in Abbildung 2.9 dargestellt entsteht, dessen Knoten auf der Schnittkante  $\Gamma$  nicht zusammenpassen. Für die durchgeführten Berechnungen wird dieses Anfangsnetz verfeinert. Bei jedem Verfeinerungsschritt wird der Diskretisierungsparameter  $h$  halbiert. Dies wird durch Teilung jedes Dreiecks in vier kongruente Dreiecke erreicht. Die dadurch entstehenden Netze mit den Diskretisierungsparametern  $\{h, \frac{h}{2}, \frac{h}{4}, \dots\}$  werden mit  $\{h_0, h_1, h_2, \dots\}$  bezeichnet. Bei den Netzen mit lokaler Graduierung wird neben der Viertelung der Dreiecke außerhalb des Graduierungsgebietes innerhalb mit  $\mu = 0.7\lambda \approx 0.47$  graduell verfeinert, so dass wie in Abschnitt 2.4.2 beschriebene Netze entstehen (vgl. Abbildung 2.10).

Abbildung 2.9: Anfangsnetz ( $h_0$ -Level)Abbildung 2.10:  $h_3$ -Netz mit Graduierung

Sei  $u_h$  die berechnete Finite-Elemente-Näherung gemäß (2.6) zu der exakten Lösung  $u$  von Aufgabe (2.65). Da die explizite Lösung von  $u$  bekannt ist, kann der Fehler  $u - u_h$  in verschiedenen Normen angegeben und die Konvergenzordnung bezüglich  $h$  berechnet werden. Dazu wird angenommen, dass  $h$  klein genug ist, so dass von

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega} \approx Ch^\alpha,$$

$$\|u - u_h\|_{1,h} \approx \tilde{C}h^\beta$$

## 2 Poissongleichung mit gemischten Randbedingungen

mit Konstanten  $C$  und  $\tilde{C}$ , die jeweils für ein Paar zweier aufeinander folgender  $h_l$ -Level ungefähr gleich groß sind, ausgegangen werden kann. Die Exponenten  $\alpha$  und  $\beta$  lassen sich somit leicht aus den Fehlernormen zweier aufeinander folgender  $h_l$ -Level mit  $h := h_l$  und demzufolge  $\frac{h}{2} := h_{l+1}$  näherungsweise bestimmen. Es gilt

$$\alpha \approx \log_2 \frac{\|u - u_h\|_{0,\Omega}}{\|u - u_{\frac{h}{2}}\|_{0,\Omega}}, \quad \beta \approx \log_2 \frac{\|u - u_h\|_{1,h}}{\|u - u_{\frac{h}{2}}\|_{1,\frac{h}{2}}}. \quad (2.66)$$

In Tabelle 2.2 sind die so berechneten Konvergenzordnungen und die Fehler für die Norm  $\|\cdot\|_{1,h}$  jeweils vom Level  $h_4$  bis  $h_8$  angegeben. Mit  $\mathcal{E}_h^\cap$  wird dabei die Menge aller Intervalle bezeichnet, die durch Schneiden aller Intervalle von  $F \in \mathcal{E}_h^1$  mit  $F \in \mathcal{E}_h^2$  entstehen. Bei nicht graduierten Netzen ( $\mu = 1$ ) erkennt man, dass die in Satz 2.29 bewiesene Konvergenzordnung bezüglich der Norm  $\|\cdot\|_{1,h}$  erreicht wird, also ungefähr  $\lambda = \frac{2}{3}$ , wobei die Konvergenzordnung für kleiner werdendes  $h$  zunehmend besser approximiert wird. Bei Netzen mit Graduierung ( $\mu < \lambda$ ) beträgt die Konvergenzordnung nach Satz 2.29 ungefähr eins. Weiterhin ist zu sehen, dass die unterschiedliche Wahl der Triangulation  $\mathcal{E}_h$  von  $\Gamma$  und der  $\alpha_\ell$  ( $\ell = 1, 2$ ) in der Bilinearform kaum Einfluss auf die Ergebnisse hat.

	ohne Graduierung ( $\mu = 1$ )		mit Graduierung ( $\mu < \lambda$ )	
	$\ u - u_h\ _{1,h}$	$\beta$	$\ u - u_h\ _{1,h}$	$\beta$
$\mathcal{E}_h = \mathcal{E}_h^1$ $\alpha_1 = 1$	5.782e-02		3.795e-02	
	3.338e-02	0.7927	1.923e-02	0.9805
	1.972e-02	0.7590	9.701e-03	0.9875
	1.188e-02	0.7315	4.869e-03	0.9946
	7.258e-03	0.7107	2.440e-03	0.9970
$\mathcal{E}_h = \mathcal{E}_h^\cap$ $\alpha_1 = \frac{1}{2}$	5.729e-02		3.793e-02	
	3.301e-02	0.7955	1.923e-02	0.9802
	1.947e-02	0.7612	9.699e-03	0.9872
	1.171e-02	0.7332	4.868e-03	0.9945
	7.152e-03	0.7119	2.439e-03	0.9969
$\mathcal{E}_h = \mathcal{E}_h^2$ $\alpha_1 = 0$	5.731e-02		3.793e-02	
	3.302e-02	0.7955	1.923e-02	0.9802
	1.948e-02	0.7612	9.700e-03	0.9872
	1.172e-02	0.7332	4.868e-03	0.9945
	7.155e-03	0.7119	2.439e-03	0.9969
$\beta_{\text{theoretisch}}$		0.6667		1.0000

Tabelle 2.2: Beobachtete Fehler in der Norm  $\|\cdot\|_{1,h}$  jeweils von Level  $h_4$  bis  $h_8$  und die sich zwischen den Levels ergebenden Konvergenzordnungen ( $\gamma = 5$ )

In Tabelle 2.3 sind die Fehler  $u - u_h$  in der  $L_2$ -Norm jeweils vom Level  $h_3$  bis  $h_7$  und die sich daraus ergebenden Konvergenzordnungen zwischen jeweils zwei aufeinander folgenden Levels, siehe (2.66), dargestellt. Auch hier werden die in Satz 2.31 bewiesenen Konvergenzordnungen ungefähr erreicht, das heißt  $\alpha = 2\lambda \approx 1.33$  für die Berechnungen ohne Graduierung ( $\mu = 1$ ) und  $\alpha = 2$  für  $\mu < \lambda$ . Die Wahl



der Triangulation  $\mathcal{E}_h$  und der  $\alpha_\ell$  ( $\ell = 1, 2$ ) hat auch auf die Fehler in der  $L_2$ -Norm keinen wesentlichen Einfluss.

	ohne Graduierung ( $\mu = 1$ )		mit Graduierung ( $\mu < \lambda$ )	
	$\ u - u_h\ _{0,\Omega}$	$\alpha$	$\ u - u_h\ _{0,\Omega}$	$\alpha$
$\mathcal{E}_h = \mathcal{E}_h^1$ $\alpha_1 = 1$	2.656e-03	1.6054	1.490e-03	2.0169
	8.730e-04	1.5229	3.683e-04	1.9610
	3.038e-04	1.4604	9.459e-05	1.9750
	1.104e-04	1.4081	2.406e-05	1.9324
	4.160e-05		6.303e-06	
$\mathcal{E}_h = \mathcal{E}_h^\cap$ $\alpha_1 = \frac{1}{2}$	3.028e-03	1.5527	1.501e-03	2.0217
	1.032e-03	1.4794	3.697e-04	1.9634
	3.702e-04	1.4283	9.481e-05	1.9765
	1.376e-04	1.3878	2.409e-05	1.9333
	5.257e-05		6.308e-06	
$\mathcal{E}_h = \mathcal{E}_h^2$ $\alpha_1 = 0$	3.117e-03	1.5419	1.500e-03	2.0212
	1.071e-03	1.4713	3.696e-04	1.9632
	3.861e-04	1.4227	9.478e-05	1.9764
	1.440e-04	1.3844	2.409e-05	1.9332
	5.517e-05		6.307e-06	
$\alpha_{\text{theoretisch}}$		1.3333		2.0000

Tabelle 2.3: Beobachtete Fehler in der  $L_2$ -Norm jeweils von Level  $h_3$  bis  $h_7$  und die sich zwischen den Levels ergebenden Konvergenzordnungen ( $\gamma = 5$ )

In Abbildung 2.11 ist der Fehler  $u - u_h$  in der Norm  $\|\cdot\|_{1,h}$  sowie auch in der  $L_2$ - und  $L_\infty$ -Norm über der Anzahl der Dreieckselemente  $T \in \mathcal{T}_h$  für graduierte und nicht graduierte Netze abgetragen. Die eingezeichneten Dreiecke sollen die Anstiege der Fehlerkurven verdeutlichen und ermöglichen durch Multiplizieren mit  $-2$  das Ablesen der Konvergenzordnung bezüglich  $h$ . (Die Fehler sind in Abhängigkeit von der Anzahl der Elemente  $N$  der Triangulationen  $\mathcal{T}_h$  dargestellt, und es gilt  $N = O(h^{-2})$ .) Auch hier ist zu erkennen, dass für  $\|u - u_h\|_{1,h}$ , aber auch für  $\|u - u_h\|_{0,\Omega}$  die theoretisch erwarteten Konvergenzordnungen von ungefähr eins (siehe Satz 2.29) bzw. von ungefähr zwei (siehe Satz 2.31) auf Netzen mit Graduierung ( $\mu < \lambda$ ) erreicht werden. Vergleicht man die beiden Grafiken in Abbildung 2.11, wird auch die durch die Graduierung erreichte Konvergenzsteigerung deutlich, die Fehlernormen werden bei Verwendung graduierter Netze schneller klein.

In Abbildung 2.12 ist der Fehler  $u - u_h$  für  $h = h_3$  auf Netzen mit und ohne Graduierung dargestellt. Der starke Einfluss der Singularität auf den Fehler sowie dessen Verringerung bei Verwendung von graduierten Netzen wird gut sichtbar. Man sieht ebenfalls, dass der Fehler, der durch das Verwenden von nichtzusammenpassenden Netzen  $\mathcal{T}_h^1, \mathcal{T}_h^2$  an der Schnittkante  $\Gamma$  entsteht, gegenüber dem Fehler, der aus der Singularität herrührt, vernachlässigt werden kann.

## 2 Poissongleichung mit gemischten Randbedingungen

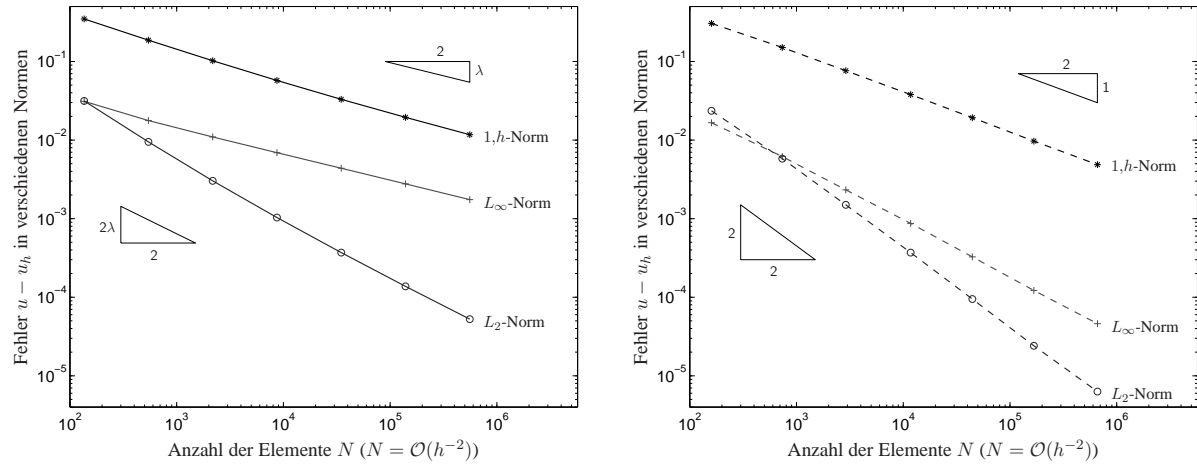


Abbildung 2.11: Fehler in verschiedenen Normen auf Netzen ohne Graduierung (links) und mit Graduierung (rechts) ( $\gamma = 5$ ,  $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ ,  $\mathcal{E}_h = \mathcal{E}_h^\Gamma$ )

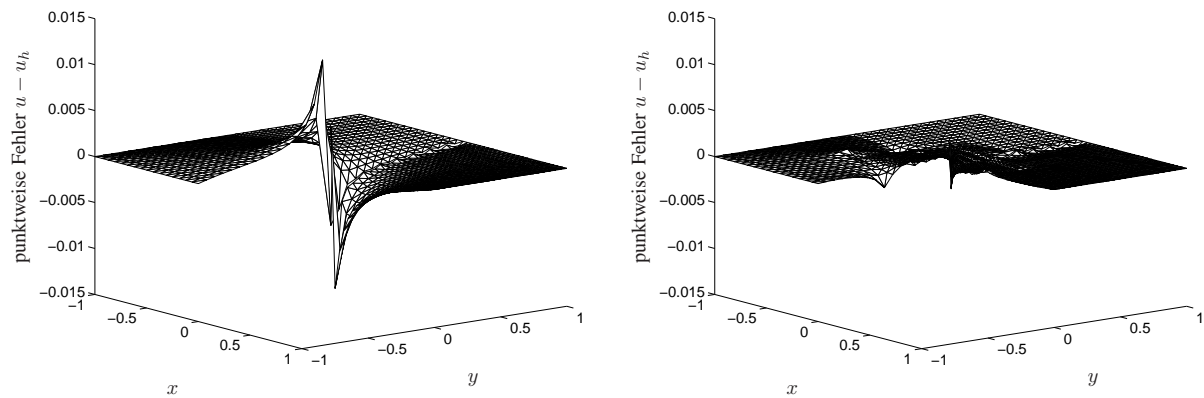


Abbildung 2.12: Punktweise Fehler auf Netzen vom Level  $h_3$  (links ohne und rechts mit Graduierung) ( $\gamma = 10$ ,  $\alpha_2 = 1$ ,  $\mathcal{E}_h = \mathcal{E}_h^2$ )

## 2.5.2 Dirichlet-Dirichlet-Randbedingungen über polygonalem Gebiet

Für die folgenden numerischen Untersuchungen wird die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f & \text{in } \Omega \\ u &= 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \quad (2.67)$$

über dem nichtkonvexen polygonalen Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  (siehe Abbildung 2.13) mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen betrachtet. Dabei sei die rechte Seite  $f \in L_2(\Omega)$  so gewählt, dass für die exakte Lösung  $u$  der Aufgabe (2.67)

$$u = r^\lambda \sin(\lambda\varphi) (y - y_{12}) (y_{23} - y) (y - y_{34}) (y - y_{45}) C_{\max}$$

gilt, wobei  $(r, \varphi)$  die Polarkoordinaten an dem Punkt  $P_0 = (x_0, y_0)$  sind, und  $\lambda = \frac{\pi}{\omega} \approx 0.760332$  der Singularitätsexponent ist. Die Abkürzung  $y_{ij}(x) = \frac{(y_j - y_i)}{(x_j - x_i)}(x - x_i) + y_i$  für  $i = 1, \dots, 4$  und  $j = i + 1$  beschreibt die Randabschnitte zwischen den Punkten  $P_i = (x_i, y_i)$  und  $P_j = (x_j, y_j)$ , und die Konstante  $C_{\max} = \frac{1}{4075}$  skaliert die Lösung  $u$ , so dass das Maximum von  $u$  ungefähr bei 1 liegt.

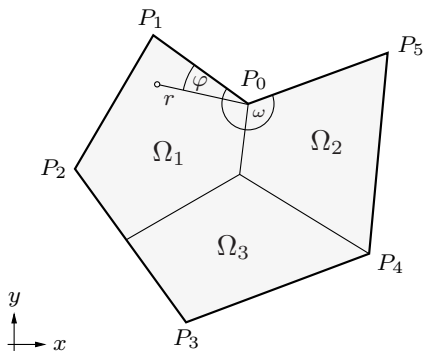


Abbildung 2.13: Berechnungsgebiet

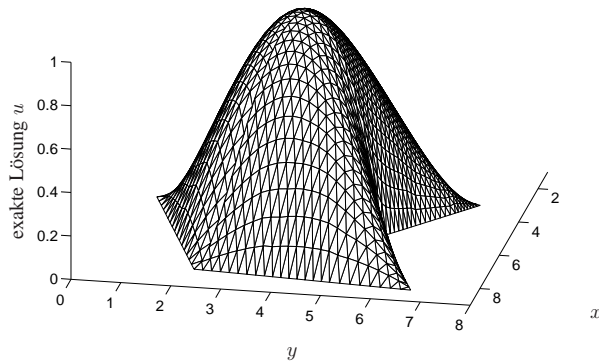


Abbildung 2.14: Lösung  $u$  auf  $h_3$ -Netz

Das Gebiet  $\Omega$  wird hier in drei Teilgebiet  $\Omega_1, \Omega_2$  und  $\Omega_3$  zerlegt, die unabhängig voneinander vernetzt werden, vgl. Abbildung 2.15. Dieses Anfangsnetz wird wie in Abschnitt 2.5.1 beschrieben verfeinert und gegebenenfalls mit  $\mu = 0.7\lambda \approx 0.5322324$  graduiert, vgl. Abbildung 2.16.

In Tabelle 2.4 sind die Fehler  $u - u_h$  in der Norm  $\|\cdot\|_{1,h}$  und in der  $L_2$ -Norm sowie die nach (2.66) berechneten Konvergenzordnungen angegeben. Die in Satz 2.29 und Satz 2.31 gezeigten Konvergenzordnungen werden approximiert. Die Variation der Triangulation  $\mathcal{E}_h$  von  $\Gamma$  und der Parameter  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  in der Bilinearform (2.7) hat auch hier kaum Einfluss auf die Fehler und die Konvergenzgeschwindigkeit.

Die Größe und der Verlauf der Fehler in der  $L_2$ -Norm, der  $L_\infty$ -Norm und in der Norm  $\|\cdot\|_{1,h}$  sind auch in den Grafiken von Abbildung 2.17 für graduierte und nicht graduierte Netze dargestellt. Die Dreiecke verdeutlichen wieder den Anstieg der Fehlerkurven und ermöglichen durch Multiplizieren mit  $-2$  das Ablesen der Konvergenzordnungen bezüglich  $h$ . Damit sind auch hier die erwarteten Konvergenzordnung gut zuerkennen.

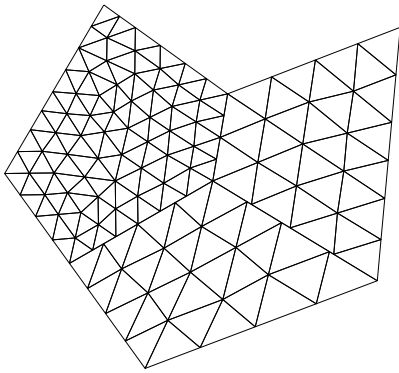


Abbildung 2.15: Anfangsnetz ( $h_0$ -Level)

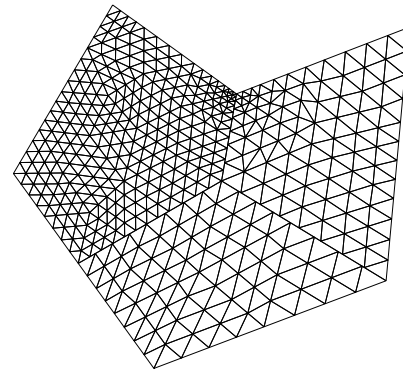


Abbildung 2.16:  $h_1$ -Netz mit Graduierung

In Abbildung 2.18 ist der punktweise Fehler  $u - u_h$  jeweils auf dem  $h_3$ -Level der Netze mit und ohne Graduierung dargestellt. Es wird der Einfluss der Singularität auf den Fehler sowie dessen Verringerung bei Verwendung von graduierten gegenüber quasiuniformen Netzen sichtbar. Der Fehler, der durch die an den Schnittkanten nichtzusammenpassenden Vernetzungen entsteht, ist vernachlässigbar.

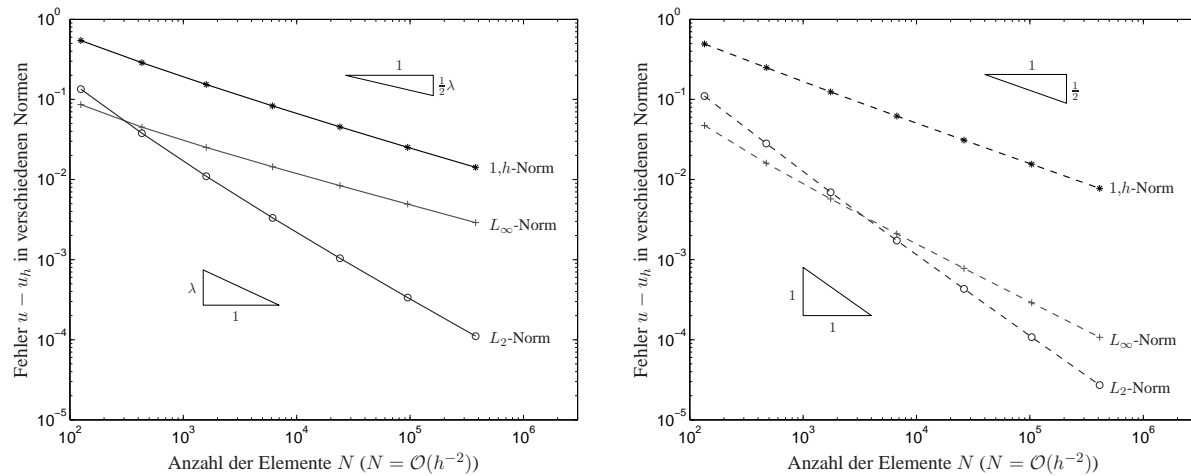


Abbildung 2.17: Fehler in verschiedenen Normen auf Netzen ohne Graduierung (links) und mit Graduierung (rechts) ( $\gamma = 3$ ,  $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ ,  $\mathcal{E}_h = \mathcal{E}_h^\cap$ )

	ohne Graduierung ( $\mu = 1$ )				mit Graduierung ( $\mu < \lambda$ )				
	$\ u - u_h\ _{1,h}$	$\beta$	$\ u - u_h\ _{0,\Omega}$	$\alpha$	$\ u - u_h\ _{1,h}$	$\beta$	$\ u - u_h\ _{0,\Omega}$	$\alpha$	
$\mathcal{E}_h = \mathcal{E}_h^1$	1.571e-01	0.89	1.116e-02	1.73	1.262e-01	1.01	6.957e-03	2.01	
	8.478e-02	0.87	3.372e-03	1.68	6.264e-02	1.01	1.733e-03	2.00	
	4.647e-02	0.85	1.055e-03	1.63	3.117e-02	1.00	4.317e-04	2.00	
	$\alpha_1 = 1$	2.585e-02	0.83	3.403e-04	1.60	1.555e-02	1.00	1.078e-04	1.99
		1.456e-02		1.123e-04		7.765e-03		2.717e-05	
$\mathcal{E}_h = \mathcal{E}_h^\cap$	1.535e-01	0.89	1.099e-02	1.73	1.242e-01	1.00	6.940e-03	2.00	
	8.295e-02	0.87	3.319e-03	1.68	6.206e-02	1.00	1.730e-03	2.00	
	4.546e-02	0.85	1.039e-03	1.63	3.101e-02	1.00	4.313e-04	2.00	
	$\alpha_1 = \frac{1}{2}$	2.525e-02	0.83	3.355e-04	1.60	1.551e-02	1.00	1.077e-04	1.99
		1.420e-02		1.109e-04		7.754e-03		2.714e-05	
$\mathcal{E}_h = \mathcal{E}_h^2$	1.590e-01	0.89	9.823e-03	1.77	1.269e-01	1.01	6.837e-03	1.99	
	8.610e-02	0.86	2.876e-03	1.73	6.286e-02	1.01	1.717e-03	2.00	
	4.733e-02	0.84	8.695e-04	1.68	3.123e-02	1.00	4.295e-04	2.00	
	$\alpha_1 = 0$	2.639e-02	0.83	2.714e-04	1.64	1.557e-02	1.00	1.075e-04	1.99
		1.489e-02		8.710e-05		7.771e-03		2.711e-05	
theoretisch		0.76		1.52		1.00		2.00	

Tabelle 2.4: Beobachtete Fehler in der Norm  $\| \cdot \|_{1,h}$  und der  $L_2$ -Norm jeweils von Level  $h_3$  bis  $h_7$  und die sich zwischen den Levels ergebenden Konvergenzordnungen ( $\gamma = 3$ )

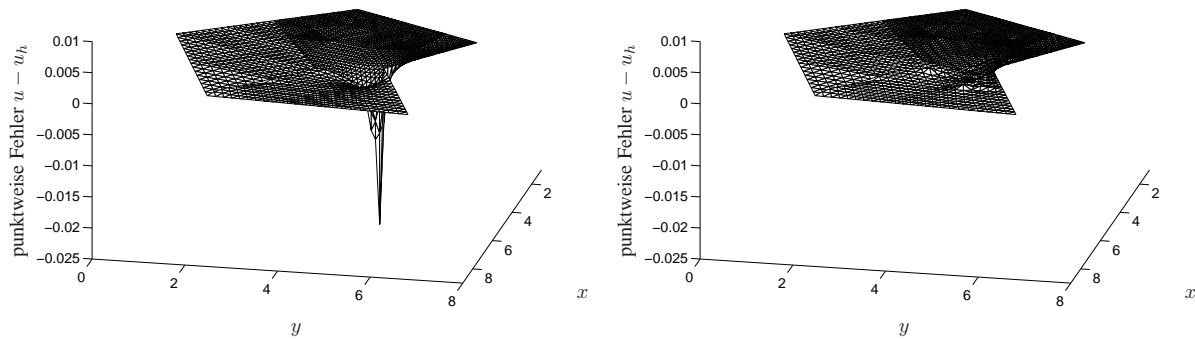


Abbildung 2.18: Punktweise Fehler auf Netzen vom Level  $h_3$  (links ohne und rechts mit Graduierung) ( $\gamma = 3, \alpha_1 = \frac{1}{2}, \mathcal{E}_h = \mathcal{E}_h^\cap$ )

### 2.5.3 Dirichlet-Neumann-Randbedingungen über Rechteck

Für die folgenden numerischen Untersuchungen wird die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \text{ in } \Omega, \\ u &= 0 \text{ auf } \Gamma_D, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= g \text{ auf } \Gamma_N, \end{aligned} \tag{2.68}$$

über dem Gebiet  $\Omega := (-a, a) \times (0, b) \subset \mathbb{R}^2$  mit Neumannrandbedingungen auf  $\Gamma_N := \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \in (-a, 0)\}$  und homogenen Dirichletrandbedingungen auf dem übrigen Rand, also auf  $\Gamma_D := \partial\Omega \setminus \Gamma_N$ , betrachtet. Dabei seien die rechte Seite  $f$  und die Randdaten  $g$  so gewählt, dass für die exakte Lösung  $u$  der Aufgabe (2.68)

$$u = 4(x^2 - a^2)(y - b)r^\lambda \sin(\lambda\varphi)$$

gilt, wobei  $(r, \varphi)$  die Polarkoordinaten an dem singulären Punkt  $P = (0, 0)$  sind und  $\lambda = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{1}{2}$  gilt (vgl. Abbildung 2.19). Die Lösung  $u$ , in Abbildung 2.20 dargestellt, hat am Punkt  $P = (0, 0)$  eine Singularität vom Grad  $\lambda = \frac{1}{2}$ , es gilt somit  $u \in H^{\frac{3}{2}-\delta}(\Omega)$  mit  $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ .

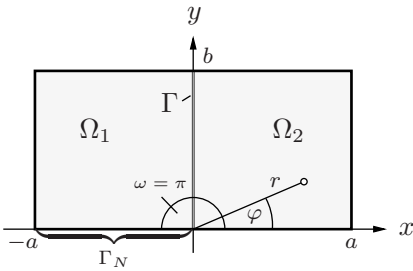


Abbildung 2.19: Berechnungsgebiet

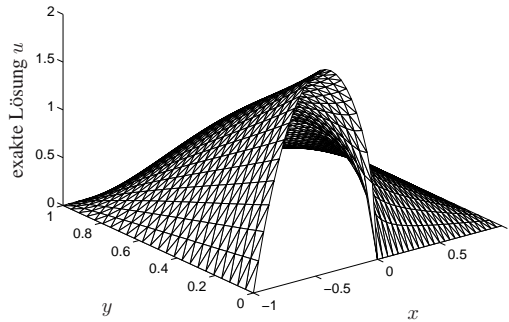


Abbildung 2.20: Lösung auf nichtgraduiertem  $h_3$ -Netz

Für das Nitsche-Mortaring wird das Gebiet  $\Omega$  mit  $a = b = 1$  in zwei Teilgebiete  $\Omega_1 := (-a, 0) \times (0, b)$  und  $\Omega_2 := (0, a) \times (0, b)$  zerlegt, die unabhängig voneinander vernetzt werden, so dass ein Anfangsnetz mit dem Diskretisierungsparameter  $h_0$  wie in Abbildung 2.21 dargestellt entsteht, dessen Knoten auf der Schnittkante  $\Gamma$  nicht zusammenpassen. Die Verfeinerung erfolgt wieder durch Viertelung der Dreiecke und gegebenenfalls graduell mit  $\mu = 0.9\lambda = 0.45$ , so dass wie in Abschnitt 2.4.2 beschriebene Netze entstehen, vgl. Abbildung 2.22.

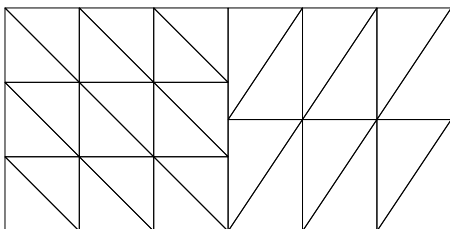


Abbildung 2.21: Anfangsnetz ( $h_0$ -Level)

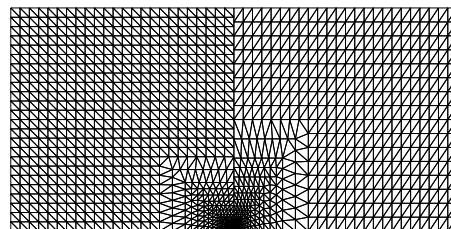


Abbildung 2.22:  $h_3$ -Netz mit Graduierung

In Abbildung 2.23 ist der Fehler  $u - u_h$  in der Norm  $\|\cdot\|_{1,h}$  sowie auch in der  $L_2$ - und  $L_\infty$ -Norm über der Anzahl der Dreieckselemente  $T \in \mathcal{T}_h$  für graduierte und nicht graduierte Netze abgetragen. Bei nicht graduierten Netzen ( $\mu = 1$ ) erkennt man, dass die in Satz 2.29 und Satz 2.31 bewiesenen Konvergenzordnungen für die Norm  $\|\cdot\|_{1,h}$  und die  $L_2$ -Norm erreicht werden, also ungefähr  $\lambda = 0.5$  bzw.  $2\lambda = 1$ . Bei Netzen mit Graduierung ( $\mu < \lambda$ ) beträgt die Konvergenzordnung für den Fehler in der Norm  $\|\cdot\|_{1,h}$  ungefähr eins und für den Fehler in der  $L_2$ -Norm ungefähr zwei. Da  $\lambda = \frac{1}{2}$  gilt, erreicht man hier durch Verwendung von graduierten Netzen mit  $\mu < \lambda$  eine Verdopplung der Konvergenzordnungen.

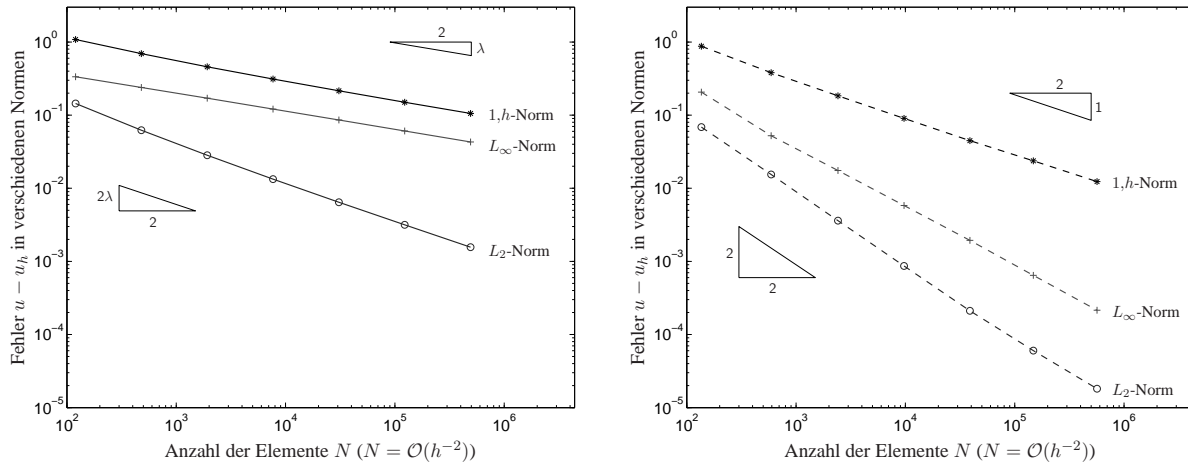


Abbildung 2.23: Fehler in verschiedenen Normen auf Netzen ohne Graduierung (links) und mit Graduierung (rechts) ( $\gamma = 7, \alpha_1 = 1, \mathcal{E}_h = \mathcal{E}_h^1$ )

In Abbildung 2.24 ist der Fehler  $u - u_h$  jeweils für  $h = h_3$  auf Netzen mit und ohne Graduierung dargestellt. Wie zu erwarten ist, ist wieder der starke Einfluss der Singularität auf den Fehler sowie die dessen Verringerung bei Verwendung von graduierten Netzen zu erkennen. Der Fehler, der durch das Verwenden von nichtzusammenpassenden Netzen  $\mathcal{T}_h^1, \mathcal{T}_h^2$  an der Schnittkante  $\Gamma$  entsteht, ist gegenüber dem Fehler, der aus der Singularität herrührt, wieder vernachlässigbar klein.

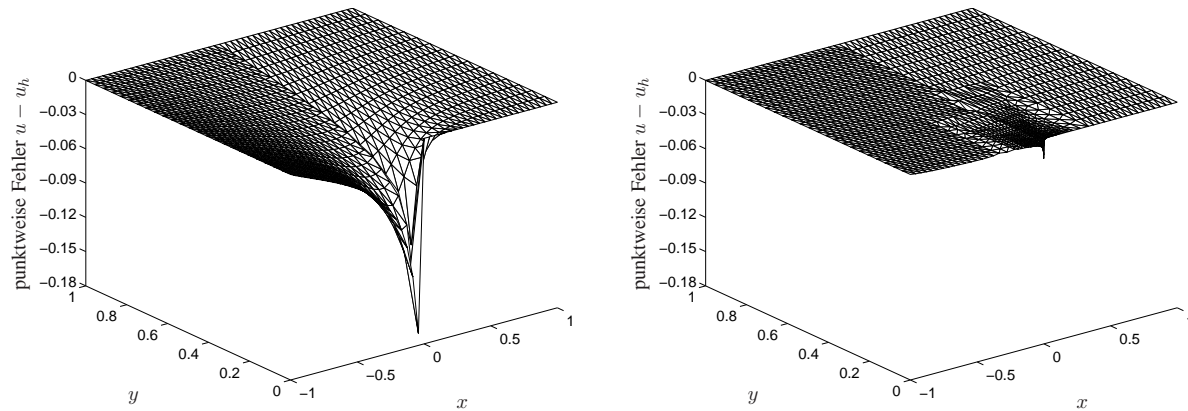


Abbildung 2.24: Punktweise Fehler auf Netzen vom Level  $h_3$  (links ohne und rechts mit Graduierung) ( $\gamma = 7, \alpha_1 = \frac{1}{2}, \mathcal{E}_h = \mathcal{E}_h^\cap$ )

### 3 Singulär gestörtes Reaktions-Diffusions-Problem

In diesem Kapitel wird das Finite-Elemente-Mortaring nach Nitsche für singulär gestörte Reaktions-Diffusions-Probleme mit dem Diffusionsparameter  $\varepsilon \ll 1$  über polygonalen Gebieten betrachtet. Die Lösungen weisen dabei im Allgemeinen Eckensingularitäten und anisotropes Verhalten in Randschichten auf. Die dadurch entstehende Verschlechterung des Konvergenzverhaltens wird durch Verwendung von lokal graduierten sowie anisotropen Netzen kompensiert. Die generische Konstante  $c$  soll hier zusätzlich zu  $h$  auch von  $\varepsilon$  unabhängig sein.

Für quadratische Gebiete wurden solche Probleme (ohne Eckensingularitäten) schon in [40] behandelt, insbesondere die Untersuchungen zum Nitsche-Mortaring sind darin schon angegeben. Allgemeine Betrachtungen zu singulär gestörten Reaktions-Diffusions-Problemen (ohne Mortaring), unter anderem zum analytischen Lösungsverhalten, wurden in [1, 3, 34, 44, 52] durchgeführt. Andere singulär gestörte Probleme werden zum Beispiel in [25, 57, 62] untersucht und in [41, 58, 66] in Zusammenhang mit Gebietszerlegungsmethoden gebracht.

#### 3.1 Aufgabenstellung und Methode des Nitsche-Mortarings

Als Modellaufgabe wird das Reaktions-Diffusions-Problem mit homogenen Dirichletrandbedingungen betrachtet, also

$$\begin{aligned} -\varepsilon^2 \Delta u + au &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{3.1}$$

wobei  $\Omega$  ein beschränktes, polygonales Gebiet im  $\mathbb{R}^2$  mit dem Rand  $\partial\Omega$  und  $\varepsilon \in (0, 1]$  der Diffusionsparameter ist (Diffusionskoeffizient  $\varepsilon^2$ ). Weiterhin sei  $f \in L_2(\Omega)$  und  $a \in L_\infty(\Omega)$  sowie  $0 < a_0 \leq a$  mit einer Konstanten  $a_0$ . Im Fall  $\varepsilon \ll 1$  erhält man ein singulär gestörtes Problem. In der Lösung  $u$  von Aufgabe (3.1) treten dann im Allgemeinen Randschichten auf.

Mit der in Abschnitt 2.2 eingeführten Gebietszerlegung von  $\Omega$  in zwei disjunkte, polygonale Teilgebiete  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  mit dem gemeinsamen Rand  $\Gamma$  (vgl. Abbildung 2.2) kann eine zu Problem (3.1) äquivalente Aufgabe über den einzelnen Teilgebieten formuliert werden, wobei an der Schnittfläche Kompatibilitätsbedingungen beachtet werden müssen (vgl. [19]). Gesucht ist  $u = (u^1, u^2)$ , so dass

$$\begin{aligned} -\varepsilon^2 \Delta u^\ell + au^\ell &= f \quad \text{in } \Omega_\ell, & \ell &= 1, 2, \\ u^\ell &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega_\ell \cap \partial\Omega, & \ell &= 1, 2, \\ u^1 &= u^2 \quad \text{auf } \Gamma, \\ \varepsilon^2 \frac{\partial u^1}{\partial n_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial u^2}{\partial n_2} &= 0 \quad \text{auf } \Gamma \end{aligned} \tag{3.2}$$



gilt. Dabei bezeichnen  $u^\ell := u|_{\Omega_\ell}$  und  $n_\ell$  die äußere Normale an den Rand  $\partial\Omega_\ell$  von  $\Omega_\ell$  für  $\ell = 1, 2$ .

Auch hier werden die einzelnen Teilgebiete unabhängig voneinander durch Dreiecke  $T$  ( $T = \overline{T}$ ) vernetzt, wobei aber im Gegensatz zu Kapitel 2 sogenannte anisotrope Dreiecke zugelassen werden (siehe z. B. [1] oder Abschnitt 3.3.2). Die Teilgebietstriangulationen sollen folgende Annahme erfüllen.

**Annahme 3.1.** Für die Triangulation  $\mathcal{T}_h^\ell$  ( $\ell = 1, 2$ ) sei  $\overline{\Omega}_\ell = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h^\ell} T$ , und für alle Elemente  $T, T' \in \mathcal{T}_h^\ell$  und  $T \neq T'$  ist der Durchschnitt  $T \cap T'$  entweder leer, ein gemeinsamer Punkt oder eine gemeinsame Kante.

**Bemerkung 3.2.** Im Gegensatz zu Annahme 2.5 wird hier auf die Gestaltsregularität verzichtet, insbesondere muss das Verhältnis vom Durchmesser  $h_T$  und Inkreisradius  $\varrho_T$  des Elementes  $T$  nicht gleichmäßig bezüglich  $\varepsilon$  beschränkt sein. Damit sind auch anisotrope Dreiecke zugelassen, bei denen

$$h_T \leq k(\varepsilon)\varrho_T$$

mit einer von  $\varepsilon$  abhängigen Konstanten  $k(\varepsilon)$  gilt. Das hat zur Folge, dass die Längen der Seiten eines Dreiecks nicht mit von  $\varepsilon$  unabhängigen Konstanten äquivalent sind.

Mit den in Abschnitt 2.2 eingeführten Finite-Elemente-Räumen  $V_h := V_h^1 \times V_h^2$  (siehe (2.4)), den Zerlegungen  $\mathcal{E}_h, \mathcal{E}_h^1$  und  $\mathcal{E}_h^2$  von  $\Gamma$  in Intervalle  $E$  ( $E = \overline{E}$ ) (siehe (2.8)), der hinreichend großen positiven Konstanten  $\gamma$  und Parametern  $\alpha_1, \alpha_2$  mit der Bedingung (2.5) wird über die folgende Variationsformulierung eine Finite-Elemente-Näherungslösung  $u_h$  definiert.

Gesucht ist  $(u_h^1, u_h^2) = u_h \in V_h = V_h^1 \times V_h^2$ , so dass

$$\mathcal{B}_h(u_h, v_h) = \mathcal{F}_h(v_h) \quad \forall v_h \in V_h \quad (3.3)$$

gilt. Dabei seien die Bilinearform  $\mathcal{B}_h(\cdot, \cdot)$  und die Linearform  $\mathcal{F}_h(\cdot)$  der rechten Seite wie folgt definiert

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_h(u_h, v_h) := & \sum_{\ell=1}^2 \left( \varepsilon^2 (\nabla u_h^\ell, \nabla v_h^\ell)_{\Omega_\ell} + (au_h^\ell, v_h^\ell)_{\Omega_\ell} \right) - \left\langle \alpha_1 \varepsilon^2 \frac{\partial u_h^1}{\partial n_1} - \alpha_2 \varepsilon^2 \frac{\partial u_h^2}{\partial n_2}, v_h^1 - v_h^2 \right\rangle_\Gamma \\ & - \left\langle \alpha_1 \varepsilon^2 \frac{\partial v_h^1}{\partial n_1} - \alpha_2 \varepsilon^2 \frac{\partial v_h^2}{\partial n_2}, u_h^1 - u_h^2 \right\rangle_\Gamma + \varepsilon^2 \gamma \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} (u_h^1 - u_h^2, v_h^1 - v_h^2)_E \end{aligned} \quad (3.4)$$

und

$$\mathcal{F}_h(v_h) := \sum_{\ell=1}^2 (f, v_h^\ell)_{\Omega_\ell},$$

wobei  $(\cdot, \cdot)_X$  das  $L_2$ -Skalarprodukt für  $X = \{\Omega_\ell, E\}$  und  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$  die Dualform auf  $H_*^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  bezeichnet.

Auch hier sorgen die ersten beiden Terme der Bilinearform für die Konsistenz der Variationsformulierung und der letzte für die  $V_h$ -Elliptizität, siehe Abschnitt 3.2. Der dritte Term dient der Symmetrisierung der Bilinearform.

**Bemerkung 3.3.** Die Bilinearform (3.4) unterscheidet sich von der Bilinearform (2.7) in Kapitel 2 sowie denen in [64, 10, 38, 55] im ersten Summanden durch den Faktor  $\varepsilon^2$  und der vom Reaktionsterm stammenden  $L_2$ -Norm  $(au_h^\ell, v_h^\ell)_{\Omega_\ell}$ , im zweiten und dritten Summanden wird die Konormalenableitung verwendet, und mit Rücksicht auf kleine Werte  $\varepsilon$  wird im vierten Term zusätzlich der Faktor  $\varepsilon^2$  eingeführt. Damit kann  $\gamma$  unabhängig von  $\varepsilon$  gewählt werden, Genaueres siehe Satz 3.13.

Bei der Wahl der Triangulationen  $\mathcal{T}_h^1, \mathcal{T}_h^2$  und  $\mathcal{E}_h$  soll die folgende Annahme erfüllt werden.

**Annahme 3.4.** Die Triangulationen  $\mathcal{T}_h^1, \mathcal{T}_h^2$  erfüllen die Annahme 3.1 und auch für  $\mathcal{E}_h$  gelten entsprechende Bedingungen. Weiter seien die nächsten beiden Punkte erfüllt.

- (i) Die Triangulationen  $\mathcal{T}_h^1, \mathcal{T}_h^2$  und  $\mathcal{E}_h$  erfüllen Punkt (i) bzw. (ii) von Annahme 2.7, wobei die Konstanten  $C_1, C_2$  zusätzlich zu  $h \in (0, h_0]$  auch von  $\varepsilon \in (0, 1)$  unabhängig sind.
- (ii) Sei  $h_F^\perp$  die Höhe des Dreiecks  $T_F \in \mathcal{T}_h^\ell$  über der Dreiecksseite  $F \in \mathcal{E}_h^\ell$ . Dann existiert für  $\ell = 1, 2$  mit  $\alpha_\ell \neq 0$ , also  $0 < \alpha_\ell \leq 1$ , eine von  $h \in (0, h_0]$  und  $\varepsilon \in (0, 1)$  unabhängige Konstante  $C_3$ , so dass

$$\frac{h_F}{h_F^\perp} \leq C_3 \quad \forall F \in \mathcal{E}_h^\ell.$$

**Bemerkung 3.5.** Der Punkt (ii) von Annahme 3.4 wird für die Stabilität der Methode benötigt und schränkt die Orientierung der anisotropen Dreiecke, die  $\Gamma$  berühren, im Fall  $\alpha_\ell \neq 0$  ein. Dreiecke  $T_F$  mit einer Seite  $F \in \mathcal{E}_h^\ell$  dürfen für  $\alpha_\ell \neq 0$  nur mit ihrer „kurzen Seite“ an der Schnittkante  $\Gamma$  liegen.

**Bemerkung 3.6.** Da bei  $\varepsilon$ -abhängigen anisotropen Triangulationen auch die Konstanten  $C_1$  und  $C_2$  aus Annahme 3.4 im Allgemeinen von  $\varepsilon$  abhängen, schränkt Punkt (i) der Annahme 3.4 die Wahl von  $\mathcal{E}_h$  und  $\alpha_1, \alpha_2$  ein. So sind zum Beispiel bei einer Vernetzung wie in Abbildung 3.1 angedeutet nur im Fall  $\mathcal{E}_h = \mathcal{E}_h^1$  mit  $\alpha_1 = 1$  die Konstanten von  $\varepsilon$  unabhängig. In diesem Fall (insbesondere für  $\alpha_2 = 0$ ) ist auch der Punkt (ii) der Annahme 3.4 erfüllt, da die Beschränkung des Höhenquotienten  $\frac{h_F}{h_F^\perp}$  nur für Dreiecke aus  $\mathcal{T}_h^1$  ( $F \in \mathcal{E}_h^1$ ) benötigt wird und diese hier isotrop sind.

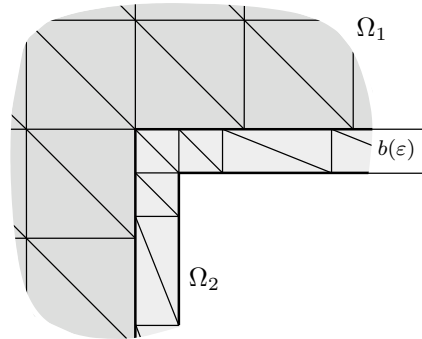


Abbildung 3.1: Ausschnitt einer Triangulation  $\mathcal{T}_h$  mit anisotropen Dreiecken in  $\Omega_2$  und der Randschichtdicke  $b(\varepsilon)$ , zum Beispiel  $b = 2\varepsilon |\ln \varepsilon|$

## 3.2 Eigenschaften der Nitsche-Diskretisierung

In diesen Abschnitt werden die Konsistenz der Variationsformulierung, die  $\mathcal{B}_h$ -Orthogonalität des Fehlers, die  $V_h$ -Elliptizität und -Beschränktheit der Bilinearform sowie einige Hilfsabschätzungen gezeigt.

**Satz 3.7 (Konsistenz).** Sei  $u = (u^1, u^2)$  die Lösung der Aufgabe (3.2) mit  $u^\ell \in H^1(\Omega_\ell)$  und  $\Delta u^\ell \in L_2(\Omega_\ell)$ . Dann erfüllt  $u$  auch die diskrete Variationsformulierung (3.3). Es gilt also

$$\mathcal{B}_h(u, v_h) = \mathcal{F}_h(v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \quad (3.5)$$

*Beweis.* Analog zum Beweis von Satz 2.9 erhält man für die Bilinearform (3.4) mit der exakten Lösung  $u$  der Aufgabe (3.2) und den Beziehungen  $u^1|_\Gamma = u^2|_\Gamma$ ,  $\varepsilon^2 \frac{\partial u^1}{\partial n_1}|_\Gamma = -\varepsilon^2 \frac{\partial u^2}{\partial n_2}|_\Gamma$  sowie  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$

$$\mathcal{B}_h(u, v_h) = \sum_{\ell=1}^2 \left( \varepsilon^2 (\nabla u^\ell, \nabla v_h^\ell)_{\Omega_\ell} + (au^\ell, v_h^\ell)_{\Omega_\ell} - \varepsilon^2 \left\langle \frac{\partial u^\ell}{\partial n_\ell}, v_h^\ell \right\rangle_\Gamma \right).$$

Mit der Greenschen Formel (siehe [24, Lemma 1.1]), den homogenen Dirichlet-Randbedingungen und  $-\varepsilon^2 \Delta u^\ell + au^\ell = f$  für  $\ell = 1, 2$  erhält man schließlich

$$\mathcal{B}_h(u, v_h) = \sum_{\ell=1}^2 \left( -\varepsilon^2 (\Delta u^\ell, v_h^\ell)_{\Omega_\ell} + (au^\ell, v_h^\ell)_{\Omega_\ell} \right) = \sum_{\ell=1}^2 (f, v_h^\ell)_{\Omega_\ell} = \mathcal{F}_h(v_h) \quad \forall v_h \in V_h.$$

□

**Bemerkung 3.8.** Aus der Variationsformulierung (3.3) und der Konsistenz (3.5) ergibt sich die  $\mathcal{B}_h$ -Orthogonalität des Fehlers  $u - u_h$  auf  $V_h$ , das heißt

$$\mathcal{B}_h(u - u_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h.$$

Auch hier wird wieder eine Abschätzung von  $\sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E \left\| \alpha_1 \varepsilon^2 \frac{\partial v_h^1}{\partial n_1} - \alpha_2 \varepsilon^2 \frac{\partial v_h^2}{\partial n_2} \right\|_{0,E}^2$  für  $v_h \in V_h$  bei späteren Untersuchungen der gleichmäßige  $V_h$ -Elliptizität und der Konvergenz benötigt. Dafür werden einige Hilfssätze formuliert. Da in den Beweisen von Lemma 2.11, 2.12 und 2.13 die Gestaltsregularität der Dreiecke  $T \in \mathcal{T}_h$  ( $h_T \leq c_{\rho T}$ , siehe Annahme 2.5) nicht benutzt wird, gelten sie auch völlig analog für anisotrope Dreiecke mit von  $h$  und  $\varepsilon$  unabhängigen Konstanten. Es gelten also die folgenden Lemmata 3.9, 3.10 und 3.11.

**Lemma 3.9.** Sei  $T \in \mathcal{T}_h$  ein Dreieck,  $F$  eine Seite von  $T$  und  $h_F^\perp$  die Höhe des Dreiecks  $T$  über der Seite  $F$ . Für Funktionen  $v_h \in V_h$  ( $v_h \in \mathbb{P}_k(T)$ ) und  $T \in \mathcal{T}_h$  gilt die Abschätzung

$$\|v_h\|_{0,F}^2 \leq c_{SI} \frac{1}{h_F^\perp} \|v_h\|_{0,T}^2,$$

wobei  $c_{SI}$  eine von  $\varepsilon \in (0, 1)$  und  $h \in (0, h_0]$  unabhängige Konstante ist.

**Lemma 3.10.** Für die von  $h$  und  $\varepsilon$  unabhängigen Konstanten  $C_1$  und  $C_2$  seien die Ungleichungen  $C_1 h_F \leq h_E$  und  $h_E \leq C_2 h_F$  für alle  $E \in \mathcal{E}_h$  und  $F \in \mathcal{E}_h^\ell$  mit  $\overset{\circ}{E} \cap \overset{\circ}{F} \neq \emptyset$  erfüllt. Dann gelten für  $v^\ell \in L_2(\Gamma)$  mit  $\ell = 1, 2$  die Beziehungen

$$\begin{aligned} \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|v^\ell\|_{0,E}^2 &\leq C_1^{-1} \sum_{F \in \mathcal{E}_h^\ell} h_F^{-1} \|v^\ell\|_{0,F}^2 && \text{für } C_1 h_F \leq h_E, \\ \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E \|v^\ell\|_{0,E}^2 &\leq C_2 \sum_{F \in \mathcal{E}_h^\ell} h_F \|v^\ell\|_{0,F}^2 && \text{für } h_E \leq C_2 h_F. \end{aligned}$$

**Lemma 3.11.** Es existiere eine positive, von  $h$  und  $\varepsilon$  unabhängige Konstante  $C_2$ , so dass die Beziehung  $h_E \leq C_2 h_F$  für alle  $E \in \mathcal{E}_h$  und  $F \in \mathcal{E}_h^\ell$  mit  $\overset{\circ}{E} \cap \overset{\circ}{F} \neq \emptyset$  erfüllt ist. Dann gilt für  $v_h^\ell \in V_h^\ell$  und  $\ell = 1, 2$  die Abschätzung

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E \left\| \frac{\partial v_h^\ell}{\partial n_\ell} \right\|_{0,E}^2 \leq C_2 c_{SI} \sum_{F \in \mathcal{E}_h^\ell} \frac{h_F}{h_F^\perp} \|\nabla v_h^\ell\|_{0,T_F}^2,$$

### 3 Singulär gestörtes Reaktions-Diffusions-Problem

wobei  $h_F^\perp$  die Höhe des Dreiecks  $T_F$  über der Seite  $F$  ist und  $c_{SI}$  die von  $h \in (0, h_0]$  und  $\varepsilon \in (0, 1)$  unabhängige Konstante aus Lemma 3.9.

**Lemma 3.12.** *Unter der Annahme 3.4 gilt für  $v_h \in V_h$  die Abschätzung*

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E \left\| \alpha_1 \varepsilon^2 \frac{\partial v_h^1}{\partial n_1} - \alpha_2 \varepsilon^2 \frac{\partial v_h^2}{\partial n_2} \right\|_{0,E}^2 \leq \sum_{\ell=1}^2 C_I^\ell \varepsilon^4 \|\nabla v_h^\ell\|_{0,\Omega_\ell}^2 \leq C_I \sum_{\ell=1}^2 \varepsilon^4 \|\nabla v_h^\ell\|_{0,\Omega_\ell}^2,$$

wobei  $C_I^\ell = C_2 C_3 c_{SI} c_\alpha^\ell$  und  $C_I = \max_{\ell=1,2} (C_I^\ell)$  positive, von  $h$  und  $\varepsilon$  unabhängige Konstanten sind. Dabei sind  $C_2, C_3$  die Konstanten von Annahme 3.4,  $c_{SI}$  von Lemma 3.9 sowie  $c_\alpha^\ell = 2\alpha_\ell^2$  für  $\alpha_\ell \in (0, 1)$  und  $c_\alpha^\ell = \alpha_\ell^2$  sonst.

*Beweis.* Für den Fall  $\alpha_\ell \in (0, 1)$  für  $\ell = 1, 2$  folgt die Abschätzung

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E \left\| \alpha_1 \varepsilon^2 \frac{\partial v_h^1}{\partial n_1} - \alpha_2 \varepsilon^2 \frac{\partial v_h^2}{\partial n_2} \right\|_{0,E}^2 \leq \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E \sum_{\ell=1}^2 c_\alpha^\ell \varepsilon^4 \left\| \frac{\partial v_h^\ell}{\partial n_\ell} \right\|_{0,E}^2,$$

aus der Dreiecksungleichung und der Ungleichung vom arithmetischen und quadratischen Mittel. Für  $\alpha_\ell = 1$  und entsprechend  $\alpha_{3-\ell} = 0$  gilt in obiger Beziehung die Gleichheit. Durch Anwenden von Lemma 3.11 für das jeweilige  $\ell$  sowie durch Hinzunahme der übrigen Dreieckselemente aus  $\mathcal{T}_h^1$  und  $\mathcal{T}_h^2$  erhält man

$$\begin{aligned} \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E \left\| \alpha_1 \varepsilon^2 \frac{\partial v_h^1}{\partial n_1} - \alpha_2 \varepsilon^2 \frac{\partial v_h^2}{\partial n_2} \right\|_{0,E}^2 &\leq \sum_{\ell=1}^2 c_\alpha^\ell c_{SI} C_2 \sum_{F \in \mathcal{E}_h^\ell} \frac{h_F}{h_F^\perp} \varepsilon^4 \|\nabla v_h^\ell\|_{0,T_F}^2 \\ &\leq \sum_{\ell=1}^2 C_I^\ell \sum_{F \in \mathcal{E}_h^\ell} \varepsilon^4 \|\nabla v_h^\ell\|_{0,T_F}^2 \\ &\leq \sum_{\ell=1}^2 C_I^\ell \varepsilon^4 \|\nabla v_h^\ell\|_{0,\Omega_\ell}^2 \leq C_I \sum_{\ell=1}^2 \varepsilon^4 \|\nabla v_h^\ell\|_{0,\Omega_\ell}^2. \end{aligned}$$

und somit die zu beweisende Ungleichung.  $\square$

Für die weiteren Betrachtungen wird eine von  $\varepsilon$  und  $h$  abhängige Norm eingeführt. Diese wird wieder mit  $\|\cdot\|_{1,h}$  bezeichnet und enthält neben der „gebrochenen“ Energienorm des Problems noch den gewichteten Sprung in der  $L_2$ -Norm über der Schnittkante  $\Gamma$ . Für  $v_h \in V_h$  ist die Norm  $\|\cdot\|_{1,h}$  definiert als

$$\|v_h\|_{1,h}^2 := \sum_{\ell=1}^2 \left( \varepsilon^2 \|\nabla v_h^\ell\|_{0,\Omega_\ell}^2 + \|\sqrt{a} v_h^\ell\|_{0,\Omega_\ell}^2 \right) + \varepsilon^2 \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|v_h^1 - v_h^2\|_{0,E}^2. \quad (3.6)$$

Gegenüber den bisherigen Betrachtungen bei nicht singulär gestörten Problemen (vgl. Kapitel 2 mit der Normdefinition (2.15)) enthält die Norm hier den aus dem Reaktionsterm stammenden Anteil  $\|\sqrt{a} v_h^\ell\|_{0,\Omega_\ell}^2$  sowie einen Faktor  $\varepsilon^2$  vor dem Normquadrat des Gradienten und des Sprunges an der Schnittkante.

**Satz 3.13** ( $V_h$ -Elliptizität). *Sei Annahme 3.4 erfüllt und  $\gamma > C_I$  für die Konstante  $C_I$  aus Lemma 3.12. Dann gilt die Beziehung*

$$\mathcal{B}_h(v_h, v_h) \geq \mu_1 \|v_h\|_{1,h}^2 \quad \forall v_h \in V_h$$

mit einer positiven, von  $h$  und  $\varepsilon$  unabhängigen Konstanten  $\mu_1$ .

*Beweis.* Ausgangspunkt ist die Bilinearform (3.4) mit  $v_h$  anstelle  $u_h$ . Wegen  $v_h \in V_h$  gilt  $\frac{\partial v_h^\ell}{\partial n_\ell} \in L_2(\Gamma)$  und  $v_h^\ell \in L_2(\Gamma)$  für  $\ell = 1, 2$ . Somit kann die Dualform wie ein  $L_2$ -Skalarprodukt behandelt werden, insbesondere gilt die Zerlegung  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma = \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \langle \cdot, \cdot \rangle_E$  und die Cauchy-Schwarz-Ungleichung  $|\langle \cdot, \cdot \rangle_E| \leq \|\cdot\|_{0,E} \|\cdot\|_{0,E}$ . Damit erhält man

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_h(v_h, v_h) &\geq \sum_{\ell=1}^2 \left( \varepsilon^2 \|\nabla v_h^\ell\|_{0,\Omega_\ell}^2 + \|\sqrt{a} v_h^\ell\|_{0,\Omega_\ell}^2 \right) + \varepsilon^2 \gamma \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|v_h^1 - v_h^2\|_{0,E}^2 \\ &\quad - 2 \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \left\| \alpha_1 \varepsilon^2 \frac{\partial v_h^1}{\partial n_1} - \alpha_2 \varepsilon^2 \frac{\partial v_h^2}{\partial n_2} \right\| \|v_h^1 - v_h^2\|_{0,E} \end{aligned}$$

Aus der Ungleichung von Young ( $2ab \leq \frac{a^2}{\epsilon} + \epsilon b^2$  für  $a, b, \epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$ ) mit  $\epsilon = \frac{\zeta \varepsilon^2}{h_E}$  und Lemma 3.12 ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_h(v_h, v_h) &\geq \sum_{\ell=1}^2 \left( \varepsilon^2 \|\nabla v_h^\ell\|_{0,\Omega_\ell}^2 + \|\sqrt{a} \nabla v_h^\ell\|_{0,\Omega_\ell}^2 \right) + \varepsilon^2 \gamma \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|v_h^1 - v_h^2\|_{0,E}^2 \\ &\quad + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \left( -\frac{h_E}{\zeta \varepsilon^2} \left\| \alpha_1 \varepsilon^2 \frac{\partial v_h^1}{\partial n_1} - \alpha_2 \varepsilon^2 \frac{\partial v_h^2}{\partial n_2} \right\|_{0,E}^2 - \frac{\zeta \varepsilon^2}{h_E} \|v_h^1 - v_h^2\|_{0,E}^2 \right) \\ &\geq \sum_{\ell=1}^2 \left( \left( 1 - \frac{C_I}{\zeta} \right) \varepsilon^2 \|\nabla v_h^\ell\|_{0,\Omega_\ell}^2 + \|\sqrt{a} \nabla v_h^\ell\|_{0,\Omega_\ell}^2 \right) \\ &\quad + (\gamma - \zeta) \varepsilon^2 \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|v_h^1 - v_h^2\|_{0,E}^2 \\ &\geq \mu_1 \|v_h\|_{1,h}^2, \end{aligned}$$

mit  $\mu_1 = \min \left\{ 1 - \frac{C_I}{\zeta}, \gamma - \zeta \right\} > 0$ , falls  $\gamma$  gemäß  $\gamma > \zeta > C_I$  gewählt wird.  $\square$

**Satz 3.14** ( $V_h$ -Beschränktheit). *Sei Annahme 3.4 erfüllt. Dann existiert eine positive, von  $h$  und  $\varepsilon$  unabhängige Konstante  $\mu_2$ , so dass die Abschätzung*

$$|\mathcal{B}_h(u_h, v_h)| \leq \mu_2 \|u_h\|_{1,h} \|v_h\|_{1,h} \quad \forall u_h, v_h \in V_h$$

*gilt.*

*Beweis.* Analog zum Beweis von Satz 2.16 erhält man die zu beweisende Ungleichung durch mehrfaches Anwenden der Ungleichung von Cauchy-Schwarz sowie dem Verteilen von Gewichten  $\varepsilon^{-\frac{1}{2}} h_E^{\frac{1}{2}}$  und  $\varepsilon^{\frac{1}{2}} h_E^{-\frac{1}{2}}$  und Anwenden von Lemma 3.12 mit der Konstanten  $\mu_2 = \max \{1 + C_I, 1 + \gamma\}$ .  $\square$

### 3.3 Abschätzung des Fehlers in der Norm $\|\cdot\|_{1,h}$

#### 3.3.1 Lösungsdarstellung

Für das Problem (3.1) mit  $\varepsilon \ll 1$  auf einem polygonalen Gebiet  $\Omega$  treten im Allgemeinen Randschichten und Eckensingularitäten auf. Um diese lokalen Eigenschaften der Lösung besser beschreiben und insbesondere die Triangulation mit isotropen, anisotropen und graduierten Bereichen an das Lösungsverhalten anpassen zu können, wird das Gebiet gemäß [1] in ein inneres Gebiet  $\Omega^i$ , in Randschichtgebiete  $\Omega^{b,j}$  und in Eckengebiete  $\Omega^{c,j}$  aufgeteilt (vgl. Abbildung 3.2). Weiterhin sei  $\Omega^b := \bigcup_{j=1}^J \Omega^{b,j}$  und  $\Omega^c := \bigcup_{j=1}^J \Omega^{c,j}$ . Die Dicke von  $\Omega^{b,j}$  und  $\Omega^{c,j}$  wird durch den von  $\varepsilon$  abhängigen Parameter  $b$  bestimmt.

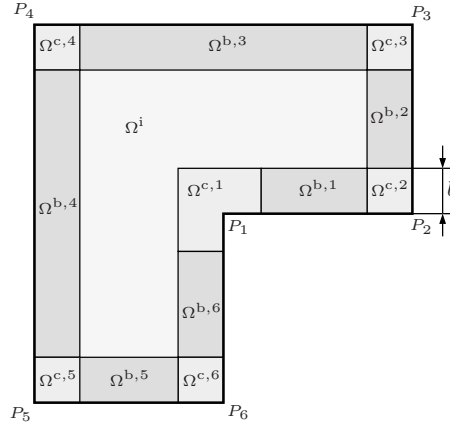


Abbildung 3.2: Gebietsaufteilung zum Beschreiben der exakten Lösung

Für die Beschreibung der Lösungseigenschaften und die Interpolationsfehlerabschätzung werden in den Randschichten  $\Omega^{b,j}$  ( $j = 1, \dots, J$ ) an die jeweilige Randschicht angepasste kartesisches Koordinatensysteme  $(x_1, x_2)$  benutzt. Es sei  $x_1$  jeweils die Koordinatenachse in Tangentialrichtung von  $\partial\Omega$  und  $x_2$  in Normalenrichtung nach innen, so dass  $x_2 := \text{dist}(x, \partial\Omega)$  gilt. Auch die Ableitungen  $D^\beta$  mit dem Multiindex  $\beta = (\beta_1, \beta_2)$  beziehen sich nun auf diese angepassten Koordinaten. In den Gebieten  $\Omega^i$  und  $\Omega^c$  können beliebige kartesische Koordinatensysteme verwendet werden.

Gemäß [1, Assumption 5.1] wird für die exakte Lösung  $u$  von Problem (3.1) mit obigen Vereinbarungen folgende Annahme formuliert.

**Annahme 3.15** ([1, Assumption 5.1]). *Sei  $u$  die Lösung von Aufgabe (3.1) mit ausreichend glatten und kompatiblen Daten  $f$  und  $a$ ,  $0 < a_0 \leq a$  und  $0 < \varepsilon \ll 1$ . Für gegebenes  $k, n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq k + 1$  kann die Lösung  $u$  in einen glatten Anteil  $u_s$ , einen Randschichtanteil  $u_b$ , einen Eckensingularitätsanteil  $u_c$  und einen Rest  $u_r$  zerlegt werden, das heißt  $u = u_s + u_b + u_c + u_r$ . Es existiert eine Konstante  $q > 0$ , so das diese Lösungsanteile für alle  $\beta \in \mathbb{N}^2$  mit  $|\beta| \leq k + 1$  die Abschätzungen*

$$\begin{aligned} |D^\beta u_s| &\leq c && \text{in } \Omega \\ |D^\beta u_b| &\leq c \begin{cases} \varepsilon^{-|\beta_2|} e^{-q \frac{x_2}{\varepsilon}} + \varepsilon^{-|\beta|} e^{-q \frac{x_1}{\varepsilon}} & \text{in } \Omega^b \\ \varepsilon^{-|\beta|} e^{-q \frac{\text{dist}(x, \partial\Omega)}{\varepsilon}} & \text{in } \Omega \setminus \Omega^b \end{cases} \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$|D^\beta u_c| \leq c \begin{cases} \varepsilon^{-\lambda_j} r^{\lambda_j - |\beta|} e^{-q \frac{r}{\varepsilon}} & \text{in } \Omega^{c,j^-} \text{ für } \lambda_j < k + 1 \\ \varepsilon^{-|\alpha|} \left| \ln \frac{r}{\varepsilon} \right| e^{-q \frac{r}{\varepsilon}} & \text{in } \Omega^{c,j^-} \text{ für } \lambda_j = k + 1 \\ 0 & \text{in } \Omega^{c,j^-} \text{ für } \lambda_j > k + 1 \\ 0 & \text{in } \Omega \setminus \Omega^{c^-} \end{cases}$$

$$\|u_r\|_{l,\Omega} \leq c \varepsilon^{n-l} \quad \text{für } l \leq k + 3,$$

erfüllen. Dabei ist  $\lambda_j = \frac{\pi}{\omega_j}$  der Singularitätsexponent an der Ecke  $P_j$  mit dem Innenwinkel  $\omega_j$ , und  $\Omega^{c,j^-} \subset \Omega^{c,j}$  bezeichnet den Kreissektor um die Ecke  $P_j$  mit Radius kleiner als  $\varepsilon$ , also  $\Omega^{c,j^-} := \{x \in \Omega : \text{dist}(x, P_j) < \varepsilon\}$ . Weiterhin ist  $\Omega^{c^-} := \bigcup_{j=1}^J \Omega^{c,j^-}$ .

**Bemerkung 3.16** ([1, Remark 5.5]). Ersetzt man in (3.7)  $\beta_2$  durch  $|\beta|$ , kann Annahme 3.15 bewiesen werden. Die Abschätzungen können dann aus [43, 44] entnommen werden.

Der Einfachheit halber wird im Weiteren angenommen, dass  $\lambda_j \neq 2$  und  $k = 1$  für den Polynomgrad in  $V_h$  gilt, das heißt, es werden stückweise lineare Ansatzfunktionen betrachtet. Weiterhin wird angenommen, dass die Lösung nur an einer Ecke eine Singularität aufweist. Damit kann auf den Index  $j$  bei der Beschreibung des singulären Lösungsanteils verzichtet werden. Für Lösungen mit mehreren Eckensingularitäten müssen die im Folgenden beschriebenen Techniken bezüglich der Netzverfeinerung und Fehlerabschätzung für jede dieser Ecken durchgeführt werden. Dabei hat der kleinste Singularitätsexponent  $\lambda_j$  den entscheidenden Einfluss auf die Ordnung der Fehlerabschätzungen.

Für Lösungen  $u$  der Aufgabe (3.1), die Annahme 3.15 erfüllen, gilt also  $u_s, u_b, u_r \in H^2(\Omega)$ , aber im Allgemeinen nur  $u \in H^{1+\lambda-\epsilon}(\Omega)$  mit  $\epsilon > 0$  beliebig. Nach Annahme 3.15 treten für  $\lambda < 1$  Eckensingularitäten im Bereich  $\omega \in (\pi, 2\pi)$  auf und folglich gilt  $\lambda \in (\frac{1}{2}, 1)$ . Damit erhält man  $u \in H^{\frac{3}{2}+\delta}(\Omega)$  mit hinreichend kleinem  $\delta > 0$ . Diese Glattheit von  $u$  reicht aus, um bei den Fehlerabschätzungen mit gewöhnlichen  $L_2$ -Normen arbeiten zu können. Im Gegensatz zu Kapitel 2 werden also keine gewichteten Normen benötigt.

### 3.3.2 Grundlegende Sätze für anisotrope Dreiecke

Die Lösungen der Aufgabe (3.1) weisen für  $\varepsilon \ll 1$  im Allgemeinen anisotropes Verhalten in Rand-schichten auf. Da sich diese über anisotropen Dreiecken effizienter approximieren lassen als über isotropen, werden in diesem Abschnitt einige Eigenschaften und Sätze für anisotrope Elemente betrachtet. Es werden hier anisotrope Dreiecke wie in [1] beschrieben benutzt.

Bei anisotropen Dreiecken  $T$  sind die Seiten der Dreieck asymptotisch unterschiedlich lang. Es wird daher festgelegt, dass mit  $h_{T,1}$  immer die Länge der längsten Seite und mit  $h_{T,2}$  die Höhe des Dreiecks über dieser längsten Seite bezeichnet wird, siehe Abbildung 3.3. Im Weiteren wird die Multiindex-schreibweise mit  $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ ,  $|\beta| = \beta_1 + \beta_2$  für die verallgemeinerte Ableitung  $D^\beta = \frac{\partial^{\beta_1}}{\partial x_1^{\beta_1}} \frac{\partial^{\beta_2}}{\partial x_2^{\beta_2}}$  sowie für die Längen  $h_T^\beta = h_{T,1}^{\beta_1} h_{T,2}^{\beta_2}$  benutzt.

**Annahme 3.17** ([1, Section 2.2]). *Das Dreieck  $T$  erfülle die nachfolgenden Maximalwinkelbedingung (i) und Koordinatensystembedingung (ii).*

- (i) *Es existiert eine von  $h$ ,  $\varepsilon$  und  $T \in \mathcal{T}_h$  unabhängige Konstante  $\gamma_* < \pi$ , so dass der größte Innenwinkel  $\gamma$  des Dreiecks  $T$  durch  $\gamma_*$  beschränkt werden kann, also  $\gamma \leq \gamma_*$  gilt.*

### 3 Singulär gestörtes Reaktions-Diffusions-Problem

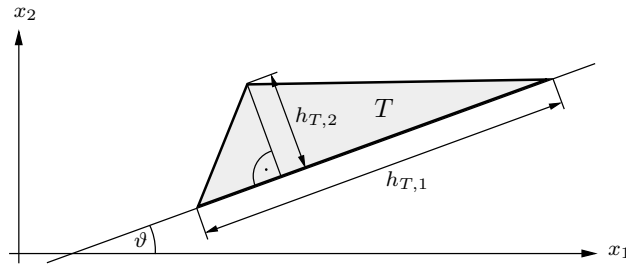


Abbildung 3.3: Dreieck

(ii) Für den Winkel  $\vartheta$  zwischen der längsten Seite von  $T$  und der  $x_1$ -Achse gilt die Beschränkung  $|\sin \vartheta| \leq c \frac{h_{T,2}}{h_{T,1}}$ , vgl. Abbildung 3.3.

**Satz 3.18** (Spursatz). Sei  $T$  ein Dreieck mit einer Seite  $F$ ,  $v \in H^1(T)$  und Annahme 3.17 erfüllt, dann gilt die Abschätzung

$$\|v\|_{0,F}^2 \leq c \frac{1}{h_F^\perp} \left( \|v\|_{0,T}^2 + \|v\|_{0,T} \sum_{|\beta|=1} h_T^\beta \|D^\beta v\|_{0,T} \right),$$

wobei  $h_F^\perp$  die Höhe des Dreiecks  $T$  über der Seite  $F$  ist.

*Beweis.* Sei  $\hat{T}$  das Referenzdreieck mit den Ecken  $(0,0)$ ,  $(1,0)$  und  $(0,1)$  sowie  $\hat{F}$  mit den Eckpunkten  $(0,0)$  und  $(1,0)$  eine Seite von  $\hat{T}$ . Im Beweis von Lemma 2.11 ist die affin lineare Abbildung von  $\hat{T}$  nach  $T$  angegeben. Gemäß [67, Lemma 3.1] gilt für  $\hat{v} \in H^1(\hat{T})$  auf dem Referenzelement (isotrop mit  $h_{\hat{T}} = \sqrt{2}$ ) der Spursatz

$$\|\hat{v}\|_{0,\hat{F}}^2 \leq c \left( \|\hat{v}\|_{0,\hat{T}}^2 + \|\hat{v}\|_{0,\hat{T}} \|\hat{\nabla} \hat{v}\|_{0,\hat{T}} \right), \quad (3.8)$$

siehe auch [18, Theorem 1.6.6]. Mit der Abschätzung  $|\hat{D}^s \hat{v}| \leq c \sum_{|\beta|=|s|} h_T^\beta |D^\beta v|$  für Dreiecke  $T$ , die Annahme 3.17 erfüllen (siehe [1, Formel (2.35)]), erhält man die Transformationen

$$\begin{aligned} \|\hat{v}\|_{0,\hat{F}}^2 &= \frac{1}{h_F} \|v\|_{0,F}^2, & \|\hat{v}\|_{0,\hat{T}}^2 &= \frac{1}{h_F h_F^\perp} \|v\|_{0,T}^2, \\ \|\hat{\nabla} \hat{v}\|_{0,\hat{T}}^2 &= \frac{\text{meas } \hat{T}}{\text{meas } T} \sum_{|s|=1} \|\hat{D}^s \hat{v}\|_{0,T}^2 \leq \frac{c}{h_F h_F^\perp} \sum_{|\beta|=1} h_T^{2\beta} \|D^\beta v\|_{0,T}^2. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen in (3.8) ergibt sich

$$\frac{1}{h_F} \|v\|_{0,F}^2 \leq c \left( \frac{1}{h_F h_F^\perp} \|v\|_{0,T}^2 + \frac{1}{\sqrt{h_F h_F^\perp}} \|v\|_{0,T} \frac{1}{\sqrt{h_F h_F^\perp}} \sum_{|\beta|=1} h_T^\beta \|D^\beta v\|_{0,T} \right)$$

und somit die zu beweisende Ungleichung. Alternativ kann die Aussage von Satz 3.18 auch ausgehend von [49, Lemma 2.4] oder [21, Theorem 4.1] bewiesen werden.  $\square$



**Satz 3.19** (Interpolationsfehlerabschätzung, [1, Theorem 2.1]). *Erfülle das Dreieck  $T$  die Maximalwinkel- und die Koordinatensystembedingung (Annahme 3.17) und sei  $I_h v|_T \in V_h(T)$  die Lagrange-Interpolierende von  $v$  in der Menge der Polynome vom Grad kleiner gleich  $k$ . Dann gilt im Fall  $v \in H^t(T)$*

$$|v - I_h v|_{m,T} \leq c \sum_{|\beta|=t-m} h_T^\beta |D^\beta v|_{m,T}$$

mit  $2 \leq t \leq k + 1$  und  $m = 0, \dots, t - 1$  ( $t, m \in \mathbb{N}$ ).

Der Satz 3.19 wird in [1] bewiesen.

### 3.3.3 Netzverfeinerung mit Graduierung und Anisotropie

Eine Möglichkeit, um bei Finite-Elemente-Methoden für Lösungen mit Randschichten und Eckensingularitäten optimale Konvergenzordnungen zu erreichen, ist die Nutzung anisotroper Dreiecke in den Randschichten  $\Omega^{b,j}$  und graduerter Netze in der Umgebung der Eckensingularitäten, also in  $\Omega^c$ .

Beim Mortaring wird die aus der Beschreibung des Lösungsverhaltens stammende Gebietsaufteilung in  $\Omega^i$ ,  $\Omega^b$  und  $\Omega^c$  noch mit der Zerlegung von  $\Omega$  in  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  überdeckt. Es sei also  $\Omega_\ell^i := \Omega_\ell \cap \Omega^i$ ,  $\Omega_\ell^{b,j} := \Omega_\ell \cap \Omega^{b,j}$  und  $\Omega_\ell^{c,j} := \Omega_\ell \cap \Omega^{c,j}$  für  $\ell = 1, 2$ , wobei leere Mengen auftreten können.

Die Gebietstriangulation  $\mathcal{T}_h$  wird an das Lösungsverhalten angepasst, so dass optimale Konvergenzraten erreicht werden können. Dazu wird mit  $\mathcal{T}_h(G)$  die Triangulation der Gebiete  $G \in \{\Omega_\ell^i, \Omega_\ell^{b,j}, \Omega_\ell^{c,j}, \dots\}$  bezeichnet. Weiterhin sei  $\mathcal{E}_h^\ell(G)$  die Einschränkung der Triangulation  $\mathcal{T}_h(G)$  auf den Randteil  $\Gamma \cap \partial G$ . Analog zu [1] wird mit Triangulationen  $\mathcal{T}_h$  gearbeitet, die Annahme 3.20 erfüllen.

**Annahme 3.20.** *Die Triangulationen  $\mathcal{T}_h^\ell := \mathcal{T}_h(\Omega_\ell) = \bigcup_{j=1}^J (\mathcal{T}_h(\Omega_\ell^{b,j}) \cup \mathcal{T}_h(\Omega_\ell^{c,j})) \cup \mathcal{T}_h(\Omega_\ell^i)$  für  $\ell = 1, 2$  erfüllen Annahme 3.4 und zusätzlich für  $\ell = 1, 2$  und  $j = 1, \dots, J$  die folgenden Bedingungen*

- (i) *Die Triangulationen in den inneren Gebieten  $\Omega_\ell^i$  seien isotrop, und zwar gelte für alle Dreiecke  $T \in \mathcal{T}_h(\Omega_\ell^i)$  ( $\ell = 1, 2$ )*

$$h_{T,1} \sim h_{T,2} \sim h.$$

- (ii) *Die Triangulationen in den Randschichtgebieten  $\Omega_\ell^{b,j}$  seien anisotrop, und zwar gelte für alle Dreiecke  $T \in \mathcal{T}_h(\Omega_\ell^{b,j})$  ( $\ell = 1, 2, j = 1, \dots, J$ )*

$$h_{T,1} \sim h, \quad h_{T,2} \sim bh$$

*und es sei die Maximalwinkel- und Koordinatensystembedingung (Annahme 3.17) erfüllt.*

- (iii) *Die Triangulationen in Eckgebieten  $\Omega_\ell^{c,j}$  seien isotrop und gegebenenfalls graduiert. Die Dreiecke  $T \in \mathcal{T}_h(\Omega_\ell^{c,j})$  erfüllen die Maximalwinkelbedingung, siehe Annahme 3.17(i). Es gelte für alle Dreiecke  $T \in \mathcal{T}_h(\Omega_\ell^{c,j})$  mit  $\lambda > 2$*

$$h_{T,1} \sim h_{T,2} \sim bh$$

### 3 Singulär gestörtes Reaktions-Diffusions-Problem

und für alle  $T \in \mathcal{T}_h(\Omega_\ell^{c,j})$  mit  $\lambda < 2$

$$\begin{aligned} h_{T,1} &\sim h_{T,2} \sim \varepsilon h^{\frac{1}{\mu}} && \text{für } r_T = 0, \\ h_{T,1} &\sim h_{T,2} \sim \varepsilon h \left(\frac{r_T}{\varepsilon}\right)^{1-\mu} && \text{für } 0 < r_T < R_S, \\ h_{T,1} &\sim h_{T,2} \lesssim bh && \text{für } r_T \geq R_S, \end{aligned} \quad (3.9)$$

wobei  $R_S := c\varepsilon$  und  $r_T$  der Abstand von  $T$  zur Ecke  $P$  ( $r_T := \inf_{r \in T} r$ ) sowie  $\mu \in (0, 1]$  der Graduierungsparameter ist.

Der Parameter  $b$  bezeichnet die Dicke der Randschichten und wird später von  $\varepsilon$  abhängig gewählt ( $b = b_0\varepsilon |\ln \varepsilon|$  mit geeigneter Konstanten  $b_0$ ).

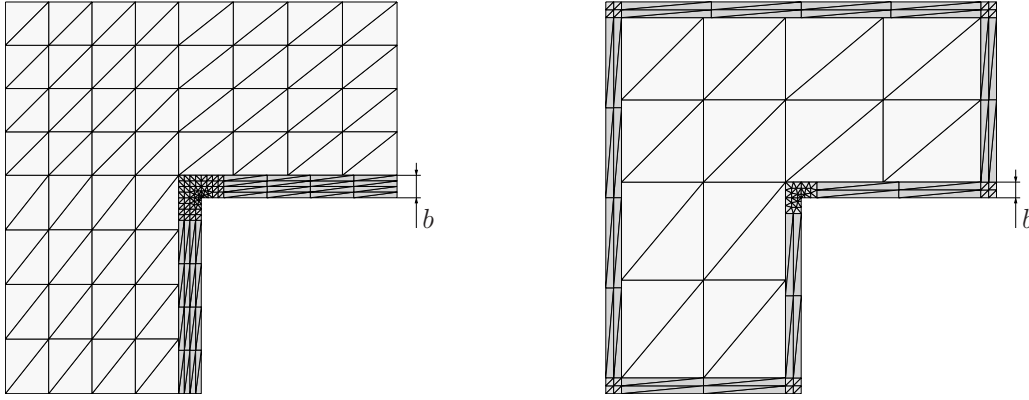


Abbildung 3.4: Beispielvernetzungen für  $\Omega_1 = \Omega^i$  und  $\Omega_2 = \Omega^b \cup \Omega^c$  mit Graduierung an der einspringenden Ecke

Für die Fehlerabschätzung werden bei Verwendung der graduierten Netze in den Eckgebieten  $\Omega_\ell^c$  noch die folgenden Mengeneinteilungen und Eigenschaften benutzt. Es werden die Radien

$$R_s := \xi \varepsilon (sh)^{\frac{1}{\mu}} \quad \forall s = 0, \dots, S \quad (3.10)$$

eingeführt, wobei  $\xi > 0$  eine reelle Konstante und  $S = S(h) \in \mathbb{N}$  von der Ordnung  $\mathcal{O}(h^{-1})$  ist, etwa  $S = \lceil \vartheta h^{-1} \rceil$  mit  $0 < \vartheta \in \mathbb{R}$ . Die Konstanten  $\vartheta$  und  $\xi$  seien so gewählt, dass  $R_S = c\varepsilon$  gilt.

Da die Singularität nur lokal auftritt und auch die Netzgraduierung nur in einer Umgebung der Ecke  $P$  wirksam ist, wird die Triangulation zunächst in zwei Mengen  $\mathcal{C}_{0h}^\ell, \mathcal{C}_h^\ell$  mit  $\mathcal{C}_{0h}^\ell \cup \mathcal{C}_h^\ell = \mathcal{T}_h^\ell$  unterteilt. Diese sind wie folgt definiert:

$$\mathcal{C}_{0h}^\ell := \left\{ T \in \mathcal{T}_h^\ell : r_T < R_S \right\}, \quad \mathcal{C}_h^\ell := \left\{ T \in \mathcal{T}_h^\ell : r_T \geq R_S \right\}. \quad (3.11)$$

Die Menge  $\mathcal{C}_{0h}^\ell$  ( $\ell = 1, 2$ ) wird in Teilmengen (Schichten)  $\mathcal{D}_{sh}^\ell$ ,  $s = 0, \dots, S$  eingeteilt, so dass  $\mathcal{C}_{0h}^\ell = \bigcup_{s=0, \dots, S} \mathcal{D}_{sh}^\ell$  gilt, wobei die Mengen  $\mathcal{D}_{sh}^\ell$  folgendermaßen definiert sind.

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{0h}^\ell &:= \left\{ T \in \mathcal{T}_h^\ell : r_T = 0 \right\}, \\ \mathcal{D}_{1h}^\ell &:= \left\{ T \in \mathcal{T}_h^\ell : r_T < R_1 \text{ und } r_T \neq 0 \right\}, \\ \mathcal{D}_{sh}^\ell &:= \left\{ T \in \mathcal{T}_h^\ell : R_{s-1} \leq r_T < R_s \right\} \quad \text{für } s = 1, \dots, S. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Man kann zeigen, dass  $R_s - R_{s-1} \sim h_T$  für alle  $T \in \mathcal{T}_h$  mit  $r_T \in [R_{s-1}, R_s)$  und  $s = 1, \dots, S$  gilt. Damit ergeben sich für die Anzahl  $N_s^T$  der Dreiecke  $T \in \mathcal{T}_h^\ell$  bzw. die Anzahl  $N_s^\mathcal{E}$  der Intervalle  $E \in \mathcal{E}_h^\ell$  in einer Schicht  $\mathcal{D}_{s_h}^\ell$  für alle  $s = 1, \dots, S$  mit einer von  $h$  und  $\varepsilon$  unabhängigen Konstanten  $n_0$  die Beziehungen

$$N_s^T \leq n_0 s, \quad N_s^\mathcal{E} = \mathcal{O}(1). \quad (3.13)$$

### 3.3.4 Fehlerabschätzung in der Norm $\|\cdot\|_{1,h}$

Es soll der Fehler  $\|u - u_h\|_{1,h}$  zwischen der Lösung  $u$  der Randwertaufgabe (3.1) und der Finite-Elemente-Näherung  $u_h \in V_h$  gemäß (3.3) abgeschätzt werden.

Dazu wird wieder eine weitere von  $\varepsilon$  und dem Netz abhängige Norm über  $\Omega$  eingeführt, die mit  $\|\cdot\|_{h,\Omega}$  bezeichnet wird und folgendermaßen definiert ist

$$\begin{aligned} \|v\|_{h,\Omega}^2 := & \sum_{\ell=1}^2 \left( \varepsilon^2 \|\nabla v^\ell\|_{0,\Omega_\ell}^2 + \|\sqrt{a}v^\ell\|_{0,\Omega_\ell}^2 + \varepsilon^2 \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E \left\| \alpha_\ell \frac{\partial v^\ell}{\partial n_\ell} \right\|_{0,E}^2 \right) \\ & + \varepsilon^2 \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|v^1 - v^2\|_{0,E}^2. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Da hier für die Normalenableitungen  $\frac{\partial v^\ell}{\partial n_\ell} \in L_2(\Gamma)$  gilt, braucht keine gewichtete  $L_2$ -Norm verwendet werden.

**Lemma 3.21.** *Sei Annahme 3.4 erfüllt. Dann sind die Normen  $\|\cdot\|_{1,h}$  und  $\|\cdot\|_{h,\Omega}$ , siehe (3.6) und (3.14), auf dem Raum  $V_h$  äquivalent. Für alle  $v_h \in V_h$  gilt also  $\|v_h\|_{1,h} \leq \|v_h\|_{h,\Omega} \leq c \|v_h\|_{1,h}$ .*

*Beweis.* Der erste Teil der Ungleichungskette folgt aus der Definition der Normen. Der zweite Teil ergibt sich durch Anwenden von Lemma 3.11. Es gilt also

$$\varepsilon^2 \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E \left\| \alpha_\ell \frac{\partial v_h^\ell}{\partial n_\ell} \right\|_{0,E}^2 \leq \varepsilon^2 \alpha_\ell^2 C_{2CSI} \sum_{F \in \mathcal{E}_h^\ell} \frac{h_F}{h_F^\perp} \|\nabla v_h^\ell\|_{0,T_F}^2 \leq c \varepsilon^2 \|\nabla v_h^\ell\|_{\Omega_\ell}^2,$$

wobei die Konstante  $c$  wegen Annahme 3.4 von  $h$  und  $\varepsilon$  unabhängig ist.  $\square$

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit der Abschätzung von  $\|u - u_h\|_{1,h}$ . Dabei wird zuerst der Fehler in der Norm  $\|\cdot\|_{1,h}$  gegen den Interpolationsfehler  $u - I_h u$  in der Norm  $\|\cdot\|_{h,\Omega}$  abgeschätzt. Der Interpolationsfehler wird dann getrennt für die verschiedenen Lösungsanteile  $u_s$ ,  $u_r$ ,  $u_b$  und  $u_c$  aus Annahme 3.15 untersucht, wobei die zuvor durchgeführte Abschätzung von  $\|u - I_h u\|_{h,\Omega}$  gegen die zweiten Ableitungen von  $u$  ( $u$  regulär) benutzt wird. Abschließend werden dann die Einzelresultate zu der endgültigen Fehlerabschätzung des Finite-Elemente-Mortaring nach Nitsche zusammengefasst.

**Satz 3.22.** *Sei  $u \in H^{\frac{3}{2}+\delta}(\Omega)$  mit  $\delta > 0$ ,  $\gamma > C_I$  und die Annahme 3.4 erfüllt, dann gilt für den Fehler die Abschätzung*

$$\|u - u_h\|_{1,h} \leq \|u - u_h\|_{h,\Omega} \leq c \|u - I_h u\|_{h,\Omega},$$

wobei  $I_h u \in V_h$  die verallgemeinerte Lagrange-Interpolierende in der Menge der Polynome  $k$ -ten Grades von  $u$  bezeichnet, und die Normen  $\|\cdot\|_{1,h}$  und  $\|\cdot\|_{h,\Omega}$  wie in (3.6) bzw. (3.14) definiert sind.

### 3 Singulär gestörtes Reaktions-Diffusions-Problem

*Beweis.* Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Satz 2.24. Der erste Teil der Ungleichung ergibt sich aus den Normdefinitionen. Durch Anwendung der Dreiecksungleichung und Lemma 3.21 ergibt sich für den zweiten Teil der zu zeigenden Ungleichung die Abschätzung

$$\|u - u_h\|_{h,\Omega} \leq \|u - I_h u\|_{h,\Omega} + c \|u_h - I_h u\|_{1,h}. \quad (3.15)$$

Mit der  $V_h$ -Elliptizität der Bilinearform (Satz 3.13) und der  $\mathcal{B}_h$ -Orthogonalität des Fehlers (Bemerkung 3.8) ergibt sich

$$\|u_h - I_h u\|_{1,h}^2 \leq \mu_1^{-1} \mathcal{B}_h(u - I_h u, u_h - I_h u). \quad (3.16)$$

Zur Abkürzung sei  $w := u - I_h u$  und  $v_h := u_h - I_h u$ . Im Allgemeinen gilt  $w \notin V_h$  und  $v_h \in V_h$ . Die in der Bilinearform  $\mathcal{B}_h(w, v_h)$  auftretenden Dualitätspaare über  $\Gamma$  können wegen  $u \in H^{\frac{3}{2}+\delta}(\Omega)$  als  $L_2$ -Skalarprodukte aufgefasst werden und somit in  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma = \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \langle \cdot, \cdot \rangle_E$  zerlegt und die Cauchy-Schwarz-Ungleichung  $|\langle \cdot, \cdot \rangle_E| \leq \|\cdot\|_{0,E} \|\cdot\|_{0,E}$  angewendet werden. Mit Hilfe der Dreiecksungleichung und durch geeignetes Einfügen und Aufteilen von  $h_E$ - und  $\varepsilon$ -Potenzen ergibt sich dann

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}_h(w, v_h)| &\leq \sum_{\ell=1}^2 \left( \varepsilon^2 \|\nabla w^\ell\|_{0,\Omega_\ell} \|\nabla v_h^\ell\|_{0,\Omega_\ell} + \|\sqrt{a}w^\ell\|_{0,\Omega_\ell} \|\sqrt{a}v_h^\ell\|_{0,\Omega_\ell} \right) \\ &\quad + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{\sqrt{h_E}}{\varepsilon} \left\| \alpha_1 \varepsilon^2 \frac{\partial w^1}{\partial n_1} - \alpha_2 \varepsilon^2 \frac{\partial w^2}{\partial n_2} \right\|_{0,E} \frac{\varepsilon}{\sqrt{h_E}} \|v_h^1 - v_h^2\|_{0,E} \\ &\quad + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{\sqrt{h_E}}{\varepsilon} \left\| \alpha_1 \varepsilon^2 \frac{\partial v_h^1}{\partial n_1} - \alpha_2 \varepsilon^2 \frac{\partial v_h^2}{\partial n_2} \right\|_{0,E} \frac{\varepsilon}{\sqrt{h_E}} \|w^1 - w^2\|_{0,E} \\ &\quad + \varepsilon^2 \gamma \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|w^1 - w^2\|_{0,E} \|v_h^1 - v_h^2\|_{0,E}. \end{aligned}$$

Nach Benutzung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und Lemma 3.12 für den entsprechenden Ausdruck mit den Normalenableitungen von  $v_h$  erhält man die Abschätzung

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}_h(w, v_h)| &\leq \left( \sum_{\ell=1}^2 \varepsilon^2 \|\nabla w^\ell\|_{0,\Omega_\ell}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{\ell=1}^2 \varepsilon^2 \|\nabla v_h^\ell\|_{0,\Omega_\ell}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left( \sum_{\ell=1}^2 \|\sqrt{a}w^\ell\|_{0,\Omega_\ell}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{\ell=1}^2 \|\sqrt{a}v_h^\ell\|_{0,\Omega_\ell}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left( \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E \left\| \alpha_1 \varepsilon^2 \frac{\partial w^1}{\partial n_1} - \alpha_2 \varepsilon^2 \frac{\partial w^2}{\partial n_2} \right\|_{0,E}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \varepsilon^2 \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|v_h^1 - v_h^2\|_{0,E}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left( \sum_{\ell=1}^2 C_I^\ell \varepsilon^2 \|\nabla v_h^\ell\|_{0,\Omega_\ell}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \varepsilon^2 \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|w^1 - w^2\|_{0,E}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left( \varepsilon^2 \gamma \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|w^1 - w^2\|_{0,E}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \varepsilon^2 \gamma \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|v_h^1 - v_h^2\|_{0,E}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Nochmaliges Anwenden der Ungleichung von Cauchy-Schwarz sowie der Ungleichung vom arithmetischen und quadratischen Mittel für die Normalenableitungen von  $w$  ergibt dann

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{B}_h(w, v_h)| &\leq \left( \sum_{\ell=1}^2 \left( \varepsilon^2 \|\nabla w^\ell\|_{0,\Omega_\ell}^2 + \|\sqrt{a}w^\ell\|_{0,\Omega_\ell}^2 + 2\varepsilon^2 \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E \left\| \alpha_\ell \frac{\partial w^\ell}{\partial n_\ell} \right\|_{0,E}^2 \right) \right. \\
 &\quad \left. + (1 + \gamma) \varepsilon^2 \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|u_h^1 - u_h^2\|_{0,E}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\quad \cdot \left( \sum_{\ell=1}^2 \left( (1 + C_I^\ell) \varepsilon^2 \|\nabla v_h^\ell\|_{0,\Omega_\ell}^2 + \|\sqrt{a}v_h^\ell\|_{0,\Omega_\ell}^2 \right) \right. \\
 &\quad \left. + (1 + \gamma) \varepsilon^2 \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|v_h^1 - v_h^2\|_{0,E}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq \mu_3 \|w\|_{h,\Omega} \|v_h\|_{1,h},
 \end{aligned}$$

wobei die Konstante  $\mu_3$  von  $h$  und  $\varepsilon$  unabhängig ist. Setzt man dies in (3.16) ein, folgt  $\|u_h - I_h u\|_{1,h} \leq \frac{\mu_3}{\mu_1} \|u - I_h u\|_{h,\Omega}$  und mit (3.15) die zu beweisende Ungleichung.  $\square$

Nun werden die Interpolationsfehler abgeschätzt. Dabei wird mit der Abschätzung des Interpolationsfehlers  $u - I_h u$  in der Norm  $\|\cdot\|_{h,\Omega}$  gegen die  $L_2$ -Norm der zweiten Ableitungen von  $u$  für reguläre Lösungen  $u$  begonnen.

**Lemma 3.23.** *Sei  $u \in H^2(T)$  für  $T \in \mathcal{T}_h^\ell$  ( $\ell = 1, 2$ ) sowie Annahme 3.4 und 3.17 erfüllt. Dann gilt*

$$\begin{aligned}
 \|u - I_h u\|_{h,\Omega}^2 &\leq c \sum_{\ell=1}^2 \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\ell} \sum_{|\alpha|=1} \sum_{|\beta|=1} \left( \varepsilon^2 h_T^{2\beta} + h_T^{2(\alpha+\beta)} \right) \|D^{\alpha+\beta} u^\ell\|_{0,T}^2 \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{F \in \mathcal{E}_h^\ell} \sum_{|\alpha|=1} \sum_{|\beta|=1} \varepsilon^2 \left( \alpha_\ell^2 \frac{h_F}{h_F^1} h_{T_F}^{2\beta} + \frac{1}{h_F h_F^1} h_{T_F}^{2(\alpha+\beta)} \right) \|D^{\alpha+\beta} u^\ell\|_{0,T_F}^2 \right)
 \end{aligned}$$

wobei  $I_h u \in V_h$  die verallgemeinerte Lagrange-Interpolierende vom Polynomgrad  $k = 1$  ist.

*Beweis.* Zur Abkürzung sei  $w := u - I_h u$ . Es wird mit der Betrachtung von  $\sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|w^1 - w^2\|_{0,E}^2$  und  $\sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E \left\| \alpha_\ell \frac{\partial w^\ell}{\partial n_\ell} \right\|_{0,E}^2$  für  $\ell = 1, 2$  von  $\|w\|_{h,\Omega}^2$  begonnen. Nach Lemma 3.10 gilt dann

$$\begin{aligned}
 \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|w^1 - w^2\|_{0,E}^2 &\leq 2 \sum_{\ell=1}^2 \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|w^\ell\|_{0,E}^2 \leq 2C_1^{-1} \sum_{\ell=1}^2 \sum_{F \in \mathcal{E}_h^\ell} h_F^{-1} \|w^\ell\|_{0,F}^2, \\
 \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E \left\| \alpha_\ell \frac{\partial w^\ell}{\partial n_\ell} \right\|_{0,E}^2 &\leq \alpha_\ell^2 \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E \|\nabla w^\ell\|_{0,E}^2 \leq \alpha_\ell^2 C_2 \sum_{F \in \mathcal{E}_h^\ell} h_F \|\nabla w^\ell\|_{0,F}^2.
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

### 3 Singulär gestörtes Reaktions-Diffusions-Problem

Zum Abschätzen von  $\|w^\ell\|_{0,F}^2$  und  $\|\nabla w^\ell\|_{0,F}^2$  durch die Interpolationsfehlernormen auf den zu  $F$  gehörigen Dreiecken  $T = T_F$  wird Satz 3.18 für  $w^\ell$  bzw. die Komponenten  $\frac{\partial w^\ell}{\partial x_i}$  ( $i = 1, 2$ ) des Gradientens  $\nabla w^\ell$  verwendet. Man erhält

$$\begin{aligned} \|w^\ell\|_{0,F}^2 &\leq c \frac{1}{h_F^\perp} \left( \|w^\ell\|_{0,T}^2 + \|w^\ell\|_{0,T} \sum_{|\beta|=1} h_T^\beta \|D^\beta w^\ell\|_{0,T} \right), \\ \|\nabla w^\ell\|_{0,F}^2 &\leq c \frac{1}{h_F^\perp} \left( |w^\ell|_{1,T}^2 + |w^\ell|_{1,T} \sum_{|\alpha|=1} \sum_{|\beta|=1} h_T^\beta \|D^{\alpha+\beta} w^\ell\|_{0,T} \right). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Aus Satz 3.19 ergeben sich die Beziehungen

$$\|w^\ell\|_{0,T} \leq c \sum_{|\beta|=2} h_T^\beta \|D^\beta u^\ell\|_{0,T}, \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \sum_{|\beta|=1} h_T^\beta \|D^\beta w^\ell\|_{0,T} &\leq c \sum_{|\alpha|=1} \sum_{|\beta|=1} h_T^{\alpha+\beta} \|D^{\alpha+\beta} u^\ell\|_{0,T}, \\ |w^\ell|_{1,T} &\leq c \sum_{|\beta|=1} h_T^\beta |D^\beta u^\ell|_{1,T} \leq c \sum_{|\alpha|=1} \sum_{|\beta|=1} h_T^\beta \|D^{\alpha+\beta} u^\ell\|_{0,T}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\sum_{|\alpha|=1} \sum_{|\beta|=1} h_T^\beta \|D^{\alpha+\beta} w^\ell\|_{0,T} \leq c \sum_{|\alpha|=1} \sum_{|\beta|=1} h_T^\beta \|D^{\alpha+\beta} u^\ell\|_{0,T}.$$

Setzt man diese Abschätzungen in (3.18) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \|w^\ell\|_{0,F}^2 &\leq c \frac{1}{h_F^\perp} \left( \sum_{|\beta|=2} h_T^{2\beta} \|D^\beta u^\ell\|_{0,T}^2 + \sum_{|\beta|=2} h_T^\beta \|D^\beta u^\ell\|_{0,T} \cdot \sum_{|\alpha|=1} \sum_{|\beta|=1} h_T^{\alpha+\beta} \|D^{\alpha+\beta} u^\ell\|_{0,T} \right) \\ &\leq c \frac{1}{h_F^\perp} \sum_{|\alpha|=1} \sum_{|\beta|=1} h_T^{2(\alpha+\beta)} \|D^{\alpha+\beta} u^\ell\|_{0,T}^2, \\ \|\nabla w^\ell\|_{0,F}^2 &\leq c \frac{1}{h_F^\perp} \left( \sum_{|\alpha|=1} \sum_{|\beta|=1} h_T^{2\beta} \|D^{\alpha+\beta} u^\ell\|_{0,T}^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{|\alpha|=1} \sum_{|\beta|=1} h_T^\beta \|D^{\alpha+\beta} u^\ell\|_{0,T} \cdot \sum_{|\alpha|=1} \sum_{|\beta|=1} h_T^\beta \|D^{\alpha+\beta} u^\ell\|_{0,T} \right) \\ &\leq c \frac{1}{h_F^\perp} \sum_{|\alpha|=1} \sum_{|\beta|=1} h_T^{2\beta} \|D^{\alpha+\beta} u^\ell\|_{0,T}^2. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Zusammen mit (3.17) ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|w^1 - w^2\|_{0,E}^2 &\leq c C_1^{-1} \sum_{\ell=1}^2 \sum_{F \in \mathcal{E}_h^\ell} \frac{1}{h_F h_F^\perp} \sum_{|\alpha|=1} \sum_{|\beta|=1} h_{T_F}^{2(\alpha+\beta)} \|D^{\alpha+\beta} u^\ell\|_{0,T_F}^2, \\ \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E \left\| \alpha_\ell \frac{\partial w^\ell}{\partial n_\ell} \right\|_{0,E}^2 &\leq c C_2 \alpha_\ell^2 \sum_{F \in \mathcal{E}_h^\ell} \frac{h_F}{h_F^\perp} \sum_{|\alpha|=1} \sum_{|\beta|=1} h_{T_F}^{2\beta} \|D^{\alpha+\beta} u^\ell\|_{0,T_F}^2 \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^2 \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E \left\| \alpha_\ell \frac{\partial (u^\ell - I_h u^\ell)}{\partial n_\ell} \right\|_{0,E}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|(u^1 - I_h u^1) - (u^2 - I_h u^2)\|_{0,E}^2 \\ & \leq c \sum_{\ell=1}^2 \left( \sum_{F \in \mathcal{E}_h^\ell} \sum_{|\alpha|=1} \sum_{|\beta|=1} \left( \alpha_\ell^2 C_2 \frac{h_F}{h_F^\perp} h_{T_F}^{2\beta} + 2C_1^{-1} \frac{1}{h_F h_F^\perp} h_{T_F}^{2(\alpha+\beta)} \right) \|D^{\alpha+\beta} u^\ell\|_{0,T_F}^2 \right). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Nun werden die Normenanteile  $\varepsilon^2 \|\nabla (u^\ell - I_h u^\ell)\|_{0,T}^2$  und  $\|\sqrt{a} (u^\ell - I_h u^\ell)\|_{0,T}^2$  für alle  $T \in \mathcal{T}_h^\ell$  und  $\ell = 1, 2$  abgeschätzt. Mit den aus dem Approximationssatz 3.19 folgenden Beziehungen (3.19) und (3.20) ergibt sich

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \|\nabla (u^\ell - I_h u^\ell)\|_{0,T}^2 & \leq \varepsilon^2 |u^\ell - I_h u^\ell|_{1,T}^2 \leq c \varepsilon^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\ell} \sum_{|\alpha|=1} \sum_{|\beta|=1} h_T^{2\beta} \|D^{\alpha+\beta} u^\ell\|_{0,T}^2, \\ \|\sqrt{a} (u^\ell - I_h u^\ell)\|_{0,T}^2 & \leq c \|a\|_{L^\infty(T)} \|u^\ell - I_h u^\ell\|_{0,T}^2 \\ & \leq c \|a\|_{L^\infty(T)} \sum_{|\beta|=2} h_T^{2\beta} \|D^\beta u^\ell\|_{0,T}^2 \\ & \leq c \|a\|_{L^\infty(T)} \sum_{|\alpha|=1} \sum_{|\beta|=1} h_T^{2(\alpha+\beta)} \|D^{\alpha+\beta} u^\ell\|_{0,T}^2. \end{aligned}$$

Somit gilt für  $\ell = 1, 2$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \|\nabla (u^\ell - I_h u^\ell)\|_{0,T}^2 + \|\sqrt{a} (u^\ell - I_h u^\ell)\|_{0,T}^2 \\ \leq c \sum_{|\alpha|=1} \sum_{|\beta|=1} \left( \varepsilon^2 h_T^{2\beta} + \|a\|_{L^\infty(T)} h_T^{2(\alpha+\beta)} \right) \|D^{\alpha+\beta} u^\ell\|_{0,T}^2. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Mit der Definition der Norm  $\|\cdot\|_{h,\Omega}$  (3.14) und den Beziehungen (3.22) und (3.23) für alle Dreiecke  $T \in \mathcal{T}_h^\ell$  und  $\ell = 1, 2$  erhält man mit  $\|a\|_{L^\infty(T)} \leq c$  sowie mit den von  $h$  und  $\varepsilon$  unabhängigen  $C_1$  und  $C_2$  aus Annahme 3.4 die zu beweisende Abschätzung.  $\square$

Mit Hilfe des vorigen Lemmas werden nun die Interpolationsfehler der Lösungsanteile  $u_s$ ,  $u_r$ ,  $u_b$  und  $u_c$  aus Annahme 3.15 abgeschätzt.

**Lemma 3.24.** *Seien Annahme 3.15 und 3.20 erfüllt sowie die Randschichtdicke  $b = b_0 \varepsilon |\ln \varepsilon|$  mit  $b_0 \geq \frac{k+1}{q}$  ( $k = 1$  Polynomgrad von  $V_h$  und  $q$  aus Annahme 3.15). Für  $u_s, u_r \in H^2(\Omega)$  den glatten Lösungsanteil bzw. den Restanteil aus Annahme 3.15 gelten dann die Abschätzungen*

$$\begin{aligned} \|u_s - I_h u_s\|_{h,\Omega}^2 & \leq c \left( \varepsilon |\ln \varepsilon|^3 h^2 + h^4 \right), \\ \|u_r - I_h u_r\|_{h,\Omega}^2 & \leq c \left( \varepsilon |\ln \varepsilon|^3 h^2 + h^4 \right). \end{aligned}$$

### 3 Singulär gestörtes Reaktions-Diffusions-Problem

*Beweis.* Zur Abkürzung sei im Weiteren

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_G^A &:= \sum_{T \in \mathcal{T}_h(G)} \sum_{|\alpha|=1} \sum_{|\beta|=1} \left( \varepsilon^2 h_T^{2\beta} + h_T^{2(\alpha+\beta)} \right) \left\| D^{\alpha+\beta} u_A^\ell \right\|_{0,T}^2, \\ \mathbf{II}_G^A &:= \sum_{F \in \mathcal{E}_h^\ell(G)} \sum_{|\alpha|=1} \sum_{|\beta|=1} \varepsilon^2 \left( \alpha_\ell^2 \frac{h_F}{h_F^\perp} h_{T_F}^{2\beta} + \frac{1}{h_F h_F^\perp} h_{T_F}^{2(\alpha+\beta)} \right) \left\| D^{\alpha+\beta} u_A^\ell \right\|_{0,T_F}^2, \end{aligned} \quad (3.24)$$

wobei der Index  $G \in \{\Omega_\ell^i, \Omega_\ell^c, \Omega_\ell^b, \dots\}$  die Menge der zu summierenden Elemente  $T$  bzw.  $F$  festlegt, und der Index  $A \in \{r, s, b, c\}$  welcher der Lösungsanteile  $u_r, u_s, u_b$  oder  $u_c$  von  $u$  unter der Norm steht.

Zuerst wird der Restanteil  $u_r$  der Lösung betrachtet, und die Ausdrücke  $\mathbf{I}_G^r$  und  $\mathbf{II}_G^r$  für  $G = \Omega_\ell^i, \Omega_\ell^b, \Omega_\ell^c$  einzeln untersucht.

(i)  $T \in \mathcal{T}_h(\Omega_\ell^i)$  ( $\ell = 1, 2$ ):

In  $\Omega_\ell^i$  sind die Dreiecke isotrop mit  $h_{T,1} \sim h_{T,2} \sim h$  und somit auch  $h_F \sim h_F^\perp \sim h$ , siehe Annahme 3.20. Zusammen mit  $\alpha_\ell^2 \leq 1$  erhält man somit für  $\ell = 1, 2$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{\Omega_\ell^i}^r + \mathbf{II}_{\Omega_\ell^i}^r &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h(\Omega_\ell^i)} \sum_{|\alpha|=1} \sum_{|\beta|=1} \left( \varepsilon^2 h_T^{2\beta} + h_T^{2(\alpha+\beta)} \right) \left\| D^{\alpha+\beta} u_r^\ell \right\|_{0,T}^2 \\ &\quad + \sum_{F \in \mathcal{E}_h(\Omega_\ell^i)} \sum_{|\alpha|=1} \sum_{|\beta|=1} \varepsilon^2 \left( \alpha_\ell^2 \frac{h_F}{h_F^\perp} h_{T_F}^{2\beta} + \frac{1}{h_F h_F^\perp} h_{T_F}^{2(\alpha+\beta)} \right) \left\| D^{\alpha+\beta} u_r^\ell \right\|_{0,T_F}^2 \\ &\leq c(\varepsilon^2 h^2 + h^4) \sum_{T \in \mathcal{T}_h(\Omega_\ell^i)} \left\| D^2 u_r^\ell \right\|_{0,T}^2 + c\varepsilon^2 h^2 \sum_{F \in \mathcal{E}_h(\Omega_\ell^i)} \left\| D^2 u_r^\ell \right\|_{0,T_F}^2 \\ &\leq c(\varepsilon^2 h^2 + h^4) \left\| D^2 u_r^\ell \right\|_{0,\Omega_\ell^i}^2. \end{aligned} \quad (3.25)$$

(ii)  $T \in \mathcal{T}_h(\Omega_\ell^c)$  ( $\ell = 1, 2$ ):

In Bereich von  $\Omega_\ell^c$  sind die Dreiecke isotrop und gegebenenfalls graduiert. Die Graduierung wird hier jedoch noch nicht benötigt. Es gilt  $h_{T,1} \sim h_{T,2} \sim h_F \sim h_F^\perp \leq cbh$ , siehe Annahme 3.20. Mit  $\alpha_\ell^2 \leq 1$  ergibt sich für  $\ell = 1, 2$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{\Omega_\ell^c}^r + \mathbf{II}_{\Omega_\ell^c}^r &\leq c \sum_{|\alpha|=1} \sum_{|\beta|=1} \left( \varepsilon^2 (bh)^{2\beta} + (bh)^{2(\alpha+\beta)} \right) \sum_{T \in \mathcal{T}_h(\Omega_\ell^c)} \left\| D^{\alpha+\beta} u_r^\ell \right\|_{0,T}^2 \\ &\quad + c \sum_{|\alpha|=1} \sum_{|\beta|=1} \varepsilon^2 \left( \alpha_\ell^2 (bh)^{2\beta} + (bh)^{2(\alpha+\beta)-2} \right) \sum_{F \in \mathcal{E}_h^\ell(\Omega_\ell^c)} \left\| D^{\alpha+\beta} u_s^\ell \right\|_{0,T_F}^2 \\ &\leq c(\varepsilon^2 b^2 h^2 + b^4 h^4) \left\| D^2 u_r \right\|_{0,\Omega_\ell^c}^2. \end{aligned} \quad (3.26)$$

(iii)  $T \in \mathcal{T}_h(\Omega_\ell^b)$  ( $\ell = 1, 2$ ):

Im Randschichtbereich von  $\Omega$  sind die Dreiecke anisotrop mit  $h_{T,1} \sim h$  und  $h_{T,2} \sim bh$ , siehe



Annahme 3.20. Zuerst wird  $\mathbf{I}_{\Omega_\ell^b}^r$  für  $\ell = 1, 2$  abgeschätzt. Es gilt

$$\begin{aligned}
 \mathbf{I}_{\Omega_\ell^b}^r &= c \sum_{T \in \mathcal{T}_h(\Omega_\ell^b)} \sum_{|\alpha|=1} \sum_{|\beta|=1} \left( \varepsilon^2 h_{T,1}^{2\beta_1} h_{T,2}^{2\beta_2} + h_{T,1}^{2(\alpha_1+\beta_1)} h_{T,2}^{2(\alpha_2+\beta_2)} \right) \left\| D^{\alpha+\beta} u_r^\ell \right\|_{0,T}^2 \\
 &\leq c \left( (\varepsilon^2 h^2 + h^4) + (\varepsilon^2 h^2 + h^2 (bh)^2) \right. \\
 &\quad \left. + (\varepsilon^2 (bh)^2 + h^2 (bh)^2) + (\varepsilon^2 (bh)^2 + (bh)^4) \right) \left\| D^2 u_r^\ell \right\|_{0,\Omega_\ell^b}^2, \\
 &\leq c \left( (1+b^2) \varepsilon^2 h^2 + (1+b^2+b^4) h^4 \right) \left\| D^2 u_r^\ell \right\|_{0,\Omega_\ell^b}^2, \tag{3.27}
 \end{aligned}$$

wobei die Summe über die Multiindizes  $\alpha$  und  $\beta$  in der Reihenfolge  $(\alpha = \beta = (1, 0))$ ,  $(\alpha = (0, 1), \beta = (1, 0))$ ,  $(\alpha = (1, 0), \beta = (0, 1))$  und  $(\alpha = \beta = (0, 1))$  aufgeschrieben wurde.

Nun wird  $\mathbf{II}_{\Omega_\ell^b}^r$  betrachtet. Die Dreiecke  $T_F$  können sowohl mit ihrer „langen“ als auch mit ihrer „kurzen“ Seite  $F \in \mathcal{E}_h^\ell(\Omega_\ell^b)$  an der Schnittkante  $\Gamma$  liegen, das heißt, es gibt zwei Möglichkeiten für das asymptotische Verhalten der Längen  $h_F$ . Um dies zu unterscheiden, werden die Mengen

$$\mathcal{E}_h^\ell(\Omega_\ell^{b+}) := \{F \in \mathcal{E}_h^\ell(\Omega_\ell^b) : h_F \sim h\}, \quad \mathcal{E}_h^\ell(\Omega_\ell^{b-}) := \{F \in \mathcal{E}_h^\ell(\Omega_\ell^b) : h_F \sim bh\} \tag{3.28}$$

eingeführt und  $\mathbf{II}_{\Omega_\ell^b}^r = \mathbf{II}_{\Omega_\ell^{b+}}^r + \mathbf{II}_{\Omega_\ell^{b-}}^r$  getrennt für diese Mengen betrachtet.

(a)  $F \in \mathcal{E}_h^\ell(\Omega_\ell^{b+})$  ( $\ell = 1, 2$ ):

Damit ist  $h_F \sim h$  und  $h_F^\perp \sim bh$ . Dieser Fall ist nach Annahme 3.4(ii) nur erlaubt, wenn  $\alpha_\ell = 0$  gilt. Damit entfällt der erste Summand mit  $\alpha_\ell^2$  unter den Summen und man erhält

$$\begin{aligned}
 \mathbf{II}_{\Omega_\ell^{b+}}^r &= c \sum_{F \in \mathcal{E}_h^\ell(\Omega_\ell^{b+})} \sum_{|\alpha|=1} \sum_{|\beta|=1} \varepsilon^2 \frac{1}{h_F h_F^\perp} h_{T_F,1}^{2\alpha_1+2\beta_1} h_{T_F,2}^{2\alpha_2+2\beta_2} \left\| D^{\alpha+\beta} u_r^\ell \right\|_{0,T_F}^2 \\
 &\leq c \varepsilon^2 b^{-1} h^{-2} (h^4 + h^2 (bh)^2 + h^2 (bh)^2 + (bh)^4) \left\| D^2 u_r^\ell \right\|_{0,\Omega_\ell^b}^2, \\
 &\leq c \varepsilon^2 (b^{-1} + b + b^3) h^2 \left\| D^2 u_r^\ell \right\|_{0,\Omega_\ell^b}^2, \tag{3.29}
 \end{aligned}$$

wobei die Summe über die Multiindizes  $\alpha$  und  $\beta$  wieder in der Reihenfolge  $(\alpha = \beta = (1, 0))$ ,  $(\alpha = (0, 1), \beta = (1, 0))$ ,  $(\alpha = (1, 0), \beta = (0, 1))$  und  $(\alpha = \beta = (0, 1))$  aufgeschrieben wurde.

(b)  $F \in \mathcal{E}_h^\ell(\Omega_\ell^{b-})$  ( $\ell = 1, 2$ ):

Damit ist  $h_F \sim bh$  und  $h_F^\perp \sim h$ . Analog zum Fall (a) werden die Multiindizes aufgelöst. Mit  $\alpha_\ell^2 \leq 1$  erhält man

$$\begin{aligned}
 \mathbf{II}_{\Omega_\ell^{b-}}^r &= \sum_{F \in \mathcal{E}_h^\ell(\Omega_\ell^{b-})} \sum_{|\alpha|=1} \sum_{|\beta|=1} \varepsilon^2 \left( \alpha_\ell^2 \frac{h_F}{h_F^\perp} h_{T_F}^{2\beta} + \frac{1}{h_F h_F^\perp} h_{T_F}^{2(\alpha+\beta)} \right) \left\| D^{\alpha+\beta} u_r^\ell \right\|_{0,T_F}^2 \\
 &\leq c \varepsilon^2 (b^{-1} + b + b^3) h^2 \left\| D^2 u_r^\ell \right\|_{0,\Omega_\ell^b}^2. \tag{3.30}
 \end{aligned}$$

Durch Summation von (3.27), (3.29) und (3.30) folgt die Abschätzung

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{\Omega_\ell^b}^r + \mathbf{II}_{\Omega_\ell^b}^r &= \mathbf{I}_{\Omega_\ell^b}^r + \mathbf{II}_{\Omega_\ell^{b+}}^r + \mathbf{II}_{\Omega_\ell^{b-}}^r \\ &\leq c \left( \varepsilon^2 (b^{-1} + 1 + b + b^2 + b^3) h^2 + (1 + b^2 + b^4) h^4 \right) \|D^2 u_r^\ell\|_{0, \Omega_\ell^b}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Ausgehend von Lemma 3.23 ergibt sich durch Addition der Abschätzungen über den einzelnen Teilgebieten, also (3.25), (3.26) und (3.31), die Beziehung

$$\begin{aligned} \|u_r - I_h u_r\|_{h, \Omega}^2 &\leq c \sum_{\ell=1}^2 \left( \mathbf{I}_{\Omega_\ell^i}^r + \mathbf{II}_{\Omega_\ell^i}^r + \mathbf{I}_{\Omega_\ell^b}^r + \mathbf{II}_{\Omega_\ell^b}^r + \mathbf{I}_{\Omega_\ell^c}^r + \mathbf{II}_{\Omega_\ell^c}^r \right) \\ &\leq c \sum_{\ell=1}^2 \left( (\varepsilon^2 h^2 + h^4) \|D^2 u_r^\ell\|_{0, \Omega_\ell^i}^2 \right. \\ &\quad \left. + (\varepsilon^2 (b^{-1} + 1 + b + b^2 + b^3) h^2 + (1 + b^2 + b^4) h^4) \|D^2 u_r^\ell\|_{0, \Omega_\ell^b}^2 \right. \\ &\quad \left. + (\varepsilon^2 b^2 h^2 + b^4 h^4) \|D^2 u_r^\ell\|_{0, \Omega_\ell^c}^2 \right). \end{aligned}$$

Für  $b = b_0 \varepsilon |\ln \varepsilon|$ ,  $\varepsilon \in (0, 1)$  gelten die Abschätzungen  $b^\alpha \leq b^\beta$  für  $\alpha \geq \beta$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  sowie  $\varepsilon^2 \leq \varepsilon |\ln \varepsilon|^{-1} \leq \varepsilon |\ln \varepsilon|^3$ . Damit folgt

$$\begin{aligned} \|u_r - I_h u_r\|_{h, \Omega}^2 &\leq c \left( \varepsilon |\ln \varepsilon|^{-1} h^2 + h^4 \right) \sum_{\ell=1}^2 \left( \|D^2 u_r^\ell\|_{0, \Omega_\ell^i}^2 + \|D^2 u_r^\ell\|_{0, \Omega_\ell^c}^2 + \|D^2 u_r^\ell\|_{0, \Omega_\ell^b}^2 \right) \\ &\leq c \left( \varepsilon |\ln \varepsilon|^3 h^2 + h^4 \right) \|D^2 u_r\|_{0, \Omega}^2. \end{aligned}$$

Mit dem in Annahme 3.15 angegebenen Lösungsverhalten gilt für die  $L_2$ -Normen der zweiten Ableitungen von  $u_r$  mit  $n = 2$  ( $n \geq k + 1$ ) die Abschätzung  $\|D^2 u_r\|_{0, \Omega}^2 \leq c \varepsilon^{2(n-2)} = c$  und somit die zu beweisende Interpolationsfehlerabschätzung.

Da für den glatten Lösungsanteil  $u_s$  die Abschätzung  $\|D^2 u_s\|_{0, \Omega}^2 \leq c$  gilt (siehe Annahme 3.15) erhält man völlig analog zur Interpolationsfehlerabschätzung von  $\|u_r - I_h u_r\|_{h, \Omega}^2$  die Beziehung

$$\|u_s - I_h u_s\|_{h, \Omega}^2 \leq c \left( \varepsilon |\ln \varepsilon|^3 h^2 + h^4 \right).$$

□

Nun wird Interpolationsfehler  $u_b - I_h u_b$  des Randschichtanteils der Lösung untersucht.

**Lemma 3.25.** *Seien Annahme 3.15 und 3.20 erfüllt sowie die Randschichtdicke  $b = b_0 \varepsilon |\ln \varepsilon|$  mit  $b_0 \geq \frac{1+k}{q}$  ( $k = 1$  der Polynomgrad von  $V_h$  und  $q$  die Konstante aus Annahme 3.15). Für den Randschichtanteil  $u_b \in H^2(\Omega)$  der Lösung aus Annahme 3.15 gilt dann die Abschätzung*

$$\|u_b - I_h u_b\|_{h, \Omega}^2 \leq c \left( \varepsilon |\ln \varepsilon|^3 h^2 + h^4 \right).$$

*Beweis.* Die Ausdrücke  $\mathbf{I}_G^b$  und  $\mathbf{II}_G^b$  (siehe (3.24)) für den Randschichtanteil  $u_b$  der Lösung werden wieder für  $G = \Omega_\ell^i, \Omega_\ell^b, \Omega_\ell^c$  einzeln betrachtet.

(i)  $T \in \mathcal{T}_h(\Omega_\ell^i)$  ( $\ell = 1, 2$ ):

Die Dreiecke sind hier isotrop mit  $h_{T,1} \sim h_{T,2} \sim h$  und  $h_F \sim h_F^\perp \sim h$  und nach Annahme 3.15 gilt für den Lösungsanteil  $u_b$  die Beschränkung

$$\left| D^\beta u_b \right| \leq c \varepsilon^{-|\beta|} e^{-q \frac{b}{\varepsilon}} \leq c \varepsilon^{-|\beta|} e^{-\frac{q}{\varepsilon} \frac{2}{q} \varepsilon |\ln \varepsilon|} = c \varepsilon^{-|\beta|} \left( e^{\ln \varepsilon} \right)^2 = c \varepsilon^{2-|\beta|}.$$

Für  $|\beta| = 2$  folgt  $|D^2 u_b| \leq c$  sowie  $\|D^2 u_b^\ell\|_{0, \Omega_\ell^i}^2 \leq c \text{meas } \Omega_\ell^i = c$ . Damit gilt analog zur Abschätzung von  $\mathbf{I}_{\Omega_\ell^i}^r + \mathbf{II}_{\Omega_\ell^i}^r$ , siehe (3.25), die Beziehung

$$\mathbf{I}_{\Omega_\ell^i}^b + \mathbf{II}_{\Omega_\ell^i}^b \leq c (\varepsilon^2 h^2 + h^4). \quad (3.32)$$

(ii)  $T \in \mathcal{T}_h(\Omega_\ell^c)$  ( $\ell = 1, 2$ ):

Nach Annahme 3.15 gilt für den Lösungsanteil  $u_b$  die Beschränkung

$$\left| D^\beta u_b \right| \leq c \varepsilon^{-|\beta|} e^{-q \frac{r}{\varepsilon}} \leq c \varepsilon^{-|\beta|}$$

und somit  $\|D^2 u_b^\ell\|_{0, \Omega_\ell^c}^2 \leq c \varepsilon^{-4} \text{meas } \Omega_\ell^c \leq c b^2 \varepsilon^{-4}$ . Mit  $h_{T,2} \sim h_{T,1} \sim h_F \sim h_F^\perp \leq c b h$  (siehe Annahme 3.20) und  $\alpha_\ell^2 \leq 1$  folgt analog zu (3.26) die Abschätzung

$$\mathbf{I}_{\Omega_\ell^c}^b + \mathbf{II}_{\Omega_\ell^c}^b \leq c (\varepsilon^2 b^2 h^2 + b^4 h^4) b^2 \varepsilon^{-4} \leq c (\varepsilon^{-2} b^4 h^2 + \varepsilon^{-4} b^6 h^4). \quad (3.33)$$

(iii)  $T \in \mathcal{T}_h(\Omega_\ell^b)$  ( $\ell = 1, 2$ ):

Im Randschichtbereich von  $\Omega$  sind die Dreiecke anisotrop mit  $h_{T,1} \sim h$  und  $h_{T,2} \sim b h$ , und nach Annahme 3.15 gilt für den Lösungsanteil  $u_b$  mit  $|\beta| = 2$  die Beschränkung

$$\begin{aligned} \left| D^\beta u_b \right| &\leq c \left( \varepsilon^{-\beta_2} e^{-q \frac{x_2}{\varepsilon}} + \varepsilon^{-|\beta|} e^{-q \frac{r}{\varepsilon}} \right) \leq c \left( \varepsilon^{-\beta_2} e^{-q \frac{0}{\varepsilon}} + \varepsilon^{-|\beta|} e^{-q \frac{b}{\varepsilon}} \right) \\ &= c \left( \varepsilon^{-\beta_2} + \varepsilon^{2-|\beta|} \right) = c \varepsilon^{-\beta_2}. \end{aligned}$$

Damit gilt  $\|D^\beta u_b^\ell\|_{0, \Omega_\ell^b}^2 \leq c \varepsilon^{-2\beta_2} \text{meas } \Omega_\ell^b = c b \varepsilon^{-2\beta_2}$ . Zuerst wird  $\mathbf{I}_{\Omega_\ell^b}^b$  für  $\ell = 1, 2$  abgeschätzt. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{\Omega_\ell^b}^b &= c \sum_{T \in \mathcal{T}_h(\Omega_\ell^b)} \sum_{|\alpha|=1} \sum_{|\beta|=1} \left( \varepsilon^2 h_{T,1}^{2\beta_1} h_{T,2}^{2\beta_2} + h_{T,1}^{2(\alpha_1+\beta_1)} h_{T,2}^{2(\alpha_2+\beta_2)} \right) \left\| D^{\alpha+\beta} u_b^\ell \right\|_{0,T}^2 \\ &\leq c \left( (\varepsilon^2 h^2 + h^4) b + (\varepsilon^2 h^2 + h^2 (b h)^2) b \varepsilon^{-2} \right. \\ &\quad \left. + (\varepsilon^2 (b h)^2 + h^2 (b h)^2) b \varepsilon^{-2} + (\varepsilon^2 (b h)^2 + (b h)^4) b \varepsilon^{-4} \right) \\ &\leq c \left( (\varepsilon^2 b + b + b^3 + \varepsilon^{-2} b^3) h^2 + (b + \varepsilon^{-2} b^3 + \varepsilon^{-4} b^5) h^4 \right), \end{aligned} \quad (3.34)$$

wobei die Summe über die Multiindizes  $\alpha$  und  $\beta$  in der Reihenfolge ( $\alpha = \beta = (1, 0)$ ), ( $\alpha = (0, 1)$ ,  $\beta = (1, 0)$ ), ( $\alpha = (1, 0)$ ,  $\beta = (0, 1)$ ) und ( $\alpha = \beta = (0, 1)$ ) aufgeschrieben wurde.

Nun wird  $\mathbf{II}_{\Omega_\ell^b}^b = \mathbf{II}_{\Omega_\ell^{b+}}^b + \mathbf{II}_{\Omega_\ell^{b-}}^b$  mit den im Beweis von Lemma 3.24 eingeführten Mengen  $\mathcal{E}_h^\ell(\Omega_\ell^{b+})$  und  $\mathcal{E}_h^\ell(\Omega_\ell^{b-})$  (siehe (3.28)) betrachtet.

(a)  $F \in \mathcal{E}_h^\ell(\Omega_\ell^{b+})$  ( $\ell = 1, 2$ ):

Also gilt  $h_F \sim h$  und  $h_F^\perp \sim bh$ . Dieser Fall ist nach Annahme 3.4(ii) nur für  $\alpha_\ell = 0$  erlaubt. Die Multiindizes werden wieder aufgelöst und  $\|D^\beta u_b^\ell\|_{0, \Omega_\ell^b}^2 \leq cb\varepsilon^{-2\beta_2}$  ( $|\beta| = 2$ ) eingesetzt. Mit  $\alpha_\ell^2 \leq 1$  erhält man

$$\begin{aligned} \mathbf{II}_{\Omega_\ell^{b+}}^b &= c \sum_{F \in \mathcal{E}_h^\ell(\Omega_\ell^{b+})} \sum_{|\alpha|=1} \sum_{|\beta|=1} \varepsilon^2 \frac{1}{h_F h_F^\perp} h_{T,1}^{2\alpha_1+2\beta_1} h_{T,2}^{2\alpha_2+2\beta_2} \left\| D^{\alpha+\beta} u_b^\ell \right\|_{0, T_F}^2 \\ &\leq c\varepsilon^2 b^{-1} h^{-2} (h^4 b + h^2 (bh)^2 b\varepsilon^{-2} + h^2 (bh)^2 b\varepsilon^{-2} + (bh)^4 b\varepsilon^{-4}) \\ &\leq c(\varepsilon^2 + b^2 + \varepsilon^{-2} b^4) h^2. \end{aligned} \quad (3.35)$$

(b)  $F \in \mathcal{E}_h^\ell(\Omega_\ell^{b-})$  ( $\ell = 1, 2$ ):

Damit ist  $h_F \sim bh$  und  $h_F^\perp \sim h$ . Mit  $\|D^\beta u_b^\ell\|_{0, \Omega_\ell^b}^2 \leq cb\varepsilon^{-2\beta_2}$  ( $|\beta| = 2$ ) und (3.35) erhält man die Abschätzung

$$\begin{aligned} \mathbf{II}_{\Omega_\ell^{b-}}^b &= \sum_{F \in \mathcal{E}_h^\ell(\Omega_\ell^{b-})} \sum_{|\alpha|=1} \sum_{|\beta|=1} \varepsilon^2 \left( \alpha_\ell^2 \frac{h_F}{h_F^\perp} h_{T_F}^{2\beta} + \frac{1}{h_F h_F^\perp} h_{T_F}^{2(\alpha+\beta)} \right) \left\| D^{\alpha+\beta} u_b^\ell \right\|_{0, T_F}^2 \\ &\leq c \left( \varepsilon^2 b (h^2 b + h^2 b\varepsilon^{-2} + (bh)^2 b\varepsilon^{-2} + (bh)^2 b\varepsilon^{-4}) + (\varepsilon^2 + b^2 + \varepsilon^{-2} b^4) h^2 \right) \\ &\leq c(\varepsilon^2 b^2 + \varepsilon^2 + b^2 + b^4 + \varepsilon^{-2} b^4) h^2. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Durch Addieren von (3.34), (3.35) und (3.36) folgt die Abschätzung

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{\Omega_\ell^b}^b + \mathbf{II}_{\Omega_\ell^b}^b &= \mathbf{I}_{\Omega_\ell^b}^b + \mathbf{II}_{\Omega_\ell^{b+}}^b + \mathbf{II}_{\Omega_\ell^{b-}}^b \\ &\leq c \left( (\varepsilon^{-2} (b^3 + b^4) + b + b^2 + b^3 + b^4 + \varepsilon^2 (1 + b + b^2)) h^2 \right. \\ &\quad \left. + (\varepsilon^{-4} b^5 + \varepsilon^{-2} b^3 + b) h^4 \right) \end{aligned} \quad (3.37)$$

Ausgehend von Lemma 3.23 ergibt sich durch Summation der Abschätzungen (3.32), (3.33) und (3.37) über den einzelnen Teilgebieten die Beziehung

$$\begin{aligned} \|u_b - I_h u_b\|_{h, \Omega}^2 &\leq c \sum_{\ell=1}^2 \left( \mathbf{I}_{\Omega_\ell^i}^b + \mathbf{II}_{\Omega_\ell^i}^b + \mathbf{I}_{\Omega_\ell^b}^b + \mathbf{II}_{\Omega_\ell^b}^b + \mathbf{I}_{\Omega_\ell^c}^b + \mathbf{II}_{\Omega_\ell^c}^b \right) \\ &\leq c \left( (\varepsilon^{-2} (b^3 + b^4) + b + b^2 + b^3 + b^4 + \varepsilon^2 (1 + b + b^2)) h^2 \right. \\ &\quad \left. + (\varepsilon^{-4} b^6 + \varepsilon^{-4} b^5 + \varepsilon^{-2} b^3 + b + 1) h^4 \right) \\ &\leq c \left( (\varepsilon |\ln \varepsilon|^3 + \varepsilon |\ln \varepsilon| + \varepsilon^2) h^2 + (\varepsilon |\ln \varepsilon|^5 + \varepsilon |\ln \varepsilon|^3 + 1) h^4 \right) \\ &\leq c \left( \varepsilon |\ln \varepsilon|^3 h^2 + h^4 \right), \end{aligned}$$

wobei  $b = c\varepsilon |\ln \varepsilon|$  und die Abschätzungen  $b^\alpha \leq b^\beta$  für  $\alpha \geq \beta$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  sowie  $\varepsilon^2 \leq \varepsilon |\ln \varepsilon| \leq \varepsilon |\ln \varepsilon|^3$  für  $\varepsilon \leq \frac{1}{e}$  und  $\varepsilon |\ln \varepsilon|^3 \leq \varepsilon |\ln \varepsilon|^5 \leq c$  benutzt wurden.  $\square$

Nun wird der Interpolationsfehler des Lösungsanteil  $u_c$  untersucht.

**Lemma 3.26.** *Seien Annahme 3.15 und 3.20 erfüllt. Für den Eckensingularitätsanteil  $u_c \in H^{\frac{3}{2}+\delta}(\Omega)$  aus Annahme 3.15 gilt die Abschätzung*

$$\|u_c^\ell - I_h u_c^\ell\|_{h,\Omega}^2 \leq c\varepsilon^2 \kappa^2(h, \mu)$$

mit

$$\kappa^2(h, \mu) := \begin{cases} h^{\frac{2\lambda}{\mu}} & \text{für } \lambda < \mu \leq 1 \text{ und } \lambda \in (0, 1) \\ h^2 |\ln h| & \text{für } \mu = \lambda \text{ und } \lambda \in (0, 1) \\ h^2 & \text{für } 0 < \mu < \lambda \text{ und } \lambda \in (0, 1) \\ h^2 & \text{für } 0 < \mu \leq 1 \text{ und } \lambda \in (1, 2) \end{cases} \quad (3.38)$$

*Beweis.* Zur Abkürzung wird  $w^\ell := u_c^\ell - I_h u_c^\ell$  eingeführt. Zuerst werden die Energieanteile der Norm  $\|\cdot\|_{h,\Omega}$  betrachtet, also  $\varepsilon^2 \|\nabla w^\ell\|_{0,\Omega_\ell}^2 + \|\sqrt{a}w^\ell\|_{0,\Omega_\ell}^2$ . Mit den in Abschnitt 3.3.3 eingeführten  $\mathcal{C}$ - und  $\mathcal{D}$ -Mengen (3.11) und (3.12) sowie der Tatsache, dass nach Annahme 3.15  $|\nabla u_c^\ell| = 0$  und  $|u_c| = 0$  für  $T \in \mathcal{C}_h^\ell$  gilt, ergibt sich für  $\ell = 1, 2$

$$\begin{aligned} & \varepsilon^2 \|\nabla w^\ell\|_{0,\Omega_\ell}^2 + \|\sqrt{a}w^\ell\|_{0,\Omega_\ell}^2 \\ &= c \sum_{T \in \mathcal{D}_{0h}^\ell} \left( \varepsilon^2 |w^\ell|_{1,T}^2 + \|\sqrt{a}w^\ell\|_{0,T}^2 \right) + c \sum_{s=1}^S \sum_{T \in \mathcal{D}_{sh}^\ell} \left( \varepsilon^2 |w^\ell|_{1,T}^2 + \|\sqrt{a}w^\ell\|_{0,T}^2 \right). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Die weiteren Abschätzungen werden für  $T \in \mathcal{D}_{0h}^\ell$  und  $T \in \bigcup_{s=1,\dots,S} \mathcal{D}_{sh}^\ell$  getrennt vorgenommen.

(i<sub>a</sub>) Fall:  $T \in \mathcal{D}_{0h}^\ell$  ( $\ell = 1, 2$ ):

Es werden also alle Dreiecke  $T$  betrachtet, die den singulären Punkt  $P$  berühren. Nach der Dreiecksungleichung, der Ungleichung vom arithmetischen und quadratischen Mittel sowie der Beziehung  $\|a\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c$  gilt

$$\varepsilon^2 |w^\ell|_{1,T}^2 + \|\sqrt{a}w^\ell\|_{0,T}^2 \leq 2\varepsilon^2 \left( |u_c^\ell|_{1,T}^2 + |I_h u_c^\ell|_{1,T}^2 \right) + 2c \left( \|u_c^\ell\|_{0,T}^2 + \|I_h u_c^\ell\|_{0,T}^2 \right). \quad (3.40)$$

Die Normen bzw. Seminormen werden durch Nutzung der Darstellung von  $u_c$  und  $I_h u_c$  abgeschätzt. Mit der Lösungsdarstellung  $|D^\beta u_c| \leq c\varepsilon^{-\lambda} r^{\lambda-|\beta|} e^{-q\frac{r}{\varepsilon}} \leq c\varepsilon^{-\lambda} r^{\lambda-|\beta|}$  für  $\lambda < 2$ , siehe Annahme 3.15, gelten die Abschätzungen

$$\begin{aligned} |u_c^\ell|_{1,T}^2 &\leq \int_0^\omega \int_0^{h_T} |\nabla u_c^\ell|^2 r \, dr \, d\varphi \leq c\varepsilon^{-2\lambda} \int_0^\omega \int_0^{h_T} r^{2\lambda-1} \, dr \, d\varphi \leq c\varepsilon^{-2\lambda} h_T^{2\lambda}, \\ \|u_c^\ell\|_{0,T}^2 &\leq \int_0^\omega \int_0^{h_T} |D^0 u_c^\ell|^2 r \, dr \, d\varphi \leq c\varepsilon^{-2\lambda} \int_0^\omega \int_0^{h_T} r^{2\lambda+1} \, dr \, d\varphi \leq c\varepsilon^{-2\lambda} h_T^{2\lambda+2}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

(Der Fall  $\lambda = 2$  wurde der Einfachheit halber ausgeschlossen, und für  $\lambda > 2$  ist  $u_c = 0$  und liefert somit keinen Beitrag zur Fehlerabschätzung.) Die Lagrange-Interpolierende wird wie im Beweis von Lemma 2.27 im Punkt  $(i_a)$  als Polynom ersten Grades  $I_h u_c^\ell|_T = a_0 + a_1 x + a_2 y$  angesetzt, wobei die Nummerierung der Eckpunkte wieder so gewählt ist, dass  $r_1 = 0$  gilt. Für  $a_1^2 + a_2^2$  ergibt sich dann analog zu Beweis von Lemma 2.27 im Punkt  $(i_a)$  mit  $u_c^\ell \leq |D^0 u_c^\ell| \leq c\varepsilon^{-\lambda} r^\lambda$  (Annahme 3.15) die Abschätzung

$$a_1^2 + a_2^2 \leq c\varepsilon^{-2\lambda} h_T^{2\lambda-2}. \quad (3.42)$$

Da  $a_0 + a_1 x_1 + a_2 y_1 = u_c^\ell(r_1, \varphi_1) = 0$  gilt, folgt mit der Ungleichung vom arithmetischen und quadratischen Mittel, mit  $x|_T \leq x_1 + h_T$  und  $y|_T \leq y_1 + h_T$  sowie mit (3.42) die Beziehung

$$(a_0 + a_1 x + a_2 y)^2 = (a_1(x - x_1) + a_2(y - y_1))^2 \leq 2(a_1^2 + a_2^2) h_T^2 \leq c\varepsilon^{-2\lambda} h_T^{2\lambda}.$$

Damit und (3.42) ergibt sich

$$\begin{aligned} |I_h u_c^\ell|_{1,T}^2 &= \|(a_1^2 + a_2^2)\|_{0,T}^2 = (a_1^2 + a_2^2) \text{meas } T \leq c\varepsilon^{-2\lambda} h_T^{2\lambda}, \\ \|I_h u_c^\ell\|_{0,T}^2 &= \|a_0 + a_1 x + a_2 y\|_{0,T}^2 \leq \sup_{(x,y) \in T} (a_0 + a_1 x + a_2 y)^2 \text{meas } T \leq c\varepsilon^{-2\lambda} h_T^{2\lambda+2}. \end{aligned}$$

Zusammen mit (3.41) und (3.40) sowie der Beziehung  $h_T \leq c\varepsilon h^\frac{1}{\mu}$  (3.9) erhält man für alle  $T \in \mathcal{D}_{0h}^\ell$  ( $\ell = 1, 2$ ) die Abschätzung

$$\varepsilon^2 |w^\ell|_{1,T}^2 + \|\sqrt{aw}^\ell\|_{0,T}^2 \leq c \left( \varepsilon^{2-2\lambda} h_T^{2\lambda} + \varepsilon^{-2\lambda} h_T^{2\lambda+2} \right) \leq c\varepsilon^2 \left( h^\frac{2\lambda}{\mu} + h^\frac{2\lambda+2}{\mu} \right). \quad (3.43)$$

(ii<sub>a</sub>) Fall:  $T \in \mathcal{D}_{sh}^\ell$  ( $s = 1, \dots, S$  und  $\ell = 1, 2$ ):

Hier werden alle Dreiecke  $T \in \mathcal{C}_{0h}^\ell \setminus \mathcal{D}_{0h}^\ell = \bigcup_{s=1, \dots, S} \mathcal{D}_{sh}^\ell$  betrachtet. Da diese Elemente  $T$  den singulären Punkt  $P$  nicht berühren, folgt  $u_c|_T \in H^2(T)$ . Nach Annahme 3.15 gilt  $|D^\beta u_c| \leq c\varepsilon^{-\lambda} r^{\lambda-|\beta|} e^{-q\frac{r}{\varepsilon}}$  und mit  $e^{-q\frac{r}{\varepsilon}} \leq 1$ ,  $\lambda \in (0, 2)$  und  $r_T := \inf_{(x,y) \in T} r$  ergibt sich für  $|\beta| = 2$

$$\left| D^\beta u_c \right|^2 \leq \left| \varepsilon^{-\lambda} r^{\lambda-2} e^{-q\frac{r}{\varepsilon}} \right|^2 \leq \varepsilon^{-2\lambda} \sup_{(x,y) \in T} \left( r^{2\lambda-4} \right) \leq c\varepsilon^{-2\lambda} r_T^{2\lambda-4}$$

und somit  $\|D^\beta u_c^\ell\|_{0,T}^2 \leq c\varepsilon^{-2\lambda} r_T^{2\lambda-4} \text{meas } T \leq c\varepsilon^{-2\lambda} r_T^{2\lambda-4} h_T^2$ . Mit der Abkürzung  $\mathbf{I}_T^c$ , siehe (3.24), und der Beziehung  $h_{T,1} \sim h_{T,2} \leq h_T$  erhält man somit

$$\mathbf{I}_T^c := \sum_{|\alpha|=1} \sum_{|\beta|=1} \left( \varepsilon^2 h_T^{2\beta} + h_T^{2(\alpha+\beta)} \right) \left\| D^{\alpha+\beta} u_c^\ell \right\|_{0,T}^2 \leq c \left( \varepsilon^2 h_T^4 + h_T^6 \right) \varepsilon^{-2\lambda} r_T^{2\lambda-4}. \quad (3.44)$$

Mit der Definition der Radien  $R_s$  (3.10), der Mengen  $\mathcal{D}_{sh}^\ell$  (3.12) und der Beziehung  $h_T \leq c\varepsilon h \left( \frac{r_T}{\varepsilon} \right)^{1-\mu}$  (3.9) werden  $r_T$  und  $h_T$  abgeschätzt. Es gilt

$$\begin{aligned} r_T &\geq R_{s-1} = c\varepsilon (s-1)^\frac{1}{\mu} h^\frac{1}{\mu} & \forall T \in \mathcal{D}_{sh}^\ell \quad s = 2, \dots, S, \\ r_T &\geq R_0 + c\varepsilon h^\frac{1}{\mu} = c\varepsilon h^\frac{1}{\mu} & \forall T \in \mathcal{D}_{1h}^\ell, \\ h_T &\leq c\varepsilon h \left( \frac{R_s}{\varepsilon} \right)^{1-\mu} = c\varepsilon s^\frac{1}{\mu-1} h^\frac{1}{\mu} & \forall T \in \mathcal{D}_{sh} \quad s = 1, \dots, S. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Durch Einsetzen dieser Ungleichungen in (3.44) ergibt sich für Elemente aus  $\mathcal{C}_{0h}^\ell \setminus \mathcal{D}_{0h}^\ell$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_T^c &\leq c\varepsilon^2 \left( h^{\frac{2\lambda}{\mu}} s^{\frac{4}{\mu}-4} + h^{\frac{2\lambda+2}{\mu}} s^{\frac{6}{\mu}-6} \right) (s-1)^{\frac{2\lambda-4}{\mu}} \quad \forall T \in \mathcal{D}_{sh} \quad s = 2, \dots, S, \\ \mathbf{I}_T^c &\leq c\varepsilon^2 \left( h^{\frac{2\lambda}{\mu}} + h^{\frac{2\lambda+2}{\mu}} \right) \quad \forall T \in \mathcal{D}_{1h}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Für die Summe aller Elemente  $T \in \mathcal{D}_{sh}^\ell$  mit  $s = 2, \dots, S$  erhält man durch Anwenden von Beziehung (3.13) und Lemma 2.26 mit  $\mu \in (0, 1]$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} \sum_{s=2}^S \sum_{T \in \mathcal{D}_{sh}^\ell} \mathbf{I}_T^c &\leq c \sum_{s=2}^S \sum_{T \in \mathcal{D}_{sh}^\ell} \varepsilon^2 \left( h^{\frac{2\lambda}{\mu}} s^{\frac{4}{\mu}-4} + h^{\frac{2\lambda+2}{\mu}} s^{\frac{6}{\mu}-6} \right) (s-1)^{\frac{2\lambda-4}{\mu}} \\ &\leq c\varepsilon^2 h^{\frac{2\lambda}{\mu}} \sum_{s=2}^S s^{\frac{4}{\mu}-3} (s-1)^{\frac{2\lambda-4}{\mu}} + c\varepsilon^2 h^{\frac{2\lambda+2}{\mu}} \sum_{s=2}^S s^{\frac{6}{\mu}-5} (s-1)^{\frac{2\lambda-4}{\mu}} \\ &\leq c\varepsilon^2 (\kappa_1(h, \mu) + \kappa_2(h, \mu)) \end{aligned}$$

mit

$$\kappa_1(h, \mu) := \begin{cases} h^{\frac{2\lambda}{\mu}} & \text{für } \mu > \lambda \\ h^2 |\ln h| & \text{für } \mu = \lambda \\ h^2 & \text{für } \mu < \lambda \end{cases}, \quad \kappa_2(h, \mu) := \begin{cases} h^{\frac{2\lambda+2}{\mu}} & \text{für } \mu > \frac{\lambda+1}{2} \\ h^4 |\ln h| & \text{für } \mu = \frac{\lambda+1}{2} \\ h^4 & \text{für } \mu < \frac{\lambda+1}{2} \end{cases}.$$

Es gilt  $\lambda \leq \frac{\lambda+1}{2} \leq 1$  für  $\lambda \in (0, 1]$  und  $1 < \frac{\lambda+1}{2} < \lambda$  für  $\lambda \in (1, 2)$ . Wegen  $\mu \in (0, 1]$  gilt zusammen mit der Definition (3.38) von  $\kappa(h, \mu)$  und den Abschätzungen  $h^{\frac{2\lambda+2}{\mu}} < h^{\frac{2\lambda}{\mu}}$ ,  $h^4 |\ln h| < h^{\frac{2\lambda}{\mu}}$ ,  $h^4 < h^{\frac{2\lambda}{\mu}}$  für jeweils  $\lambda < \mu$  sowie  $h^4 < h^2 |\ln h|$  und  $h^4 < h^2$  die Beziehung

$$\begin{aligned} \sum_{s=2}^S \sum_{T \in \mathcal{D}_{sh}^\ell} \mathbf{I}_T^c &\leq c\varepsilon^2 \begin{cases} h^{\frac{2\lambda}{\mu}} + h^{\frac{2\lambda+2}{\mu}} & \text{für } \lambda < \frac{\lambda+1}{2} < \mu \leq 1 \\ h^{\frac{2\lambda}{\mu}} + h^4 |\ln h| & \text{für } \lambda < \mu = \frac{\lambda+1}{2} < 1 \\ h^{\frac{2\lambda}{\mu}} + h^4 & \text{für } \lambda < \mu < \frac{\lambda+1}{2} < 1 \\ h^2 |\ln h| + h^4 & \text{für } \mu = \lambda < \frac{\lambda+1}{2} < 1 \\ h^2 + h^4 & \text{für } \mu < \lambda \leq \frac{\lambda+1}{2} \leq 1 \\ h^2 |\ln h| + h^4 |\ln h| & \text{für } \mu = \lambda = \frac{\lambda+1}{2} = 1 \\ h^2 + h^4 & \text{für } \mu \leq 1 < \frac{\lambda+1}{2} < \lambda < 2 \end{cases} \\ &\leq c\varepsilon^2 \kappa^2(h, \mu). \end{aligned} \quad (3.47)$$

Nach (3.23) mit  $\|a\|_{L^\infty(T)} \leq c$  sowie (3.46) und (3.47) folgt die Abschätzung

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^S \sum_{T \in \mathcal{D}_{sh}^\ell} \varepsilon^2 \|\nabla w^\ell\|_{0,T}^2 + \|\sqrt{a} w^\ell\|_{0,T}^2 &\leq c \sum_{T \in \mathcal{D}_{1h}^\ell} \mathbf{I}_T^c + c \sum_{s=2}^S \sum_{T \in \mathcal{D}_{sh}^\ell} \mathbf{I}_T^c \\ &\leq c\varepsilon^2 \left( h^{\frac{2\lambda}{\mu}} + h^{\frac{2\lambda+2}{\mu}} \right) + c\varepsilon^2 \kappa^2(h, \mu). \end{aligned} \quad (3.48)$$

### 3 Singulär gestörtes Reaktions-Diffusions-Problem

Durch Einsetzen von (3.43) und (3.48) in (3.39) ergibt sich mit  $h^{\frac{2\lambda+2}{\mu}} < h^{\frac{2\lambda}{\mu}}$ ,  $h^{\frac{2\lambda+2}{\mu}} < h^{\frac{2\lambda}{\mu}} < h^2 |\ln h|$  für  $\mu = \lambda$  und  $h^{\frac{2\lambda+2}{\mu}} < h^{\frac{2\lambda}{\mu}} < h^2$  für  $\mu < \lambda$  die Beziehung

$$\varepsilon^2 \|\nabla w^\ell\|_{0,\Omega_\ell}^2 + \|\sqrt{a}w^\ell\|_{0,\Omega_\ell}^2 \leq c\varepsilon^2 \kappa^2(h, \mu). \quad (3.49)$$

Als nächstes wird der Interpolationsfehler des Lösungsanteils  $u_c$  sowie seine Normalenableitung auf der Kante  $\Gamma$  betrachtet, also die beiden letzten Summen von (3.14). Durch Anwenden der Dreiecksungleichung, der Ungleichung vom arithmetischen und quadratischen Mittel und Lemma 3.10, bzw. durch Abschätzen des Betrages der Normalenableitung gegen den des Gradientens und Lemma 3.10 ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|w^1 - w^2\|_{0,E}^2 &\leq 2 \sum_{\ell=1}^2 \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|w^\ell\|_{0,E}^2 \leq c \sum_{\ell=1}^2 \sum_{F \in \mathcal{E}_h^\ell} h_F^{-1} \|w^\ell\|_{0,F}^2, \\ \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E \left\| \alpha_\ell \frac{\partial w^\ell}{\partial n_\ell} \right\|_{0,E}^2 &\leq \alpha_\ell^2 \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E \|\nabla w^\ell\|_{0,E}^2 \leq c \sum_{F \in \mathcal{E}_h^\ell} h_F \|\nabla w^\ell\|_{0,F}^2. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Es wird wieder zwischen Dreiecken  $T_F \in \mathcal{D}_{0h}^\ell$  und  $T_F \in \bigcup_{s=1}^S \mathcal{D}_{sh}^\ell$  unterschieden.

(i<sub>b</sub>) Fall:  $F \in \mathcal{E}_h^\ell$  mit  $T_F \in \mathcal{D}_{0h}^\ell$  ( $\ell = 1, 2$ ):

Es werden also die Intervalle  $F$  betrachtet, die den singulären Punkt  $P$  berühren. Mit der Dreiecksungleichung ergibt sich

$$\begin{aligned} h_F^{-1} \|w^\ell\|_{0,F}^2 &\leq 2 \left( h_F^{-1} \|u_c^\ell\|_{0,F}^2 + h_F^{-1} \|I_h u_c^\ell\|_{0,F}^2 \right) \\ h_F \|\nabla w^\ell\|_{0,F}^2 &\leq 2 \left( h_F \|\nabla u_c^\ell\|_{0,F}^2 + h_F \|\nabla (I_h u_c^\ell)\|_{0,F}^2 \right). \end{aligned} \quad (3.51)$$

Diese Normen werden unter Nutzung der expliziten Darstellung von  $u_c^\ell$  aus Annahme 3.15 bzw. von  $I_h u_c^\ell$  als Polynom ersten Grades abgeschätzt. Mit Hilfe von Annahme 3.15 ( $|D^\beta u_c| \leq c\varepsilon^{-\lambda} r^{\lambda-|\beta|} e^{-q\frac{r}{\varepsilon}} \leq c\varepsilon^{-\lambda} r^{\lambda-|\beta|}$  für  $\lambda < 2$ ) erhält man

$$h_F^{-1} \|u_c^\ell\|_{0,F}^2 \leq c\varepsilon^{-2\lambda} h_F^{2\lambda}, \quad h_F \|\nabla u_c^\ell\|_{0,F}^2 \leq c\varepsilon^{-2\lambda} h_F^{2\lambda}. \quad (3.52)$$

Die Lagrange-Interpolierende  $I_h u_c^\ell$  wird analog zum Beweis von Lemma 2.27 in Punkt (i<sub>b</sub>) als Polynom ersten Grades angesetzt, wobei die Intervallenden von  $F$  so nummeriert seien, dass  $r_1 = 0$  und  $r_2 = h_F$  gilt. Mit dem Winkel  $\varphi_\Gamma$  der Schnittkante  $\Gamma$  (vgl. Abbildung 2.5) und  $|D^0 u_c| \leq c\varepsilon^{-\lambda} r^{\lambda-0} e^{-q\frac{r}{\varepsilon}} \leq c\varepsilon^{-\lambda} r^\lambda$  (siehe Annahme 3.15) ergibt sich somit

$$I_h u_c^\ell|_F = \frac{u_c^\ell(h_F, \varphi_\Gamma)}{h_F} r \leq c\varepsilon^{-\lambda} h_F^{\lambda-1} r.$$

Nach (3.42) gilt für die Interpolierende  $I_h u_c^\ell|_{T_F} = a_0 + a_1 x + a_2 y$  über dem zu  $F$  gehörenden Dreieck  $T_F$  die Abschätzung

$$|\nabla (I_h u_c^\ell)|^2 = a_1^2 + a_2^2 \leq c\varepsilon^{-2\lambda} h_{T_F}^{2\lambda-2}.$$



Damit können nun die Normen der Interpolierenden berechnet werden. Mit  $h_F \sim h_{T_F}$  (isotrope Dreiecke, siehe Annahme 3.20) ergibt sich

$$h_F^{-1} \|I_h u_c^\ell\|_{0,F}^2 \leq c\varepsilon^{-2\lambda} h_F^{2\lambda}, \quad h_F \|\nabla(I_h u_c^\ell)\|_{0,F}^2 \leq c\varepsilon^{-2\lambda} h_F^{2\lambda}.$$

Setzt man dies zusammen mit (3.52) in (3.51) ein und benutzt Beziehung (3.9) ( $h_F \leq c\varepsilon h^{\frac{1}{\mu}}$ ), so erhält man für alle  $F \in \mathcal{E}_h^\ell$  mit  $T_F \in \mathcal{D}_{0h}^\ell$  und  $\ell = 1, 2$  die Abschätzung

$$h_F^{-1} \|w^\ell\|_{0,F}^2 \leq c\varepsilon^{-2\lambda} h_F^{2\lambda} \leq ch^{\frac{2\lambda}{\mu}}, \quad h_F \|\nabla w^\ell\|_{0,F}^2 \leq c\varepsilon^{-2\lambda} h_F^{2\lambda} \leq ch^{\frac{2\lambda}{\mu}}. \quad (3.53)$$

(ii<sub>b</sub>) Fall:  $F \in \mathcal{E}_h^\ell$  mit  $T_F \in \mathcal{D}_{sh}^\ell$  ( $s = 1, \dots, S$  und  $\ell = 1, 2$ )

Hier werden alle Kanten  $F \in \mathcal{E}_h^\ell$  von Dreiecken  $T_F \in \mathcal{D}_{sh}^\ell$  betrachtet, die den singulären Punkt  $P$  nicht berühren. Somit gilt  $u_c^\ell|_T \in H^2(T)$  und es kann wie im Beweis von Lemma 3.23 vorgegangen werden. Nach (3.21) und wegen der Verwendung isotroper Dreiecke gilt

$$\begin{aligned} h_F^{-1} \|w^\ell\|_{0,F}^2 &\leq c \frac{1}{h_F h_F^\perp} \sum_{|\beta|=2} h_T^{2\beta} \|D^\beta u_c^\ell\|_{0,T}^2 \leq ch_T^2 |u_c^\ell|_{2,T}^2, \\ h_F \|\nabla w^\ell\|_{0,F}^2 &\leq c \frac{h_F}{h_F^\perp} \sum_{|\alpha|=1} \sum_{|\beta|=1} h_T^{2\beta} \|D^{\alpha+\beta} u_c^\ell\|_{0,T}^2 \leq ch_T^2 |u_c^\ell|_{2,T}^2. \end{aligned}$$

Mit  $|u_c^\ell|_{2,T}^2 = \|D^2 u_c^\ell\|_{0,T}^2 \leq c\varepsilon^{-2\lambda} r_T^{2\lambda-4} h_T^2$ , siehe (ii<sub>a</sub>), und den  $r_T$ - und  $h_T$ -Abschätzungen (3.45) folgt für  $F \in \mathcal{E}_h^\ell$  ( $\ell = 1, 2$ )

$$\begin{aligned} h_F^{-1} \|w^\ell\|_{0,F}^2 &\leq ch^{\frac{2\lambda}{\mu}} s^{\frac{4}{\mu}-4} (s-1)^{\frac{2\lambda-4}{\mu}} \quad \text{für } T_F \in \mathcal{D}_{sh}^\ell, \quad s = 2, \dots, S, \\ h_F^{-1} \|w^\ell\|_{0,F}^2 &\leq ch^{\frac{2\lambda}{\mu}} \quad \text{für } T_F \in \mathcal{D}_{1h}^\ell, \\ h_F \|\nabla w^\ell\|_{0,F}^2 &\leq ch^{\frac{2\lambda}{\mu}} s^{\frac{4}{\mu}-4} (s-1)^{\frac{2\lambda-4}{\mu}} \quad \text{für } T_F \in \mathcal{D}_{sh}^\ell, \quad s = 2, \dots, S, \\ h_F \|\nabla w^\ell\|_{0,F}^2 &\leq ch^{\frac{2\lambda}{\mu}} \quad \text{für } T_F \in \mathcal{D}_{1h}^\ell. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Wegen  $u_c^\ell|_{T \in \mathcal{C}_h^\ell} = 0$  sind auch die Normanteile der Interpolationsfehler auf der Schnittkante  $\Gamma$  außerhalb des graduierten Bereichs ( $T \in \mathcal{C}_{0h}^\ell$ ) gleich null. Zusammen mit (3.50), (3.53), (3.54) und der Beziehung (3.13) sowie Lemma 2.26 mit  $\mu \in (0, 1]$  und  $s^{\frac{4}{\mu}-4} \leq s^{\frac{4}{\mu}-3}$  erhält man die Abschätzung

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E \left\| \alpha_\ell \frac{\partial w^\ell}{\partial n_\ell} \right\|_{0,E}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|w^1 - w^2\|_{0,E}^2 &\leq c\varepsilon^2 h^{\frac{2\lambda}{\mu}} \left( 1 + \sum_{s=2}^S s^{\frac{4}{\mu}-4} (s-1)^{\frac{2\lambda-4}{\mu}} \right) \\ &\leq c\varepsilon^2 \begin{cases} h^{\frac{2\lambda}{\mu}} & \text{für } \lambda < \mu \leq 1 \\ h^{\frac{2\lambda}{\mu}} |\ln h| & \text{für } \mu = \lambda \\ h^2 & \text{für } 0 < \mu < \lambda \end{cases} \\ &\leq c\varepsilon^2 \kappa^2(h, \mu), \end{aligned} \quad (3.55)$$

wobei die Beziehungen  $h^{\frac{2\lambda}{\mu}} < h^2 |\ln h|$  für  $\mu = \lambda$  und  $h^{\frac{2\lambda}{\mu}} < h^2$  für  $\mu < \lambda$  und die Definition (3.38) von  $\kappa(h, \mu)$  benutzt wurden. Durch Addition von (3.49) und (3.55) erhält man die zu beweisende Abschätzung.  $\square$

Mit den Abschätzungen der einzelnen Lösungsanteile (Lemma 3.24, 3.25 und 3.26) sowie Satz 3.22 kann jetzt die a-priori-Fehlerabschätzung des Finite-Elemente-Mortarings nach Nitsche formuliert werden.

**Satz 3.27.** Sei  $u \in H^{\frac{3}{2}+\delta}(\Omega)$  die Lösung von Aufgabe (3.1) mit dem wie in Annahme 3.15 beschriebenen Lösungsverhalten. Weiter sei  $u_h \in V_h$  mit Polynomgrad  $k = 1$  die Nitsche-Finite-Elemente-Näherung gemäß (3.3) auf anisotropen und graduierten Netzen  $\mathcal{T}_h^1, \mathcal{T}_h^2$  und  $\mathcal{E}_h$ , die die Annahme 3.20 mit  $b = b_0 \varepsilon |\ln \varepsilon|$ ,  $b_0 \geq \frac{k+1}{q}$  erfüllen ( $k = 1$  der Polynomgrad und  $q$  aus Annahme 3.15). Mit  $\gamma > C_I$  gilt dann für die Fehler  $u - u_h$  bzw.  $u - I_h u$  die Abschätzung

$$\|u - u_h\|_{1,h} \leq \|u - u_h\|_{h,\Omega} \leq c \|u - I_h u\|_{h,\Omega} \leq c \left( \varepsilon^{\frac{1}{2}} |\ln \varepsilon|^{\frac{3}{2}} \kappa(h, \mu) + h^2 \right),$$

wobei  $\kappa(h, \mu)$  wie in (3.38) definiert ist,  $h \in (0, h_0)$  der Diskretisierungsparameter und  $\mu \in (0, 1]$  der Graduierungsparameter ist.

*Beweis.* Nach Annahme 3.15 gilt  $u = u_s + u_r + u_b + u_c$ . Mit der Dreiecksungleichung erhält man

$$\|u - I_h u\|_{h,\Omega} \leq \|u_s - I_h u_s\|_{h,\Omega} + \|u_r - I_h u_r\|_{h,\Omega} + \|u_b - I_h u_b\|_{h,\Omega} + \|u_c - I_h u_c\|_{h,\Omega}.$$

Durch Einsetzen der Abschätzungen von Lemma 3.24, 3.25 und 3.26 folgt mit Satz 3.22 die Beziehung

$$\|u - u_h\|_{1,h} \leq \|u - u_h\|_{h,\Omega} \leq c \|I_h u - u\|_{h,\Omega} \leq c \left( \varepsilon^{\frac{1}{2}} |\ln \varepsilon|^{\frac{3}{2}} h + h^2 \right) + c \varepsilon \kappa(h, \mu).$$

Mit  $\varepsilon \leq \varepsilon^{\frac{1}{2}} |\ln \varepsilon|^{\frac{3}{2}}$  und  $h \leq \kappa(h, \mu)$  folgt dann die zu beweisende Aussage.  $\square$

Somit werden beim Finite-Elemente-Mortaring nach einer Methode von Nitsche auf lokal verfeinerten Netzen ( $0 < \mu < \lambda < 1$ ) für den Fehler in der Norm  $\|\cdot\|_{1,h}$  Konvergenzordnungen wie auch in [1, Theorem 5.9] für die Energienorm erreicht.

## 3.4 Numerische Ergebnisse

Für die folgenden numerischen Untersuchungen wird die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} -\varepsilon^2 \Delta u + u &= f \text{ in } \Omega, \\ u &= g \text{ auf } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{3.56}$$

über dem L-förmigen Gebiet  $\Omega := (-1, 1) \times (-1, 1) \setminus [0, 1] \times [-1, 0] \subset \mathbb{R}^2$  mit inhomogenen Dirichletrandbedingungen und dem Diffusionskoeffizient  $\varepsilon^2 \in \{10^{-2}, 10^{-4}, \dots, 10^{-12}\}$  betrachtet. Die Funktionen  $f$  und  $g$  sind so gewählt, dass für die Lösung  $u$  der Aufgabe (3.56)

$$u = 1 + c \eta(r) \sin(\lambda \varphi) \varepsilon^{-\lambda} r^\lambda e^{-q \frac{r}{\varepsilon}} - \begin{cases} e^{q \frac{x}{\varepsilon}} & \text{für } x \leq 0, y < 0 \\ e^{-q \frac{x}{\varepsilon}} & \text{für } x \leq 0, y \geq 0 \\ e^{-q \frac{y}{\varepsilon}} & \text{für } x > 0, y \geq 0 \end{cases}$$

gilt (vgl. Abbildung 3.5). Dabei sind  $(r, \varphi)$  die Polarkoordinaten an der einspringenden Ecke im Punkt  $P = (0, 0)$ , und  $\lambda = \frac{2}{3}$  ist der Singularitätsexponent. Weiterhin sind  $q = 1$ ,  $c = 0.5$  und  $\eta(r)$  eine

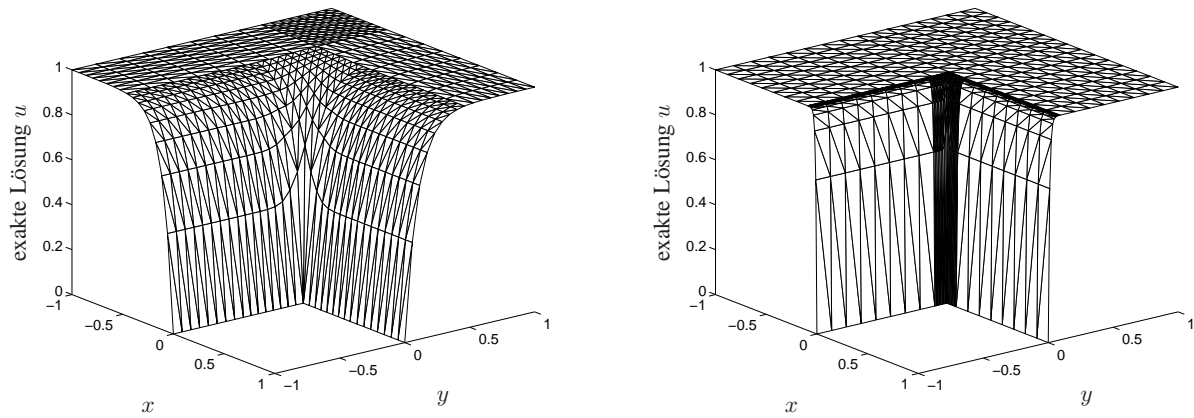


Abbildung 3.5: Lösung  $u$  für  $\varepsilon = 10^{-1}$  (links) und  $\varepsilon = 10^{-2}$  (rechts)

Abschneidefunktion mit  $\eta(r) = 1 - \frac{r^3}{\varepsilon^3}$  für  $r \in [0, \frac{\varepsilon}{2})$ ,  $\eta(r) = \frac{(4\varepsilon - r)^3}{49\varepsilon^3}$  für  $r \in [\frac{\varepsilon}{2}, 4\varepsilon)$  und null sonst. Es treten also nur eine Eckensingularität in der Umgebung von  $P$  und zwei Randschichten an den Kanten  $\Gamma_1 := \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in (-1, 0)\}$  und  $\Gamma_2 := \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, 1)\}$  auf, vgl. Abbildung 3.6 und 3.5.

Das Gebiet  $\Omega$  wird in zwei Teilgebiete (vgl. Abbildung 3.6) zerlegt, die unabhängig voneinander vernetzt werden. Die numerischen Berechnungen erfolgen hier zum einen auf isotropen, nicht graduierten Netzen (vgl. Abbildung 3.7) und zum anderen auf Netzen mit anisotropen Dreiecke in den Randschichten und Graduierung an der einspringenden Ecke (vgl. Abbildung 3.8). Die Knoten der Teilgebietstriangulationen auf der Schnittkante  $\Gamma$  stimmen im Allgemeinen nicht überein. Die Verfeinerung erfolgt wieder durch Teilung aller Dreiecke in jeweils vier kongruente Dreiecke pro Verfeinerungsschritt und gegebenenfalls durch Graduierung mit  $\mu = 0.7\lambda = 0.4\bar{6}$ , so dass wie in Abschnitt 3.3.3 dargestellte Netze entstehen.

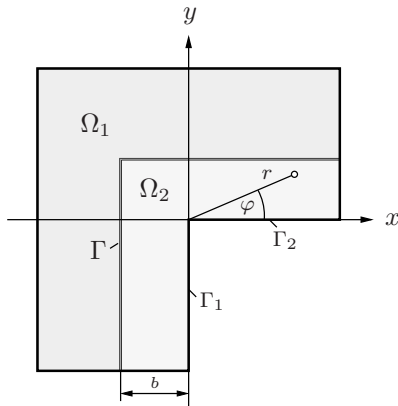


Abbildung 3.6: Berechnungsgebiet

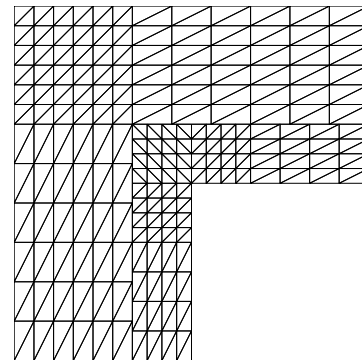


Abbildung 3.7: Isotropes  $h_1$ -Netz ( $b = \frac{1}{3}$ )

Die theoretische Fehlerabschätzung aus Satz 3.27 wird hier numerisch untersucht durch Variation des Diskretisierungsparameter  $h$  für festes  $\varepsilon$  (siehe Tabelle 3.1) und Variation der Diffusionsparameters  $\varepsilon$  für festes  $h$  (siehe Tabelle 3.2).

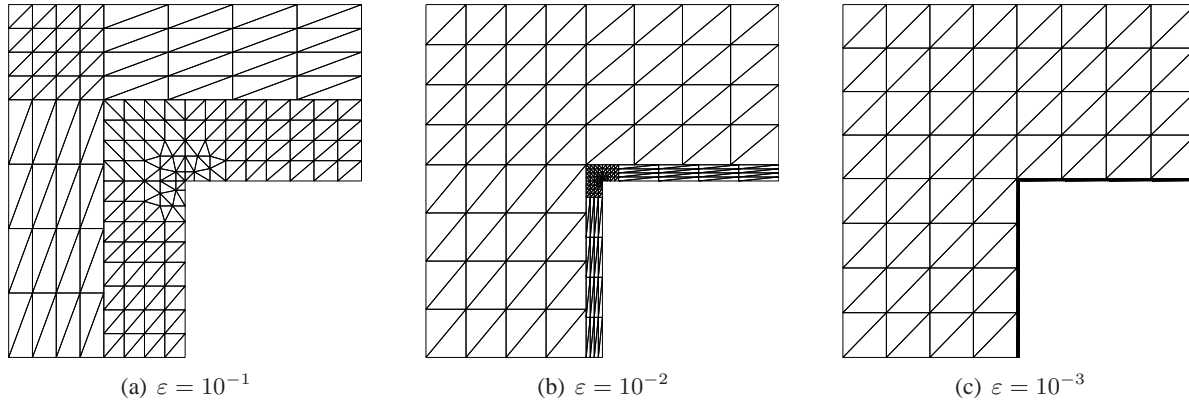


Abbildung 3.8: Netze auf dem  $h_1$ -Level mit anisotropen Dreiecken ( $b = 2\varepsilon |\ln \varepsilon|$ ) und Graduierung ( $\mu = 0.7\lambda$ ) für verschiedene Werte von  $\varepsilon$

Wie in Abschnitt 2.5.1 beschrieben, können auch hier für feste  $\varepsilon$  die Konvergenzordnungen für die Norm  $\|\cdot\|_{1,h}$  bezüglich  $h$  berechnet werden. Sie wird zusammen mit den Fehlern in der Norm  $\|\cdot\|_{1,h}$  in Tabelle 3.1 für  $b = \frac{1}{3}$  (keine anisotropen Dreiecke) und für  $b = 2\varepsilon |\ln \varepsilon|$  (mit Graduierung an der Ecke  $P$ ) angegeben. Man erkennt, dass für  $b = 2\varepsilon |\ln \varepsilon|$  und  $\mu = 0.7\lambda$  optimale Konvergenzordnungen von ungefähr eins erreicht werden, vgl. Satz 3.27. Für das feste  $b = \frac{1}{3}$  hingegen erhält man für  $\varepsilon \ll 1$  nur Konvergenzordnungen von ungefähr ein halb.

Rand- schicht- dicke $b$	$\varepsilon = 10^{-1}$		$\varepsilon = 10^{-2}$		$\varepsilon = 10^{-3}$		$\varepsilon = 10^{-5}$		$\varepsilon = 10^{-6}$	
	Fehler	$\beta$	Fehler	$\beta$	Fehler	$\beta$	Fehler	$\beta$	Fehler	$\beta$
$\frac{1}{3}$	2.582e-02		5.858e-02	0.94	1.005e-01	0.66	1.102e-01	0.50	1.102e-01	0.50
	1.371e-02	0.91	3.044e-02	0.98	6.376e-02	0.69	7.775e-02	0.50	7.775e-02	0.50
	7.363e-03	0.90	1.546e-02	0.99	3.945e-02	0.82	5.491e-02	0.50	5.491e-02	0.50
	4.013e-03	0.88	7.802e-03	0.99	2.236e-02	0.93	3.880e-02	0.50	3.880e-02	0.50
	2.225e-03	0.85	3.941e-03		1.171e-02		2.743e-02		2.743e-02	
$2\varepsilon  \ln \varepsilon $	2.536e-02		1.636e-02	1.00	7.805e-03	0.99	1.287e-03	0.98	4.845e-04	0.97
	1.268e-02	1.00	8.202e-03	1.00	3.924e-03	1.00	6.531e-04	0.99	2.473e-04	0.99
	6.361e-03	1.00	4.105e-03	1.00	1.965e-03	1.00	3.279e-04	1.00	1.244e-04	1.00
	3.218e-03	0.98	2.054e-03	1.00	9.832e-04	1.00	1.641e-04	1.00	6.227e-05	1.00
	1.618e-03	0.99	1.027e-03	1.00	4.917e-04	1.00	8.209e-05	1.00	3.115e-05	1.00

Tabelle 3.1: Fehler  $\|u - u_h\|_{1,h}$  jeweils von Levels  $h_3$  bis  $h_7$  und die sich zwischen den Levels ergebenden Konvergenzordnungen  $\beta$  bzgl.  $h$  ( $\mathcal{E}_h = \mathcal{E}_h^1$ ,  $\alpha_1 = 1$  und  $\gamma = 5$ )

In Tabelle 3.2 sind die Fehler  $\|u - u_h\|_{1,h}$  jeweils für  $\varepsilon = 10^{-1}, 10^{-2}, \dots, 10^{-6}$  und festes  $h \in \{h_4, \dots, h_7\}$  sowie Zahlen  $\alpha_\varepsilon$  angegeben. Die  $\alpha_\varepsilon$  werden unter der Annahme berechnet, dass  $h$  und  $\varepsilon$  klein genug ist, so dass von

$$\|u - u_{h,\varepsilon}\|_{1,h} \approx C\varepsilon^{\alpha_\varepsilon} |\ln \varepsilon|^{\frac{3}{2}}$$

mit einer Konstanten  $C$ , die jeweils für zwei aufeinander folgende  $\varepsilon$  ungefähr gleich groß ist ausgegangen werden kann. Damit lässt sich der Exponent  $\alpha_\varepsilon$  aus zwei aufeinander folgenden  $\varepsilon$  mit  $\varepsilon_l := 10^{-l}$  und  $\varepsilon_{l+1} := 10^{-(l+1)}$  bestimmen. Es gilt

$$\alpha_\varepsilon = \log_{10} \left( \frac{l+1}{l} \frac{\|u - u_{h,\varepsilon_l}\|_{1,h}}{\|u - u_{h,\varepsilon_{l+1}}\|_{1,h}} \right).$$

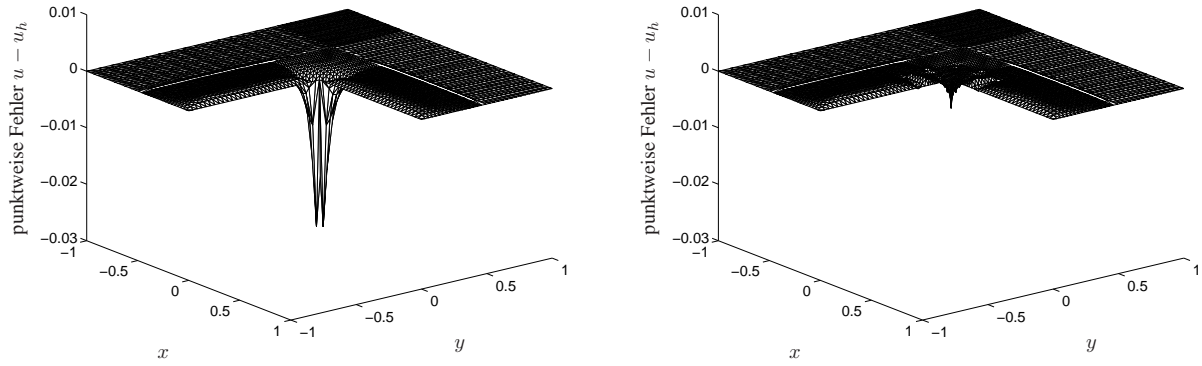
Man erkennt, dass für das geeignete, an das anisotrope Lösungsverhalten angepasste  $b = 2\varepsilon|\ln\varepsilon|$ , wie in Satz 3.27 bewiesen, Ordnungen  $\alpha_\varepsilon$  von ungefähr  $\frac{1}{2}$  erhalten werden. Für das feste  $b = \frac{1}{3}$  ist dies nicht der Fall.

Rand- schicht- dicke $b$	$h_4$ -Level		$h_5$ -Level		$h_6$ -Level		$h_7$ -Level	
	$\ u - u_h\ _{1,h}$	$\alpha_\varepsilon$	$\ u - u_h\ _{1,h}$	$\alpha_\varepsilon$	$\ u - u_h\ _{1,h}$	$\alpha_\varepsilon$	$\ u - u_h\ _{1,h}$	$\alpha_\varepsilon$
$\frac{1}{3}$	1.371e-02		7.363e-03		4.013e-03		2.225e-03	
	3.044e-02	-0.05	1.546e-02	-0.02	7.802e-03	0.01	3.941e-03	0.05
	6.376e-02	-0.15	3.945e-02	-0.23	2.236e-02	-0.28	1.171e-02	-0.30
	7.773e-02	0.04	5.435e-02	-0.01	3.640e-02	-0.09	2.328e-02	-0.17
	7.775e-02	0.10	5.491e-02	0.09	3.880e-02	0.07	2.743e-02	0.03
	7.775e-02	0.08	5.491e-02	0.08	3.880e-02	0.08	2.743e-02	0.08
$2\varepsilon \ln\varepsilon $	1.268e-02		6.361e-03		3.218e-03		1.618e-03	
	8.202e-03	0.49	4.105e-03	0.49	2.054e-03	0.50	1.027e-03	0.50
	3.924e-03	0.50	1.965e-03	0.50	9.832e-04	0.50	4.917e-04	0.50
	1.655e-03	0.50	8.297e-04	0.50	4.152e-04	0.50	2.076e-04	0.50
	6.531e-04	0.50	3.279e-04	0.50	1.641e-04	0.50	8.209e-05	0.50
	2.473e-04	0.50	1.244e-04	0.50	6.227e-05	0.50	3.115e-05	0.50

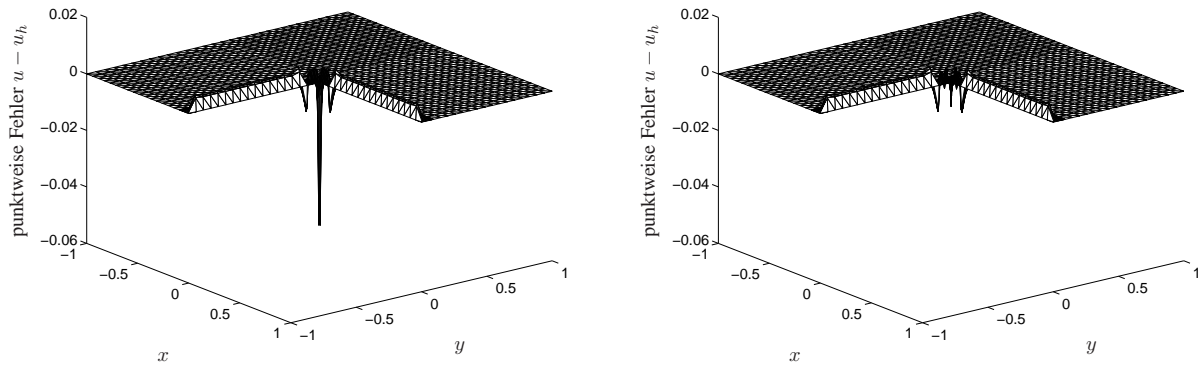
Tabelle 3.2: Fehler  $\|u - u_h\|_{1,h}$  jeweils für  $\varepsilon = 10^{-1}$  bis  $10^{-6}$  und die sich zwischen den Fehlern ergebenden Konvergenzordnungen  $\alpha_\varepsilon$  ( $\mathcal{E}_h = \mathcal{E}_h^1$ ,  $\alpha_1 = 1$  und  $\gamma = 5$ )

In Abbildung 3.9 sind die punktwisen Fehler auf Netzen vom Level  $h_3$  mit anisotropen Dreiecken in den Randschichten mit  $b = 2\varepsilon|\ln\varepsilon|$  für  $\varepsilon = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$  dargestellt, wobei links jeweils ohne Graduierung und rechts mit Graduierung ( $\mu = 0.7\lambda$ ) gerechnet wurde. Auch hier wird der Einfluss der Singularität auf den Fehler sowie dessen Verringerung bei Verwendung von graduierten Netzen deutlich.

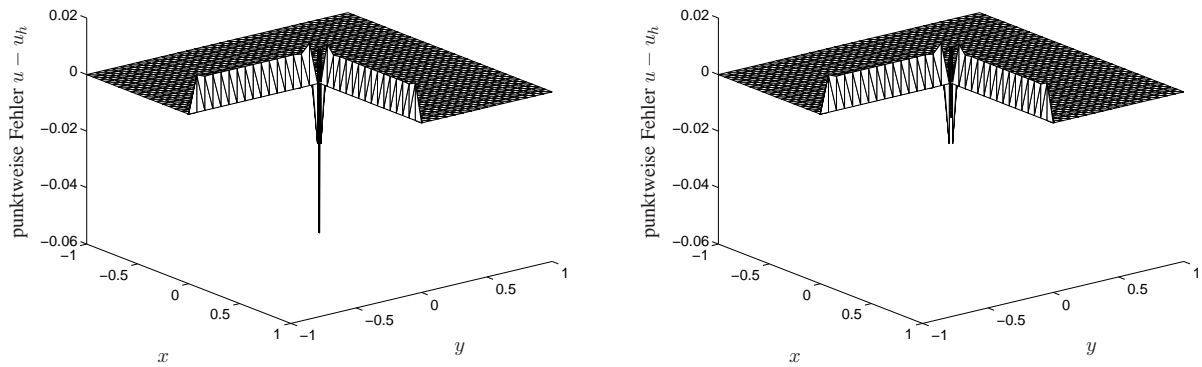
### 3 Singulär gestörtes Reaktions-Diffusions-Problem



(a)  $\varepsilon = 10^{-1}$



(b)  $\varepsilon = 10^{-2}$



(c)  $\varepsilon = 10^{-3}$

Abbildung 3.9: Punktweise Fehler  $u - u_h$  auf  $h_3$ -Netzen mit anisotropen Dreiecken, sowohl ohne (links) als auch mit Graduierung (rechts) jeweils für verschiedene Werte von  $\varepsilon$  ( $\mathcal{E}_h = \mathcal{E}_h^1$ ,  $\alpha_1 = 1$  und  $\gamma = 5$ )

## 4 Lamé-Gleichung mit gemischten Randbedingungen

Die Untersuchungen zum Finite-Elemente-Mortaring nach Nitsche für die Lamé-Gleichung (das Differentialgleichungssystem der linearen Elastizitätstheorie) werden analog zum Nitsche-Mortaring für die Poissongleichung durchgeführt. Allerdings unterscheiden sich die Lösungsdarstellung, die Bilinearform und Normen von denen in Kapitel 2, und die Funktionen sind vektorwertig. Für homogene Randbedingungen und  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^{\frac{3}{2}+\delta}(\Omega)$  wurde das Nitsche-Mortaring für lineare Elastizitätsprobleme bereits in [27] dargestellt. Hier werden nun Lösungen mit geringerer Regularität ( $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^{1+\delta}(\Omega)$ ) betrachtet und Fehlerabschätzungen unter Nutzung des analytischen Lösungsverhalten auf graduierten Netzen durchgeführt.

Im Folgenden werden vektorwertige Funktion  $\mathbf{v}$  mit fetten Buchstaben notiert und mit  $v_i$  die  $i$ -te Komponente ( $i = 1, 2$ ) der Funktion. Wie bisher seien  $H^s(X)$  ( $X$  ein Gebiet) die gewöhnlichen Sobolevräume von der Ordnung  $s \in \mathbb{R}$  und  $\|\cdot\|_{s,X} := \|\cdot\|_{H^s(X)}$  bzw.  $|\cdot|_{s,X} := |\cdot|_{H^s(X)}$  die dazugehörigen Normen und Seminormen. Mit  $\mathbf{H}^s(X) := (H^s(X))^2 := \{\mathbf{v} : v_i \in H^s(X) \text{ für } i = 1, 2\}$  und  $\mathbf{L}_2(X) = \mathbf{H}^0(X)$  werden die Sobolevräume für vektorwertige Funktionen mit den Normen  $\|\mathbf{v}\|_{s,X}^2 := \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^s(X)}^2 = \sum_{i=1}^2 \|v_i\|_{s,X}^2$  und Seminormen  $|\mathbf{v}|_{s,X}^2 := |\mathbf{v}|_{\mathbf{H}^s(X)}^2 = \sum_{i=1}^2 |v_i|_{s,X}^2$  bezeichnet. Der Betrag des Gradienten von einer vektorwertigen Funktion  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  sei definiert als

$$|\nabla \mathbf{v}|^2 := \sum_{i=1}^2 |\nabla v_i|^2 = \sum_{i,j=1}^2 \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2.$$

Die Konstante  $c$  wird weiterhin als generische und vom Diskretisierungsparameter  $h$  unabhängige Konstante verwendet. Da in dieser Arbeit die Bezeichner  $\lambda$  und  $\mu$  schon für die Singularitätsexponenten und den Graduierungsparameter benutzt werden, werden die Lamé-Konstanten hier abweichend von der Literatur mit  $\lambda_L$  und  $\mu_L$  bezeichnet.

### 4.1 Analytische Vorbetrachtungen

#### 4.1.1 Problembeschreibung und klassische Variationsformulierung

Es wird die Lamé-Gleichung über einem beschränkten, polygonalen Gebieten  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  betrachtet. Der Rand  $\partial\Omega$  von  $\Omega$  ist somit ein Polygonzug, dessen Ecken wieder im positiven Umlaufsinn durchnummeriert und mit  $P_j$  ( $j = 1, \dots, J$ ) bezeichnet werden. Dadurch ergeben sich für  $j = 1, \dots, J$  und mit  $P_0 \equiv P_J$  geradlinige Randsegmente  $\Gamma_j = (P_{j-1}, P_j)$ , und es gilt  $\partial\Omega = \bigcup_{j=1}^J \bar{\Gamma}_j$ . Für die Innenwinkel  $\omega_j$  von  $\Omega$  an den Ecken  $P_j$  gelte  $0 < \omega_j < 2\pi$  für alle  $j = 1, \dots, J$ . Mit  $(r_j, \varphi_j)$  werden die lokalen Polarkoordinaten an den Ecken  $P_j$  bezeichnet, wobei  $\varphi_j = 0$  auf  $\Gamma_{j+1}$  und entsprechend  $\varphi_j = \omega_j$  auf  $\Gamma_j$  gelte, siehe Abbildung 2.1.

#### 4 Lamé-Gleichung mit gemischten Randbedingungen

Als Modellaufgabe wird die Lamé-Gleichung mit homogenen Dirichlet- und inhomogenen Neumannrandbedingungen über  $\Omega$  betrachtet, also

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) &= \mathbf{f} \text{ in } \Omega, \\ \mathbf{u} &= 0 \text{ auf } \Gamma_j \text{ für } j \in \mathcal{D}, \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \mathbf{n} &= \mathbf{g} \text{ auf } \Gamma_j \text{ für } j \in \mathcal{N}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

wobei mit  $\mathcal{D}$  die Menge aller  $j$  bezeichnet wird, für die auf  $\Gamma_j$  Dirichletrandbedingungen gegeben sind, und entsprechend mit  $\mathcal{N}$  die Menge aller  $j$  mit Neumannrandbedingungen auf  $\Gamma_j$ . Die Indexmengen  $\mathcal{D}$  und  $\mathcal{N}$  sind disjunkt und  $\mathcal{D} \cup \mathcal{N} = \{1, \dots, J\}$ . Man beachte, dass auch Ecken  $P_j$  mit  $\omega_j = \pi$  auftreten können. Mit  $\Gamma_{\mathcal{D}} := \bigcup_{j \in \mathcal{D}} \Gamma_j$  wird der gesamte Dirichletrand und mit  $\Gamma_{\mathcal{N}} := \bigcup_{j \in \mathcal{N}} \Gamma_j$  der Rand mit Neumannrandbedingungen bezeichnet. Weiterhin seien  $\mathcal{D} \neq \emptyset$ ,  $\mathbf{f} \in \mathbf{L}_2(\Omega)$  und  $\mathbf{g} \in \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{\mathcal{N}})$ .

Der Verzerrungstensor  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})$  und der Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v})$  für  $i, j = 1, 2$  sind definiert als

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) &= \varepsilon_{ji}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \\ \sigma_{ij}(\mathbf{v}) &= \sigma_{ji}(\mathbf{v}) = \lambda_{\text{L}} \left( \sum_{k=1}^2 \varepsilon_{kk}(\mathbf{v}) \right) \delta_{ij} + 2\mu_{\text{L}} \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}), \end{aligned}$$

wobei  $\delta_{ij}$  das Kroneckersymbol und  $\mu_{\text{L}}, \lambda_{\text{L}} > 0$  die Lamé-Konstanten bezeichnen. Weiterhin wird mit  $\mathbf{n} = (n_1, n_2)^{\top}$  der äußere Normalenvektor von  $\Omega$  und mit

$$-\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) := - \left( \sum_{j=1}^2 \frac{\partial \sigma_{ij}(\mathbf{u})}{\partial x_j} \right)_{i=1,2}, \quad \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \mathbf{n} := \left( \sum_{j=1}^2 \sigma_{ij}(\mathbf{u}) n_j \right)_{i=1,2}$$

die Divergenz des Spannungstensors sowie die Randspannung bezeichnet.

Der Einfachheit halber wird hier darauf verzichtet, an die Verschiebungskomponenten  $u_1$  und  $u_2$  auf dem selben Randteil unterschiedliche Arten von Randbedingungen zu stellen, da andernfalls die Beschreibung der Dirichlet- und Neumanrandgebiete auf die Komponenten bezogen werden müsste.

Die klassische Variationsformulierung von Aufgabe (4.1) ist mit  $\mathbf{V} := \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega) : \mathbf{v}|_{\Gamma_{\mathcal{D}}} = 0\}$  wie folgt gegeben:

Finde  $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ , so dass  $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle$  für alle  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  gilt, mit

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &:= \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^2 \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} \\ \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle &:= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_{\mathcal{N}}} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \, ds = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} f_i v_i \, d\mathbf{x} + \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_{\mathcal{N}}} g_i v_i \, ds. \end{aligned}$$

Nach [45, Theorem 5.9], siehe auch [19, Chapter III, Lemma 1.1],[47, Lemma 1.6], gilt die folgende Greensche Formel.



**Lemma 4.1** (Greensche Formel). Für  $v, u \in H^1(\Omega)$  und  $\operatorname{div} \sigma(u) \in L_2(\Omega)$  gilt die Greensche Formel

$$\int_{\Omega} \sigma(u) : \varepsilon(v) \, dx = - \int_{\Omega} \operatorname{div} \sigma(u) \cdot v \, dx + \langle \sigma(u) n, v \rangle_{\partial\Omega},$$

wobei  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\partial\Omega}$  die Dualform auf  $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \times H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$  bezeichnet.

*Beweis.* Nach [45, Theorem 5.9] gilt für  $\sigma_{ij}(u) \in L_2(\Omega)$ ,  $\operatorname{div} \sigma(u) \in L_2(\Omega)$  und  $v \in H^1(\Omega)$  folgende Greensche Formel

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^2 \sigma_{ij}(u) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \, dx = - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial \sigma_{ij}(u)}{\partial x_j} v_i \, dx + \sum_{i=1}^2 \left\langle \sum_{j=1}^2 \sigma_{ij}(u) n_j, v_i \right\rangle_{\partial\Omega}.$$

Mit der Definition von  $\sigma$  und  $\varepsilon$  gilt  $\frac{\partial v_k}{\partial x_k} = \varepsilon_{kk}(v)$  für  $k = 1, 2$  und  $\sigma_{12}(u) \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \sigma_{21}(u) \frac{\partial v_2}{\partial x_1} = \sigma_{12}(u) \varepsilon_{12}(v) + \sigma_{21}(u) \varepsilon_{21}(v)$ , wobei die Symmetrie von  $\sigma$  und  $\varepsilon$  benutzt wurde. Damit erhält man die Greensche Formel in der gewünschten Form.  $\square$

Über die Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  wird nun die Energienorm  $\|\cdot\|_{\Omega}$  auf dem Gebiet  $\Omega$  definiert, es sei also für  $v \in V$

$$\|v\|_{\Omega}^2 := a(v, v) = \int_{\Omega} \sigma(v) : \varepsilon(v) \, dx.$$

Für die Bilinearform und die Normäquivalenz sind aus [16, 23, 45] folgende Resultate bekannt.

**Lemma 4.2.** Die Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  ist  $V$ -elliptisch und  $V$ -beschränkt, das heißt, für alle  $u, v \in V$  gelten die Abschätzungen

$$\begin{aligned} a(v, v) &\geq \tilde{\mu}_1 \|v\|_{1,\Omega}^2 \geq \tilde{\mu}_1 |v|_{1,\Omega}^2 \\ |a(u, v)| &\leq \tilde{\mu}_2 \|u\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega} \leq \tilde{\mu}_2 \|u\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega}, \end{aligned}$$

mit positiven Konstanten  $\tilde{\mu}_1$  (enthält Konstante aus der Kornschen Ungleichung) und  $\tilde{\mu}_2 = 2(\mu_L + \lambda_L)$ . Daraus ergibt sich die Äquivalenz der Energienorm und der  $H^1$ -Norm, also  $\tilde{\mu}_1 \|v\|_{1,\Omega}^2 \leq \|v\|_{\Omega}^2 \leq \tilde{\mu}_2 \|v\|_{1,\Omega}^2$ .

### 4.1.2 Regularität der Lösung

Es ist bekannt, dass die Lösung von Aufgabe (4.1) über polygonalen Gebieten lokale Singularitäten aufweist. Nach [30, 31, 46, 59, 68] lässt sich die Lösung in einen regulären und einen singulären Anteil zerlegen, wobei der Grad der Singularität von den Innenwinkeln  $\omega_j$  und der Art der anliegenden Randbedingungen an den Ecken  $P_j$  abhängt. Es kann Satz 4.3 formuliert werden, der sich auf Aussagen aus [30, 31] stützt.

**Satz 4.3.** Die Lösung  $u$  von Aufgabe (4.1) mit  $f \in L_2(\Omega)$  und  $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j)$  für alle  $j \in \mathcal{N}$  kann für  $\lambda_{jk} \neq 1$  in einen regulären Lösungsanteil  $u_{\text{re}} \in H^2(\Omega)$  und einen singulären Lösungsanteil  $u_{\text{si}}$  zerlegt werden. Es gilt also  $u = u_{\text{re}} + u_{\text{si}}$  mit

$$u_{\text{si}} := \sum_{\operatorname{Re} \lambda_{jk} < 1} c_{jk} \eta(r_j) r_j^{\lambda_{jk}} \Phi_{jk}(\varphi_j) + \sum_{\substack{\operatorname{Re} \lambda_{jk} < 1 \\ n(\lambda_{jk})=2}} d_{jk} \eta(r_j) r_j^{\lambda_{jk}} \left( \ln(r_j) \Phi_{jk}(\varphi_j) + \tilde{\Phi}_{jk}(\varphi_j) \right),$$

#### 4 Lamé-Gleichung mit gemischten Randbedingungen

wobei  $c_{jk}, d_{jk}$  komplexe Konstanten sind und  $\eta_j(r_j)$  lokal wirkende Abschneidefunktionen um die Ecken  $P_j$  (beschränkt und unendlich glatt). Die Singularitätsexponenten  $\lambda_{jk} \in \mathbb{C}$ ,  $k = 1, 2, \dots$  zu der Ecke  $P_j$  ergeben sich in Abhängigkeit von der Art der anliegenden Randbedingungen als Lösungen einer der folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned} \sin^2 \lambda_j \omega_j &= \left( \frac{\lambda_L + \mu_L}{\lambda_L + 3\mu_L} \right)^2 \lambda_j^2 \sin^2 \omega_j && \text{für } j, j+1 \in \mathcal{D} \\ \sin^2 \lambda_j \omega_j &= \lambda_j^2 \sin^2 \omega_j && \text{für } j, j+1 \in \mathcal{N} \\ \sin^2 \lambda_j \omega_j &= \frac{(\lambda_L + 2\mu_L)^2 - (\lambda_L + \mu_L)^2 \lambda_j^2 \sin^2 \omega_j}{(\lambda_L + \mu_L)(\lambda_L + 3\mu_L)} && \text{für } j \in \mathcal{D} \text{ und } j+1 \in \mathcal{N}, \\ &&& \text{oder } j \in \mathcal{N} \text{ und } j+1 \in \mathcal{D}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Mit  $n(\lambda_{jk})$  wird die Vielfachheit von  $\lambda_{jk}$  bezeichnet. Die Winkelfunktionen  $\Phi_{jk}$  mit den Komponenten  $\Phi_{jk,i}$  in  $x_i$ -Richtung ( $i = 1, 2$ ) hängen ebenfalls von der Art der anliegenden Randbedingungen ab. Nach [30, 31] haben die  $\Phi_{jk}$  die Gestalt

$$\Phi_{jk} := \begin{pmatrix} c_1 \sin(\lambda_{jk} - 2)\varphi_j + c_2 \sin \lambda_{jk} \varphi_j + c_3 \cos(\lambda_{jk} - 2)\varphi_j + c_4 \cos \lambda_{jk} \varphi_j \\ c_1 \cos(\lambda_{jk} - 2)\varphi_j + c_5 \cos \lambda_{jk} \varphi_j - c_3 \sin(\lambda_{jk} - 2)\varphi_j + c_6 \sin \lambda_{jk} \varphi_j \end{pmatrix},$$

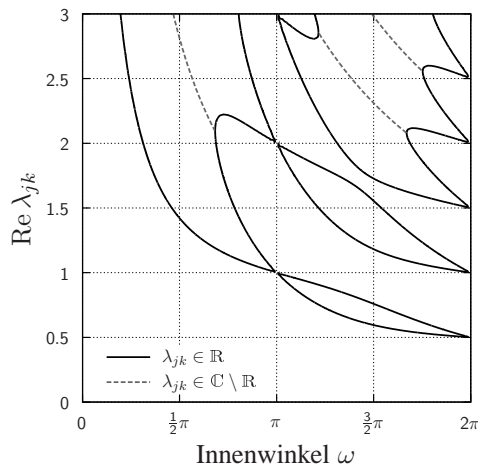
wobei die Konstanten  $c_s \in \mathbb{C}$  ( $s = 1, \dots, 6$ ) von der Art der Randbedingungen an der jeweiligen Ecke  $P_j$ , von den Lamé-Konstanten  $\lambda_L, \mu_L$ , vom Innenwinkel  $\omega_j$  und von  $\lambda_{jk}$  abhängen. Für die Funktion  $\tilde{\Phi}_{jk}$  gilt  $\tilde{\Phi}_{jk} := \frac{\partial}{\partial \lambda_{jk}} \Phi_{jk}$ .

**Bemerkung 4.4.** Anmerkungen zu Lösungsdarstellungen und zu Satz 4.3.

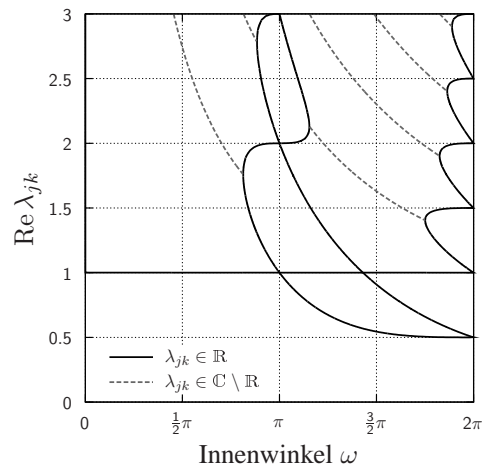
- (i) In [30] und [59] werden entsprechende Sätze zum Lösungsverhalten formuliert, wobei auch höhere Glattheiten der Daten und inhomogene Dirichletrandbedingungen  $h \in H^{m+\frac{3}{2}}(\Gamma_j)$  für  $j \in \mathcal{D}$  betrachtet werden.
- (ii) Die genaue Definition der  $\Phi_{jk}$ , insbesondere die Beschaffenheit der Konstanten und die Kompatibilitätsbedingungen an die Randdaten, kann in [30, 31] oder auch in [59] (dort mit Beweisen, aber leichten Variationen der Winkelfunktionen gegenüber [30, 31]) nachgelesen werden.
- (iii) Nach [31] gibt es für Dirichlet- und Neumannprobleme, also  $j, j+1 \in \mathcal{D}$  oder  $j, j+1 \in \mathcal{N}$ , auf Gebieten mit nur einer einspringenden Ecke nur zwei Singularitätsexponenten  $\lambda_{jk} \in (0, 1)$  (Lösungen von (4.2)) und diese sind reell und einfach. Weiterhin sind für die gemischte Ecke, also  $j \in \mathcal{D}$  und  $j+1 \in \mathcal{N}$  bzw. umgekehrt, und für den Winkel  $\omega = \pi$  alle Lösungen von (4.2) einfach. Damit gilt außer im Fall  $\omega \neq \pi$  für  $j \in \mathcal{D}$  und  $j+1 \in \mathcal{N}$  bzw. umgekehrt die Vereinfachung  $u_{si} = \sum_{\lambda_{jk} < 1} c_{jk} \eta(r_j) r_j^{\lambda_{jk}} \Phi_{jk}(\varphi_j)$ .
- (iv) Nach [46] liegen die Singularitätsexponenten  $\text{Re } \lambda_{jk}$  in Abhängigkeit von den anliegenden Randbedingungen und dem Innenwinkel  $\omega_j$  in den in Tabelle 4.1 dargestellten Bereichen. Die Spalte mit den gemischten Randbedingungen gilt natürlich auch für  $j \in \mathcal{N}$  und  $j+1 \in \mathcal{D}$ . Die Fälle  $\omega_j = 2\pi$  sowie  $\lambda_{jk} = 1$  werden hier jedoch ausgeschlossen.
- (v) In Abbildung 4.1(a)-(c) sind die Lösungen der charakteristischen Gleichungen (4.2) am Beispiel von Stahl, also  $\lambda_L = 120$  GPa und  $\mu_L = 80$  GPa, für die unterschiedlichen Randbedingungsarten angegeben.

	$j, j + 1 \in \mathcal{D}$	$j, j + 1 \in \mathcal{N}$	$j \in \mathcal{D}, j + 1 \in \mathcal{N}$
$\omega_j \in (0, \pi)$	$\operatorname{Re} \lambda_{jk} > 1$	$\operatorname{Re} \lambda_{jk} > 1$	$\operatorname{Re} \lambda_{jk} > \frac{1}{2}$
$\omega_j = \pi$	$\lambda_{jk} = 1$	$\lambda_{jk} = 1$	$\operatorname{Re} \lambda_{jk} = \frac{1}{2}$
$\omega_j \in (\pi, 2\pi)$	$\operatorname{Re} \lambda_{jk} > \frac{1}{2}$	$\operatorname{Re} \lambda_{jk} > \frac{1}{2}$	$\operatorname{Re} \lambda_{jk} > \frac{1}{4}$
$\omega_j = 2\pi$	$\lambda_{jk} = \frac{1}{2}$	$\lambda_{jk} = \frac{1}{2}$	$\operatorname{Re} \lambda_{jk} = \frac{1}{4}$

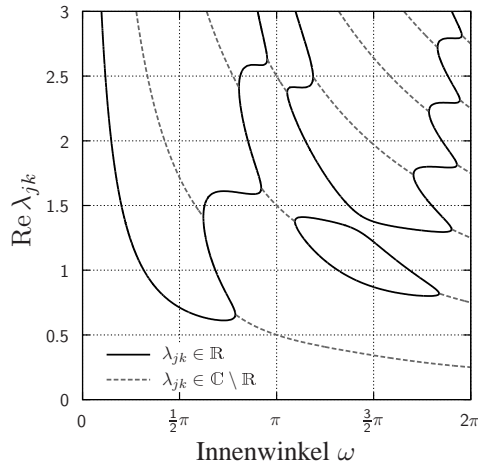
Tabelle 4.1: Größe der Singularitätsexponenten  $\lambda_{jk}$



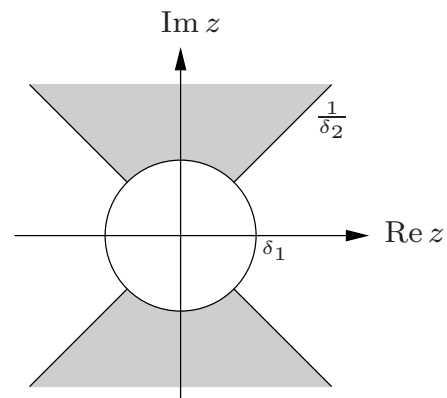
(a) Lösungen  $\lambda_{jk}$  für  $j, j + 1 \in \mathcal{D}$



(b) Lösungen  $\lambda_{jk}$  für  $j, j + 1 \in \mathcal{N}$



(c) Lösungen  $\lambda_{jk}$  für  $j \in \mathcal{D}, j + 1 \in \mathcal{N}$  bzw. umgekehrt



(d) Gebiet ohne Singularitätsexponent  $\lambda_{jk}$  (grau)

Abbildung 4.1: Singularitätsexponenten  $\lambda_{jk}$

**Bemerkung 4.5.** Damit die Beträge der Winkelfunktionen  $\Phi_{jk} \in \mathbb{C}$  und  $\tilde{\Phi}_{jk} \in \mathbb{C}$  sowie die Beträge der Konstanten  $c_s$  ( $s = 1, \dots, 6$ ) beschränkt bleiben, wird neben der Kenntnis  $\operatorname{Re} \lambda_{jk} < 1$  auch eine

#### 4 Lamé-Gleichung mit gemischten Randbedingungen

Aussage über den Imaginärteil von  $\lambda_{jk}$  ( $\text{Im } \lambda_{jk}$ ) benötigt. Nach [46, Lemma 3.1] existieren Konstanten  $\delta_1, \delta_2 > 0$ , so dass in dem Gebiet  $\{z \in \mathbb{C} : |z| > \delta_1 \text{ und } |\text{Re } z| < \delta_2 |\text{Im } z|\}$  keine Singularitätsexponenten  $\lambda_{jk}$  (Lösungen von (4.2)) liegen, siehe Abbildung 4.1(d). Damit folgt aus  $\text{Re } \lambda_{jk} < 1$  auch, dass der Imaginärteil von  $\lambda_{jk}$  beschränkt ist und somit auch  $|\Phi_{jk}|$  und  $|\tilde{\Phi}_{jk}|$ .

Für die Lösung  $u$  von Aufgabe (4.1) mit der in Satz 4.3 angegebenen Lösungsdarstellung gilt nur  $u \in H^{1+\lambda-\delta}(\Omega)$ , wobei  $\lambda := \min\{\text{Re } \lambda_{jk}\} \in (0, 1)$  der kleinste Singularitätsexponent und  $\delta \in (0, \lambda)$  beliebig ist. Diese geringe Regularität der Lösung führt bei den Fehlerabschätzungen des Finite-Elemente-Mortarings nach Nitsche zur Verwendung von gewichteten Räumen.

Der Einfachheit halber wird ab sofort wieder angenommen, dass die Lösung nur an einer Ecke eine Singularität aufweist. Damit kann auf den Index  $j$  bei der Beschreibung des Lösungsverhaltens verzichtet werden. Hat die Lösung mehrere Eckensingularitäten, so müssen die hier beschriebenen Techniken bezüglich der Netzverfeinerung und der Fehlerabschätzung für jede dieser Ecken angewendet werden, wobei der kleinste Singularitätsexponent  $\lambda_{jk}$  den entscheidenden Einfluss auf die Ordnung der Fehlerabschätzung hat.

Es wird im Weiteren angenommen, dass die folgende a-priori Abschätzung der Lösung gegen die Daten gilt.

**Annahme 4.6.** Sei  $u$  die Lösung von Aufgabe (4.1) mit der Lösungsdarstellung wie in Satz 4.3. Mit der Abkürzung  $|c_{\text{si}}| := \sum_{\text{Re } \lambda_k < 1} |c_k| + \sum_{\text{Re } \lambda_k < 1, n(\lambda_k)=2} |d_k|$  gelte die Abschätzung

$$\|u_{\text{re}}\|_{2,\Omega}^2 + |c_{\text{si}}|^2 \leq c \left( \|f\|_{0,\Omega}^2 + \|g\|_{\frac{1}{2},\Gamma_N}^2 \right).$$

Bei späteren Fehlerbetrachtungen werden häufig Abschätzungen von Normen von  $u_{\text{si}}$  benötigt. Dazu wird in Lemma 4.7 zunächst das Verhalten der Ableitungen von  $u_{\text{si}}$  bezüglich des Abstandes  $r$  zur Ecke angegeben.

**Lemma 4.7.** Sei  $u_{\text{si}}$  der singuläre Lösungsanteil, wie in Satz 4.3 beschrieben,  $|c_{\text{si}}| := \sum_{\text{Re } \lambda_k < 1} |c_k| + \sum_{\text{Re } \lambda_k < 1, n(\lambda_k)=2} |d_k|$  die Singularitätskonstante und  $\lambda := \min_{\text{Re } \lambda_k < 1} \text{Re } \lambda_k$  der Singularitätsexponent. Dann gilt für  $i = 1, 2$ ,  $m = 0, 1, 2$  und kleines  $\varepsilon > 0$  die Abschätzung

$$\sum_{|\beta|=m} \left| D^\beta u_{\text{si},i} \right|^2 \leq c(\varepsilon) |c_{\text{si}}|^2 r^{2\lambda-2m-\varepsilon}.$$

*Beweis.* Der Beweis erfolgt analog zum Beweis von Lemma 2.4. Zuerst wird der Fall  $m = 1$ , das heißt  $|\nabla u_{\text{si},i}|^2 := \sum_{|\beta|=1} |D^\beta u_{\text{si},i}|^2 = \left| \frac{\partial u_{\text{si},i}}{\partial r} \right|^2 + \left| \frac{1}{r} \frac{\partial u_{\text{si},i}}{\partial \varphi} \right|^2$ , betrachtet. Zur Abkürzung werden die Indexmengen  $K := \{k \in \mathbb{N} : 0 < \text{Re } \lambda_k < 1\}$  und  $L := \{l \in K : n(\lambda_l) = 2\}$  eingeführt. Damit gilt

$$\begin{aligned} |\nabla u_{\text{si},i}|^2 &= \left| \sum_{k \in K} c_k \Phi_{k,i}(\varphi) \frac{\partial (\eta(r) r^{\lambda_k})}{\partial r} + \sum_{l \in L} d_l \frac{\partial \left( \eta(r) r^{\lambda_l} \left( \ln(r) \Phi_{l,i}(\varphi) + \tilde{\Phi}_{l,i}(\varphi) \right) \right)}{\partial r} \right|^2 \\ &+ \left| \sum_{k \in K} c_k \eta(r) r^{\lambda_k-1} \frac{\partial \Phi_{k,i}(\varphi)}{\partial \varphi} + \sum_{l \in L} d_l \eta(r) r^{\lambda_l-1} \frac{\partial \left( \ln(r) \Phi_{l,i}(\varphi) + \tilde{\Phi}_{l,i}(\varphi) \right)}{\partial \varphi} \right|^2. \end{aligned}$$

Benutzt man nun die Dreiecksungleichung und die Beschränktheit von  $\eta \in C^\infty(\bar{\Omega})$  sowie von  $|\Phi_{k,i}|$ ,  $\left|\frac{\partial\Phi_{k,i}}{\partial\varphi}\right|$ ,  $|\tilde{\Phi}_{k,i}|$  und  $\left|\frac{\partial\tilde{\Phi}_{k,i}}{\partial\varphi}\right|$  für  $\operatorname{Re} \lambda_k < 1$  (siehe Bemerkung 4.5), so erhält man für kleine Radien  $r \leq 1$  und mit der Abschätzung  $|\ln r| \leq cr^{-\delta}$  mit  $\delta > 0$  und  $c = (e\delta)^{-1}$  die Beziehung

$$|\nabla u_{\text{si},i}|^2 \leq c \left( \sum_{k \in K} |c_k| r^{\lambda_k - 1} + \sum_{l \in L} |d_l| r^{\lambda_l - 1 - \delta} \right)^2 \leq c(\varepsilon) |c_{\text{si}}|^2 r^{2\lambda - 2 - \varepsilon}.$$

Die Konstante  $c(\varepsilon)$  hängt hier von  $\varepsilon := 2\delta$  ab, es gilt  $c(\varepsilon) = c\varepsilon^{-1}$ . Ausgehend von  $\sum_{|\beta|=2} |D^\beta u_{\text{si},i}|^2 = \left|\frac{\partial^2 u_{\text{si},i}}{\partial r^2}\right|^2 + 2 \left|\frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_{\text{si},i}}{\partial r \partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_{\text{si},i}}{\partial \varphi}\right|^2 + \left|\frac{1}{r} \frac{\partial u_{\text{si},i}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_{\text{si},i}}{\partial \varphi^2}\right|^2$  ergibt sich für die zweiten Ableitungen auf analogem Weg  $\sum_{|\beta|=2} |D^\beta u_{\text{si},i}|^2 \leq c |c_{\text{si}}|^2 r^{2\lambda - 4 - \varepsilon}$ . Ebenso gilt die Abschätzung  $|u_{\text{si},i}| \leq c |c_{\text{si}}| r^{\lambda - \varepsilon}$ .  $\square$

## 4.2 Methode des Nitsche-Mortarings

Analog zu Abschnitt 2.2 wird das Berechnungsgebiet  $\Omega$  in zwei disjunkte, polygonale Teilgebiete  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  mit dem gemeinsamen Rand  $\Gamma$  (vgl. Abbildung 2.2) zerlegt. Ebenfalls sei  $v^\ell := v|_{\Omega_\ell}$  ( $v^\ell = (v_1^\ell, v_2^\ell)^\top$ ) für  $\ell = 1, 2$ , und die Bezeichnung  $v$  wird sowohl als Funktion in  $\Omega$  als auch für die vektorielle Darstellung  $v = (v^1, v^2)$  verwendet. Die jeweilige Bedeutung von  $v$  ergibt sich aus dem Zusammenhang. Mit dem Index  $\ell \in \{1, 2\}$  wird immer die Zugehörigkeit zu einem der Teilgebiete bezeichnet, die Indizes  $i, j \in \{1, 2\}$  werden dagegen für die Bezeichnung der Raumrichtungen benutzt.

Damit kann nun eine zu Problem (4.1) äquivalente Aufgabe über den einzelnen Teilgebieten formuliert werden, wobei an der Schnittfläche  $\Gamma$  Kompatibilitätsbedingungen beachtet werden müssen:

Gesucht ist  $u = (u^1, u^2)$ , so dass

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \sigma(u^\ell) &= f && \text{in } \Omega_\ell, && \ell = 1, 2, \\ u^\ell &= 0 && \text{auf } \partial\Omega_\ell \cap \Gamma_D, && \ell = 1, 2, \\ \sigma(u^\ell) n^\ell &= g && \text{auf } \partial\Omega_\ell \cap \Gamma_N, && \ell = 1, 2, \\ u^1 &= u^2 && \text{auf } \Gamma, \\ \sigma(u^1) n^1 + \sigma(u^2) n^2 &= 0 && \text{auf } \Gamma \end{aligned} \tag{4.3}$$

gilt, wobei  $n^\ell = (n_1^\ell, n_2^\ell)^\top$  die äußere Normale an dem Rand  $\partial\Omega_\ell$  von  $\Omega_\ell$  für  $\ell = 1, 2$  ist.

Nach Satz 4.3 gilt nur  $u \in \mathbf{H}^{1+\lambda-\delta}(\Omega)$  mit  $\lambda := \min \operatorname{Re} \lambda_k \in (0, 1)$  und  $\delta \in (0, \lambda)$  beliebig, also auch  $u \in \mathbf{H}_{0,D}^1 := \left\{ v \in \mathbf{H}^1(\Omega) : v|_{\Gamma_D} = 0 \right\}$ . Der Raum  $\mathbf{H}_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  wird hier als Spurraum von  $\mathbf{H}_{0,D}^1$  verstanden. Die Spur von  $u$  auf  $\Gamma$  ist somit aus  $\mathbf{H}_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  und die Randspannungen  $\sigma(u^\ell) n^\ell$  auf  $\Gamma$  sind aus dem zu  $\mathbf{H}_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  dualen Raum  $\mathbf{H}_*^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ .

#### 4 Lamé-Gleichung mit gemischten Randbedingungen

Wie in Abschnitt 2.2 werden die einzelnen Teilgebiete  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  unabhängig voneinander durch Dreiecke  $T$  ( $T = \overline{T}$ ) und der Schnitttrand  $\Gamma$  durch Intervalle  $E$  ( $E = \overline{E}$ ) vernetzt und die dort im Zusammenhang mit den Triangulationen eingeführten Bezeichnungen benutzt. Die entstehenden Triangulationen  $\mathcal{T}_h^\ell := \mathcal{T}_h(\Omega_\ell)$  für  $\ell = 1, 2$  und  $\mathcal{E}_h$  sollen wieder Annahme 2.7 erfüllen.

Es werden die in Abschnitt 2.2 eingeführten Finite-Elemente-Räume (siehe (2.4)) benutzt und auf vektorwertige Funktionen übertragen. Es sei also  $V_h := V_h^1 \times V_h^2$  und  $\mathbf{V}_h := \mathbf{V}_h^1 \times \mathbf{V}_h^2$  mit

$$\begin{aligned} V_h^\ell &:= \left\{ v^\ell \in H^1(\Omega_\ell) : v^\ell|_T \in \mathbb{P}_k(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h^\ell, \quad v^\ell|_{\partial\Omega_\ell \cap \Gamma_D} = 0 \right\}, \quad \ell = 1, 2, \\ \mathbf{V}_h^\ell &:= \left\{ \mathbf{v}^\ell = (v_1^\ell \ v_2^\ell)^\top : v_i^\ell \in V_h^\ell \text{ für } i = 1, 2 \right\}, \quad \ell = 1, 2. \end{aligned}$$

Mit einer hinreichend großen positiven Konstanten  $\gamma$  und den Parametern  $\alpha_1, \alpha_2$ , die die Bedingung (2.5) erfüllen, wird die Variationsformulierung für das Mortaring nach Nitsche notiert.

Gesucht ist die Näherung  $\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h$  des Finite-Elemente-Mortaring nach Nitsche, so dass

$$\mathcal{B}_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = \mathcal{F}_h(\mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h \quad (4.4)$$

gilt. Dabei seien die Bilinearform  $\mathcal{B}_h(\cdot, \cdot)$  und die Linearform  $\mathcal{F}_h(\cdot)$  der rechten Seite definiert als

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) &:= \sum_{\ell=1}^2 a_\ell(\mathbf{u}_h^\ell, \mathbf{v}_h^\ell) + \gamma \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} (\mathbf{u}_h^1 - \mathbf{u}_h^2, \mathbf{v}_h^1 - \mathbf{v}_h^2)_E \\ &\quad - \langle \alpha_1 \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h^1) \mathbf{n}^1 - \alpha_2 \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h^2) \mathbf{n}^2, \mathbf{v}_h^1 - \mathbf{v}_h^2 \rangle_\Gamma \\ &\quad - \langle \alpha_1 \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}_h^1) \mathbf{n}^1 - \alpha_2 \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}_h^2) \mathbf{n}^2, \mathbf{u}_h^1 - \mathbf{u}_h^2 \rangle_\Gamma, \end{aligned} \quad (4.5)$$

mit  $a_\ell(\mathbf{u}_h^\ell, \mathbf{v}_h^\ell) := \int_{\Omega_\ell} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h^\ell) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_h^\ell) \, dx$  und

$$\mathcal{F}_h(\mathbf{v}_h) := \sum_{\ell=1}^2 \left( \int_{\Omega_\ell} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h^\ell \, dx + \int_{\partial\Omega_\ell \cap \Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}_h^\ell \, ds \right), \quad (4.6)$$

wobei  $(\cdot, \cdot)_E$  das  $L_2$ - bzw.  $L_2$ -Skalarprodukt auf  $E$  und  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$  die Dualform auf  $H_*^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  bzw.  $H_*^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  bezeichnen. Es sei also  $\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle_\Gamma := \sum_{i=1}^2 \langle w_i, v_i \rangle_\Gamma$  für  $\mathbf{w} \in H_*^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  und  $\mathbf{v} \in H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  und entsprechend  $(\mathbf{w}, \mathbf{v})_E := \sum_{i=1}^2 (w_i, v_i)_E$  für  $\mathbf{w}, \mathbf{v} \in L_2(E)$ .

Für den Spezialfall  $\mathcal{E}_h = \mathcal{E}_h^2$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$ , homogene Neumannrandbedingungen und  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^{\frac{3}{2}+\delta}(\Omega)$  wurden das Nitsche-Mortaring für lineare Elastizitätsprobleme bereits in [27] dargestellt und Fehlerabschätzungen durchgeführt.

### 4.3 Eigenschaften des Nitsche-Mortarings

**Satz 4.8** (Konsistenz). *Sei  $\mathbf{u} = (\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2)$  die Lösung der Aufgabe (4.3), sowie  $\mathcal{B}_h(\cdot, \cdot)$  die Bilinearform von (4.5) und  $\mathcal{F}_h(\cdot)$  die Linearform von (4.6). Dann gilt die Gleichung*

$$\mathcal{B}_h(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) = \mathcal{F}_h(\mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h.$$

*Beweis.* Anstelle der Näherungslösung  $u_h$  wird in die Bilinearform (4.5) die Lösung  $u$  der Aufgabe (4.3) eingesetzt. Da  $u \in \mathbf{H}_{0,D}^1$  gilt, ist  $\mathcal{B}_h(u, v_h)$  wohldefiniert. Wegen  $u^1|_\Gamma = u^2|_\Gamma$ ,  $\sigma(u^1)n^1|_\Gamma = -\sigma(u^2)n^2|_\Gamma$  und  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$  erhält man analog zu (2.10) die Beziehung

$$\mathcal{B}_h(u, v_h) = \sum_{\ell=1}^2 (a_\ell(u^\ell, v_h^\ell) - \langle \sigma(u^\ell)n^\ell, v_h^\ell \rangle_\Gamma).$$

Benutzt man für  $\ell = 1, 2$  die in Lemma 4.1 angegebene Greensche Formel und setzt  $-\operatorname{div} \sigma(u^\ell) = f$  sowie die Randbedingungen auf  $\partial\Omega_\ell$  ein, so erhält man

$$\mathcal{B}_h(u, v_h) = \sum_{\ell=1}^2 \left( (f, v_h^\ell)_{\Omega_\ell} + \langle \sigma(u^\ell)n^\ell, v_h^\ell \rangle_{\partial\Omega_\ell} - \langle \sigma(u^\ell)n^\ell, v_h^\ell \rangle_\Gamma \right) = \mathcal{F}_h(v_h).$$

□

**Bemerkung 4.9.** Aus der Variationsformulierung (4.4) und der Konsistenz (Satz 4.8) ergibt sich die  $\mathcal{B}_h$ -Orthogonalität des Fehlers  $u - u_h$  auf  $V_h$ , das heißt

$$\mathcal{B}_h(u - u_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h.$$

Auch hier wird wieder eine Abschätzung von  $\sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E \|\alpha_1 \sigma(v_h^1)n^1 - \alpha_2 \sigma(v_h^2)n^2\|_{0,E}^2$  gegen die „gebrochene“ Energienorm von  $v_h \in V_h$  für spätere Untersuchungen benötigt. Dies kann mit Hilfe der folgenden Lemmata gezeigt werden.

**Lemma 4.10.** *Es gilt*

$$\begin{aligned} \sigma(v) : \sigma(v) &\leq 2(\mu_L + \lambda_L) \sigma(v) : \varepsilon(v) \\ &\leq 4(\mu_L + \lambda_L)^2 \varepsilon(v) : \varepsilon(v) \\ &\leq 4(\mu_L + \lambda_L)^2 |\nabla v|^2. \end{aligned}$$

*Beweis.* Der Beweis erfolgt gemäß [42]. Der Übersichtlichkeit halber wird auf das Argument  $v$  verzichtet. Aus den äquivalenten Umformungen

$$\begin{aligned} 0 &\geq -2\mu_L (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 \\ 0 &\geq (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11}) (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}) 2\mu_L \\ 0 &\geq (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11}) (\lambda_L (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + 2\mu_L \varepsilon_{11} - \lambda_L (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) - 2\mu_L \varepsilon_{22}) \\ 0 &\geq (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11}) (\sigma_{11} - \sigma_{22}) \\ 0 &\geq \sigma_{11} \varepsilon_{22} + \sigma_{22} \varepsilon_{11} - \sigma_{11} \varepsilon_{11} - \sigma_{22} \varepsilon_{22} \end{aligned}$$

ergibt sich die Ungleichung

$$\sigma_{11} \varepsilon_{22} + \sigma_{22} \varepsilon_{11} \leq \sigma_{11} \varepsilon_{11} + \sigma_{22} \varepsilon_{22}. \quad (4.7)$$

Mit der Definition der Spannung  $\sigma$  und der Ungleichung (4.7) sowie  $0 \leq \sigma_{12} \varepsilon_{12}$  ( $\sigma_{12} = 2\mu_L \varepsilon_{12}$ ) und entsprechend  $0 \leq \sigma_{21} \varepsilon_{21}$  gilt

$$\begin{aligned} \sigma : \sigma &= \lambda_L (\sigma_{11} \varepsilon_{11} + \sigma_{11} \varepsilon_{22} + \sigma_{22} \varepsilon_{11} + \sigma_{22} \varepsilon_{22}) + 2\mu_L \sigma : \varepsilon \\ &\leq 2\lambda_L (\sigma_{11} \varepsilon_{11} + \sigma_{22} \varepsilon_{22}) + 2\mu_L \sigma : \varepsilon \\ &\leq 2\lambda_L (\sigma_{11} \varepsilon_{11} + \sigma_{12} \varepsilon_{12} + \sigma_{21} \varepsilon_{21} + \sigma_{22} \varepsilon_{22}) + 2\mu_L \sigma : \varepsilon \\ &\leq 2(\lambda_L + \mu_L) \sigma : \varepsilon \end{aligned}$$

#### 4 Lamé-Gleichung mit gemischten Randbedingungen

und somit die erste Ungleichung.

Ebenso gilt nach Definition  $\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} = \lambda_L (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})^2 + 2\mu_L \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon}$ . Mit der Ungleichung vom arithmetischen und quadratischen Mittel und  $\varepsilon_{12}^2 \geq 0$  sowie  $\varepsilon_{21}^2 \geq 0$  ergibt sich dann  $\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \leq 2(\mu_L + \lambda_L) \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon}$ .

Wiederum aus der Ungleichung vom arithmetischen und quadratischen Mittel folgt  $\boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon} \leq |\nabla \boldsymbol{v}|^2$ .  $\square$

**Lemma 4.11.** Für  $\boldsymbol{u}^\ell, \boldsymbol{v}^\ell \in \boldsymbol{H}_{0,\mathcal{D}}^1(\Omega_\ell)$  gelten mit  $\mu_3^2 = (1 + \frac{\lambda_L}{\mu_L})$  und  $\xi = 2(\mu_L + \lambda_L)$  die Abschätzungen

$$|a_\ell(\boldsymbol{u}^\ell, \boldsymbol{v}^\ell)| \leq \mu_3 \|\boldsymbol{u}^\ell\|_{\Omega_\ell} \|\boldsymbol{v}^\ell\|_{\Omega_\ell}, \quad \|\boldsymbol{v}^\ell\|_{\Omega_\ell}^2 \leq \xi |\boldsymbol{v}^\ell|_{1,\Omega_\ell}^2.$$

*Beweis.* Aus der Dreiecksungleichung und der Ungleichung von Cauchy-Schwarz folgt

$$|a_\ell(\boldsymbol{u}^\ell, \boldsymbol{v}^\ell)| \leq \left( \int_{\Omega_\ell} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}^\ell) : \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}^\ell) \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega_\ell} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}^\ell) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}^\ell) \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Mit den Abschätzungen  $\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma} \leq 2(\mu_L + \lambda_L) \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}$  aus Lemma 4.10 und  $2\mu_L \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon} \leq \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}$  ergibt sich die erste der zu beweisenden Ungleichungen. Die zweite erhält man aus der Ungleichung vom arithmetischen und quadratischen Mittel sowie der Binomischen Ungleichung.  $\square$

**Lemma 4.12.** Es existiere eine positive, von  $h$  unabhängige Konstante  $C_2$ , so dass  $h_E \leq C_2 h_F$  für alle  $E \in \mathcal{E}_h$  und  $F \in \mathcal{E}_h^\ell$  mit  $\mathring{E} \cap \mathring{F} \neq \emptyset$  erfüllt ist. Für  $\boldsymbol{v}_h^\ell \in \boldsymbol{V}_h^\ell$  mit  $\ell = 1, 2$  gilt dann die Abschätzung

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E \|\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{v}_h^\ell) \boldsymbol{n}^\ell\|_{0,E}^2 \leq C_2 c_{SI} \sum_{F \in \mathcal{E}_h^\ell} \frac{h_F}{h_F^\perp} \xi \|\boldsymbol{v}_h^\ell\|_{TF}^2.$$

Dabei bezeichnet  $h_F^\perp$  die Höhe des Dreiecks  $T_F$  über der Seite  $F$ . Weiterhin ist  $\xi = 2(\mu_L + \lambda_L)$  und  $c_{SI}$  die von  $h$  unabhängige Konstante aus Lemma 2.11.

*Beweis.* Aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und  $|\boldsymbol{n}^\ell| = 1$  folgt die Beziehung

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E \|\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{v}_h^\ell) \boldsymbol{n}^\ell\|_{0,E}^2 \leq \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E \int_E \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{v}_h^\ell) : \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{v}_h^\ell) \, ds.$$

Wegen  $\boldsymbol{v}_h^\ell \in \boldsymbol{V}_h^\ell$  gilt auch  $\sigma_{ij}(\boldsymbol{v}_h^\ell)|_\Gamma \in L_2(\Gamma)$ . Durch Anwenden von Lemma 2.12 und Lemma 2.11 ( $\|w\|_{0,F}^2 \leq c_{SI} \frac{1}{h_F} \|w\|_{0,T_F}^2$ ) für  $w = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{v}_h^\ell) : \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{v}_h^\ell) \in \mathbb{P}_k(T_F)$  ergibt sich

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E \|\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{v}_h^\ell) \boldsymbol{n}^\ell\|_{0,E}^2 \leq C_2 c_{SI} \sum_{F \in \mathcal{E}_h^\ell} \frac{h_F}{h_F^\perp} \int_{T_F} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{v}_h^\ell) : \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{v}_h^\ell) \, dx.$$

Mit der ersten Ungleichung aus Lemma 4.10 folgt die zu beweisende Abschätzung.  $\square$

**Lemma 4.13.** Für  $\boldsymbol{v}_h^\ell \in \boldsymbol{V}_h^\ell$  ( $\ell = 1, 2$ ) und mit Annahme 2.6 gilt die Abschätzung

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E \|\alpha_1 \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{v}_h^1) \boldsymbol{n}^1 - \alpha_2 \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{v}_h^2) \boldsymbol{n}^2\|_{0,E}^2 \leq \sum_{\ell=1}^2 C_I^\ell \xi \|\boldsymbol{v}_h^\ell\|_{\Omega_\ell}^2 \leq C_I \xi \sum_{\ell=1}^2 \|\boldsymbol{v}_h^\ell\|_{\Omega_\ell}^2$$

wobei  $C_I^\ell = C_2 c_{SI} \alpha_\ell \sup_{h < h_0} \max_{F \in \mathcal{E}_h^\ell} \frac{h_F}{h_F^\perp}$ ,  $C_I = \max_{\ell=1,2} (C_I^\ell)$  und  $\xi = 2(\mu_L + \lambda_L)$  positive, von  $h$  unabhängige Konstanten sind. Weiterhin sind  $C_2$  und  $c_{SI}$  die von  $h$  unabhängigen Konstanten aus Annahme 2.6 bzw. Lemma 2.11 sowie  $c_\alpha^\ell = 2\alpha_\ell^2$  für  $\alpha_\ell \in (0, 1)$  und  $c_\alpha^\ell = \alpha_\ell^2$  sonst.



*Beweis.* Für den Fall  $\alpha_\ell \in (0, 1)$  ( $\ell = 1, 2$ ) folgt die Abschätzung

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E \left\| \alpha_1 \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}_h^1) \mathbf{n}^1 - \alpha_2 \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}_h^2) \mathbf{n}^2 \right\|_{0,E}^2 \leq \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E \sum_{\ell=1}^2 c_\alpha^\ell \left\| \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}_h^\ell) \mathbf{n}^\ell \right\|_{0,E}^2$$

aus der Dreiecksungleichung und der Ungleichung vom arithmetischen und quadratischen Mittel. Für  $\alpha_\ell = 1$  und entsprechend  $\alpha_{3-\ell} = 0$  gilt in obiger Beziehung die Gleichheit. Durch Anwenden von Lemma 4.12 und Hinzunahme der übrigen Dreieckselemente aus  $\mathcal{T}_h^1$  und  $\mathcal{T}_h^2$  erhält man die zu beweisenden Ungleichung.  $\square$

Für die weiteren Betrachtungen wird wieder eine netzabhängige Norm benötigt. Diese soll mit  $\|\cdot\|_{1,h}$  bezeichnet und für  $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$  folgendermaßen definiert werden

$$\|\mathbf{v}_h\|_{1,h}^2 := \sum_{\ell=1}^2 \left\| \left\| \mathbf{v}_h^\ell \right\|_{\Omega_\ell} \right\|^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|\mathbf{v}_h^1 - \mathbf{v}_h^2\|_{0,E}^2. \quad (4.8)$$

**Satz 4.14** ( $V_h$ -Beschränktheit,  $V_h$ -Elliptizität). *Sei Annahme 2.6 erfüllt. Dann existiert eine positive, von  $h$  unabhängige Konstante  $\mu_2$ , so dass die Abschätzung*

$$|\mathcal{B}_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)| \leq \mu_2 \|\mathbf{u}_h\|_{1,h} \|\mathbf{v}_h\|_{1,h} \quad \forall \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$$

*gilt. Wenn zusätzlich die Konstante  $\gamma > C_I \xi$  gewählt wird, wobei  $C_I$  und  $\xi = 2(\mu_L + \lambda_L)$  die Konstanten aus Lemma 4.13 sind, existiert eine positive, von  $h$  unabhängige Konstante  $\mu_1$ , so dass die Beziehung*

$$\mathcal{B}_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) \geq \mu_1 \|\mathbf{v}_h\|_{1,h}^2 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$$

*erfüllt ist.*

*Beweis.* Zuerst wird die  $V_h$ -Elliptizität untersucht. Der Bilinear Ausdruck  $\mathcal{B}_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)$  hat die Gestalt

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) &= \sum_{\ell=1}^2 a_\ell(\mathbf{v}_h^\ell, \mathbf{v}_h^\ell) + \gamma \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|\mathbf{v}_h^1 - \mathbf{v}_h^2\|_{0,E}^2 \\ &\quad - 2 \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \langle \alpha_1 \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}_h^1) \mathbf{n}^1 - \alpha_2 \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}_h^2) \mathbf{n}^2, \mathbf{v}_h^1 - \mathbf{v}_h^2 \rangle_E. \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Ungleichungen von Cauchy-Schwarz und Young ( $2ab \leq \frac{a^2}{\epsilon} + \epsilon b^2$ ) mit  $\epsilon = \frac{\zeta}{h_E}$  ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) &\geq \sum_{\ell=1}^2 \left\| \left\| \mathbf{v}_h^\ell \right\|_{\Omega_\ell} \right\|^2 + \gamma \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|\mathbf{v}_h^1 - \mathbf{v}_h^2\|_{0,E}^2 \\ &\quad - \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{h_E}{\zeta} \left\| \alpha_1 \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}_h^1) \mathbf{n}^1 - \alpha_2 \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}_h^2) \mathbf{n}^2 \right\|_{0,E}^2 - \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{\zeta}{h_E} \|\mathbf{v}_h^1 - \mathbf{v}_h^2\|_{0,E}^2. \end{aligned}$$

Unter Benutzung von Lemma 4.13 folgt weiter

$$\mathcal{B}_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) \geq \sum_{\ell=1}^2 \left( 1 - \frac{\xi C_I^\ell}{\zeta} \right) \left\| \left\| \mathbf{v}_h^\ell \right\|_{\Omega_\ell} \right\|^2 + (\gamma - \zeta) \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|\mathbf{v}_h^1 - \mathbf{v}_h^2\|_{0,E}^2 \geq \mu_1 \|\mathbf{v}_h\|_{1,h}^2,$$

mit  $\mu_1 = \min \left\{ 1 - \frac{\xi C_I}{\zeta}, \gamma - \zeta \right\} > 0$ , falls  $\gamma$  gemäß  $\gamma > \zeta > \xi C_I$  gewählt wird. Somit ist die  $V_h$ -Elliptizität bewiesen.

Die  $V_h$ -Beschränktheit mit  $\mu_2 = \max \{ \mu_3 + C_I \xi, 1 + \gamma \}$  erhält man durch Anwenden von Lemma 4.11, der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und der Abschätzung aus Lemma 4.13.  $\square$

**Bemerkung 4.15.** Die Konstante  $\gamma$  in der Bilinearform muss hier in Abhängigkeit der Materialparameter (Lamé-Konstanten  $\lambda_L$  und  $\mu_L$ ) gewählt werden, genauer  $\gamma > 2(\lambda_L + \mu_L)C_I$ . Dies kann umgangen werden, indem der Faktor  $2(\lambda_L + \mu_L)$  in den zweiten Summanden der Bilinearform (4.5) aufgenommen wird, vgl. [27].

## 4.4 Abschätzungen für Eckensingularitäten und gradierte Netze

Um der Verminderung der Konvergenz des Finite-Elemente-Mortarings nach Nitsche durch die Eckensingularitäten entgegenzuwirken und optimale Konvergenzordnungen zu erhalten, werden wieder lokal gradierte Netze (siehe Abschnitt 2.4.2) verwendet.

### 4.4.1 Fehlerabschätzung in der Norm $\| \cdot \|_{1,h}$

Es soll der Verfahrensfehler  $u - u_h$  zwischen der Lösung  $u$  der Randwertaufgabe (4.1) und der Näherungslösung  $u_h \in V_h$  von (4.4) in der Norm  $\| \cdot \|_{1,h}$  abgeschätzt werden.

Für die Lösung  $u$  der Aufgabe (4.1) gilt im Allgemeinen  $u \in H^{1+\lambda-\delta}(\Omega)$  mit  $\lambda := \min \{ \operatorname{Re} \lambda_k \} \in (0, 1)$  und  $\delta \in (0, \lambda)$ , siehe Satz 4.3, und somit  $\sigma(u^\ell) \mathbf{n}^\ell \notin L_2(E)$ . Dieser Fall kann wegen der Kenntnis der Gestalt der Lösungssingularität vom Typ  $r^\lambda$ , wie in Abschnitt 2.4.1 beschrieben, durch Verwendung von  $r^\beta$ -Gewichten mit dem Exponenten  $\beta \in (\frac{1}{2} - \lambda, \frac{1}{2})$  behandelt werden. Für  $\lambda > \frac{1}{2}$  kann  $\beta = 0$  gewählt werden. Ebenso kann auf die Gewichte  $r^\beta$  und  $r^{-\beta}$  verzichtet werden, wenn  $E$  den singulären Punkt  $P$  nicht berührt ( $r_E := \inf_{r \in E} r > 0$ ). Diese Unterscheidungen wird wieder durch Einführen des Parameters  $\beta_E$  erreicht, der für alle  $E \in \mathcal{E}_h$  wie folgt definiert ist

$$\beta_E := \begin{cases} \beta & \text{für } r_E = 0 \text{ und } \lambda \leq \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei  $\beta \in (\frac{1}{2} - \lambda, \frac{1}{2})$  gewählt werden kann. Somit gilt in jedem Fall  $\beta_E \in [0, \frac{1}{2})$ . Analog wird  $\beta_F$  für alle  $F \in \mathcal{E}_h^\ell$  ( $\ell = 1, 2$ ) definiert. Außerdem wird wieder eine netzabhängige Norm mit Gewichten über  $\Omega$  eingeführt, die mit  $\| \cdot \|_{h,\Omega}$  bezeichnet wird und folgendermaßen definiert ist

$$\|v\|_{h,\Omega}^2 := \sum_{\ell=1}^2 \left( \|v^\ell\|_{\Omega_\ell}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{1-2\beta_E} \|\alpha_\ell \sigma(v^\ell) \mathbf{n}^\ell\|_{0,E;\beta_E}^2 \right) + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|v^1 - v^2\|_{0,E}^2. \quad (4.9)$$

Dabei wird analog zu (2.16) mit  $\|v\|_{0,\Gamma;\beta}^2 := \sum_{i=1}^2 \|v_i\|_{0,\Gamma;\beta}^2 = \sum_{i=1}^2 \int_\Gamma |r^\beta v_i|^2 ds$  die gewichtete  $L_2$ -Norm für vektorwertige Funktionen  $v$  mit  $r^\beta v_i \in L_2(\Gamma)$  für  $i = 1, 2$  bezeichnet.

**Lemma 4.16.** Sei Annahme 2.6 erfüllt, dann sind die Normen  $\| \cdot \|_{1,h}$  und  $\| \cdot \|_{h,\Omega}$ , siehe (4.8) und (4.9), auf dem Raum  $V_h$  äquivalent. Es gilt also  $\|v_h\|_{1,h} \leq \|v_h\|_{h,\Omega} \leq c \|v_h\|_{1,h}$  für alle  $v_h \in V_h$ .

*Beweis.* Der erste Teil der Ungleichung folgt aus der Definition der Normen. Um die zweite Teilungsgleichung zu zeigen, wird  $\sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{1-2\beta_E} \|\alpha_\ell \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}_h^\ell) \mathbf{n}^\ell\|_{0,E;\beta_E}^2$  gegen  $\|\mathbf{v}_h^\ell\|_{\Omega_\ell}^2$  abgeschätzt. Für  $\lambda \leq \frac{1}{2}$  und das den singulären Punkt berührende Intervall  $E \in \mathcal{E}_h$  gilt nach Anwendung von Lemma 2.18 für die beiden Summanden von  $\|\alpha_\ell \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}_h^\ell) \mathbf{n}^\ell\|_{0,E;\beta_E}^2$  die Beziehung

$$h_E^{1-2\beta_E} \|\alpha_\ell \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}_h^\ell) \mathbf{n}^\ell\|_{0,E;\beta_E}^2 \leq h_E \|\alpha_\ell \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}_h^\ell) \mathbf{n}^\ell\|_{0,E}^2 = \alpha_\ell^2 h_E \|\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}_h^\ell) \mathbf{n}^\ell\|_{0,E}^2.$$

Für alle anderen Intervalle bzw. für  $\lambda > \frac{1}{2}$  gilt diese Beziehung wegen  $\beta_E = 0$  mit Gleichheit. Zusammen mit Lemma 4.12 ergibt sich somit

$$\begin{aligned} \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{1-2\beta_E} \|\alpha_\ell \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}_h^\ell) \mathbf{n}^\ell\|_{0,E;\beta_E}^2 &\leq \alpha_\ell^2 \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E \|\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}_h^\ell) \mathbf{n}^\ell\|_{0,E}^2 \leq c \alpha_\ell^2 \xi \sum_{F \in \mathcal{E}_h} \frac{h_F}{h_F^{\frac{1}{2}}} \|\mathbf{v}_h^\ell\|_{T_F}^2 \\ &\leq c \|\mathbf{v}_h^\ell\|_{\Omega_\ell}^2 \end{aligned}$$

und die Normäquivalenz ist bewiesen.  $\square$

Nun kann der folgende Satz formuliert werden, in dem der Fehler des Finite-Elemente-Mortarings nach Nitsche in der Norm  $\|\cdot\|_{1,h}$  gegen den Interpolationsfehler in der Norm  $\|\cdot\|_{h,\Omega}$  abgeschätzt wird.

**Satz 4.17.** *Sei  $\mathbf{u}$  die Lösung von (4.1) ( $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^{1+\lambda-\delta}(\Omega)$  mit  $\lambda \in (0,1)$  und  $\delta \in (0,\lambda)$ ), sowie  $\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \in \mathbf{L}_2(\Omega)$ ) und  $\gamma > \xi C_I$ . Weiterhin sei Annahme 2.6 erfüllt. Dann gilt die Fehlerabschätzung*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,h} \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{h,\Omega} \leq c \|\mathbf{u} - I_h \mathbf{u}\|_{h,\Omega},$$

wobei  $I_h \mathbf{u} \in \mathbf{V}_h$  den Vektor der verallgemeinerten Lagrange-Interpolierenden in der Menge der Polynome  $k$ -ten Grades von  $\mathbf{u}$  bezeichnet und die Normen  $\|\cdot\|_{1,h}$  und  $\|\cdot\|_{h,\Omega}$  wie in (4.8) bzw. (4.9) definiert sind.

*Beweis.* Die erste Teilungsgleichung folgt direkt aus den Normdefinitionen. Bleibt also nur noch die zweite Teilungsgleichung zu betrachten. Mit der Dreiecksungleichung und Lemma 4.16 ergibt sich

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{h,\Omega} \leq \|\mathbf{u} - I_h \mathbf{u}\|_{h,\Omega} + \|\mathbf{u}_h - I_h \mathbf{u}\|_{1,h}. \quad (4.10)$$

Mit der  $\mathbf{V}_h$ -Elliptizität der Bilinearform  $\mathcal{B}_h(\cdot, \cdot)$  (siehe Satz 4.14) und der  $\mathcal{B}_h$ -Orthogonalität des Fehlers (siehe Bemerkung 4.9) folgt

$$\|\mathbf{u}_h - I_h \mathbf{u}\|_{1,h}^2 \leq \mu_1^{-1} \mathcal{B}_h(\mathbf{u} - I_h \mathbf{u}, \mathbf{u}_h - I_h \mathbf{u}). \quad (4.11)$$

Zur Abkürzung sei  $\mathbf{w} := \mathbf{u} - I_h \mathbf{u}$ . Im Allgemeinen gilt  $\mathbf{w} \notin \mathbf{V}_h$  und  $\mathbf{v}_h := \mathbf{u}_h - I_h \mathbf{u} \in \mathbf{V}_h$ . Es wird nun  $\mathcal{B}(\mathbf{w}, \mathbf{v}_h)$  betrachtet. Nach Anwenden der Dreiecksungleichung und Aufspaltung der Dualformen (gewichteten  $L_2$ -Skalarprodukten  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma = (r^\beta \cdot, r^{-\beta} \cdot)_\Gamma$ , siehe Abschnitt 2.4.1) wird die Cauchy-Schwarz-Ungleichung angewendet. Mit Hilfe von Lemma 4.11 ( $|\alpha_\ell(\mathbf{w}, \mathbf{v}_h)| \leq \mu_3 \|\mathbf{w}^\ell\|_{\Omega_\ell} \|\mathbf{v}_h^\ell\|_{\Omega_\ell}$ ) ergibt sich dann

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}_h(\mathbf{w}, \mathbf{v}_h)| &\leq \sum_{\ell=1}^2 \mu_3 \|\mathbf{w}^\ell\|_{\Omega_\ell} \|\mathbf{v}_h^\ell\|_{\Omega_\ell} + \gamma \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|\mathbf{w}^1 - \mathbf{w}^2\|_{0,E} \|\mathbf{v}_h^1 - \mathbf{v}_h^2\|_{0,E} \\ &\quad + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \|\alpha_1 \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w}^1) \mathbf{n}^1 - \alpha_2 \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w}^2) \mathbf{n}^2\|_{0,E;\beta_E} \|\mathbf{v}_h^1 - \mathbf{v}_h^2\|_{0,E;-\beta_E} \\ &\quad + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \|\alpha_1 \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}_h^1) \mathbf{n}^1 - \alpha_2 \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}_h^2) \mathbf{n}^2\|_{0,E} \|\mathbf{w}^1 - \mathbf{w}^2\|_{0,E}. \end{aligned}$$

#### 4 Lamé-Gleichung mit gemischten Randbedingungen

Nun werden  $h_E$ -Potenzen in multiplikativer Zerlegung sowie die Cauchy-Schwarz-Ungleichung und Lemma 4.13 für den Ausdruck mit den Randspannungen von  $v_h$  benutzt. Unter Berücksichtigung von Lemma 2.19 für das Intervall  $E$  mit  $r_E = 0$  und der Definition der  $\beta_E$  (insbesondere  $\beta_E = 0$  für  $E \in \mathcal{E}_h$  mit  $r_E > 0$ ) gilt  $h_E^{-1+2\beta_E} \|v_{hi}^1 - v_{hi}^2\|_{0,E;-\beta_E} \leq ch_E^{-1} \|v_{hi}^1 - v_{hi}^2\|_{0,E}$  und mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung schließlich

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}_h(\mathbf{w}, v_h)| &\leq \left( \sum_{\ell=1}^2 \mu_3 \|\mathbf{w}^\ell\|_{\Omega_\ell}^2 + (1 + \gamma) \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|\mathbf{w}^1 - \mathbf{w}^2\|_{0,E}^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{1-2\beta_E} \|\alpha_1 \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w}^1) \mathbf{n}^1 - \alpha_2 \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w}^2) \mathbf{n}^2\|_{0,E;\beta_E}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \cdot \left( \sum_{\ell=1}^2 (\mu_3 + \xi C_I^\ell) \|\mathbf{v}_h^\ell\|_{\Omega_\ell}^2 + (c + \gamma) \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|\mathbf{v}_h^1 - \mathbf{v}_h^2\|_{0,E}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Ungleichung vom arithmetischen und quadratischen Mittel für die Randspannungen von  $\mathbf{w}$  und Herausziehen der Konstanten erhält man die Abschätzung

$$|\mathcal{B}_h(\mathbf{w}, v_h)| \leq \mu_4 \|\mathbf{w}\|_{h,\Omega} \|v_h\|_{1,h}.$$

Setzt man dies in (4.11) ein, folgt  $\|u_h - I_h u\|_{1,h} \leq \frac{\mu_4}{\mu_1} \|u - I_h u\|_{h,\Omega}$ , und zusammen mit (4.10) ergibt sich der zweite Teil der zu zeigenden Abschätzung.  $\square$

Im Folgenden werden die Interpolationsfehler abgeschätzt. Dazu wird die Zerlegung der Lösung  $u$  in einen regulären Lösungsanteil  $u_{\text{re}} \in \mathbf{H}^2(\Omega)$  und einen singulären Lösungsanteil  $u_{\text{si}} \in \mathbf{H}^{1+\lambda-\delta}(\Omega)$  (siehe Satz 4.3) benutzt. Die Interpolationsfehler dieser Lösungsanteile in der Norm  $\|\cdot\|_{h,\Omega}$  werden getrennt betrachtet. Es wird mit dem regulären Anteil begonnen.

**Lemma 4.18.** *Sei Annahme 2.7 erfüllt, was insbesondere für lokal graduierte Netze aus Annahme 2.22 gegeben ist. Dann gilt für  $u \in \mathbf{H}^t(\Omega)$  ( $t = k + 1 \geq 2$ ) die Fehlerabschätzung*

$$\|u - I_h u\|_{h,\Omega} \leq ch^{t-1} \|u\|_{t,\Omega},$$

wobei  $k \geq 1$  der Polynomgrad der verallgemeinerten Lagrange-Interpolierenden  $I_h u \in \mathbf{V}_h^\ell$  ist.

*Beweis.* Zur Abkürzung wird die Bezeichnung  $\mathbf{w} := u - I_h u$  eingeführt. Zuerst werden die Anteile der Norm  $\|\cdot\|_{h,\Omega}$  (4.9) über der Schnittkante  $\Gamma$  betrachtet.

Aus der Dreiecksungleichung, der Ungleichung vom quadratischen und arithmetischen Mittel und (2.12) bzw. mit Lemma 2.18, der Cauchy-Schwarz-Ungleichung,  $|\mathbf{n}^\ell| = 1$  und Lemma 4.10 sowie der Beziehung (2.13) ergeben sich die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|\mathbf{w}^1 - \mathbf{w}^2\|_{0,E}^2 &\leq 2 \sum_{\ell=1}^2 \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|\mathbf{w}^\ell\|_{0,E}^2 \leq c \sum_{\ell=1}^2 \sum_{F \in \mathcal{E}_h^\ell} h_F^{-1} \|\mathbf{w}^\ell\|_{0,F}^2, \\ \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{1-2\beta_E} \|\alpha_\ell \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w}^\ell) \mathbf{n}^\ell\|_{0,E;\beta_E}^2 &\leq c \alpha_\ell^2 \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E \|\nabla \mathbf{w}^\ell\|_{0,E}^2 \leq c \alpha_\ell^2 \sum_{F \in \mathcal{E}_h^\ell} h_F \|\nabla \mathbf{w}^\ell\|_{0,F}^2. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Sei  $T = T_F$  das Dreieck mit der Seite  $F$ . Benutzt man die Ungleichung  $\|v\|_{0,F}^2 \leq c(h_T^{-1} \|v\|_{0,T}^2 + \|v\|_{0,T} \|\nabla v\|_{0,T})$  für  $v \in H^1(T)$ , siehe [67, Lemma 3.1] für  $w_i$  und  $|\nabla w_i|$  ( $i = 1, 2$ ) und anschließend den Approximationssatz  $\|I_h v - v\|_{m,T} \leq c h_T^{t-m} \|v\|_{t,T}$  für  $v \in H^t(T)$ , siehe (2.34), erhält man

$$\|\mathbf{w}^\ell\|_{0,F}^2 \leq c h_T^{2t-1} \|\mathbf{u}^\ell\|_{t,T}^2, \quad \|\nabla \mathbf{w}^\ell\|_{0,F}^2 \leq c h_T^{2t-3} \|\mathbf{u}^\ell\|_{t,T}^2.$$

Durch Einsetzen in (4.12) und mit der Definition von  $h_\ell = \max_{T \in \mathcal{T}_h^\ell} h_T$  ( $\ell = 1, 2$ ), also  $h_T \leq h_\ell$  für  $T \in \mathcal{T}_h^\ell$  folgen die Ungleichungen

$$\begin{aligned} \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|\mathbf{w}^1 - \mathbf{w}^2\|_{0,E}^2 &\leq c \sum_{\ell=1}^2 \sum_{F \in \mathcal{E}_h^\ell} h_{T_F}^{2t-2} \|\mathbf{u}^\ell\|_{2,T_F}^2 \leq c \sum_{\ell=1}^2 h_\ell^{2t-2} \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\ell} \|\mathbf{u}^\ell\|_{2,T}^2, \\ \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{1-2\beta_E} \|\alpha_\ell \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w}^\ell) \mathbf{n}^\ell\|_{0,E;\beta_E}^2 &\leq c \alpha_\ell^2 \sum_{F \in \mathcal{E}_h^\ell} h_{T_F}^{2t-2} \|\mathbf{u}^\ell\|_{2,T_F}^2 \leq c \alpha_\ell^2 h_\ell^{2t-2} \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\ell} \|\mathbf{u}^\ell\|_{2,T}^2. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Für den Interpolationsfehler  $\mathbf{u}^\ell - I_h \mathbf{u}^\ell$  über dem Gebiet  $\Omega_\ell$  gilt nach Lemma 4.11 und dem üblichen Approximationssatz die Beziehung

$$\|\|\mathbf{u}^\ell - I_h \mathbf{u}^\ell\|\|_{\Omega_\ell}^2 \leq \xi \|\mathbf{u}^\ell - I_h \mathbf{u}^\ell\|_{1,\Omega_\ell}^2 \leq c h_\ell^{2t-2} \|\mathbf{u}^\ell\|_{t,\Omega_\ell}^2 \quad \text{für } \ell = 1, 2. \quad (4.14)$$

Durch Einsetzen von (4.14) und (4.13) in die Normdefinition (4.9) erhält man mit  $h_\ell \leq h$  die zu beweisende Abschätzung.  $\square$

Nun wird der Interpolationsfehler des singulären Lösungsanteils  $\mathbf{u}_{\text{si}}$  untersucht, wobei im Gegensatz zur Interpolationsfehlerabschätzung des regulären Lösungsanteils die Netzgraduierung benötigt wird, um optimale Konvergenzordnungen zu erzielen. Der Einfachheit halber wird der Raum  $V_h$  nur noch mit dem Polynomgrad  $k = 1$  betrachtet.

**Lemma 4.19.** *Sei  $\mathbf{u}_{\text{si}} \in \mathbf{H}^{1+\lambda-\delta}(\Omega)$  der singuläre Lösungsanteil aus Satz 4.3 und  $I_h \mathbf{u}_{\text{si}} \in V_h$  die Lagrange-Interpolierende ersten Grades von  $\mathbf{u}_{\text{si}}$  bezüglich der graduierten Triangulation  $\mathcal{T}_h$ . Die Triangulationen  $\mathcal{T}_h^1, \mathcal{T}_h^2$  und  $\mathcal{E}_h$  erfüllen Annahme 2.22. Dann gilt die Abschätzung*

$$\|\mathbf{u}_{\text{si}}^\ell - I_h \mathbf{u}_{\text{si}}^\ell\|_{h,\Omega}^2 \leq c |c_{\text{si}}|^2 \kappa^2(h, \mu)$$

mit

$$\kappa(h, \mu) := \begin{cases} h^{\frac{\lambda}{\mu} - \frac{\varepsilon}{2\mu}} & \text{für } \lambda - \frac{\varepsilon}{2} < \mu \leq 1, \\ h |\ln h|^{\frac{1}{2}} & \text{für } \mu = \lambda - \frac{\varepsilon}{2}, \\ h & \text{für } 0 < \mu < \lambda - \frac{\varepsilon}{2}. \end{cases} \quad (4.15)$$

Dabei ist  $h \in (0, h_0]$  der Diskretisierungsparameter,  $\lambda$  der Singularitätsexponent,  $\mu \in (0, 1]$  der Graduierungsparameter und  $\varepsilon > 0$  von Lemma 4.7.

*Beweis.* Zuerst wird der Anteil  $\|\|\mathbf{u}_{\text{si}}^\ell - I_h \mathbf{u}_{\text{si}}^\ell\|\|_{\Omega_\ell}^2$  der Norm  $\|\cdot\|_{h,\Omega}$  (4.9) betrachtet. Mit den in Abschnitt 2.4.2 eingeführten  $\mathcal{C}$ - und  $\mathcal{D}$ -Mengen ((2.26) und (2.27)), sowie der Tatsache, dass  $u_{\text{si},i}^\ell|_{T \in \mathcal{C}_h^\ell} = 0$  ( $i = 1, 2$ ) gilt, ergibt sich für  $\ell = 1, 2$  nach Lemma 4.11 die Abschätzung

$$\|\|\mathbf{u}_{\text{si}}^\ell - I_h \mathbf{u}_{\text{si}}^\ell\|\|_{\Omega_\ell}^2 \leq \xi \sum_{T \in \mathcal{D}_{0h}^\ell} |\mathbf{u}_{\text{si}}^\ell - I_h \mathbf{u}_{\text{si}}^\ell|_{1,T}^2 + \xi \sum_{s=1}^S \sum_{T \in \mathcal{D}_{sh}^\ell} |\mathbf{u}_{\text{si}}^\ell - I_h \mathbf{u}_{\text{si}}^\ell|_{1,T}^2. \quad (4.16)$$

#### 4 Lamé-Gleichung mit gemischten Randbedingungen

(i<sub>a</sub>) Fall:  $T \in \mathcal{D}_{0h}^\ell$  ( $\ell = 1, 2$ ):

Es werden also alle Dreiecke  $T$  betrachtet, die den singulären Punkt  $P$  berühren. Nach der Dreiecksungleichung gilt  $|\mathbf{u}_{\text{si}}^\ell - I_h \mathbf{u}_{\text{si}}^\ell|_{1,T} \leq |\mathbf{u}_{\text{si}}^\ell|_{1,T} + |I_h \mathbf{u}_{\text{si}}^\ell|_{1,T}$ . Die beiden Seminormen werden unter Nutzung der Darstellung von  $\mathbf{u}_{\text{si}}$  und  $I_h \mathbf{u}_{\text{si}}$  abgeschätzt. Mit Hilfe von Lemma 4.7 und der Beziehung  $h_T \leq ch^{\frac{1}{\mu}}$ , siehe (2.25), gilt

$$\begin{aligned} |I_h \mathbf{u}_{\text{si},i}^\ell|_{1,T}^2 &\leq c \left( |a_1|^2 + |a_2|^2 \right) h_T^2 \leq c |c_{\text{si}}|^2 h_T^{2\lambda-2-\varepsilon} h_T^2 \leq c |c_{\text{si}}|^2 h^{\frac{2\lambda-\varepsilon}{\mu}}, \\ |\mathbf{u}_{\text{si},i}^\ell|_{1,T}^2 &\leq c |c_{\text{si}}|^2 h_T^{2\lambda-\varepsilon} \leq c |c_{\text{si}}|^2 h^{\frac{2\lambda-\varepsilon}{\mu}}, \end{aligned}$$

wobei  $I_h \mathbf{u}_{\text{si},i}|_T = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$  als Polynom ersten Grades angesetzt wird (vgl. Beweis von Lemma 2.27). Alles zusammen ergibt dann

$$|\mathbf{u}_{\text{si}}^\ell - I_h \mathbf{u}_{\text{si}}^\ell|_{1,T}^2 \leq c |c_{\text{si}}|^2 h^{\frac{2\lambda-\varepsilon}{\mu}} \quad \forall T \in \mathcal{D}_{0h}^\ell. \quad (4.17)$$

(ii<sub>a</sub>) Fall:  $T \in \mathcal{D}_{sh}^\ell$  ( $s = 1, \dots, S$ ;  $\ell = 1, 2$ ):

Hier werden alle Dreiecke  $T \in \mathcal{C}_{0h}^\ell \setminus \mathcal{D}_{0h}^\ell = \bigcup_{s=1, \dots, S} \mathcal{D}_{sh}^\ell$  betrachtet. Da diese Elemente  $T$  den singulären Punkt  $P$  nicht berühren, gilt  $\mathbf{u}_{\text{si}}^\ell|_T \in \mathbf{H}^2(T)$ , und es kann der übliche Approximationssatz (2.34) angewendet werden und die  $\mathbf{H}^2$ -Seminorm von  $\mathbf{u}_{\text{si}}$  mit Hilfe von Lemma 4.7 abgeschätzt werden. Man erhält

$$|\mathbf{u}_{\text{si}}^\ell - I_h \mathbf{u}_{\text{si}}^\ell|_{1,T}^2 \leq ch_T^2 |\mathbf{u}_{\text{si}}^\ell|_{2,T}^2 \leq c |c_{\text{si}}|^2 h_T^4 r_T^{2\lambda-4-\varepsilon}. \quad (4.18)$$

Mit den  $r_T$ - und  $h_T$ -Abschätzungen (2.44) folgt für Elemente aus  $\mathcal{C}_{0h}^\ell \setminus \mathcal{D}_{0h}^\ell$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}_{\text{si}}^\ell - I_h \mathbf{u}_{\text{si}}^\ell|_{1,T}^2 &\leq c |c_{\text{si}}|^2 h^{\frac{2\lambda-\varepsilon}{\mu}} s^{\frac{4}{\mu}-4} (s-1)^{\frac{2\lambda-4-\varepsilon}{\mu}} \quad \forall T \in \mathcal{D}_{sh}^\ell \quad s = 2, \dots, S \\ |\mathbf{u}_{\text{si}}^\ell - I_h \mathbf{u}_{\text{si}}^\ell|_{1,T}^2 &\leq c |c_{\text{si}}|^2 h^{\frac{2\lambda-\varepsilon}{\mu}} \quad \forall T \in \mathcal{D}_{1h}^\ell. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Nun wird die Summe der Interpolationsfehleranteile über alle Elemente  $T \in \mathcal{C}_{0h}^\ell$  ( $\ell = 1, 2$ ) gebildet. Durch Einsetzen von (4.17) und (4.19) in (4.16) und Benutzen der Beziehung (2.28) über die Anzahl der Dreiecke pro Schicht sowie von Lemma 2.26 ergibt sich

$$\| \mathbf{u}_{\text{si}}^\ell - I_h \mathbf{u}_{\text{si}}^\ell \|_{\Omega_\ell}^2 \leq c |c_{\text{si}}|^2 h^{\frac{2\lambda-\varepsilon}{\mu}} \left( 2 + \sum_{s=2}^S s^{\frac{4}{\mu}-3} (s-1)^{\frac{2\lambda-4-\varepsilon}{\mu}} \right) \leq c |c_{\text{si}}|^2 \kappa^2(h, \mu). \quad (4.20)$$

Als nächstes wird der Interpolationsfehler des singulären Lösungsanteils  $\mathbf{u}_{\text{si}}$  für die Anteile der Norm  $\| \cdot \|_{h,\Omega}$  (4.9), die auf der Kante  $\Gamma$  definiert sind, betrachtet, also die letzten zwei Terme von (4.9). Es wird die Abkürzung  $\mathbf{w}^\ell := \mathbf{u}_{\text{si}}^\ell - I_h \mathbf{u}_{\text{si}}^\ell$  verwendet. Durch analoges Vorgehen wie bei (4.12) mit Lemma 2.20 anstelle von Lemma 2.18 erhält man

$$\begin{aligned} \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \| \mathbf{w}^1 - \mathbf{w}^2 \|_{0,E}^2 &\leq c \sum_{\ell=1}^2 \sum_{F \in \mathcal{E}_h^\ell} h_F^{-1} \| \mathbf{w}^\ell \|_{0,F}^2, \\ \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{1-2\beta_E} \| \alpha_\ell \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w}^\ell) \mathbf{n}^\ell \|_{0,E;\beta_E}^2 &\leq c \alpha_\ell^2 \sum_{F \in \mathcal{E}_h^\ell} h_F^{1-2\beta_F} \| \nabla \mathbf{w}^\ell \|_{0,F;\beta_F}^2. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Dabei ist der Parameter  $\beta_F$  analog zu  $\beta_E$  in Lemma 2.20 für jedes  $F \in \mathcal{E}_h^\ell$  definiert. Es wird wieder zwischen  $T_F \in \mathcal{D}_{0h}^\ell$  und  $T_F \in \bigcup_{s=1}^S \mathcal{D}_{sh}^\ell$  unterschieden.

(i<sub>b</sub>) Fall:  $F \in \mathcal{E}_h^\ell$  mit  $T_F \in \mathcal{D}_{0h}^\ell$  ( $\ell = 1, 2$ ):

Es wird also jeweils das den singulären Punkt  $P$  berührende Intervall  $F$  betrachtet. Nach Anwendung der Dreiecksungleichung auf  $h_F^{-1} \|\mathbf{w}^\ell\|_{0,F}^2$  und  $h_F \|\nabla \mathbf{w}^\ell\|_{0,F;\beta_F}^2$  werden die Normen von  $\mathbf{u}_{\text{si}}^\ell$  und  $I_h \mathbf{u}_{\text{si}}^\ell$  durch Nutzung der Darstellung von  $\mathbf{u}_{\text{si}}^\ell$  aus Satz 4.3 bzw.  $I_h \mathbf{u}_{\text{si}}^\ell$  als Polynom ersten Grades abgeschätzt (vgl. Beweis von Lemma 2.27). Mit Hilfe von Lemma 4.7 und  $h_T \sim h_F$  ergibt sich

$$\begin{aligned} h_F^{-1} \|I_h \mathbf{u}_{\text{si}}^\ell\|_{0,F}^2 &\leq c |c_{\text{si}}|^2 h_T^{2\lambda-\varepsilon}, & h_F^{-1} \|\mathbf{u}_{\text{si}}^\ell\|_{0,F}^2 &\leq c |c_{\text{si}}|^2 h_T^{2\lambda-\varepsilon}, \\ h_F^{1-2\beta_F} \|\nabla (I_h \mathbf{u}_{\text{si}}^\ell)\|_{0,F;\beta_F}^2 &\leq c |c_{\text{si}}|^2 h_T^{2\lambda-\varepsilon}, & h_F^{1-2\beta_F} \|\nabla \mathbf{u}_{\text{si}}^\ell\|_{0,F;\beta_F}^2 &\leq c |c_{\text{si}}|^2 h_T^{2\lambda-\varepsilon}. \end{aligned}$$

Zusammen mit Beziehung (2.25) erhält man für  $\ell = 1, 2$  und für alle  $F \in \mathcal{E}_h^\ell$  mit  $T_F \in \mathcal{D}_{0h}^\ell$  die Abschätzungen

$$h_F^{-1} \|\mathbf{w}^\ell\|_{0,F}^2 \leq c |c_{\text{si}}|^2 h^{\frac{2\lambda-\varepsilon}{\mu}}, \quad h_F^{1-2\beta_F} \|\nabla \mathbf{w}^\ell\|_{0,F;\beta_F}^2 \leq c |c_{\text{si}}|^2 h^{\frac{2\lambda-\varepsilon}{\mu}}. \quad (4.22)$$

(ii<sub>b</sub>) Fall:  $F \in \mathcal{E}_h^\ell$  mit  $T_F \in \mathcal{D}_{sh}^\ell$  ( $s = 1, \dots, S$ ;  $\ell = 1, 2$ )

Hier werden alle Kanten  $F \in \mathcal{E}_h^\ell$  betrachtet, die Seitenflächen von Dreiecken  $T \in \mathcal{D}_{sh}^\ell$  ( $T = T_F$ ) sind und damit den singulären Punkt  $P$  nicht berühren. Somit gilt  $\beta_F = 0$  und  $\mathbf{u}_{\text{si}}^\ell|_T \in \mathbf{H}^2(T)$  und es kann der Spursatz und der Approximationssatz wie im Beweis von Lemma 4.18 benutzt werden. Es ergibt sich

$$h_F^{-1} \|\mathbf{w}^\ell\|_{0,F}^2 \leq ch_T^2 |\mathbf{u}_{\text{si}}^\ell|_{2,T}^2, \quad h_F \|\nabla \mathbf{w}^\ell\|_{0,F}^2 \leq ch_T^2 |\mathbf{u}_{\text{si}}^\ell|_{2,T}^2.$$

Mit (4.18) und (2.44) gilt für  $F \in \mathcal{E}_h^\ell$  ( $\ell = 1, 2$ )

$$\begin{aligned} h_F^{-1} \|\mathbf{w}^\ell\|_{0,F}^2 &\leq c |c_{\text{si}}|^2 h^{\frac{2\lambda-\varepsilon}{\mu}} s^{\frac{4}{\mu}-4} (s-1)^{\frac{2\lambda-4-\varepsilon}{\mu}} \quad \text{für } T_F \in \mathcal{D}_{sh}^\ell, \quad s = 2, \dots, S \\ h_F^{-1} \|\mathbf{w}^\ell\|_{0,F}^2 &\leq c |c_{\text{si}}|^2 h^{\frac{2\lambda-\varepsilon}{\mu}} \quad \text{für } T_F \in \mathcal{D}_{1h}^\ell \\ h_F \|\nabla \mathbf{w}^\ell\|_{0,F}^2 &\leq c |c_{\text{si}}|^2 h^{\frac{2\lambda-\varepsilon}{\mu}} s^{\frac{4}{\mu}-4} (s-1)^{\frac{2\lambda-4-\varepsilon}{\mu}} \quad \text{für } T_F \in \mathcal{D}_{sh}^\ell, \quad s = 2, \dots, S \\ h_F \|\nabla \mathbf{w}^\ell\|_{0,F}^2 &\leq c |c_{\text{si}}|^2 h^{\frac{2\lambda-\varepsilon}{\mu}} \quad \text{für } T_F \in \mathcal{D}_{1h}^\ell. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Wegen  $\mathbf{u}_{\text{si},i}^\ell|_{\mathcal{T} \in \mathcal{C}_h^\ell} = 0$  sind auch die Normen der Interpolationsfehler auf der Schnittkante  $\Gamma$  außerhalb des graduierten Bereichs ( $T \in \mathcal{C}_{0h}^\ell$ ) gleich null. Damit erhält man zusammen mit (4.21), (4.22), (4.23) und der Beziehung (2.28) über die Anzahl der Intervalle pro Schicht sowie Lemma 2.26 mit  $s^{\frac{4}{\mu}-4} \leq s^{\frac{4}{\mu}-3}$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} &\sum_{\ell=1}^2 \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{1-2\beta_E} \|\alpha_\ell \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w}^\ell) \mathbf{n}^\ell\|_{0,E;\beta_E}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|\mathbf{w}^1 - \mathbf{w}^2\|_{0,E}^2 \\ &\leq c |c_{\text{si}}|^2 h^{\frac{2\lambda-\varepsilon}{\mu}} \left( 5 + 2 \sum_{s=2}^S s^{\frac{4}{\mu}-4} (s-1)^{\frac{2\lambda-4-\varepsilon}{\mu}} \right) \leq c |c_{\text{si}}|^2 \kappa^2(h, \mu). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Durch Addition von (4.20) und (4.24) erhält man die zu beweisende Abschätzung.  $\square$

**Satz 4.20.** Sei  $\mathbf{u}$  die Lösung der Aufgabe (4.1) ( $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^{1+\lambda-\delta}(\Omega)$  mit  $\lambda \in (0, 1)$ ,  $\delta \in (0, \lambda)$ , vgl. Satz 4.3, und  $\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \in \mathbf{L}_2(\Omega)$ ) sowie  $\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h$  mit Polynomgrad  $k = 1$  die Nitsche-Finite-Elemente-Näherung gemäß (4.4) auf graduierten Netzen  $\mathcal{T}_h^1$ ,  $\mathcal{T}_h^2$  und  $\mathcal{E}_h$ , die Annahme 2.22 erfüllen. Mit  $\gamma > \xi C_I$  und Annahme 4.6 gilt dann für den Fehler  $\mathbf{u} - \mathbf{u}_h$  bzw.  $\mathbf{u} - I_h \mathbf{u}$  die Abschätzung

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,h} \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{h,\Omega} \leq c \|\mathbf{u} - I_h \mathbf{u}\|_{h,\Omega} \leq c \kappa(h, \mu) \left( \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} + \|\mathbf{g}\|_{\frac{1}{2},\Gamma_N} \right),$$

wobei  $\kappa(h, \mu)$  wie in (4.15) definiert ist und  $h \in (0, h_0]$  der Diskretisierungsparameter,  $\lambda$  der Singularitätsexponent und  $\mu \in (0, 1]$  der Graduierungsparameter ist.

*Beweis.* Gemäß Satz 4.3 gilt  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\text{re}} + \mathbf{u}_{\text{si}}$ . Mit der Dreiecksungleichung erhält man

$$\|\mathbf{u} - I_h \mathbf{u}\|_{h,\Omega} \leq \|\mathbf{u}_{\text{re}} - I_h \mathbf{u}_{\text{re}}\|_{h,\Omega} + \|\mathbf{u}_{\text{si}} - I_h \mathbf{u}_{\text{si}}\|_{h,\Omega}.$$

Durch Einsetzen der Abschätzungen aus Lemma 4.18 mit  $k = 1$ ,  $t = 2$  und Lemma 4.19 ergibt sich zusammen mit Satz 4.17 und  $h \leq \kappa(h, \mu)$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,h} &\leq \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{h,\Omega} \leq c \|\mathbf{u} - I_h \mathbf{u}\|_{h,\Omega} \leq ch \|\mathbf{u}_{\text{re}}\|_{2,\Omega} + c |c_{\text{si}}| \kappa(h, \mu), \\ &\leq c \kappa(h, \mu) \left( \|\mathbf{u}_{\text{re}}\|_{2,\Omega} + |c_{\text{si}}| \right). \end{aligned}$$

Die Verwendung von Annahme 4.6 führt dann zu den zu beweisende Aussagen.  $\square$

Der zu dem „ $\varepsilon$ -Verlust“ bei der Fehlerabschätzung (vgl. (4.15) mit (2.37)) führende logarithmische Term im singulären Lösungsanteil ist nach [31], siehe auch Bemerkung 4.4 Punkt (iii), nur für den Fall einer gemischten Ecke ( $j \in \mathcal{D}$ ,  $j + 1 \in \mathcal{N}$  oder umgekehrt) und  $\omega \neq \pi$  vorhanden. In allen anderen Fällen erhält man obige Abschätzungen mit  $\varepsilon = 0$ .

Für die Lamé-Gleichung werden beim Finite-Elemente-Mortaring nach Nitsche mit linearen finite Elementen auf lokal verfeinerten Netzen ( $0 < \mu < \lambda < 1$ ) auch für Lösungen mit Eckensingularitäten die optimale Konvergenzordnung  $\mathcal{O}(h)$  für den Fehler in einer  $\mathbf{H}^1$ -artigen Norm ( $\|\cdot\|_{1,h}$ ) erreicht.

#### 4.4.2 Fehlerabschätzung in der $L_2$ -Norm

Für die Fehlerabschätzung in der  $L_2$ -Norm wird der Einfachheit halber angenommen, dass jedes der Teilgebiete  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  Dirichletrandanteile vom Maß größer null hat, das heißt  $\operatorname{meas}(\partial\Omega_\ell \cap \Gamma_D) \neq \emptyset$  für  $\ell = 1, 2$ . Damit gilt das folgende Lemma.

**Lemma 4.21.** Sei  $\operatorname{meas}(\partial\Omega_\ell \cap \Gamma_D) \neq \emptyset$  für  $\ell = 1, 2$ . Dann gilt für alle  $\mathbf{w}^\ell, \mathbf{v}^\ell \in \mathbf{H}_{0,\mathcal{D}}^1(\Omega_\ell)$  mit  $r^{\beta} \frac{\partial \mathbf{w}^\ell}{\partial \mathbf{n}_\ell}, r^{\beta} \frac{\partial \mathbf{v}^\ell}{\partial \mathbf{n}_\ell} \in \mathbf{L}_2(\Gamma)$  für  $\beta \in [0, \frac{1}{2})$  die Beziehung

$$|\mathcal{B}_h(\mathbf{w}, \mathbf{v})| \leq c \|\mathbf{w}\|_{h,\Omega} \|\mathbf{v}\|_{h,\Omega}.$$

*Beweis.* Analog zum Beweis von Lemma 2.30 (vgl. auch Beweis von Satz 4.17) gilt

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}_h(\mathbf{w}, \mathbf{v})| &\leq \prod_{\mathbf{z} \in \{\mathbf{w}, \mathbf{v}\}} \left( \sum_{\ell=1}^2 \mu_3 \|\mathbf{z}^\ell\|_{\Omega_\ell}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{1-2\beta_E} \|\alpha_1 \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{z}^1) \mathbf{n}^1 - \alpha_2 \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{z}^2) \mathbf{n}^2\|_{0,E;\beta_E}^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1+2\beta_E} \|\mathbf{z}^1 - \mathbf{z}^2\|_{0,E;-\beta_E}^2 + \gamma \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|\mathbf{z}^1 - \mathbf{z}^2\|_{0,E}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$



Aus Lemma 2.21 und der Kornschen Ungleichung ( $\|z^\ell\|_{\Omega_\ell}^2 \geq c \int_{\Omega_\ell} \varepsilon(z^\ell) : \varepsilon(z^\ell) dx \geq c \|z^\ell\|_{0,\Omega_\ell}^2$ ) erhält man für  $z \in \{w, v\}$  die Abschätzung

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1+2\beta_E} \|z^1 - z^2\|_{0,E;-\beta_E}^2 \leq c \left( \sum_{\ell=1}^2 \|z^\ell\|_{\Omega_\ell}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|z^1 - z^2\|_{0,E}^2 \right)$$

und damit die zu beweisende Aussage.  $\square$

Mit Hilfe des üblichen Aubin-Nitsche-Tricks kann nun gezeigt werden, dass der Fehler in der  $L_2$ -Norm doppelt so schnell wie der Fehler in der Norm  $\|\cdot\|_{1,h}$  konvergiert.

**Satz 4.22.** *Mit den Annahmen von Satz 4.20 und  $\text{meas}(\partial\Omega_\ell \cap \Gamma_D) \neq \emptyset$  für  $\ell = 1, 2$  gilt für den Fehler in der  $L_2$ -Norm die Abschätzung*

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega} \leq c\kappa^2(h, \mu) \left( \|f\|_{0,\Omega} + \|g\|_{\frac{1}{2},\Gamma_N} \right).$$

*Beweis.* Der Beweis verläuft analog zu dem Beweis von Satz 2.31. Es wird die Aufgabe 4.1 mit  $u - u_h$  als rechte Seite und homogenen Dirichlet- und Neumann-Randbedingungen betrachtet und deren Lösung mit  $u_e$  bezeichnet. Die dazugehörige diskrete Variationsformulierung lautet dann:

$$\text{Finde } u_{eh} \in V_h : \quad \mathcal{B}_h(u_{eh}, v_h) = (u - u_h, v_h)_{\Omega_\ell} =: \mathcal{F}_h^e(v_h) \quad \forall v_h \in V_h.$$

Aus der Konsistenz (siehe Satz 4.8) und mit analogen Argumenten für die Lösung  $u$  folgen die Beziehungen

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_h(u_e, v_h) &= \mathcal{F}_h^e(v_h) \quad \forall v_h \in V_h, \\ \mathcal{B}_h(u_e, u) &= \mathcal{F}_h^e(u). \end{aligned}$$

Durch Subtraktion dieser beiden Gleichungen mit  $v_h := u_h$ , sowie Ausnutzen der  $V_h$ -Orthogonalität der Bilinearform ( $\mathcal{B}_h(u - u_h, v_h) = 0$  mit  $v_h := I_h u_e \in V_h$ , siehe Bemerkung 4.9) und der Symmetrie von  $\mathcal{B}_h(\cdot, \cdot)$  ergibt sich

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega}^2 = \mathcal{F}_h^e(u - u_h) = \mathcal{B}_h(u_e, u - u_h) = \mathcal{B}_h(u - u_h, u_e - I_h u_e).$$

Zusammen mit Lemma 4.21 gilt dann die Abschätzung

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega}^2 \leq c \|u - u_h\|_{h,\Omega} \|u_e - I_h u_e\|_{h,\Omega}.$$

Nach Satz 4.17 gilt  $\|u - u_h\|_{h,\Omega} \leq c \|u - I_h u\|_{h,\Omega}$  und man erhält somit

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega}^2 \leq c \|u - I_h u\|_{h,\Omega} \|u_e - I_h u_e\|_{h,\Omega}.$$

Da  $u_e$  sich wie in Satz 4.3 angegeben verhält, kann Satz 4.20 sowohl für  $u - I_h u$  als auch für  $u_e - I_h u_e$  angewendet werden. Es ergibt sich

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega}^2 \leq c\kappa(h, \mu) \left( \|f\|_{0,\Omega} + \|g\|_{\frac{1}{2},\Gamma_N} \right) \cdot \kappa(h, \mu) \|u - u_h\|_{0,\Omega}$$

und somit die zu beweisende Beziehung.  $\square$

Die Konvergenzordnung des Fehlers in der  $L_2$ -Norm beträgt also auch beim Nitsche-Mortaring das Doppelte der Konvergenzordnung bezüglich der  $H^1$ -artigen Norm ( $\|\cdot\|_{1,h}$ ). Auf lokal graduierten Netzen mit  $0 < \mu < \lambda < 1$  hat man damit auch für Lösungen mit Eckensingularitäten eine Konvergenzordnung von zwei.

## 4.5 Numerisches Beispiel

Für die folgenden numerischen Untersuchungen wird die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) &= \mathbf{f} \text{ in } \Omega, \\ \mathbf{u} &= 0 \text{ auf } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (4.25)$$

über dem L-förmigen Gebiet  $\Omega := ((-1, 1) \times (-1, 1)) \setminus ([0, 1] \times [-1, 0]) \subset \mathbb{R}^2$  mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen betrachtet. Als Material wird hier Stahl untersucht. Die Lamé-Konstanten werden somit auf  $\lambda_L = 120$  GPa und  $\mu_L = 80$  GPa gesetzt. Die rechte Seite  $\mathbf{f}$  ist gerade so gewählt, dass für die Lösung der Aufgabe (4.25)

$$\mathbf{u} = \frac{1}{300} \sin\left(\frac{2}{3}\varphi\right) (x^2 - 1) (y^2 - 1) r^\lambda \boldsymbol{\Phi}(\varphi) \quad (4.26)$$

gilt, wobei die Winkelfunktion  $\boldsymbol{\Phi}$ , wie in Satz 4.3 angegeben, mit den Konstanten (siehe [31, 30])

$$\begin{aligned} c_1 &= (\varrho + \tau)^2 (\cos(\lambda\omega) - \cos((\lambda - 2)\omega)) \\ c_2 &= (\varrho + \tau) (\varrho - 3\tau) (\cos(\lambda\omega) - \cos((\lambda - 2)\omega)) \\ c_3 &= (\varrho + \tau) ((\varrho - 3\tau) \sin(\lambda\omega) + (\varrho + \tau) \sin((\lambda - 2)\omega)) \\ c_4 &= (\varrho + \tau) (\sin(\lambda\omega) + \sin((\lambda - 2)\omega)) \\ c_5 &= (\varrho + \tau) (\cos(\lambda\omega) - \cos((\lambda - 2)\omega)) \\ c_6 &= (3\varrho - \tau) ((\varrho - 3\tau) \sin(\lambda\omega) + (\varrho + \tau) \sin((\lambda - 2)\omega)) \end{aligned}$$

gewählt wird. Dabei sei  $\tau = \frac{\lambda_L + \mu_L}{\mu_L} (\lambda - 1) - 2$  und  $\varrho = \frac{\lambda_L + \mu_L}{\mu_L} (\lambda + 1) + 2$ . Diese Lösung hat eine Singularität in der Umgebung der Ecke  $P = (0, 0)$  von  $\Omega$ . Für den Innenwinkel  $\omega$  gilt somit  $\omega = \frac{3}{2}\pi$ . Der Singularitätsexponent  $\lambda$  in (4.26) ist das Minimum der Realteile aller Lösungen der ersten Gleichung von (4.2). Im Bereich  $0 < \operatorname{Re} \lambda_k < 1$  für  $\omega = \frac{3}{2}\pi$  hat die erste Gleichung von (4.2) nur zwei reelle Lösungen, die kleinere ist also der hier verwendete Singularitätsexponent  $\lambda \approx 0.595$  (siehe Abbildung 4.2). Die Verschiebung  $\mathbf{u}$  (4.26) hat die in Abbildung 4.3 und 4.4 dargestellte Gestalt.

Für das Nitsche-Mortaring wird das Gebiet  $\Omega$  in zwei Teilgebiete  $\Omega_1 := (-1, 0) \times (-1, 1)$  und  $\Omega_2 := (0, 1) \times (0, 1)$  zerlegt, die unabhängig voneinander vernetzt werden, so dass ein Anfangsnetz mit dem Diskretisierungsparameter  $h_0$  wie in Abbildung 4.5 dargestellt entsteht, dessen Knoten auf der Schnittkante  $\Gamma$  nicht zusammenpassen. Für die durchgeführten Berechnungen wird dieses Anfangsnetz wie in Abschnitt 2.5.1 beschrieben verfeinert und gegebenenfalls mit  $\mu = 0.7\lambda \approx 0.42$  graduiert, siehe Abbildung 4.6.

Sei  $u_h$  die berechnete Finite-Elemente-Näherung gemäß (4.4) zu der exakten Lösung  $\mathbf{u}$  von Aufgabe (4.25). Da die explizite Lösung von  $\mathbf{u}$  bekannt ist, kann der Fehler  $\mathbf{u} - u_h$  in verschiedenen Normen angegeben und die Konvergenzordnungen bezüglich  $h$  berechnet werden. In der Tabelle 4.2 sind die nach (2.66) berechneten Konvergenzordnungen und die Fehler angegeben. Man erkennt, dass die Konvergenzordnungen für die  $\|\cdot\|_{1,h}$ -Norm, wie in Satz 4.20 bewiesen, erreicht werden, also bei nicht graduierten Netzen ungefähr  $\lambda \approx 0.595$  und bei Netzen mit Graduierung ungefähr eins. Ebenfalls ist zu sehen, dass die unterschiedliche Wahl der Triangulation  $\mathcal{E}_h$  von  $\Gamma$  und der  $\alpha_i$  in der Bilinearform kaum Einfluss auf die Ergebnisse hat.

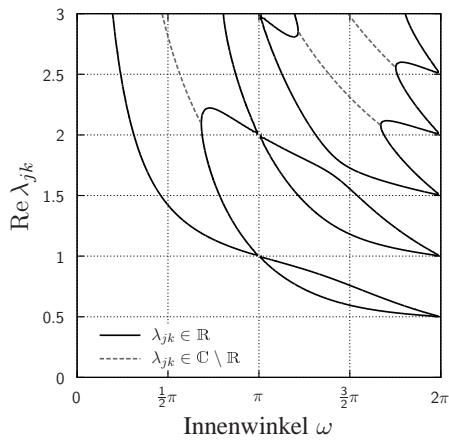


Abbildung 4.2: Lösungen  $\lambda_k$  der ersten Gleichung von (4.2) für  $j, j+1 \in \mathcal{D}$

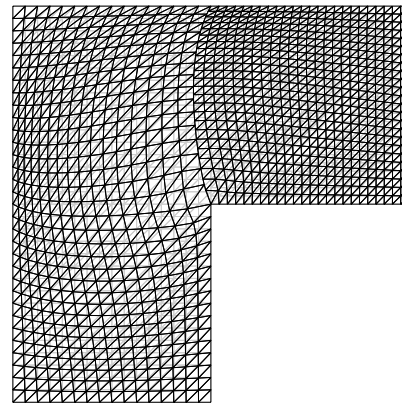


Abbildung 4.3: Berechnungsgebiet nach Addition des Verschiebungsfeldes  $u$  ( $x + u(x)$  für  $x \in \Omega$ )

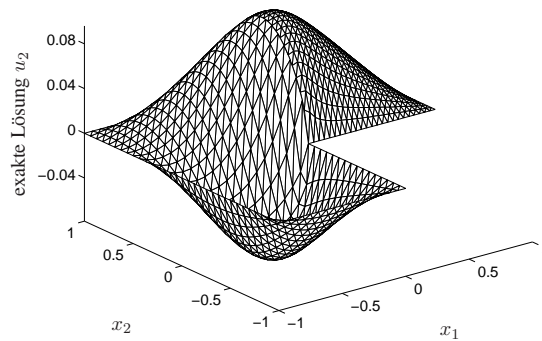
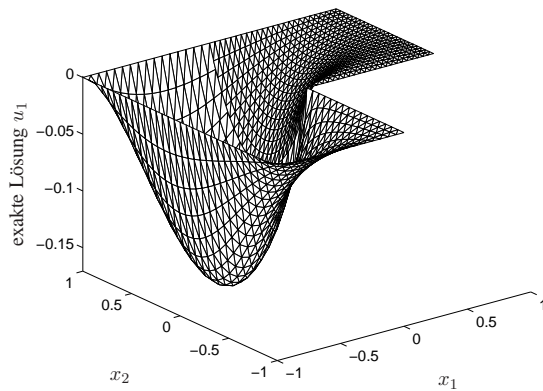


Abbildung 4.4: Verschiebungskomponenten  $u_1$  und  $u_2$

In Abbildung 4.7 ist der Fehler  $u_h - u$  in der  $\|\cdot\|_{1,h}$ -Norm sowie auch in der  $L_2$ - und  $L_\infty$ -Norm über der Anzahl der Dreieckselemente  $T \in \mathcal{T}_h$  abgetragen. Die eingezeichneten Dreiecke sollen die Anstiege der Fehlerkurven verdeutlichen. Durch Multiplizieren dieser Anstiege mit  $-2$  erhält man die Konvergenzordnungen bezüglich  $h$ . Für  $\|u_h - u\|_{1,h}$  werden die theoretisch erwarteten Konvergenzordnungen gut approximiert, gleiches gilt für die Konvergenzordnungen in der  $L_2$ -Norm.

In der Abbildung 4.8 ist der punktweise Fehler  $u_h - u$  dargestellt. Auch hier erkennt man den positiven Einfluss der Graduierung auf das Fehlerverhalten.

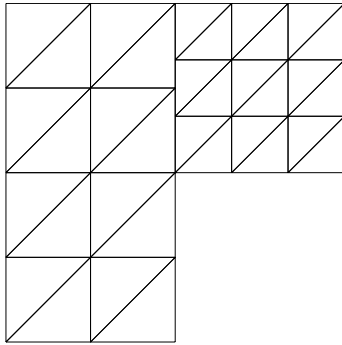


Abbildung 4.5: Anfangsnetz ( $h_0$ -Level)

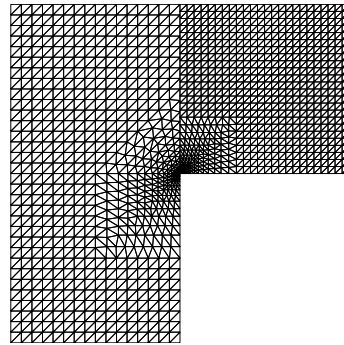


Abbildung 4.6:  $h_3$ -Netz mit Graduierung

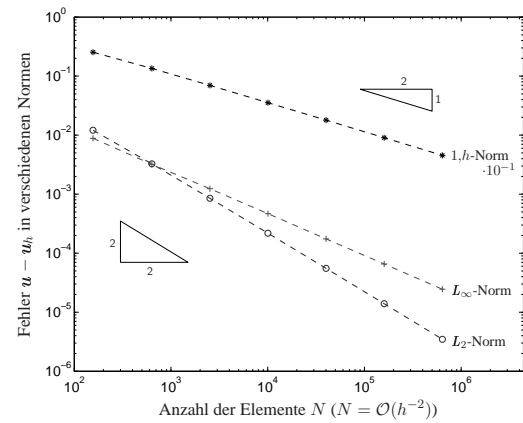
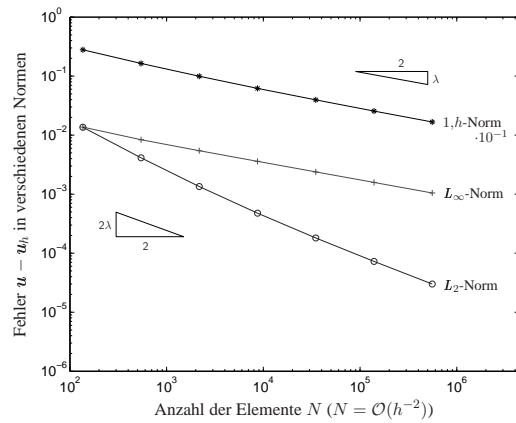


Abbildung 4.7: Fehler in verschiedenen Normen auf Netzen ohne Graduierung (links) und mit Graduierung (rechts) ( $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ ,  $\mathcal{E}_h = \mathcal{E}_h^\cap$ ,  $\gamma$  wie in Tabelle 4.2)

	ohne Graduierung ( $\mu = 1$ )			mit Graduierung ( $\mu < \lambda$ )		
	$\gamma$	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ _{1,h}$	$\beta$	$\gamma$	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ _{1,h}$	$\beta$
$\mathcal{E}_h = \mathcal{E}_h^1$ $\alpha_1 = 1$	1000	9.924e-01	0.6814	1400	6.962e-01	0.9717
		6.188e-01	0.6497		3.550e-01	0.9828
		3.944e-01	0.6283		1.796e-01	0.9897
		2.552e-01	0.6148		9.045e-02	0.9938
		1.666e-01			4.542e-02	
$\mathcal{E}_h = \mathcal{E}_h^\cap$ $\alpha_1 = \frac{1}{2}$	500	9.941e-01	0.6810	1100	6.957e-01	0.9715
		6.201e-01	0.6494		3.548e-01	0.9826
		3.953e-01	0.6281		1.795e-01	0.9895
		2.558e-01	0.6147		9.043e-02	0.9937
		1.670e-01			4.541e-02	
$\mathcal{E}_h = \mathcal{E}_h^2$ $\alpha_1 = 0$	1000	1.003e-00	0.6793	2100	6.964e-01	0.9722
		6.264e-01	0.6482		3.550e-01	0.9830
		3.997e-01	0.6274		1.796e-01	0.9897
		2.587e-01	0.6142		9.044e-02	0.9938
		1.690e-01			4.542e-02	
$\beta_{\text{theoretisch}}$		0.5952			1.0000	

Tabelle 4.2: Beobachtete Fehler in der Norm  $\|\cdot\|_{1,h}$  jeweils von Level  $h_3$  bis  $h_7$  und die sich zwischen den Levels ergebenden Konvergenzordnungen  $\beta$ .

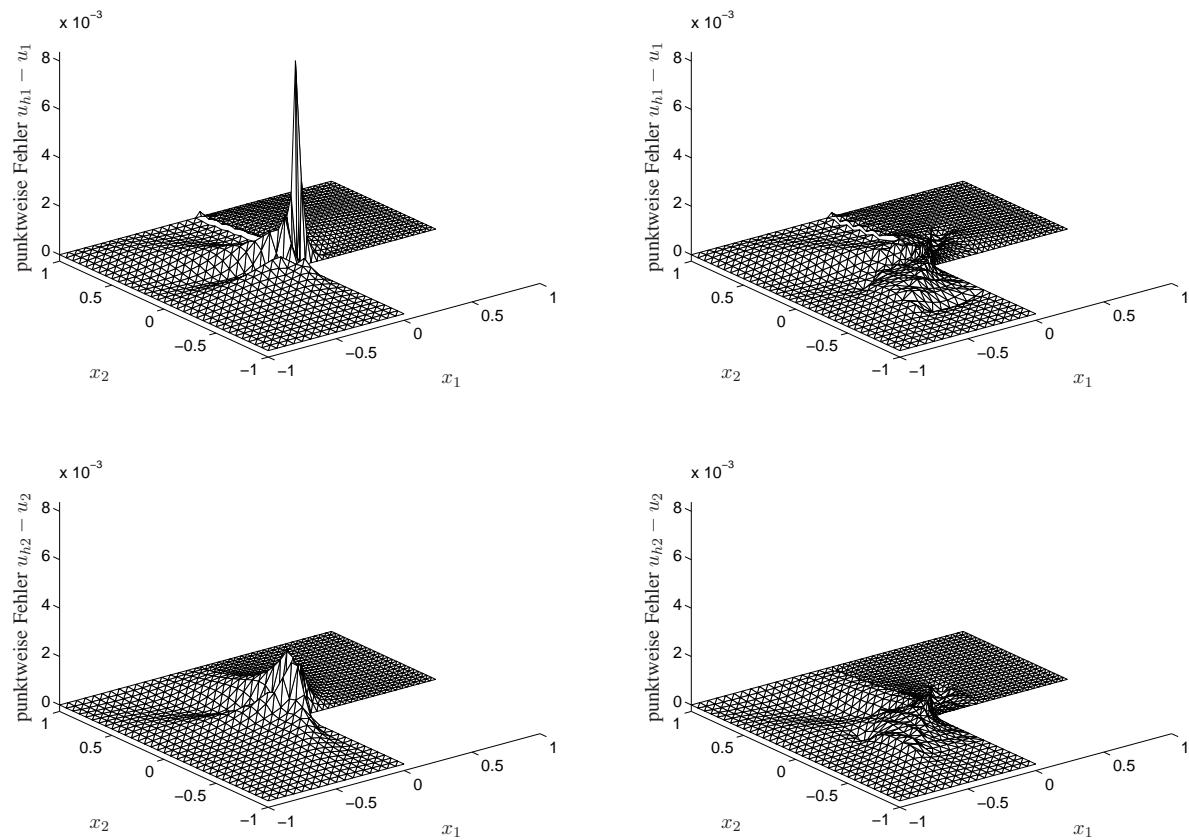


Abbildung 4.8: Punktweise Fehler  $u_{hi} - u_i$  ( $i = 1, 2$ ) auf Netzen vom Level  $h_3$  (links jeweils ohne und rechts mit Graduierung)

# 5 Weitere Betrachtungen für die Poissongleichung

## 5.1 Numerische Untersuchungen zum Parameter $\gamma$

In diesem Abschnitt wird der Einfluss des Parameters  $\gamma$  auf das Verhalten des Fehlers und die Konvergenz numerisch untersucht. Für den Parameter  $\gamma$  muss für numerische Rechnungen ein konkreter Wert gewählt werden. Nach Satz 2.15 ist  $\gamma > C_I$  gefordert, damit die Bilinearform  $V_h$ -elliptisch und die Matrizen positiv definit sind. Die untere Schranke  $C_I$  kann in Abhängigkeit der verwendeten Triangulationen  $\mathcal{T}_h^1, \mathcal{T}_h^2$  und  $\mathcal{E}_h$ , der Wahl von  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  in der Bilinearform sowie dem Polynomgrad  $k$  von  $V_h$  bestimmt werden. Es gilt  $C_I = \max_{\ell=1,2} C_I^\ell$  mit  $C_I^\ell = C_2 c_{SI} c_\alpha^\ell \max_{F \in \mathcal{E}_h^\ell} \frac{h_F}{h_F^\frac{1}{k}}$  (siehe Lemma 2.14). Dabei ist  $C_2$  die Konstante aus Annahme 2.7,  $c_{SI}$  die Konstante aus Lemma 2.11, die in Bemerkung 2.17 näher betrachtet wurde, sowie  $c_\alpha^\ell = 2\alpha_\ell^2$  für  $\alpha_\ell \in (0, 1)$  und  $c_\alpha^\ell = \alpha_\ell^2$  sonst.

Für die folgenden Untersuchungen wurde die Poissongleichung mit homogenen Dirichletrandbedingungen über einem Rechteckgebiet  $\Omega := (a, b) \times (c, d)$  betrachtet und die rechte Seite  $f$  so gewählt, dass für die Lösung  $u = (a - x)(b - x)(c - y)(d - y)$  gilt (vgl. Abbildung 5.2). Mit Ausnahme von Abbildung 5.2 wurde  $a = -1, b = d = 1$  und  $c = 0$  sowie die Gebietszerlegung  $\Omega_1 := (-1, 0) \times (0, 1)$  und  $\Omega_2 := (0, 1) \times (0, 1)$  verwendet.

Die Abbildungen 5.1 und 5.2 verdeutlichen, wie sich große  $\gamma$ -Werte auf die Lösung auswirken. In Abbildung 5.1 ist die Näherungslösung  $u_h$  gemäß (2.6) sowie der Sprung  $|u_h^1 - u_h^2|$  auf  $\Gamma$  für  $\gamma \in \{2, 2 \cdot 10^4, 10^6\}$  dargestellt. Das Netz ist dabei so konstruiert, dass die Triangulationen  $\mathcal{T}_h^1$  und  $\mathcal{T}_h^2$  auf der Schnittkante  $\Gamma := \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 1]\}$  bis auf die Endknoten keine gemeinsamen Knoten haben. Die Triangulation  $\mathcal{E}_h^1$  besteht aus 17 und  $\mathcal{E}_h^2$  aus 16 jeweils gleichgroßen Intervallen (vgl. Abbildung 5.3(c)). Es wurde mit  $\mathcal{E}_h = \mathcal{E}_h^\cap, \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$  und  $k = 1$  gerechnet, somit ergibt sich  $C_I = 1$ . In den Grafiken von Abbildung 5.1 ist sehr deutlich zu erkennen, dass für  $\gamma \gg C_I$  der Sprung  $\sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|u_h^1 - u_h^2\|_{0,E}^2$  am Schnitttrand  $\Gamma$  so stark bestraft wurde, dass der Sprung  $(u_h^1 - u_h^2)|_\Gamma$  zwar sehr klein wird, dies aber auf Kosten der Korrektheit der Näherungslösung.

In Abbildung 5.2 wurde mit einer Triangulation der Teilgebiete  $\Omega_1 := (-1, 1)^2 \setminus \overline{\Omega}_2$  und  $\Omega_2 := (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^2$  gerechnet, deren Knoten auf dem Schnitttrand  $\Gamma = \partial\Omega_2$  nur in den vier Eckpunkten übereinstimmen. Es wurde  $\mathcal{E}_h = \mathcal{E}_h^1, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0$  und  $k = 1$  gewählt und somit  $C_I = 2$ . Für  $\gamma = 10^6$  ist wieder die Verfälschung der Näherungslösung  $u_h$  zu erkennen, die durch die zu starke Bestrafung des Sprunges  $\sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|u_h^1 - u_h^2\|_{0,E}^2$  entsteht. Auf den Randsegmenten  $\Gamma_j$  ( $j = 1 \dots 4$ ), auf denen  $\mathcal{E}_h^1$  und  $\mathcal{E}_h^2$  jeweils nur in den Endknoten übereinstimmen, bildet die Näherungslösung  $u_h$  Geraden, um den Sprung  $u_h^1 - u_h^2$  auf  $\Gamma$  klein zu halten.

In Abbildung 5.3 ist das Verhalten des Fehlers in der  $L_2$ - und der  $L_\infty$ -Norm sowie der Norm  $\|\cdot\|_{1,h}$  in Abhängigkeit von  $\gamma > C_I = 1$  auf drei verschiedenen Netzen dargestellt. In Abbildung 5.3(a)

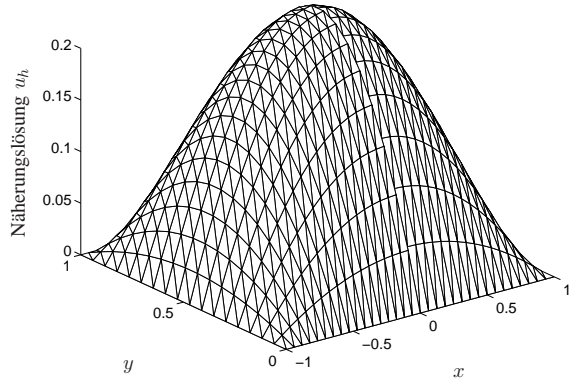
passen alle Netzknoten der Teilgebietstriangulationen, die auf  $\Gamma$  liegen, zusammen, es gilt  $\mathcal{E}_h^1 = \mathcal{E}_h^2$ . Die Fehlernormen bleiben für wachsende  $\gamma$  konstant bis sie schließlich nach kurzen Absinken stark ansteigen und auf erhöhtem Niveau oszillieren. In Abbildung 5.3(b) stimmt auf  $\Gamma$  nur noch jeder dritte Knoten aus  $\mathcal{E}_h^1$  mit jedem zweiten von  $\mathcal{E}_h^2$  überein. Hier steigt der Fehler in der Norm  $\| \cdot \|_{1,h}$  und der  $L_2$ -Norm für  $\gamma \in [10^1, 10^3]$  kaum merklich an. Die  $L_\infty$ -Norm hingegen erhöht sich in diesem Bereich fast um eine Zehnerpotenz. Für  $\gamma \gg C_I$  steigen die Fehlernormen oszillierend stark an. In Abbildung 5.3(c) haben die Triangulation  $\mathcal{E}_h^1$  und  $\mathcal{E}_h^2$  bis auf die Endknoten von  $\Gamma$  keine übereinstimmenden Knoten mehr. Bei dieser Netzkonstellation führt das Wachsen von  $\gamma$  zu einem deutlichen Anstieg aller Fehlernormen, die dann aber auf erhöhtem Niveau konstant bleiben.

Aus dem Beweisen von Satz 2.33 und Satz 2.16 ist bekannt, dass die Konditionszahl der Systemmatrix mit  $\gamma$  wächst (vgl. Abbildung 5.4 oben links). Es gilt  $\kappa(\mathbf{K}) = ch^{-2}$ , wobei  $c$  direkt von  $\mu_2 = 1 + \max\{C_I, \gamma\}$  abhängt. Damit sind für  $\gamma \gg C_I$  im Allgemeinen keine sinnvollen Ergebnisse mehr zu erwarten.

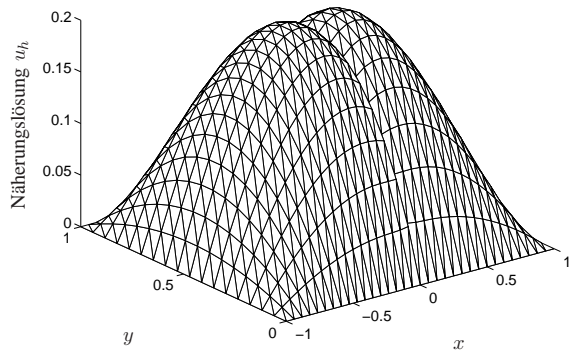
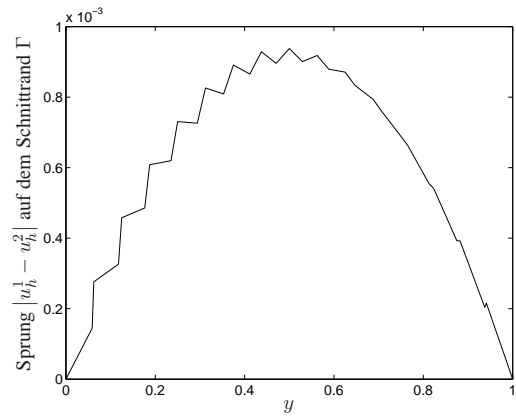
In Abbildung 5.4 wird verdeutlicht, welchen Einfluss  $\gamma \in \{2, 10^1, 10^2, \dots, 10^{10}\}$  auf die Konvergenz des Fehlers in der  $L_\infty$ - und  $L_2$ -Norm sowie der Norm  $\| \cdot \|_{1,h}$  hat. Es wurde hier auf Netzen gerechnet, bei denen jeder dritte Knoten von  $\mathcal{E}_h^1$  mit jedem zweiten von  $\mathcal{E}_h^2$  übereinstimmt, siehe zum Beispiel das Anfangsnetz in Abbildung 2.21. Die Verfeinerung der Netze erfolgt wieder durch Viertelung der Dreiecke in jeweils vier kongruente Dreiecke. Man erkennt, dass die Auswirkungen von  $\gamma > 10^4$  ( $\gamma \gg C_I = 2$ ) auf den Fehler in allen Normen mit zunehmender Netzverfeinerung immer gravierender werden. Verglichen mit dem Fehlerverlauf in Abbildung 5.3(b) bedeutet dies, dass das oszillierende Ansteigen der Fehler für feinere Netz immer früher (kleinere  $\gamma$ ) auftritt, was mit  $\kappa(\mathbf{K}) = c(\gamma)h^{-2}$  (siehe Abbildung 5.4 oben links) auch zu erwarten war. Das allmähliche Ansteigen der Fehler in der  $L_\infty$ -Norm im Bereich  $\gamma \in \{10, \dots, 10^4\}$  hingegen ist vom Grad der Netzverfeinerung unabhängig.

Zusammenfassend ergibt sich, dass  $\gamma > C_I$  gewählt werden muss, aber nicht zu groß, da je nach Netz und Lösungsverhalten die Fehler ab einem bestimmten  $\gamma$  auf Grund der starken Sprungbestrafung bzw. der Abhängigkeit der Konditionszahl von  $\gamma$  groß werden.

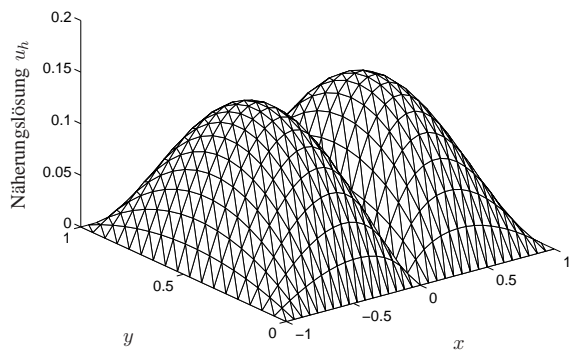
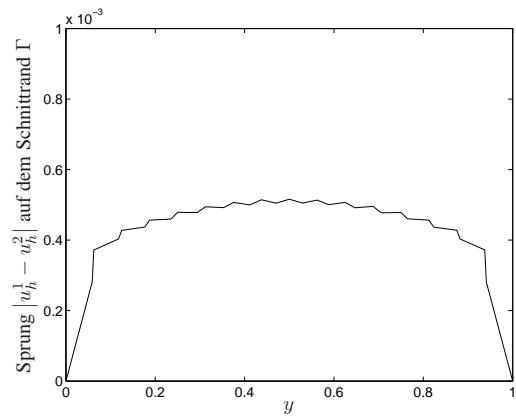




(a)  $\gamma = 2$



(b)  $\gamma = 20000$



(c)  $\gamma = 100000$

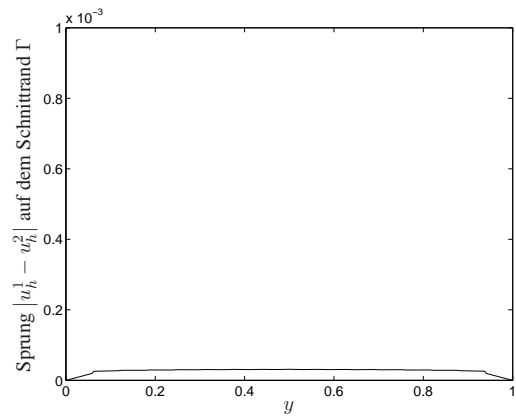


Abbildung 5.1: Einfluss von  $\gamma$  auf die Lösung (links) und den Sprung  $|u_h^1 - u_h^2|$  auf  $\Gamma$  (rechts)

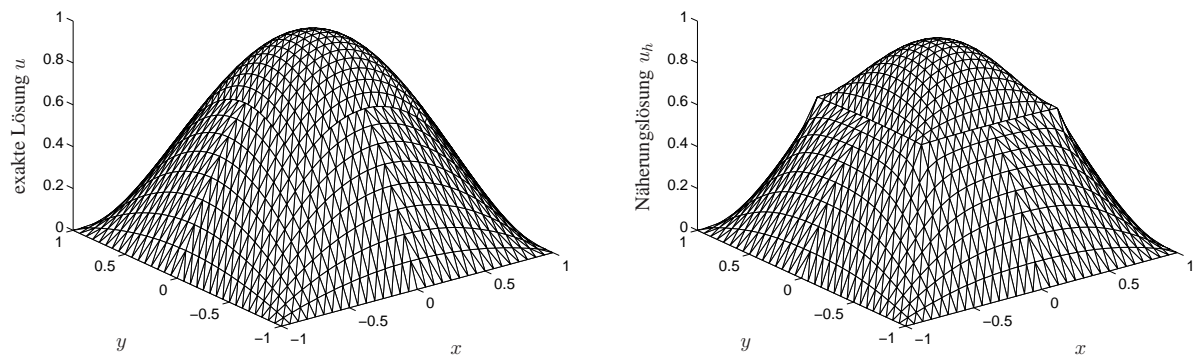
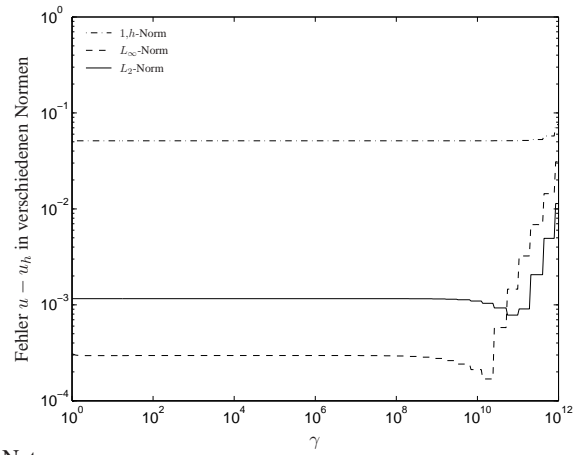
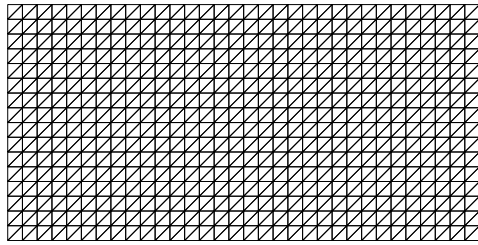
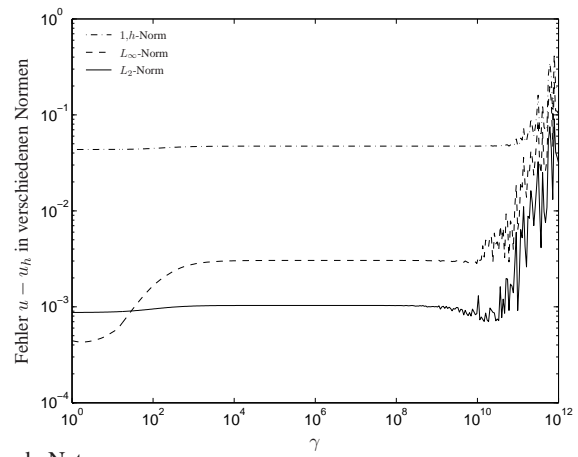
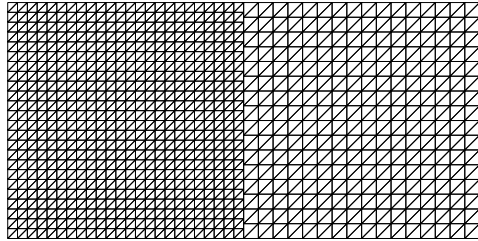


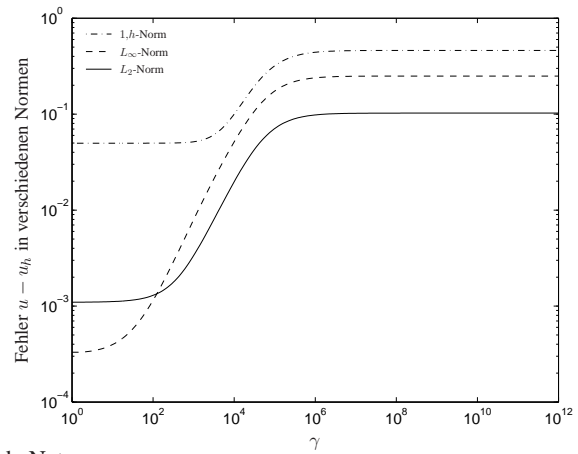
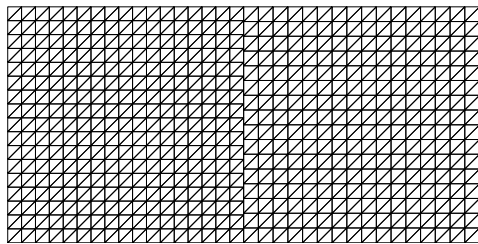
Abbildung 5.2: Exakte Lösung (links) und Näherungslösung für  $\gamma = 1000000$  (rechts) jeweils auf  $h_3$ -Netz



(a) passende Netze



(b) teilweise passende Netze



(c) nicht passende Netze

Abbildung 5.3: Netze und zugehörige Fehlerkurven in Abhängigkeit von  $\gamma$

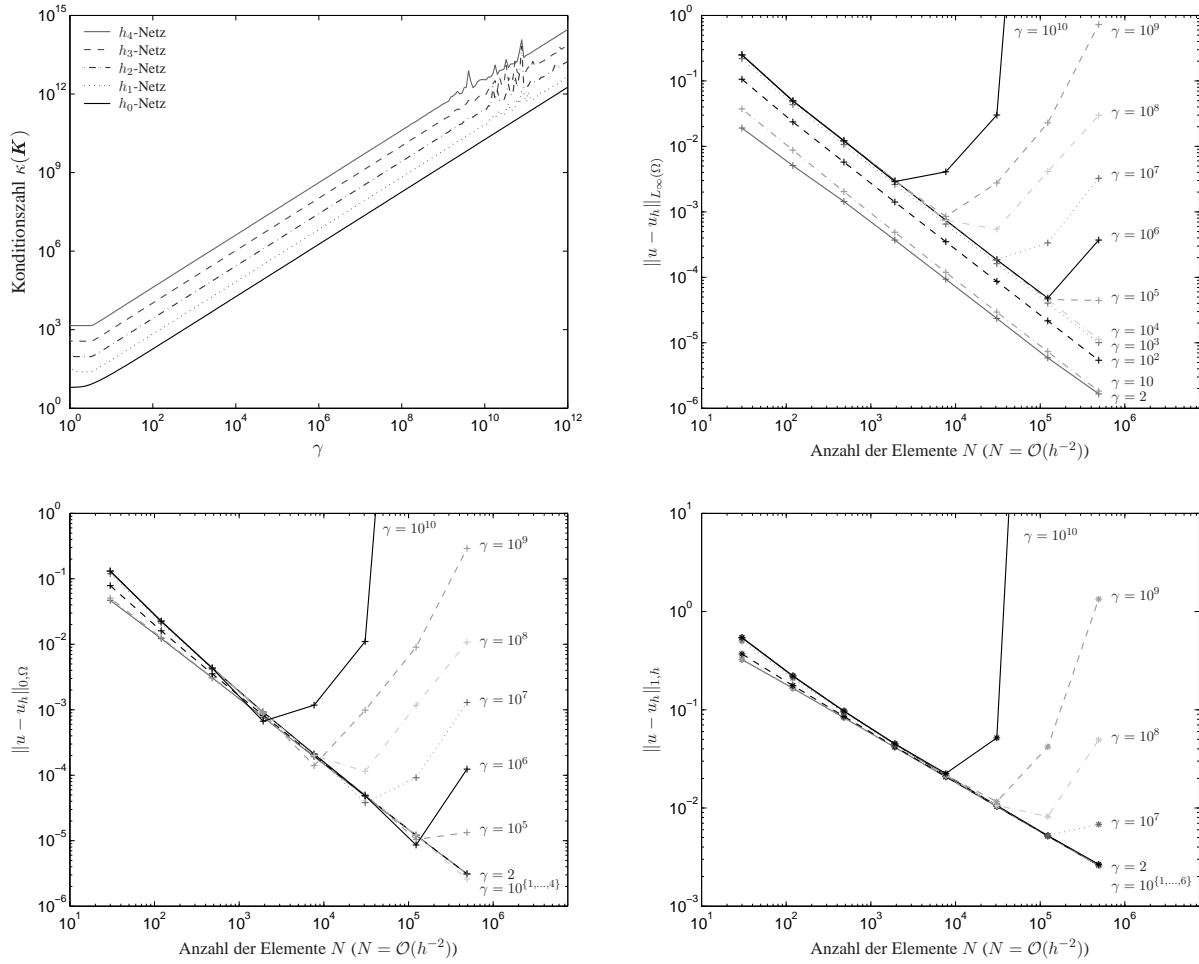


Abbildung 5.4: Konditionszahl  $\kappa(K)$  in Abhängigkeit von  $\gamma$  (oben links); Fehler  $u - u_h$  für  $\gamma \in \{2, 10^1, 10^2, \dots, 10^{10}\}$  in der  $L_\infty$ -Normen (oben rechts) in der  $L_2$ -Norm (unten links) und der Norm  $\|\cdot\|_{1,h}$  (unten rechts)

## 5.2 Vergleich des Nitsche-Mortarings mit einer Inneren Strafmethode

In diesem Abschnitt wird das in Kapitel 2 dargestellte Mortaring nach Nitsche mit der Inneren Strafmethode aus [50] verglichen. Dazu wird zunächst die Innere Strafmethode von [50], siehe auch [51, 4, 7] für die Modellaufgabe

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \text{ in } \Omega, \\ u &= 0 \text{ auf } \partial\Omega \end{aligned} \quad (5.1)$$

über beschränktem, polygonalen Gebiet  $\Omega \in \mathbb{R}^2$  mit dem Rand  $\partial\Omega$  und der rechten Seite  $f \in L_2(\Omega)$  kurz vorgestellt.

Mit der Gebietszerlegung und den Bezeichnungen aus Abschnitt 2.2 sowie den Räumen  $V := V^1 \times V^2$  mit  $V^\ell := H_{0,D}^1(\Omega_\ell) := \{v^\ell \in H^1(\Omega_\ell) : v^\ell|_{\partial\Omega_\ell \cup \partial\Omega} = 0\}$  für  $\ell = 1, 2$  und der „gebrochenen“  $H^1$ -Norm  $\|v\|_V^2 := \sum_{\ell=1}^2 \|v^\ell\|_{1,\Omega_\ell}^2$  wird die Innere Strafformulierung (Variationsgleichung) aufgestellt:

Finde  $(u_\epsilon^1, u_\epsilon^2) = u_\epsilon \in V$ , so dass

$$\mathcal{B}_\epsilon(u_\epsilon, v) = \mathcal{F}(v) \quad \forall v \in V \quad (5.2)$$

mit der Bilinearform

$$\mathcal{B}_\epsilon(u_\epsilon, v) := \sum_{\ell=1}^2 (\nabla u_\epsilon^\ell, \nabla v^\ell)_{\Omega_\ell} + \epsilon^{-1} (u_\epsilon^1 - u_\epsilon^2, v^1 - v^2)_\Gamma$$

und der Linearform  $\mathcal{F}(v) := (f, v)_\Omega$  der rechten Seite gilt. Der Term  $\epsilon^{-1} (u_\epsilon^1 - u_\epsilon^2, v^1 - v^2)_\Gamma$  mit dem typischerweise kleinen Parameter  $\epsilon \in (0, 1]$  kontrolliert die Größe des Sprungs  $u_\epsilon^1 - u_\epsilon^2$  auf dem Schnitttrand  $\Gamma$ . Die Bilinearform  $\mathcal{B}_\epsilon(\cdot, \cdot)$  ist symmetrisch und positiv definit.

Nach [50, Theorem 5.1] gilt für die Lösung  $u \in H^{2-\delta}(\Omega)$  mit  $\delta \in [0, \frac{1}{2})$  von (5.1) und  $u_\epsilon$  gemäß (5.2) die Fehlerabschätzung

$$\|u - u_\epsilon\|_V \leq c \epsilon^{1-\delta} |\log \epsilon|^{1-2\delta} \|u\|_{2-\delta, \Omega},$$

wobei die Konstante  $c$  von  $\epsilon$  unabhängig ist.

Sei  $\mathcal{T}_h = \mathcal{T}_h^1 \cup \mathcal{T}_h^2$  die Triangulation von  $\Omega$  mit dem Diskretisierungsparameter  $h$  aus Abschnitt 2.2, insbesondere sollen  $\mathcal{T}_h^\ell$  mit  $\ell = 1, 2$  die Annahme 2.5 erfüllen. Weiterhin sei  $V_h := V_h^1 \times V_h^2$  (siehe (2.4)) der Finite-Elemente-Raum mit dem Polynomgrad  $k = 1$ . Damit ergibt sich eine diskrete Formulierung der Inneren Strafformulierung (5.2) wie folgt:

Finde  $(u_{\epsilon h}^1, u_{\epsilon h}^2) = u_{\epsilon h} \in V_h$  mit

$$\sum_{\ell=1}^2 (\nabla u_{\epsilon h}^\ell, \nabla v_h^\ell)_{\Omega_\ell} + \epsilon^{-1} (u_{\epsilon h}^1 - u_{\epsilon h}^2, v_h^1 - v_h^2)_\Gamma = \mathcal{F}(v_h) \quad \forall v_h \in V_h.$$

Gemäß [50] gilt dann die Abschätzung  $\|u - u_{\epsilon h}\|_V \leq c (\epsilon^{1-\delta} |\log \epsilon|^{1-2\delta} + h^{1-\delta} + \epsilon^{-\frac{1}{2}} h^{\frac{3}{2}-\delta}) \|u\|_{2-\delta, \Omega}$  mit einer von  $\epsilon$  und  $h$  unabhängigen Konstanten  $c$ . Wählt man den Strafparameter  $\epsilon \approx h$ , so erhält man somit eine fast optimale Konvergenzordnung. Mit der Wahl  $\epsilon = \nu^{-1} h$  ( $\nu > 0$  reell) gilt der folgende Satz.

## 5 Weitere Betrachtungen für die Poissongleichung

**Satz 5.1** ([50, Theorem 6.1]). Sei  $u \in H^{2-\delta}(\Omega)$  mit  $\delta \in [0, \frac{1}{2})$  die Lösung von Problem (5.1). Dann existiert die Lösung  $u_h \in V_h$  der Inneren Straf-Finite-Elemente-Methode

$$\sum_{\ell=1}^2 (\nabla u_h^\ell, \nabla v_h^\ell)_{\Omega_\ell} + \nu h^{-1} (u_h^1 - u_h^2, v_h^1 - v_h^2)_\Gamma = \mathcal{F}(v_h) \quad \forall v_h \in V_h$$

und erfüllt die a-priori-Fehlerabschätzung

$$\|u - u_h\|_V \leq c h^{1-\delta} |\log h|^{1-2\delta} \|u\|_{2-\delta, \Omega}.$$

Die Konditionszahl der korrespondierenden Systemmatrix ist dieselbe wie im Fall der üblichen Galerkin-Methode mit linearen Elementen, nämlich  $\mathcal{O}(h^{-2})$ .

In [50] wird die Fehlerabschätzung nur in der gebrochenen  $H^1$ -Norm ( $\|\cdot\|_V$ ) angegeben. In [51] hingegen werden auch Fehlerabschätzungen in der  $L_2$ -Norm und der Norm  $\|\cdot\|_{1,h}$  (siehe (2.15), allerdings mit  $\mathcal{E}_h = \mathcal{E}_h^p$  und  $p \in \{1, 2\}$  fest) gezeigt. Nach [51, Theorem 3.1] gilt der folgende Satz.

**Satz 5.2.** Sei  $u \in H^{2-\delta}(\Omega)$  mit  $\delta \in [0, \frac{1}{2})$  die Lösung von Problem (5.1), und sei  $u_h \in V_h$  die Lösung der Inneren Straf-Finite-Element-Methode

$$\sum_{\ell=1}^2 (\nabla u_h^\ell, \nabla v_h^\ell)_{\Omega_\ell} + \sum_{E \in \mathcal{E}_h^p} \nu h_E^{-1} (u_h^1 - u_h^2, v_h^1 - v_h^2)_E = \mathcal{F}(v_h) \quad \forall v_h \in V_h.$$

Dann gelten die folgenden a-priori-Fehlerabschätzungen

$$\|u - u_h\|_{1,h} \leq c h^{\frac{1}{2}} \|u\|_{2-\delta, \Omega}, \quad \|u - u_h\|_{0, \Omega} \leq c h \|u\|_{2-\delta, \Omega}.$$

Für den numerischen Vergleich der Inneren Strafmethode mit dem Mortaring nach Nitsche wird hier die Aufgabe (5.1) über dem Gebiet  $\Omega := (-1, 1) \times (-1, 1)$  betrachtet. Die rechte Seite  $f$  ist dabei so gewählt, dass für die exakte Lösung  $u = (1 - x^2)(1 - y^2) \in H^2(\Omega)$  gilt (vgl. Abbildung 5.6). Das Berechnungsgebiet wird in zwei Teilgebiete  $\Omega_2 := (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  und  $\Omega_1 := \Omega \setminus \overline{\Omega}_2$  zerlegt und, wie in Abbildung 5.5 dargestellt, mit einem Anfangsnetz versehen. Die Netzverfeinerung erfolgt wieder durch Teilung der Dreiecke in jeweils vier kongruente Dreiecke pro Verfeinerungsstufe.

In Abbildung 5.7 ist die Finite-Elemente-Näherung  $u_h$  bzw. der Fehler  $u - u_h$  jeweils für die Innere Strafmethode und das Mortaring nach Nitsche auf dem  $h_3$ -Netz dargestellt. Bei der Inneren Strafmethode mit  $\nu = 1$  ist der Fehler am Rand  $\Gamma$  sowie im gesamten Gebiet  $\Omega_2$  deutlich größer als beim Nitsche-Mortaring.

In Tabelle 5.1 werden die Fehler und Konvergenzordnungen der Inneren Strafmethode mit denen des Nitsche-Mortarings verglichen. Es werden die Fehler  $u - u_h$  jeweils vom Level  $h_3$  bis  $h_7$  und die sich zwischen zwei aufeinanderfolgenden Levels ergebenden Konvergenzordnungen  $\alpha$  in der  $L_\infty$ -,  $L_2$ - und  $V$ -Normen sowie in der Norm  $\|\cdot\|_{1,h}$  angegeben. Mit  $\alpha_{\text{theoretisch}}$  werden die nach Satz 5.1, 5.2 sowie Satz 2.29 und 2.31 zu erwartenden Konvergenzordnungen bezeichnet. Für beide Methoden werden die bewiesenen Konvergenzordnungen erreicht, wobei die Fehler in der  $L_2$ -Norm und der Norm  $\|\cdot\|_{1,h}$  beim Nitsche-Mortaring jeweils doppelt so schnell konvergieren wie die der Inneren Strafmethode.

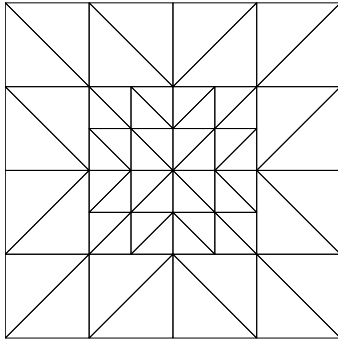


Abbildung 5.5: Anfangsnetz ( $h_0$ -Netz)

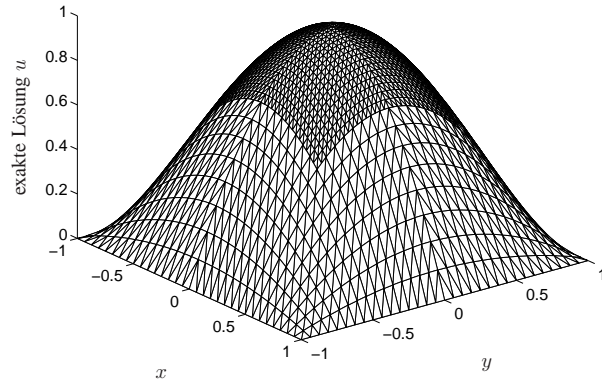


Abbildung 5.6: exakte Lösung auf dem  $h_3$ -Netz

In Tabelle 5.2 sind die Fehler und Konvergenzordnungen der Inneren Strafmethode für  $\nu = h^{-\frac{1}{2}}$  und  $\nu = h^{-1}$  angegeben. Man erkennt, dass für  $\nu = h^{-\frac{1}{2}}$  auch in der Norm  $\|\cdot\|_{1,h}$  optimale Konvergenzordnungen von eins erreicht werden. Bei der Wahl von  $\nu = h^{-1}$  erhält man auch in der  $L_2$ -Norm Konvergenzordnungen von ungefähr zwei, jedoch ist die Konditionszahl dann von der Ordnung  $\mathcal{O}(h^{-3})$ , vgl. Abbildung 5.10.

In Abbildung 5.8 sind die Fehler der Inneren Strafmethode und des Mortarings nach Nitsche in Abhängigkeit von  $\nu$  bzw.  $\gamma$  für die Level  $h_5, h_6$  und  $h_7$  dargestellt. Mit beiden Methoden können genauso kleine Fehler erreicht werden, wobei bei der Inneren Strafmethode der Parameter  $\nu$  in Abhängigkeit von  $h$  wachsend gewählt werden muss. Ebenfalls ist zu erkennen, dass die Fehler in der  $V$ -Norm für alle Werte von  $\nu$  und  $\gamma$  gleich sind und in der Norm  $\|\cdot\|_{1,h}$  schon für kleinere  $\nu$  die gleichen Fehler wie beim Nitsche-Mortaring erreicht werden als in der  $L_2$ - und  $L_\infty$ -Norm. Bei den Rechnungen mit  $h = h_7$  müsste man  $\nu$  so groß wählen, dass man schon im instabilen Bereich ist, bevor man Fehler wie beim Nitsche-Mortaring erreicht.

In Abbildung 5.9 sind die Konditionszahlen der Systemmatrizen  $K$  in Abhängigkeit von  $\nu$  bzw.  $\gamma$  für die Innere Strafmethode sowie das Mortaring nach Nitsche abgebildet. Die Konditionszahlen steigen für beide Methoden in gleicher Weise an.

In Abbildung 5.10 ist die Konditionszahl der Inneren Strafmethode für verschiedene  $\nu$  über der Anzahl der Dreieckselemente der Triangulationen  $\mathcal{T}_h$  für  $h = \{h_1, \dots, h_7\}$  abgetragen. Die Dreiecke verdeutlichen wieder den Anstieg der Kurven und ermöglichen durch Multiplizieren mit  $-2$  das Ablesen der Ordnung der Konditionszahl bezüglich  $h$ . Für konstantes  $\nu = 2.5$  bzw.  $\nu = 10$  ist für die Konditionszahl die Ordnung  $\mathcal{O}(h^{-2})$  zu erkennen. Für  $\nu = h^{-\frac{1}{2}}$  ist die Konditionszahl von der Ordnung  $\mathcal{O}(h^{-2.5})$  und für  $\nu = h^{-1}$  von der Ordnung  $\mathcal{O}(h^{-3})$ .

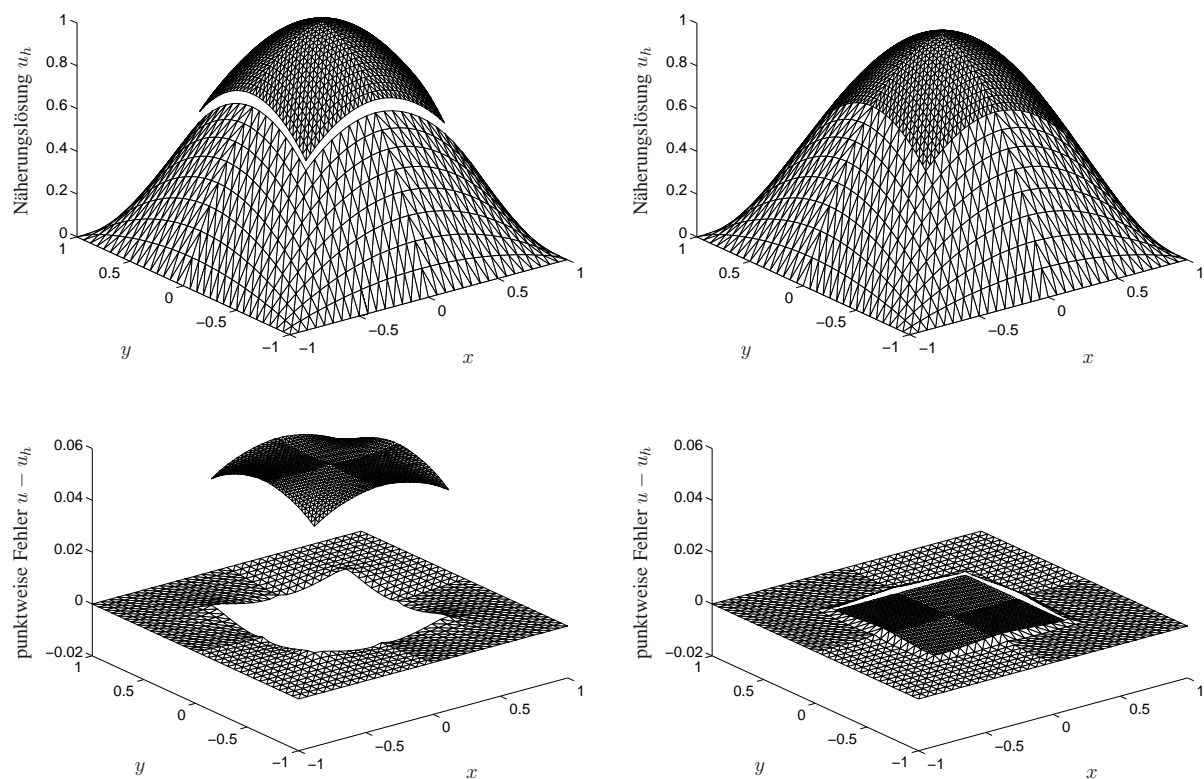


Abbildung 5.7: Näherungslösung  $u_h$  (oben) und punktweise Fehler  $u - u_h$  (unten) jeweils für die Innere Strafmethode (links) und für das Mortaring nach Nitsche (rechts) auf Netzen vom Level  $h_3$  ( $\nu = 1$ ,  $\gamma = 2.5$ )



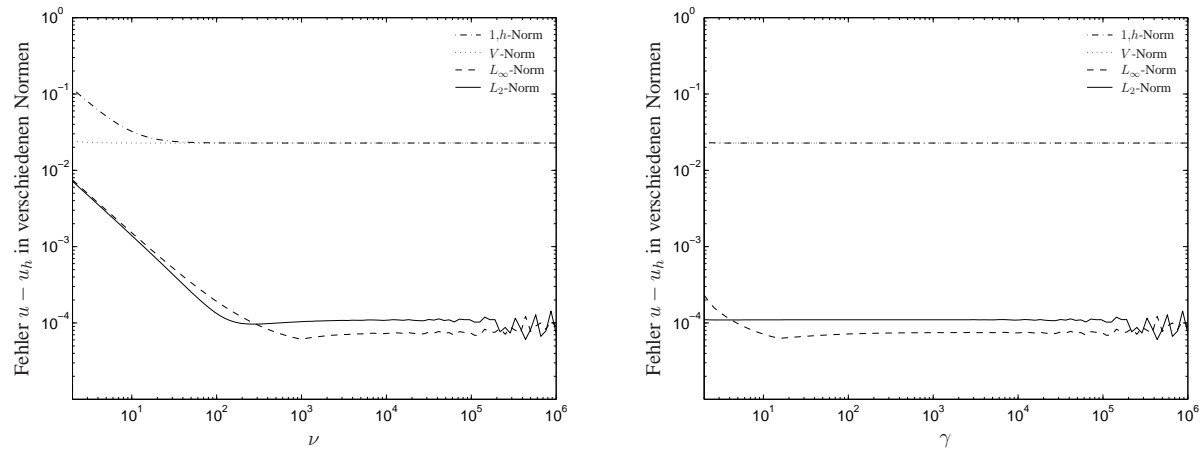
	$L_\infty$ -Norm		$L_2$ -Norm		$\ \cdot\ _{1,h}$ -Norm		V-Norm	
	Fehler	$\alpha$	Fehler	$\alpha$	Fehler	$\alpha$	Fehler	$\alpha$
Innere Straf- methode ( $\nu = 2.5$ )	2.362e-02	0.98	2.234e-02	0.97	2.052e-01	0.57	9.376e-02	1.00
	1.194e-02	0.99	1.137e-02	0.99	1.378e-01	0.54	4.698e-02	1.00
	5.994e-03	1.00	5.735e-03	0.99	9.474e-02	0.52	2.351e-02	1.00
	3.000e-03	1.00	2.881e-03	1.00	6.602e-02	0.51	1.176e-02	1.00
	1.501e-03		1.445e-03		4.634e-02		5.879e-03	
$\alpha_{\text{theoretisch}}$			1.00		0.50		< 1	
Mortaring nach Nitsche ( $\gamma = 2.5$ )	2.068e-03	1.79	1.727e-03	1.98	9.271e-02	1.01	9.173e-02	1.00
	5.984e-04	1.85	4.365e-04	1.99	4.599e-02	1.01	4.572e-02	1.00
	1.658e-04	1.88	1.096e-04	2.00	2.288e-02	1.00	2.281e-02	1.00
	4.505e-05	1.79	2.740e-05	2.20	1.141e-02	1.00	1.139e-02	1.00
	1.302e-05		5.972e-06		5.694e-03		5.689e-03	
$\alpha_{\text{theoretisch}}$			2.00		1.00		1.00	

 Tabelle 5.1: Beobachtete Fehler  $u - u_h$  in verschiedenen Norm jeweils von Level  $h_3$  bis  $h_7$  und die sich zwischen den Levels ergebenden Konvergenzordnungen  $\alpha$ 

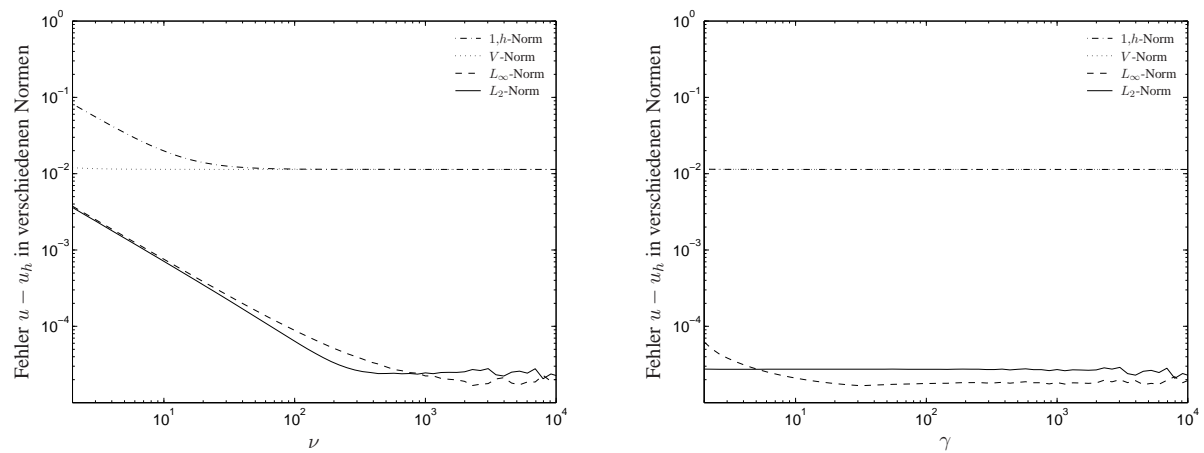
	$\nu$	$L_\infty$ -Norm		$L_2$ -Norm		$\ \cdot\ _{1,h}$ -Norm		V-Norm	
		Fehler	$\alpha$	Fehler	$\alpha$	Fehler	$\alpha$	Fehler	$\alpha$
Innere Straf- methode ( $\nu = h^{-\frac{1}{2}}$ )	4.0	1.481e-02	1.48	1.370e-02	1.48	1.465e-01	1.00	9.195e-02	1.01
	5.7	5.309e-03	1.49	4.918e-03	1.48	7.330e-02	1.00	4.576e-02	1.00
	8.0	1.892e-03	1.50	1.758e-03	1.49	3.665e-02	1.00	2.281e-02	1.00
	11.3	6.712e-04	1.49	6.268e-04	1.48	1.833e-02	1.00	1.139e-02	1.00
	16.0	2.385e-04		2.240e-04		9.162e-03		5.690e-03	
Innere Straf- methode ( $\nu = h^{-1}$ )	16	3.882e-03	1.92	3.162e-03	2.00	9.532e-02	1.03	9.094e-02	1.00
	32	1.028e-03	1.91	7.915e-04	2.00	4.661e-02	1.02	4.550e-02	1.00
	64	2.737e-04	1.92	1.980e-04	2.00	2.303e-02	1.01	2.275e-02	1.00
	128	7.239e-05	1.69	4.963e-05	1.74	1.144e-02	1.00	1.137e-02	1.00
	256	2.241e-05		1.482e-05		5.703e-03		5.686e-03	

 Tabelle 5.2: Beobachtete Fehler  $u - u_h$  in verschiedenen Norm jeweils von Level  $h_3$  bis  $h_7$  und die sich zwischen den Levels ergebenden Konvergenzordnungen  $\alpha$

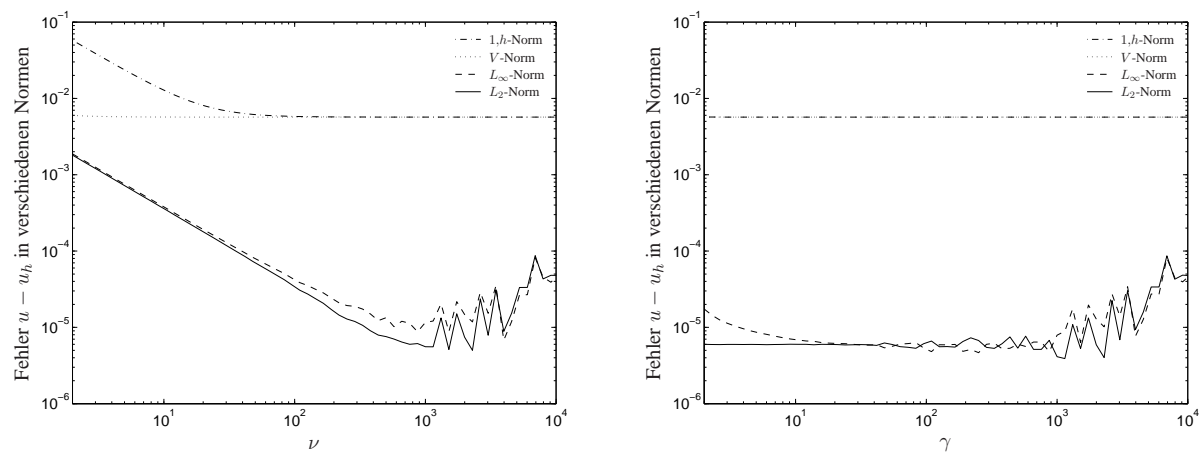
## 5 Weitere Betrachtungen für die Poissongleichung



(a)  $h_5$ -Netz ( $h = \frac{1}{64}$ )



(b)  $h_6$ -Netz ( $h = \frac{1}{128}$ )



(c)  $h_7$ -Netz ( $h = \frac{1}{256}$ )

Abbildung 5.8: Fehlerverläufe der Inneren Strafmethode in Abhängigkeit von  $\nu$  (links) und des Nitsche-Mortarings in Abhängigkeit von  $\gamma$  (rechts) jeweils für das  $h_5$ ,  $h_6$ ,  $h_7$ -Level

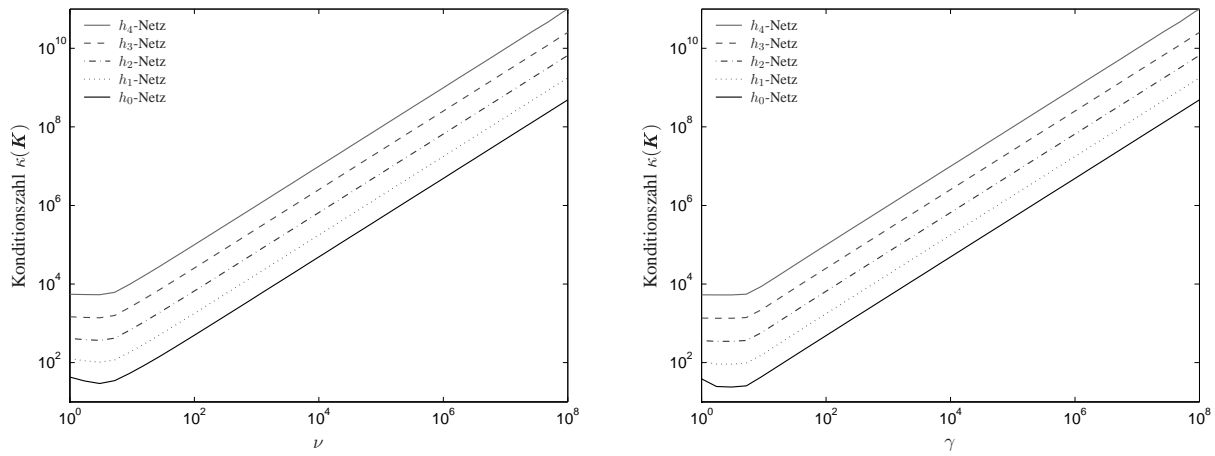


Abbildung 5.9: Konditionszahl  $\kappa(\mathbf{K})$  in Abhängigkeit von  $\nu$  für die Innere Strafmethode (links) und in Abhängigkeit von  $\gamma$  für das Mortaring nach Nitsche (rechts)

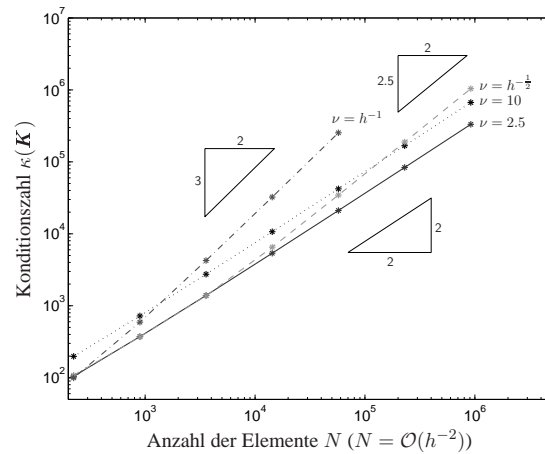


Abbildung 5.10: Konditionszahl der Systemmatrix  $\mathbf{K}$  der Inneren Strafmethode für verschiedene  $\nu$

Das bisherige Rechenbeispiel war so gewählt, dass an der Schnittkante  $\Gamma$  für die Normalenableitung  $\frac{\partial u}{\partial n} \in (\frac{3}{4}, 1)$  gilt bzw.  $\|\frac{\partial u}{\partial n}\|_{0,\Gamma_j}^2 \approx 0.85$  für die gradlinigen Randabschnitte  $\Gamma_j$  ( $j = 1, \dots, 4$ ) von  $\Gamma$ . Für die Innere Strafmethode kann  $\epsilon^{-1} \|u_\epsilon^1 - u_\epsilon^2\|_{0,\Gamma} \leq \|\frac{\partial u}{\partial n}\|_{0,\Gamma}$  gezeigt werden bzw. die Abschätzung  $\|\frac{\partial u}{\partial n} - \epsilon^{-1} (u_\epsilon^2 - u_\epsilon^1)\|_{0,\Gamma} \leq c\epsilon^{\frac{1}{2}-\delta} |\log \epsilon|^{1-2\delta} \|u\|_{2-\delta,\Omega}$  aus dem Beweis von [50, Theorem 5.1] entnommen werden. Damit erhält man für Aufgabenstellungen (Gebietszerlegungen) mit sehr kleinen Normalenableitungen auf  $\Gamma$  insbesondere für  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$  auch in der Norm  $\|\cdot\|_{1,h}$  eine fast optimale Konvergenzordnung. Beim numerischen Vergleich der Inneren Strafmethode mit dem Nitsche-Mortaring für die Lösung  $u = (1 - x^2)(1 - y^2)$  auf  $\Omega = (-1, 1) \times (-1, 1)$  mit der Zerlegung in vier Teilgebiete entsprechend den vier Quadranten ergaben sich für beide Methoden Fehlernormen in den selben Größenordnungen.

# Literaturverzeichnis

- [1] T. APEL, *Anisotropic Finite Elements: Local Estimates and Applications*, Advances in Numerical Mathematics, Teubner, Stuttgart, 1999.
- [2] T. APEL AND B. HEINRICH, *Mesh refinement and windowing near edges for some elliptic problem*, SIAM J. Numer. Anal., 31 (1994), pp. 695–708.
- [3] T. APEL AND G. LUBE, *Anisotropic mesh refinement for a singularly perturbed reaction diffusion model problem*, Appl. Numer. Math., 26 (1998), pp. 415–433.
- [4] D. N. ARNOLD, *An interior penalty finite element method with discontinuous elements*, SIAM J. Numer. Anal., 19 (1982), pp. 742–760.
- [5] D. N. ARNOLD, F. BREZZI, B. COCKBURN, AND D. MARINI, *Discontinuous galerkin methods for elliptic problems*, in Discontinuous Galerkin Methods, B. Cockburn, G. E. Karniadakis, and C.-W. Shu, eds., vol. 11 of Lecture Notes in Computational Science and Engineering, Springer, 2000, pp. 89–101.
- [6] J.-P. AUBIN, *Approximation of elliptic boundary-value problems*, Wiley-Interscience, New York, 1972.
- [7] I. BABUŠKA, *The finite element method for elliptic equations with discontinuous coefficients*, Computing, 5 (1970), pp. 207–213.
- [8] I. BABUŠKA, R. B. KELLOGG, AND J. PITKÄRANTA, *Direct and inverse error estimates for finite elements with mesh refinement*, Numer. Math., 33 (1979), pp. 447–471.
- [9] H. J. C. BARBOSA AND T. J. R. HUGHES, *Boundary Lagrange multipliers in finite element methods: error analysis in natural norms*, Numer. Math., 62 (1992), pp. 1–15.
- [10] R. BECKER AND P. HANSBO, *A Finite Element Method for Domain Decomposition with Non-matching Grids*, Technical Report INRIA 3613, 1999.
- [11] R. BECKER, P. HANSBO, AND R. STENBERG, *A finite element method for domain decomposition with non-matching grids*, M<sup>2</sup>AN Math. Model. Numer. Anal., 37 (2003), pp. 209–225.
- [12] F. B. BELGACEM, *The mortar finite element method with Lagrange multipliers*, Numer. Math., 84 (1999), pp. 173–197.
- [13] F. B. BELGACEM AND Y. MADAY, *The mortar element method for three dimensional finite elements*, M<sup>2</sup>AN Math. Model. Numer. Anal., 31 (1997), pp. 289–302.
- [14] ———, *Coupling spectral and finite elements for second order elliptic three-dimensional equations*, SIAM J. Numer. Anal., 36 (1999), pp. 1234–1263.

- [15] C. BERNARDI, Y. MADAY, AND A. T. PATERA, *A new nonconforming approach to domain decomposition: The mortar element method*, in *Nonlinear partial differential equations and their applications*, H. Brezis and et al, eds., Longman, Paris, 1994, pp. 13–51.
- [16] D. BRAESS, *Finite Elemente*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1992.
- [17] D. BRAESS, W. DAHMEN, AND C. WIENERS, *A Multigrid Algorithm for the Mortar Finite Element Method*, *SIAM J. Numer. Anal.*, 37 (1999), pp. 48–69.
- [18] S. C. BRENNER AND L. R. SCOTT, *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [19] F. BREZZI AND M. FORTIN, *Mixed and hybrid finite element methods*, vol. 15 of Springer series in computational mathematics, Springer, New York, Berlin, Heidelberg, 1991.
- [20] F. BREZZI, L. P. FRANCA, L. D. MARINI, AND A. RUSSO, *Stabilization techniques for domain decomposition methods with nonmatching grids*, in *Domain Decomposition Methods in Sciences and Engineering*, P. E. Bjørstad, M. Espedal, and D. Keyes, eds., Bergen, 1998, Domain Decomposition Press, pp. 1–11.
- [21] C. CARSTENSEN AND S. A. FUNKEN, *Constants in clément-interpolation error and residual based a posteriori error estimates in finite element methods*, *East West J. Numer. Math.*, 8 (2000), pp. 153–175.
- [22] P. G. CIARLET, *The finite-element method for elliptic problems*, vol. 4 of *Studies in mathematics and its applications*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1978.
- [23] ———, *Mathematical elasticity, volume 1: Three-dimensional elasticity*, vol. 20 of *Studies in mathematics and its applications*, Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam, 1988.
- [24] M. COSTABEL AND E. STEPHAN, *Boundary integral equations for mixed boundary value problems in polygonal domains and Galerkin approximation*, Preprint 593, Fachbereich Mathematik, TH Darmstadt, 1981.
- [25] E. P. DOOLAN, J. J. H. MILLER, AND W. H. A. SCHILDERS, *Uniform numerical methods for problems with initial and boundary layers*, Boole Press, Dublin, 1980.
- [26] M. FEISTAUER, *On the finite element approximation of functions with noninteger derivatives*, *Numer. Funct. Anal. Optimization*, 10 (1989), pp. 91–110.
- [27] A. FRITZ, S. HÜEBER, AND B. I. WOHLMUTH, *A comparison of mortar and Nitsche techniques for linear elasticity*, *CALCOLO*, 41 (2004), pp. 115–137.
- [28] H. GAJEWSKI, K. GRÖGER, AND K. ZACHARIAS, *Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen*, Akademie-Verlag, Berlin, 1974.
- [29] P. GRISVARD, *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*, Pitman, Boston, 1985.
- [30] ———, *Problèmes aux limites dans les polygones. Mode d'emploi*, EDF Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches, Series C Mathématiques Informatique, 1 (1986), pp. 21–59.

- [31] ———, *Singularités en élasticité*, Archive for rational mechanics and analysis, 107 (1989), pp. 157–180.
- [32] C. GROSSMANN AND H.-G. ROOS, *Numerik partieller Differentialgleichungen*, Teubner Studienbücher Mathematik, Teubner-Verlag, Stuttgart, 1994.
- [33] W. HACKBUSCH, *Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen*, Teubner Studienbücher Mathematik, Teubner-Verlag, Stuttgart, 1986.
- [34] H. HAN AND R. B. KELLOGG, *Differentiability properties of solutions of the equation  $-\varepsilon^2 \Delta u + ru = f(x, y)$  in a square*, SIAM J. Math. Anal., 21 (1990), pp. 394–408.
- [35] B. HEINRICH, *The Fourier-finite-element-method for Poisson’s equation in axisymmetric domains with edges*, SIAM J. Numer. Anal., 33 (1996), pp. 1885–1911.
- [36] B. HEINRICH AND B. JUNG, *The Fourier-finite-element method with Nitsche-mortaring*, Preprint SFB393/04-11, Technische Universität Chemnitz, 2004.
- [37] B. HEINRICH AND S. NICAISE, *Nitsche mortar finite element method for transmission problems with singularities*, IMA J. Numer. Anal., 23 (2003), pp. 331–358.
- [38] B. HEINRICH AND K. PIETSCH, *Nitsche type mortaring for some elliptic problem with corner singularities*, Preprint SFB393/00-34, Technische Universität Chemnitz, 2000.
- [39] ———, *Nitsche type mortaring for some elliptic problem with corner singularities*, Computing, 68 (2002), pp. 217–238.
- [40] B. HEINRICH AND K. PÖNITZ, *Nitsche type mortaring for singularly perturbed reaction-diffusion problems*, Computing, 75 (2005), pp. 257–279.
- [41] P. HOUSTON, C. SCHWAB, AND E. SÜLI, *Discontinuous hp-Finite Element Methods for Advection-Diffusion-Reaction Problems*, SIAM J. Numer. Anal., 39 (2002), pp. 2133–2163.
- [42] S. HÜEBER, *Persönliche Korrespondenz*, 2003.
- [43] R. B. KELLOGG, *Boundary layers and corner singularities for a self-adjoint problem*, in Boundary value problems and integral equations in nonsmooth domains, M. Costabel, M. Dauge, and S. Nicaise, eds., vol. 167 of Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker, New York, 1995, pp. 121–149.
- [44] ———, *Boundary layers and corner singularities for a self-adjoint problem*. (Überarbeitete Version von [43]), November 1997.
- [45] N. KIKUCHI AND J. T. ODEN, *Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods*, SIAM, Philadelphia, 1988.
- [46] D. KNEES, *Regularity results for transmission problems for the Laplace and Lamé operators on polygonal or polyhedral domains*, SFB 404, Bericht 2002/10, Universität Stuttgart, 2002.
- [47] ———, *Regularity results for quasilinear elliptic systems of power-law growth in nonsmooth domains –boundary, transmission and crack problems–*, PhD thesis, Universität Stuttgart, Fakultät Mathematik und Physik, 2005.

- [48] A. KUFNER AND A.-M. SÄNDIG, *Some Applications of Weighted Sobolev Spaces*, in Teubner-Texte zur Mathematik, Band 100, BSG B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1987.
- [49] G. KUNERT, *A posteriori error estimation for anisotropic tetrahedral and triangular finite element meshes*, PhD thesis, Technische Universität Chemnitz, Januar 1999.
- [50] R. D. LAZAROV, J. E. PASCIAK, J. SCHÖBERL, AND P. S. VASSILEVSKI, *Almost optimal interior penalty discontinuous approximation of symmetric elliptic problems on non-matching grids*, Numer. Math., 96 (2003), pp. 295–315.
- [51] R. D. LAZAROV, S. Z. TOMOV, AND P. S. VASSILEVSKI, *Interior penalty discontinuous approximations of elliptic problems*, Comput. Methods Appl. Math., 1 (2001), pp. 367–382.
- [52] J. M. MELENK, *hp-finite element methods for singular perturbations*, vol. 1796 of Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [53] J. NITSCHKE, *Über ein Variationsprinzip zur Lösung von Dirichlet-Problemen bei Verwendung von Teilräumen, die keinen Randbedingungen unterworfen sind.*, Abhandlung aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg, 36 (1970/1971), pp. 9–15.
- [54] L. A. OGANESYAN AND L. A. RUKHOVETS, *Variational-Difference Methods for Solving Elliptic Equations*, Izdatel'stvo Akad. Nauk Arm. SSR, Jerevan, 1979. (In Russian).
- [55] K. PIETSCH, *Finite-Elemente-Mortaring nach einer Methode von Nitsche für elliptische Probleme der Ebene*, Diplomarbeit, Technische Universität Chemnitz, 2000.
- [56] G. RAUGEL, *Résolution numérique par une méthode d'éléments finis du problème Dirichlet pour le Laplacien dans un polygone*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A, 286 (1978), pp. A791–A794.
- [57] H.-G. ROOS, M. STYNES, AND L. TOBISKA, *Numerical methods for singularly perturbed differential equations*, vol. 24 of Springer series in computational mathematics, Springer, Berlin, Heidelberg, 1996.
- [58] H.-G. ROOS AND H. ZARIN, *Interior penalty discontinuous approximations of convection-diffusion problems with parabolic layers*, Numer. Math., 100 (2005), pp. 735–759.
- [59] A.-M. SÄNDIG, U. RICHTER, AND R. SÄNDIG, *The Regularity of Boundary Value Problems for the Lamé equations in Polygonal Domain*, Rostocker Math. Kolloq., 36 (1989), pp. 21–50.
- [60] C. SCHWAB, *p- and hp-Finite Element Methods. Theory and Applications in Solid and Fluid Mechanics*, Numerical mathematics and scientific computation, Oxford University Press Inc., New York, 1998.
- [61] P. SESHAIYER AND M. SURI, *Uniform hp convergence results for the mortar finite element method*, Math. Comput., 69 (2000), pp. 521–546.
- [62] G. I. SHISHKIN, *Discrete Approximation of Singularly Perturbed Elliptic and Parabolic Equations*, Russian Academy of Sciences, Ural Section, Ekaterinburg, 1992. (Russisch).
- [63] R. STENBERG, *On some techniques for approximating boundary conditions in the finite element method*, J. Comput. Appl. Math., 63 (1995), pp. 139–148.

- [64] ———, *Mortaring by a method of J. A. Nitsche*, in Computational Mechanics, New Trends and Applications, S. Idelsohn, E. Onate, and E. Dvorkin, eds., ©CIMNE, Barcelona, 1998.
- [65] V. THOMEÉ, *Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems*, vol. 25 of Springer Series in Computational Mathematics, Springer Verlag, Berlin, 1997.
- [66] A. TOSELLI AND X. VASSEUR, *Domain decomposition preconditioners of Neumann-Neumann type for ap-approximations on boundary layer meshes in three dimensions*, Resaerch Report 2003-01, Seminar für Angewandte Mathematik, ETH Zürich, 2003.
- [67] R. VERFÜRTH, *A posteriori error estimators for convection-diffusion equations*, Numer. Math., 80 (1998), pp. 641–663.
- [68] T. VON PETERSDORFF, *Randwertprobleme der Elastizitätstheorie für Polyeder — Singularitäten und Approximation mit Randelementmethoden*, PhD thesis, Technische Hochschule Darmstadt, 1989.
- [69] B. WEBER, *Die Fourier-Finite-Elemente-Methode für elliptische Interfaceprobleme in axialsymmetrischen Gebieten*, PhD thesis, Technische Universität Chemnitz-Zwickau, 1993.
- [70] J. R. WHITEMAN AND K. T. SCHLEICHER, *Introduction to treatment of singularities in elliptic boundary value problems using finite element techniques*, in The mathematical basis of finite element methods, D. F. Griffiths, ed., Clarendon Press, Oxford, 1984, pp. 169–183.
- [71] J. WLOKA, *Partielle Differentialgleichungen*, Teubner, Stuttgart, 1982.
- [72] B. I. WOHLMUTH, *A residual based error estimator for mortar finite element discretizations*, Numer. Math., 84 (1999), pp. 143–171.
- [73] ———, *A mortar finite element method using dual spaces for the Lagrange multiplier*, SIAM J. Numer. Anal., 38 (2000), pp. 989–1012.
- [74] ———, *Discretization methods and iterative solvers based on domain decomposition*, vol. 17 of Lecture notes in computational science and engineering, Springer, Berlin, Heidelberg, 2001.



# Symbolverzeichnis

$X$	Gebiet
$\partial X$	Rand von $X$
$\overline{X}$	Abschließung von $X$ ( $\overline{X} := X \cup \partial X$ )
$\overset{\circ}{X}$	Inneres des Gebietes $X$ ( $\overset{\circ}{X} := X \setminus \partial X$ )
$\cdot _X$	Einschränkung einer Funktion auf $X$
$[\cdot, \cdot], (\cdot, \cdot)$	Abgeschlossenes bzw. offenes Intervall
$(\cdot, \cdot], [\cdot, \cdot)$	Halboffene Intervalle
$(\cdot, \dots, \cdot)$	Vektor (Zeilenvektor)
$(\cdot, \cdot)$	Punkt, Gruppierung, Paar (zum Beispiel $(r, \varphi)$ -Koordinaten)
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{C}$	Menge der komplexen Zahlen
$\mathbb{P}_k$	Menge der Polynome vom Grad $\leq k$
$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial n}$	Ableitung in Richtung $x$ bzw. Normalenableitung
$\Delta$	Laplace-Operator in kartesischen Koordinaten, $\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$
$\nabla$	Gradient (Vektor der ersten Ableitungen), $\nabla u := \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^\top$
$D^\alpha$	Ableitung der $ \alpha $ -ten Ordnung zum Multiindex $\alpha$ , $D^\alpha u := \frac{\partial^{ \alpha } u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}}$
$D^2$	Hesse-Matrix (Matrix der zweiten Ableitungen), $D^2 u := \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1}^2$
$\varepsilon$	Verzerrungstensor, $\varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) = \varepsilon_{ji}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$ ,
$\sigma$	Spannungstensor, $\sigma_{ij}(\mathbf{v}) = \sigma_{ji}(\mathbf{v}) = \lambda_L \left( \sum_{k=1}^2 \varepsilon_{kk}(\mathbf{v}) \right) \delta_{ij} + 2\mu_L \varepsilon_{ij}(\mathbf{v})$ ,
$\operatorname{div} \sigma$	Divergenz des Spannungstensors, $\operatorname{div} \sigma(\mathbf{v}) := \left( \sum_{j=1}^2 \frac{\partial \sigma_{ij}(\mathbf{v})}{\partial x_j} \right)_{i=1,2}$
$\sigma \mathbf{n}$	Randspannung, $\sigma(\mathbf{v}) \mathbf{n} := \left( \sum_{j=1}^2 \sigma_{ij}(\mathbf{v}) n_j \right)_{i=1,2}$
$\operatorname{Re}, \operatorname{Im}$	Real- und Imaginärteil einer komplexen Zahl
$\operatorname{diam}$	Durchmesser
$\operatorname{dist}$	Abstand
$\operatorname{meas}$	Maß
$\det$	Determinante einer Matrix
$\cdot^\top$	Transponierte einer Matrix bzw. eines Vektors
$\sim$	Asymptotisch äquivalent

$a \sim b \iff \exists$ von $a, b$ unabhängige Konstanten $c_1, c_2 : c_1 b \leq a \leq c_2 b$	
$\hookrightarrow$	Stetige Raumeinbettung
$[\cdot]$	Ganzzahliger Anteil, $[a] = \max_{n \in \mathbb{N}} n \leq a$
$\Omega$	Polygonales und beschränktes Gebiet (offene Menge) im $\mathbb{R}^2$
$\partial\Omega$	Rand von $\Omega$
$\Gamma_D, \Gamma_N$	Dirichlet-, Neumannrand ( $\partial\Omega := \Gamma_D \cup \Gamma_N$ , $\text{meas } \Gamma_D \neq \emptyset$ )
$\Gamma_j$	Geradlinige Randabschnitte von $\partial\Omega$
$\mathcal{D}, \mathcal{N}$	Indexmengen $\mathcal{D} := \{j : \Gamma_j \subset \Gamma_D\}$ und $\mathcal{N} := \{j : \Gamma_j \subset \Gamma_N\}$
$\Omega_1, \Omega_2$	Nichtüberlappende Teilgebiete von $\Omega$ , $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2$ , $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$
$\Gamma$	Schnittkurve von $\partial\Omega_1$ und $\partial\Omega_2$
$\Omega^i, \Omega^b, \Omega^c$	Gebietszerlegung in innere, Randschicht- und Eckengebiete (vgl. Abschnitt 3.3.1)
$\Omega_\ell^i, \Omega_\ell^b, \Omega_\ell^c$	Durchschnitt von jeweils $\Omega^i, \Omega^b, \Omega^c$ mit $\Omega_\ell$ ( $\ell = 1, 2$ )
$u, \mathbf{u}$	Lösung der elliptischen Randwertaufgaben (skalar bzw. vektorwertig)
$u_h, \mathbf{u}_h$	Finite-Elemente-Näherungslösung (skalar bzw. vektorwertig)
$u_{\text{re}}, u_{\text{si}}, \mathbf{u}_{\text{re}}, \mathbf{u}_{\text{si}}$	Reguläre und singuläre Lösungsanteile, siehe Satz 2.1 bzw. Satz 4.3 ( $u_{\text{re}} \in H^2(\Omega)$ und $u_{\text{si}} \in H^{1+\lambda-\delta}(\Omega)$ mit $\lambda \in (0, 1)$ , $\delta \in (0, \lambda)$ ) ( $\mathbf{u}_{\text{re}} \in \mathbf{H}^2(\Omega)$ und $\mathbf{u}_{\text{si}} \in \mathbf{H}^{1+\lambda-\delta}(\Omega)$ mit $\lambda \in (0, 1)$ , $\delta \in (0, \lambda)$ )
$u_s, u_b, u_c, u_r$	Glatter, Randschicht-, Eckensingularitäts- und Restanteil der Lösung, siehe Annahme 3.15 ( $u_s, u_b, u_r \in H^2(\Omega)$ und $u_c \in H^{\frac{3}{2}+\delta}(\Omega)$ mit $\delta > 0$ )
$f, \mathbf{f}$	Rechte Seite der Differentialgleichung ( $f \in L_2(\Omega)$ bzw. $\mathbf{f} \in \mathbf{L}_2(\Omega)$ )
$g, \mathbf{g}$	Neumanndaten auf $\Gamma_N$
$\hat{\cdot}$	Funktionen bzw. Gebiete über dem Referenzelement
$I_h$	Lagrange-Interpolationsoperator
$h$	Diskretisierungsparameter der Triangulationen
$\mathcal{T}_h, \mathcal{T}_h^\ell$	Triangulation von $\Omega$ bzw. $\Omega_\ell$
$\mathcal{E}_h, \mathcal{E}_h^\ell, \mathcal{E}_\cap^\ell, \mathcal{E}_\cap^{\cap}$	Triangulationen von $\Gamma$
$T, E, F, D$	Dreieckselement $T \in \mathcal{T}_h^\ell$ , Intervalle $E \in \mathcal{E}_h$ , $F \in \mathcal{E}_h^\ell$ bzw. $D \in \mathcal{E}_\cap^\ell$
$h_T, h_E, h_F, h_D$	Durchmesser der einzelnen Elemente $T, E, F, D$
$h_F^\perp$	Höhe des Dreiecks $T$ über der Seite $F$
$h_{T,1}, h_{T,2}$	Länge der längsten Seite von $T$ bzw. Höhe von $T$ über der Seite mit Länge $h_{T,1}$
$C(\overline{\Omega})$	Raum der auf $\overline{\Omega}$ stetigen Funktionen
$C^s(\overline{\Omega})$	Raum der auf $\overline{\Omega}$ $s$ -mal stetig-differenzierbaren Funktionen
$L_\infty(\Omega)$	Raum der messbaren, fast überall auf $\Omega$ beschränkten Funktionen
$L_2(\Omega), \mathbf{L}_2(\Omega)$	Raum der über $\Omega$ quadratisch integrierbaren Funktionen
$H^s(\Omega), \mathbf{H}^s(\Omega)$	Sobolev-Raum der Ordnung $s \in \mathbb{R}$
$H_{0,\mathcal{D}}^1, \mathbf{H}_{0,\mathcal{D}}^1 = \mathbf{V}$	Menge aller $H^1$ -Funktionen auf $\Omega$ , die auf den Dirichletrandanteilen von $\partial\Omega$ verschwinden ( $H_{0,\mathcal{D}}^1(\Omega) = H_{0,\mathcal{D}}^1$ )
$H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \mathbf{H}_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$	Spurraum von $H_{0,\mathcal{D}}^1(\Omega)$ bzw. von $\mathbf{H}_{0,\mathcal{D}}^1$ , Sobolev-Raum der Ordnung $\frac{1}{2}$
$H_*^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), \mathbf{H}_*^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$	Dualer Raum zu $H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ bzw. zu $\mathbf{H}_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$
$V^\ell = H_{0,\mathcal{D}}^1(\Omega_\ell)$	Menge aller $H^1$ -Funktionen auf dem Teilgebiet $\Omega_\ell$ , die auf den Dirichletrandanteilen von $\partial\Omega \cap \partial\Omega_\ell$ verschwinden

$V$	„gebrochener“ $H_{0,D}^1$ -Raum, $V := V^1 \times V^2$
$V_h^\ell, \mathbf{V}_h^\ell$	Finite-Elemente-Raum über dem Teilgebiet $\Omega_\ell$
$V_h, \mathbf{V}_h$	Finite-Elemente-Raum $V_h := V_h^1 \times V_h^2$ bzw. $\mathbf{V}_h := \mathbf{V}_h^1 \times \mathbf{V}_h^2$
$ \cdot $	Betrag
$\ \cdot\  =  \cdot $	Euklidische Vektornorm $ a  := (a_1^2 + \dots + a_n^2)^{\frac{1}{2}}$ mit $(a_1, \dots, a_n)^T \in \mathbb{R}^n$
$\ \cdot\ _F =  \cdot $	Frobeniusnorm einer Matrix (z.B. $ D^2u ^2 := \sum_{i,j=1}^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right)^2$ )
$\ \cdot\ _{0,\Omega}$	$L_2$ - bzw. $L_2$ -Norm
$\ \cdot\ _{s,\Omega}$	Sobolev-Norm der Ordnung $s$
$ \cdot _{s,\Omega}$	Sobolev-Seminorm der Ordnung $s$
$\ \cdot\ _{0,\Omega;\beta}$	Gewichtete $L_2$ -Norm $\ v\ _{0,\Omega;\beta} := \ r^\beta v\ _{0,\Omega}$ bzw. gewichtete $L_2$ -Norm $\ v\ _{0,\Omega;\beta}^2 := \ r^\beta v\ _{0,\Omega}^2 = \sum_{i=1}^2 \ r^\beta v_i\ _{0,\Omega}^2$
$\ \cdot\ _{1,h}$	Netzabhängige Norm, siehe (2.15), (3.6) bzw. (4.8)
$\ \cdot\ _{h,\Omega}$	Netzabhängige Norm, siehe (2.30), (3.14) bzw. (4.9)
$\ \nabla u\ _{0,X}$	$L_2$ -Norm des Gradienten $\ \nabla u\ _{0,X}^2 := \ \nabla u\ _{0,X}^2 = \int_X  \nabla u ^2 dx$
$\ D^2u\ _{0,X}$	$L_2$ -Norm der Hesse-Matrix $\ D^2u\ _{0,X}^2 := \ D^2u\ _{0,X}^2 = \int_X  D^2u ^2 dx$
$(\cdot, \cdot)_\Omega$	$L_2$ - bzw. $L_2$ -Skalarprodukt auf $\Omega$
$\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$	Dualform auf $H_*^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ bzw. auf $\mathbf{H}_*^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times \mathbf{H}_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$
$\sigma : \varepsilon$	Doppeltes Skalarprodukt (Matrixskalarprodukt) $\sigma : \varepsilon := \sum_{i,j=1}^2 \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$
$\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}$	Skalarprodukt von Vektoren $\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} := \sum_{i=1}^2 f_i v_i$
$\mathcal{B}_h(\cdot, \cdot)$	Bilinearform des Nitsche-Mortarings, siehe (2.7), (3.4) bzw. (4.5)
$\mathcal{F}_h(\cdot)$	Linearform der rechten Seite
$c$	Generische Konstante, von $u, h$ und in Kapitel 3 zusätzlich von $\varepsilon$ unabhängig
$c_{SI}$	Konstante aus Spursatz und Inverser Ungleichung, vgl. Bemerkung 2.17
$C_1, C_2, C_3, \dots$	Netzkonstanten, von $h$ und in Kapitel 3 zusätzlich von $\varepsilon$ unabhängig
$\alpha_1, \alpha_2$	Parameter in der Bilinearform
$\gamma$	positive Konstante, Parameter in der Bilinearform
$C_I$	positive Konstante, wichtig für die Wahl von $\gamma$ , vgl. Lemma 2.14, 3.12 und 4.13
$\mu_1, \mu_2$	Konstanten bei der Elliptizität bzw. der Beschränktheit der Bilinearform $\mathcal{B}_h(\cdot, \cdot)$
$c_{si}$	Singularitätskonstante beim Abschätzen von $u_{si}$ bzw. $\mathbf{u}_{si}$
$\lambda$	Singularitätsexponent des singulären Lösungsanteils ( $\lambda \in (0, 1)$ bzw. $\lambda \in (0, 2)$ in Kapitel 3)
$\mu$	Graduierungsparameter bei lokal graduerten Netzen ( $\mu \in (0, 1]$ )
$\lambda_L, \mu_L$	Lamé-Konstanten
$\xi$	Materialabhängige Konstante, $\xi = 2(\mu_L + \lambda_L)$
$\delta, \varepsilon$	$\delta, \varepsilon > 0$ beliebig
$\varepsilon$	Diffusionsparameter in Kapitel 3
$\beta, \beta_E, \beta_F$	Gewichtsexponenten in Kapitel 2 und 4
$\alpha, \beta, \delta$	Multiindizes besonders in Kapitel 3 bzw. Konvergenzordnung bei numerischen Untersuchungen
$k$	Polynomgrad von $V_h^\ell$ bzw. $\mathbf{V}_h^\ell$
$e$	Eulersche Konstante 2.7182818...

# Thesen

## Finite-Elemente-Mortaring nach einer Methode von J. A. Nitsche für elliptische Randwertaufgaben

Dipl.-Math. techn. Kornelia Pönitz

Technische Universität Chemnitz, Fakultät für Mathematik

1. Zahlreiche physikalische Prozesse lassen sich als Randwertprobleme partieller Differentialgleichungen modellieren, deren exakte Lösung  $u$  im Allgemeinen nicht analytisch bestimmt werden kann. Näherungslösungen  $u_h$  lassen sich zum Beispiel mit Finite-Elemente-Methoden berechnen. Dabei gibt es häufig Problemstellungen (zum Beispiel Probleme mit komplizierten Geometrien, Randschichten, springenden Koeffizienten sowie zeitabhängige Probleme), für die es vorteilhaft ist, wenn Teilgebiete des Berechnungsgebietes unterschiedlich und unabhängig voneinander vernetzt werden. Solche Aufgaben mit nichtzusammenpassenden (nichtkonformen) Triangulationen und unstetigen Finite-Element-Näherungen können mit Hilfe von Mortar-Methoden behandelt werden.
2. Eine spezielle Mortar-Methode ist das Finite-Elemente-Mortaring nach einer Methode von Nitsche. Wie bei anderen Gebietszerlegungsmethoden sind auch hier die Teilgebietslösungen geeignet zu koppeln. Beim Nitsche-Mortaring wird die Lösung der Differentialgleichung unabhängig auf jedem Teilgebiet approximiert und die Stetigkeit der Näherungslösung an den Teilgebietschnittträgern durch schwache Stetigkeitsbedingungen ersetzt. Dies führt zu netzabhängigen Bilinearformen auf dem Produktraum der gewöhnlichen Finite-Elemente-Räume der Teilgebiete. Die Bilinearformen beim Nitsche-Mortaring sind symmetrisch, positiv definit und beschränkt, vorausgesetzt der Differentialoperator besitzt diese Eigenschaften.
3. Das Mortaring nach Nitsche ähnelt durch die Wahl eines Parameters  $\gamma$  in der Bilinearform einer Inneren Strafmethode. Der Unterschied zu diesen Verfahren ist dadurch gegeben, dass hier die Konsistenz der Lösung mit der diskreten Variationsformulierung für eine beliebige Wahl des Parameters  $\gamma$  vorliegt. Das Nitsche-Mortaring ist somit keine Strafmethode. Der Parameter  $\gamma$  ist außerdem von moderater Größe und kann für gegebene Diskretisierungen angegeben werden.
4. Lösungen der Poisson- und Lamé-Gleichung mit gemischten Randbedingungen auf beschränkten, polygonalen Gebieten  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  weisen im Allgemeinen Eckensingularitäten auf. Damit liegt keine  $H^2$ -Regularität der Lösungen vor. Es gilt  $u \in H^{1+\lambda-\delta}(\Omega)$  mit  $\lambda \in (0, 1)$  und beliebigem  $\delta \in (0, \lambda)$ , wobei die Funktionen und Räume für die Lamé-Gleichung vektorwertig sind.

Die Lösungen der betrachteten Randwertprobleme können jedoch in einen regulären Lösungsanteil  $u_{\text{re}} \in H^2(\Omega)$  und einen singulären Lösungsanteil  $u_{\text{si}} \in H^{1+\lambda-\delta}(\Omega)$  zerlegt werden, wobei

die Gestalt des singulären Lösungsanteils (vom Typ  $r^\lambda$  mit  $r$  der Abstand zur Ecke) angegeben werden kann und der Grad der Regularität durch den Singularitätsexponenten  $\lambda$  (abhängend vom Innenwinkel, der Art der anliegenden Randbedingungen und gegebenenfalls den Lamé-Konstanten) charakterisiert wird.

5. Eine Möglichkeit um bei Problemen mit Eckensingularitäten optimale Konvergenzordnungen für den Verfahrensfehler in verschiedenen Normen zu erhalten, ist die Verwendung von lokal verfeinerten Netzen. Bei lokal verfeinerten Netzen wird das Verhalten des Durchmessers  $h_T$  der Elemente  $T$  der Triangulationen durch eine Funktion vom Diskretisierungsparameter  $h$ , dem Abstand von  $T$  von dem Eckpunkt und einem reellen Parameter  $\mu \in (0, 1]$  beschrieben. Dabei gibt  $\mu$  den Grad der lokalen Netzverfeinerung an. Für  $\mu = 1$  erhält man ein Netz ohne lokale Verfeinerung, und mit kleiner werdendem  $\mu$  wird das Netz zur Ecke hin immer dichter.
6. Beim Lösen der Poisson- und Lamé-Gleichung mit dem Finite-Elemente-Mortaring nach einer Methode von Nitsche werden für ausreichend lokal verfeinerte Netze optimale Konvergenzordnungen wie auch bei der klassischen Finite-Elemente-Methode ohne Mortaring erreicht.

Unter Verwendung linearer finiter Elemente gilt für den Verfahrensfehler  $u - u_h$  in der  $H^1$ -artigen Norm  $\|\cdot\|_{1,h}$  („gebrochene“ Energienorm und mit  $h^{-1}$  gewichtete  $L_2$ -Norm des Sprungs der Näherungslösungen der Teilgebiete am Teilgebietsschnitttrand) die Abschätzung

$$\|u - u_h\|_{1,h} \leq c \left( \|f\|_{0,\Omega} + \|g\|_{\frac{1}{2},\Gamma_N} \right) \begin{cases} h^{\frac{\lambda}{\mu}} & \text{für } \lambda < \mu \leq 1 \\ h |\ln h|^{\frac{1}{2}} & \text{für } \mu = \lambda \\ h & \text{für } 0 < \mu < \lambda < 1 \end{cases}$$

gegen die rechte Seite  $f$  der Differentialgleichung und die Neumanndaten  $g$ . Es wird also die optimale Konvergenzordnung von eins für ausreichend lokal verfeinerte Netze ( $\mu < \lambda$ ) erreicht und für Netze ohne lokale Verfeinerung ( $\mu = 1$ ) nur die geringere Konvergenzordnung von  $\lambda$ .

Für die Fehlerabschätzung in der  $L_2$ -Norm erhält man jeweils die doppelten Konvergenzordnungen.

7. Da die Bilinearform des Mortarings nach Nitsche gegenüber der Bilinearform der üblichen Variationsformulierung, wie sie bei der klassischen Finite-Elemente-Methode ohne Mortaring verwendet wird, zusätzliche Terme enthält, ist das Berechnen der Galerkin-Systemmatrix aufwändiger. Die entstehende Systemmatrix ist aber ebenfalls symmetrisch und positiv definit, und die Konditionszahl von der Ordnung  $\mathcal{O}(h^{-2})$ .
8. Bei singular gestörten Reaktions-Diffusions-Problemen mit homogenen Dirichletrandbedingungen über beschränkten, polygonalen Gebieten weisen die Lösungen neben Eckensingularitäten auch anisotropes Verhalten in Randschichten auf (insbesondere für kleine Diffusionsparameter  $\varepsilon$ ). Für die Lösung gilt hier  $u \in H^{\frac{3}{2}+\delta}(\Omega)$  mit einer Zerlegung in einen glatten, einen Randschicht-, einen Eckensingularitäts- und einen Restanteil, wobei die Gestalt des Eckensingularitätsanteil (vom Typ  $(\frac{r}{\varepsilon})^\lambda$  mit  $r$  der Abstand zur Ecke und  $\lambda > \frac{1}{2}$  der Singularitätsexponent) und des Randschichtanteil angegeben werden kann (siehe Apel 1999).
9. Um singular gestörte Reaktions-Diffusions-Probleme effizient zu approximieren, werden neben lokal verfeinerten Netzen in der Umgebung von einspringenden Ecken auch anisotrope Netze in

den Randschichten verwendet. Bei anisotropen Dreiecken ist das Verhältnis von Durchmesser und Inkreisradius des Dreiecks nicht mehr gleichmäßig bezüglich  $\varepsilon$  beschränkt. Damit gibt es „lange“ und „kurze“ Dreiecksseiten mit  $h_{T,1} \sim h$  und  $h_{T,2} \sim b(\varepsilon)h$ . Die Abschätzungen zum Nitsche-Mortaring werden gleichmäßig bezüglich  $\varepsilon$  durchgeführt.

10. Die Fehlerabschätzung beim Mortaring nach Nitsche mit linearen finiten Elementen und den Randschichtparameter (Anisotropie-Parameter)  $b = b_0\varepsilon |\ln \varepsilon|$  mit  $b_0 \geq c$  in der Norm  $\|\cdot\|_{1,h}$  für singular gestörte Reaktions-Diffusions-Probleme ergibt die Abschätzung

$$\|u - u_h\|_{1,h} \leq c \left( \varepsilon^{\frac{1}{2}} |\ln \varepsilon|^{\frac{3}{2}} h^\alpha + h^2 \right)$$

mit  $\alpha = 1$  für ausreichend lokal verfeinerte Netze ( $\mu < \lambda$ ) und dem geringeren  $\alpha = \lambda$  für Netze ohne lokale Verfeinerung ( $\mu = 1$ ). Es werden somit Konvergenzordnungen wie auch bei der klassischen Finite-Elemente-Methode ohne Mortaring erhalten.

11. Das Finite-Elemente-Mortaring nach der Methode von Nitsche erreicht bei numerischen Testrechnungen die erwarteten Konvergenzordnungen und liefert Näherungslösungen mit Genauigkeiten in derselben Größenordnung wie die klassische Finite-Elemente-Methode.
12. Beim Vergleich des Mortarings nach Nitsche mit einer speziellen Inneren Strafmethode (Lazarov u. a. 2003), die eine einfachere Variationsformulierung besitzt, werden ähnliche Größenordnungen der Fehler und Konvergenzraten erhalten. Dabei muss allerdings der Strafparameter der Inneren Strafmethode in Abhängigkeit von  $h$  groß gewählt werden, was zu schlechteren Konditionszahlen als beim Nitsche-Mortaring führt.