

# Effiziente FE-Approximation bei komplizierten Geometrien durch Materialfunktionen

D I P L O M A R B E I T



TECHNISCHE UNIVERSITÄT  
CHEMNITZ

Fakultät für Mathematik

eingereicht von: Katharina Benkert

geb. am 22.07.1978 in Augsburg

Betreuer: Prof. Dr. rer. nat. habil. Arndt Meyer

Chemnitz, den 21. Juli 2004



---

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>vii</b>
<b>Nomenklatur</b>	<b>ix</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Motivation: Konstruktion von Kurbelwellen . . . . .	1
1.2 Aufgabenstellung . . . . .	3
1.3 Gliederung der Arbeit . . . . .	3
<b>2 Grundlagen</b>	<b>5</b>
2.1 Elastizitätstheorie . . . . .	5
2.1.1 Kinematik . . . . .	5
2.1.2 Gleichgewichtsbedingung und das Prinzip der virtuellen Arbeit . . . . .	7
2.1.3 Materialgesetze . . . . .	9
2.1.4 Reduzierte Zustände – ebener Verzerrungszustand . . . . .	11
2.2 Lineare Elastizitätstheorie . . . . .	12
2.2.1 Herleitung der Variationsgleichung . . . . .	12
2.2.2 Existenz- und Eindeutigkeit . . . . .	13
2.2.3 Matrix-Schreibweise . . . . .	14
2.3 Die Finite-Elemente-Methode (FEM) . . . . .	14
2.3.1 Grundlagen . . . . .	15
2.3.2 Das adaptive FE-Programm SPC-PM2Ad . . . . .	16
<b>3 Pseudomaterial und Materialfunktionen</b>	<b>25</b>
3.1 Einführung – Analytische Betrachtung . . . . .	25

3.1.1	Definition von $(\tilde{H}(\Omega))^3$ . . . . .	26
3.2	Sinnfälligkeit der Vorgehensweise am Beispiel mit und ohne Pseudomaterial . . . . .	27
3.2.1	Modellprobleme . . . . .	27
3.2.2	Wahl der Materialparameter, Funktionsfähigkeit von SPC-PM2Ad . . . . .	29
3.2.3	Iterationszahlen . . . . .	35
3.2.4	Definition einer Materialfunktion . . . . .	36
3.2.5	Zusammenfassung . . . . .	37
3.3	Löcher und Auskerbungen allgemeinerer Form . . . . .	38
3.3.1	Probleme und Lösungsstrategien . . . . .	38
3.3.2	Vorbetrachtung: die gewichtete Materialfunktion . . . . .	41
3.3.3	Vorkonditionierung bei Materialsprüngen . . . . .	47
3.3.4	Verbesserungen und Alternativen zum Grobgitterlöser . . . . .	56
3.3.5	Ein Fehlversuch: Materialübergänge innerhalb von Finiten Elementen . . . . .	62
3.4	Verifikation bei nicht im Grobnetz repräsentierten Löchern und Auskerbungen . . . . .	65
3.5	Komplizierte Geometrien: Schlitze und nichtkonvexe Gebiete $\Omega_*$ . . . . .	69
3.5.1	Einführung . . . . .	69
3.5.2	Einfacher Schlitz . . . . .	70
3.5.3	Versobener einfacher Schlitz . . . . .	77
3.5.4	Nichtkonvexes Loch . . . . .	77
3.5.5	Komplizierter Schlitz . . . . .	83
<b>4</b>	<b>Zusammenfassung</b> . . . . .	<b>89</b>
4.1	Ergebnisse . . . . .	89

4.2 Diskussion . . . . .	91
4.3 Ausblick . . . . .	93
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>95</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>97</b>
<b>Selbständigkeitserklärung</b>	<b>105</b>
<b>A Beweis</b>	<b>107</b>
<b>Thesen</b>	<b>109</b>



# Vorwort

Kurbelwellen weisen konstruktive Besonderheiten auf, deren Dimensionen, verglichen mit der Kurbelwelle selbst, sehr klein sind. Um Steifigkeitsberechnungen mit der Finite-Elemente-Methode, einem Lösungsverfahren für partielle Differentialgleichungen, durchführen zu können, muß die Geometrie adäquat vernetzt werden, was bei komplizierten Geometrien nur durch ein feines Startnetz erreicht werden kann. Da dessen Konstruktion aufwendig und die Verwendung nachteilig ist, werden Ersatz-Deformationsprobleme über geometrisch einfacheren Gebieten mit ortsabhängigen Materialparametern definiert, die mit Hilfe von Materialfunktionen modelliert werden. Damit ist eine effiziente Berechnung von komplizierten Geometrien durch den Gebrauch grober Startnetze möglich.

In der vorliegenden Diplomarbeit wird die Verwendung von Materialfunktionen theoretisch dargestellt und numerisch untersucht. Dazu werden verschiedene Materialfunktionen definiert und ihre Eigenschaften (Verwendbarkeit, Approximation der Verschiebungen des ursprünglichen Deformationsproblems, Iterationszahlen) miteinander verglichen.





# Nomenklatur

## *Bezeichnungen in der Strukturmechanik*

$\phi$	Deformation
$F$	$:= \nabla \phi$ , Deformationsgradient
$u$	Verschiebung
$id$	identische Abbildung
$C$	$= \nabla \phi^t \nabla \phi$ Cauchy-Greenser Verzerrungstensor
$E$	Lagranger Verzerrungstensor
$f$	Volumenkräfte
$g$	Flächenkräfte
$t^\phi$	Cauchyscher Spannungsvektor
$T^\phi$	Cauchyscher Spannungstensor
$T$	erster Piola-Kirchhoffscher Spannungstensor
$t$	erster Piola-Kirchhoffscher Spannungsvektor
$\hat{T}$	Antwortfunktion des ersten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors
$\Sigma$	zweiter Piola-Kirchhoffscher Spannungstensor
$\hat{\Sigma}$	Antwortfunktion des zweiten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors
$\iota_A$	$:= (\iota_1(A), \iota_2(A), \iota_3(A))$ , Invarianten einer Matrix
$\mathbb{M}^3$	Menge der 3x3-Matrizen
$\mathbb{M}_+^3$	Menge der Matrizen in $\mathbb{M}^3$ mit positiver Determinante
$\mathbb{O}^3$	Menge der orthogonalen 3x3-Matrizen
$\mathbb{O}_+^3$	$= \mathbb{O}^3 \cap \mathbb{M}_+^3$
$\mathbb{S}^3$	Menge der symmetrischen 3x3-Matrizen
$S_3$	Einheitssphäre im $\mathbb{R}^3$
$E$	Elastizitätsmodul
$\lambda, \mu$	Lamékonstanten

---

$\mathbf{n}$	Normalenvektor
$\nu$	Querkontraktion (Poissonzahl)
$\hat{W}$	Energiefunktional eines hyperelastischen Materials
$\epsilon$	Verzerrung in linearer Näherung
$\sigma$	Spannung in linearer Näherung
$D$	Differentialoperator
$\Psi$	zulässige Deformation
$\Pi$	Energiefunktional in der linearen Theorie
$\epsilon : \sigma$	$= \sum_{ij} \epsilon_{ij} \sigma_{ij}$

*Bezeichnungen zu Differentialgleichungen und Finiten Elementen*

$\Omega$	Gebiet im $\mathbb{R}^n$
$\bar{\Omega}$	Abschließung von $\Omega$
$\Gamma$	$:= \partial\Omega$ , Rand von $\Omega$
$\Gamma_D$	Teil des Randes, auf dem Dirichlet-Randbedingungen vorgegeben sind
$\Gamma_N$	Teil des Randes, auf dem Neumann-Randbedingungen vorgegeben sind
$C^k(\bar{\Omega})$	Menge der $k$ -mal stetig differenzierbaren Funktionen über $\bar{\Omega}$
$H^m(\Omega)$	Sobolev-Raum von Funktionen, deren Ableitungen bis zur Ordnung $m$ quadratisch integrierbar sind
$\partial_i$	partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial x_i}$
$\nabla f$	$:= (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$
$\operatorname{div} f$	$:= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}$
$a(\cdot, \cdot)$	Bilinearform
$\mathbb{V}$	Banach-Raum
$\mathbb{V}_h$	Finite-Elemente-Raum
$\Phi$	$:= (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ , knotenorientierte Basis im Finite-Elemente Raum $\mathbb{V}_h$
$\mathbb{V}^k$	Raum der knotenorientierten Basisfunktionen zum $k$ -ten Verfeinerungslevel

---

$\mathbb{W}^k$	$\subset \mathbb{V}^k$ , Raum der FE-Funktionen, die in Knoten des Levels $k - 1$ verschwinden
$\Psi$	hierarchische Basis im Finiten-Elemente Raum $\mathbb{V}_h$
$\mathcal{T}_h$	Triangulierung von $\Omega$
$\#kn$	Anzahl der Knoten der Triangulierung
$T$	Element (Dreieck, Viereck) der Triangulation
$h_T$	Inkreisradius von $T$
$n_e(T)$	Anzahl der Knoten des Elementes $T$
$n_g(T)$	Anzahl der Gaußpunkte des Elementes $T$
$e_i$	Kante des Elements
$\mathcal{P}_k$	Menge der Polynome vom Grad $\leq k$
$\mathcal{Q}_k$	Polynommenge zu Viereckselementen
$\Sigma$	Menge von linearen Funktionalen
$K$	Steifigkeitsmatrix
$\kappa$	Konditionszahl der Steifigkeitsmatrix
$\lambda_i$	Eigenwerte einer Matrix
$C$	Matrix zur Vorkonditionierung
$n$	Dimension des Finite-Elemente Raumes $\mathbb{V}_h$ bzw. der Steifigkeitsmatrix
$k$	Anzahl der Verfeinerungsschritte des adaptiven Verfahrens
$\underline{v}$	Vektor
$\eta_{e_i}^2$	geschätzter Kantenfehler
$\eta_T^2$	geschätzter Elementfehler
$\eta^{(k)}$	geschätzter relativer Elementfehler bezüglich der Energienorm
<i>Bezeichnungen zu Materialfunktionen</i>	
$\Omega_0$	Gebiet im $\mathbb{R}^2$ , das Bauteil beschreibt
$\Omega_*$	Gebiet im $\mathbb{R}^2$ , das Loch oder Auskerbung beschreibt

$\Gamma_*$   $:= \partial\Omega_*$

$E_0, \nu_0$  Materialparameter in  $\Omega_0$

$E_{ps}, \nu_{ps}$  Materialparameter in  $\Omega_*$

$\chi_\Omega$  charakteristische Funktion

$\bar{u}_x, \bar{u}_y$  betragsmäßiger relativer Fehler in x- bzw. y-Richtung in Prozent

---

# 1 Einleitung

## 1.1 Motivation: Konstruktion von Kurbelwellen

Die Kurbelwelle als Teil des Verbrennungsmotors wandelt die lineare Bewegung der Kolben mit Hilfe von Pleuelstangen in eine Drehbewegung um. Da die übertragenen Kräfte sehr groß sein können, ist eine hohe Steifigkeit erforderlich. Andererseits ist man bestrebt, die Masse – wie bei allen sich bewegenden Teilen eines Fahrzeugs – so klein wie möglich zu halten.

Zur Modellierung der Kurbelwelle wird diese zunächst in Teilstücke, sogenannte Halbkröpfungen, zerlegt. In der Diplomarbeit von René Schneider [1] wurde das Programm CrankHex entwickelt, welches eine geometrisch einfache Halbkröpfung mit Hexaedern vernetzt und die entsprechenden Eingabe-Files für das an der TU Chemnitz entwickelte adaptive 3D-Finite-Elemente-Programm SPC-PM3AdH<sup>1</sup> produziert. Mit einem weiteren Tool [3], das von Peter Nestler programmiert wurde, kann aus den vernetzten Halbkröpfungen ein Startnetz für eine komplette Kurbelwelle erstellt werden. Damit sind Steifigkeitsberechnungen einer aus geometrisch einfachen Halbkröpfungen zusammengesetzten Kurbelwelle möglich (siehe Abb. 1.1).

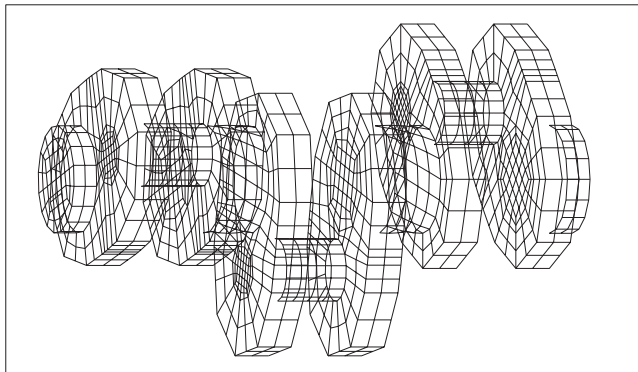


Abb. 1.1: Modell einer Kurbelwelle [3]

Dieses Modell ist jedoch noch weit von der Realität entfernt. Moderne Kurbelwellen verfügen über konstruktive Verbesserungen, wie Versteifungen an den Hauptlagern oder Auskerbungen an den Kurbelwangen zur Reduzierung der ro-

---

<sup>1</sup>SPC-PM bezeichnet Programme, die die Poisson-Gleichung oder die Lamé-Gleichungen der linearen Elastizität lösen können. Nähere Informationen zu SPC-PM3AdH findet man in [2].

tierenden Massen. Da die Dimensionen der Versteifungen oder Auskerbungen im Verhältnis zu den Abmessungen der Kurbelwelle sehr klein sein können, benötigt man ein feines Startnetz. Dazu wird üblicherweise das Gebiet  $\Omega_0$ , welches das Bauteil verkörpert, durch die charakteristische Funktion

$$\chi_{\Omega_0}(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & \text{für } \underline{x} \in \Omega_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

beschrieben, mit Hilfe derer ein Netzgenerator das Startnetz konstruiert.

Diese Vorgehensweise hat mehrere Nachteile:

- Die Konstruktion eines feinen Startnetzes ist aufwendig.
- Die Vorteile eines adaptiven FE-Programms, nämlich die Berechnung einer Näherungslösung parallel zur Netzverfeinerung und die Bewertung des Netzes durch den Fehlerschätzer, werden nicht genutzt. Statt dessen verlassen wir uns auf die heuristische Beurteilung der Gegebenheiten durch den Netzgenerator. Deshalb ist es fraglich, ob die Netzverfeinerung an Geometriebesonderheiten im Vergleich zu anderen kritischen Punkten, wie z. B. bei Änderungen der Randbedingungen, sinnvoll gesteuert wird. Daneben werden für die Berechnung des Deformationsproblems unwichtige Besonderheiten des Bauteils ebenfalls fein vernetzt.
- Schnelle Löser, wie das PCG-Verfahren mit Multilevel-Vorkonditionierungen, benötigen hierarchische Netze.
- Die an der TU Chemnitz bereits vorhandene Software würde nicht genutzt.

So entstand bei der Ingenieurgesellschaft Auto und Verkehr (IAV) GmbH folgende Idee:

Anstelle des Deformationsproblems über dem Gebiet  $\Omega_0$ , das die tatsächliche Kurbelwelle beschreibt, wird ein Ersatzproblem über einem Gebiet  $\Omega$  gelöst, das sich aufgrund seiner einfachen Geometrie leicht vernetzen lässt. Die Funktion  $\chi_{\Omega_0}(\underline{x})$ , die die genaue Form der Kurbelwelle beschreibt, wird als Zusatzinformation in den adaptiven Algorithmus integriert. Mit ihrer Hilfe werden die Materialparameter unseres Ersatz-Deformationsproblems so verändert, daß sich das Teilgebiet von  $\Omega$ , welches „normales“ Material besitzt, mit zunehmender Verfeinerung immer besser das eigentliche Rechengebiet  $\Omega_0$  approximiert. Somit soll erreicht werden, daß sich die Lösung des Deformationsproblems über dem Ersatzgebiet  $\Omega$  immer mehr an die Lösung des Deformationsproblems über dem tatsächlichen Gebiet  $\Omega_0$  der Kurbelwelle annähert.

## 1.2 Aufgabenstellung

In dieser Diplomarbeit soll die im Kapitel 1.1 erläuterte Idee an 2D-Elastizitätsproblemen untersucht werden. Anstelle von Deformationsproblemen, bei denen eine relativ komplexe Geometrie (z. B. Löcher) ein relativ feines Startnetz erfordern würde, werden Ersatzdeformationsprobleme mit einfachen Startnetzen betrachtet. Dabei kommen Materialfunktionen zum Einsatz, die die Gegebenheiten des ursprünglichen Deformationsproblems nachahmen. Dazu wird in  $\Omega \cap \Omega_0$ , also jenen Bereichen, die nur aufgrund der gewünschten einfachen Vernetzbarkeit vorhanden sind, *Pseudomaterial* verwendet, das entweder verschwindende oder sehr kleine Materialparameter besitzt. Es erfolgen eine theoretischen Darstellung sowie numerische Experimente.

## 1.3 Gliederung der Arbeit

Kapitel 2 hat einführenden Charakter. Zunächst werden die Grundlagen der Elastizitätstheorie erläutert und im darauffolgenden Abschnitt wird auf den Spezialfall der linearen Elastizitätstheorie eingegangen. Anschließend soll die Methode der Finiten Elemente (FEM) erläutert und die wichtigen Aspekte des verwendeten adaptiven 2D-Programms vorgestellt werden.

Kapitel 3 untersucht sowohl theoretisch als auch numerisch die Verwendung von Pseudomaterial.

Nach der theoretischen Darstellung der Methode und der Definition eines entsprechenden Raumes in Abschnitt 3.1 gilt es, zunächst die grundsätzliche Machbarkeit an zwei Modellproblemen zu untersuchen. Dabei werden die Materialparameter des Pseudomaterials, das zunächst durch einen zweiten Materialtyp beschrieben wird, festgelegt. Außerdem wird durch die Methode durch Definition einer ersten Materialfunktion auf allgemeinere Löcher und Auskerbungen erweitert.

Abschnitt 3.3 dient der Untersuchung von Löchern und Auskerbungen allgemeinerer Form, wobei das Laufzeitverhalten im Vordergrund steht. Im ersten Teil werden die dabei auftretenden Probleme sowie Lösungsstrategien vorgestellt. Nach der Definition zweier weiterer Materialfunktionen, die zur Lösung der Probleme verwendet werden können, werden die angesprochenen Lösungsstrategien im dritten und vierten Unterabschnitt numerisch anhand von Beispielen miteinander verglichen. Dabei sind in Abschnitt 3.3.3 die bei der Vorkonditionierung entstehenden Fortsetzungen der Lösung in Gebiete mit Pseudomaterial zu diskutieren. Im letzten Teil wird die Idee einer Materialfunktion über Gaußpunkte vorgestellt und erläutert, warum sie ungeeignet ist.

Für die Materialfunktion mit bestem Laufzeitverhalten werden in Abschnitt 3.4 die Approximationseigenschaften an einigen Beispielen untersucht.

In Abschnitt 3.5 betrachtet Bauteile mit komplizierter Geometrie, wie nicht-konvexe Löcher oder Schlitze. Bei Verwendung eines groben Startnetzes werden diese nur unzureichend dargestellt, so daß erst durch eine Verfeinerung eine Geometrieapproximation möglich ist. Nach grundsätzlichen Überlegungen anhand eines einfachen Schlitzes wird die Darstellung der Materialübergänge am Beispiel eines verschobenen Schlitzes erläutert. Nach der Betrachtung eines nichtkonvexen Lochs wird ein sehr komplizierter Schlitz untersucht.

Kapitel 4 faßt die Ergebnisse der Diplomarbeit zusammen und gibt einen Ausblick auf weitere Verbesserungsmöglichkeiten.



## 2 Grundlagen

### 2.1 Elastizitätstheorie

Die Elastizitätstheorie beschäftigt sich mit dem Zustand von Körpern unter der Einwirkung von Kräften. Die wesentlichen Größen sind die Verschiebung, die Verzerrungen und die Spannungen, die durch Kinematik und Materialgesetze miteinander in Beziehung stehen. Die Ausführungen folgen im wesentlichen [4] und der Zusammenfassung in [5]. Eine etwas andere Darstellung findet sich in [6].

#### 2.1.1 Kinematik

Ein Körper läßt sich als topologischer Raum auffassen, der mittels eines Homöomorphismus auf die Menge  $\bar{\Omega}$  des  $\mathbb{R}^3$  abgebildet werden kann. Dabei sei  $\Omega$  ein Gebiet mit einem genügend glatten Rand. Jede solche Abbildung definiert eine Konfiguration des Körpers. Eine dieser Konfigurationen, normalerweise jene, die der Körper im spannungsfreien Zustand einnimmt, wird hervorgehoben und als *Referenzkonfiguration* bezeichnet.

Der aktuelle Zustand wird durch eine Abbildung  $\phi$

$$\phi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

beschrieben, die als genügend glatt vorausgesetzt wird.  $\phi$  ist eine *Deformation*, wenn

$$\det(\nabla\phi(x)) > 0 \quad \forall x \in \bar{\Omega}$$

gilt. Dabei bezeichnet  $\nabla\phi =: F$  den *Deformationsgradienten*. Die Deformation  $\phi$  ist lokal injektiv (da das Prinzip der Undurchdringlichkeit des Materials gilt, aber Berührungen des Körpers mit sich selbst auf dem Rand zulässig sind) und richtungserhaltend (was bedeutet, daß das lokale Verhältnis von deformiertem zu Referenzvolumen nie zu Null werden kann).

Sei eine Referenzkonfiguration  $\bar{\Omega}$  und eine Deformation  $\phi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$  gegeben, dann heißt die Menge  $\phi(\bar{\Omega})$  *deformierter Zustand*. Größen, die über dem deformierten Zustand definiert sind, werden im Folgenden mit einem hochgestellten  $\phi$  gekennzeichnet. Insbesondere ist  $x^\phi = \phi(x)$ ,  $\Omega^\phi = \phi(\Omega)$  usw.

Neben der Deformation  $\phi$  ist es oft günstig, die Verschiebung  $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$  einzuführen, die durch die Beziehung

$$\phi = id + u$$

definiert ist, wobei  $id : \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die identische Abbildung bezeichnet.

„Verzerrungen“ können intuitiv als „Veränderungen in Form und Größe“ verstanden werden. Es wird daher die durch  $\phi$  erzeugte Längenänderung betrachtet:

$$\|\phi(x+z) - \phi(x)\|^2 = \|F(x)z\|^2 + o(\|z\|^2) = z^T F^T F z + o(\|z\|^2).$$

Diese wird lokal durch den symmetrischen Tensor

$$C = \nabla\phi^t \nabla\phi = F^T F$$

beschrieben, der als (*rechter*) *Cauchy-Greenscher Verzerrungstensor* bezeichnet wird. Für Starrkörperbewegungen, also Rotationen und Translationen, gilt

$$C = I \text{ in } \bar{\Omega}.$$

Der Lagrangesche Verzerrungstensor  $E$  ist definiert als Abweichung des Cauchy-Greenschen-Verzerrungstensors  $C$  von der Identität

$$E = \frac{1}{2}(C - I),$$

und ist damit ein Maß für die Abweichung einer gegebenen Deformation von einer Starrkörperbewegung.

Drückt man den Verzerrungstensor  $C$  mit Hilfe des Verschiebungsgradienten  $\nabla u$  anstelle des Deformationsgradienten  $\nabla\phi = I + \nabla u$  aus, so erhält man

$$C = \nabla\phi^T \nabla\phi = I + \nabla u + \nabla u^T + \nabla u^T \nabla u = I + 2E$$

Damit ist

$$E(u) = \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla u^T + \nabla u^T \nabla u)$$

bzw.

$$E_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_i u_j + \partial_j u_i + \partial_k u_i \partial_k u_j)$$

wobei  $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$  ist. Diese Beziehung wird als *Kinematik* bezeichnet.

### 2.1.2 Gleichgewichtsbedingung und das Prinzip der virtuellen Arbeit

Es wird angenommen, daß ein deformierter Zustand  $\bar{\Omega}^\phi$ , der einer beliebigen Deformation  $\phi$  zugeordnet ist, zwei Arten von *äußeren Kräften* ausgesetzt ist:

1. äußeren Volumenkräften  $f^\phi : \Omega^\phi \rightarrow \mathbb{R}^3$  und
2. äußeren Flächenkräften  $g^\phi : \Gamma_N^\phi \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

wobei  $\Gamma_N^\phi \in \Gamma^\phi := \partial\Omega^\phi$  mit  $meas\Gamma_N^\phi > 0$  ist.

Ein Körper, der den deformierten Zustand  $\bar{\Omega}^\phi$  besitzt, und der angewandten Kräften in seinem Inneren  $\Omega^\phi$  und auf der Oberfläche eines Teils  $\Gamma_N^\phi$  des Randes ausgesetzt ist, befindet sich im statischen Gleichgewicht wenn das grundlegende Spannungsprinzip von Euler und Cauchy erfüllt ist.

#### Axiom 1 (Axiom des statischen Gleichgewichts)

Ein Körper  $B$  mit einer deformierten Konfiguration  $\bar{\Omega}^\phi$  sei äußeren Kräften ausgesetzt, die durch ihre Dichten  $f^\phi : \Omega^\phi \rightarrow \mathbb{R}^3$  und  $g^\phi : \Gamma_N^\phi \rightarrow \mathbb{R}^3$  gegeben sind. Dann existiert ein Vektorfeld

$$t^\phi : \bar{\Omega}^\phi \times S_3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \text{ wobei } S_3 = \{v \in \mathbb{R}^3; \|v\| = 1\} \text{ ist,}$$

so daß für jede Teilmenge  $A^\phi$  von  $\bar{\Omega}^\phi$

$$\int_{A^\phi} f^\phi(x^\phi) dx^\phi + \int_{\partial A^\phi} t^\phi(x^\phi, \mathbf{n}^\phi) da^\phi = 0$$

gilt, wobei  $\mathbf{n}^\phi$  den äußeren Normalenvektor von  $\partial A^\phi$  bezeichnet.

Ist  $x^\phi$  ein Punkt des deformierten Zustands, dann wird der Vektor  $t^\phi(x^\phi, \mathbf{n}^\phi)$  als *Cauchyscher Spannungsvektor* über einem gerichteten Oberflächenelement mit Normalenvektor  $\mathbf{n}^\phi$  bezeichnet.

#### Satz 1 (Satz von Cauchy)

Sei  $t^\phi(\cdot, \mathbf{n}) \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}^\phi, \mathbb{R}^3)$ ,  $t^\phi(x^\phi, \cdot) \in \mathcal{C}(S_3, \mathbb{R}^3)$  und  $f^\phi \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}^\phi, \mathbb{R}^3)$  im Gleichgewicht gemäß des Axioms. Dann gibt es ein symmetrisches Tensorfeld  $T^\phi \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}^\phi, \mathbb{S}^3)$  mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} t^\phi(x^\phi, \mathbf{n}) &= T^\phi(x^\phi)\mathbf{n}, & x^\phi \in \bar{\Omega}^\phi, \mathbf{n} \in S_3 \\ \operatorname{div}^\phi T^\phi(x^\phi) + f^\phi(x^\phi) &= 0, & x^\phi \in \Omega^\phi \\ T^\phi(x^\phi) &= (T^\phi(x^\phi))^T, & x^\phi \in \bar{\Omega}^\phi \end{aligned}$$

Der Tensor  $T$  wird als *Cauchyscher Spannungstensor* bezeichnet.

### Piola-Transformation

Im Prinzip sollen die Deformation und die Komponenten des Cauchyschen Spannungstensors berechnet werden. Hierfür sind die Gleichgewichtsbedingungen im deformierten Zustand nicht sehr nützlich, da sie die Unbekannte  $x^\phi$  als Variable enthalten. Um diese Schwierigkeit zu überwinden, werden die Gleichungen mit Hilfe der Variablen  $x$  ausgedrückt, die mit der Referenzkonfiguration verknüpft ist.

Um eine Beziehung zwischen den Tensorfeldern herzustellen, die über dem deformierten Zustand bzw. der Referenzkonfiguration definiert sind, wird die *Piola-Transformation* eingeführt.

Sei  $\phi$  eine Deformation, die injektiv auf  $\bar{\Omega}$  ist, und  $T^\phi : \bar{\Omega}^\phi \rightarrow \mathbb{M}^3, x \mapsto T^\phi(x^\phi)$  sei ein Tensor. Dann ist die Piola-Transformation  $T$  definiert durch

$$T(x) := (\det \nabla \phi(x)) T^\phi(\phi(x)) \nabla \phi(x)^{-T} = (\det \nabla \phi(x)) T^\phi(x^\phi) \nabla \phi(x)^{-T}.$$

Sie wurde so gewählt, daß sich eine einfache Beziehung zwischen den Divergenzen der Tensoren  $T^\phi$  und  $T$  ergibt.

Die Piola-Transformation  $T$  des Cauchyschen Spannungstensors  $T^\phi$  heißt *erster Piola-Kirchhoffscher Spannungstensor*. Des weiteren wird der Vektor  $t(x, \mathbf{n})$ , für den

$$t(x, \mathbf{n}) = T(x)\mathbf{n}$$

gilt, als *erster Piola-Kirchhoffscher Spannungsvektor* bezeichnet.

Der erste Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor ist im Gegensatz zum Cauchy-Greenschen Spannungstensor  $T^\phi(x^\phi)$  nicht symmetrisch. Da für einen symmetrischen Spannungstensor das konstitutive Gesetz (2.1) in der Referenzkonfiguration einfach ist, definiert man den symmetrischen *zweiten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor*  $\Sigma(x)$  wie folgt:

$$\Sigma(x) = \nabla \phi(x)^{-1} T(x) = (\det \nabla \phi(x)) \nabla \phi(x)^{-1} T^\phi(x^\phi) \nabla \phi(x)^{-T}.$$

Bei kleinen Deformationen sind die Unterschiede zwischen den drei Spannungstensoren  $T^\phi, T$  und  $\Sigma$  vernachlässigbar. Damit erfüllt der erste Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor  $T(x)$  die Gleichung

$$-\operatorname{div} T(x) = f(x), x \in \Omega$$

in der Referenzkonfiguration. Dabei wurde vorausgesetzt, daß die Volumen- und Flächenkräfte Totlasten, also unabhängig von der betrachteten Deformation  $\phi$  sind.

### 2.1.3 Materialgesetze

Durch die Materialgesetze wird der Tatsache Rechnung getragen, daß das Ausmaß der Verformung bei einer gegebenen Belastung erfahrungsgemäß vom verwendeten Material abhängt. Außerdem werden noch sechs Gleichungen benötigt, da die drei Gleichungen der Gleichgewichtsbedingungen neun Unbekannten, nämlich den drei Komponenten der Verschiebung und den sechs Komponenten des symmetrischen zweiten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors, gegenüberstehen.

#### Definition 1

Ein Material heißt elastisch, wenn es Abbildungen  $\hat{T} : \bar{\Omega} \times \mathbb{M}_+^3 \rightarrow \mathbb{M}^3$  sowie  $\hat{\Sigma} : \bar{\Omega} \times \mathbb{M}_+^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$  gibt, so daß für jeden deformierten Zustand

$$\begin{aligned} T(x) &= \hat{T}(x, \nabla\phi(x)) \\ \text{bzw. } \Sigma(x) &= \hat{\Sigma}(x, \nabla\phi(x)) \end{aligned} \quad \text{für alle } x \in \bar{\Omega} \quad (2.1)$$

gilt.

Gleichung (2.1) heißt *konstitutives Gesetz*, die Abbildungen  $\hat{T}$  und  $\hat{\Sigma}$  bezeichnet man als *Antwortfunktion* für den ersten bzw. zweiten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor. Diese lassen sich unter bestimmten physikalischen Voraussetzungen an das Material in einfacher Form darstellen.

#### Axiom 2 (Axiom der Koordinatenunabhängigkeit)

Der Cauchysche Spannungsvektor  $t^\phi(x^\phi, \mathbf{n}^\phi) = T^\phi(x^\phi)\mathbf{n}^\phi$  ist unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems, d. h. es ist  $Qt^\phi(x^\phi, \mathbf{n}^\phi) = t^\phi(Qx^\phi, Q\mathbf{n}^\phi)$  für alle  $Q \in \mathbb{O}_+^3$ .

Das Axiom der Koordinatenunabhängigkeit gilt für jedes Material. Es besagt, daß jede beobachtbare Größe unabhängig von der orthogonalen Basis sein muß, in der sie berechnet wird. Im Falle der Koordinatenunabhängigkeit spricht man von einem *objektiven* Material. Es wird vorausgesetzt, daß die Referenzkonfiguration der unbelastete Zustand ist, d. h. der Eigenspannungstensor  $T_R(x) = \hat{\Sigma}(x, I)$  für alle Punkte  $x \in \bar{\Omega}$  verschwindet. Desweiteren definiert man:

#### Definition 2

Ein Material heißt homogen, wenn seine Antwortfunktion  $\hat{T}$  nicht von explizit vom Ort  $x$  abhängt, d. h.  $\hat{T}(x, \nabla\phi(x)) = \hat{T}(\nabla\phi(x))$  für alle  $x \in \bar{\Omega}$  ist. Ein

Material heißt isotrop im Punkt  $x$ , wenn für die Antwortfunktion  $\hat{T}$  und  $\hat{\Sigma}$  des ersten und zweiten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors

$$\begin{aligned}\hat{T}(x, FQ) &= \hat{T}(x, F)Q && \text{für alle } F \in \mathbb{M}_+^3, Q \in \mathbb{O}_+^3, \\ \hat{\Sigma}(x, FQ) &= Q^T \hat{\Sigma}(x, F)Q && \text{für alle } F \in \mathbb{M}_+^3, Q \in \mathbb{O}_+^3\end{aligned}$$

gilt. Gelten die Beziehungen nur für eine Untergruppe der Gruppe  $\mathbb{O}_+^3$ , dann heißt das Material anisotrop in  $x$ . Das Material heißt isotrop, wenn es in jedem Punkt der Referenzkonfiguration isotrop ist.

Diese Eigenschaften sind Transformationseigenschaften und hängen deshalb im wesentlichen von den Invarianten  $\iota_A = (\iota_1(A), \iota_2(A), \iota_3(A))$  der Matrizen ab. Dieses Tripel ist über das charakteristische Polynom definiert. Im Falle einer 3x3-Matrix, die die Eigenwerte  $\lambda_i, i = 1, 2, 3$ , besitzt, gilt:

$$\begin{aligned}\det(I - \lambda A) &= \lambda^3 - \iota_1(A)\lambda^2 + \iota_2(A)\lambda - \iota_3(A), \\ \iota_1(A) &= \operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^3 \lambda_i, \\ \iota_2(A) &= \frac{1}{2} [(\operatorname{tr}(A))^2 - \operatorname{tr}(A^2)] = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 \text{ und} \\ \iota_3(A) &= \det(A) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3.\end{aligned}$$

### Satz 2 (Existenz der Lamé-Konstanten)

Es sei ein homogenes, isotropes, elastisches Material gegeben. Die Funktionen  $\gamma_\alpha(x, \cdot), \alpha = 0, 1, 2$ , seinen reelwertige Funktionen der drei Hauptinvarianten der Matrix  $C$  und  $\gamma_\alpha, \alpha = 0, 1, 2$ , seien im Punkt  $\iota_I = (3, 3, 1)$  differenzierbar. Dann existieren zwei Konstanten  $\lambda$  und  $\mu$ , so daß die Antwortfunktion  $\hat{\Sigma} : \mathbb{M}_+^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$  die Form

$$\hat{\Sigma}(F) = \tilde{\Sigma}(C) = 2\mu E + \lambda(\operatorname{tr}E)I + o(E), \quad C = F^T F = I + 2E, \quad F \in \mathbb{M}_+^3$$

hat. In diesem Fall heißen die Konstanten  $\lambda$  und  $\mu$  die Lamé-Konstanten des betrachteten Materials.

Experimentell werden die Lamé-Konstanten  $\lambda$  und  $\mu$  mit Hilfe des *Elastizitätsmoduls*  $E$  und der *Querkontraktion (Poissonzahl)*  $\nu$  bestimmt. Zwischen den Lamé-Konstanten, dem Elastizitätsmodul und der Querkontraktion bestehen die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned}\nu &= \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, & E &= \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \\ \lambda &= \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, & \mu &= \frac{E}{2(1 + \nu)}.\end{aligned}$$

Vernachlässigt man die Terme höherer Ordnung, so erhält man das lineare Materialgesetz von Hooke

$$\tilde{\Sigma}(I + 2E) = 2\mu E + \lambda \operatorname{tr}(E)I. \quad (2.2)$$

Zur Unterscheidung wird  $\tilde{\Sigma}(I + 2E)$  in diesem Fall oft mit  $\sigma$  bezeichnet. Ein Material, für das (2.2) nicht nur bei kleinen Verzerrungen gilt, heißt *St. Venant-Kirchhoff-Material*. Solch ein Material ist homogen, isotrop und koordinatenu-nabhängig. Sein Referenzzustand ist der unbelastete Zustand.

### Hyperelastizität

Ein elastisches Material ist *hyperelastisch*, wenn ein Energiefunktional  $\hat{W} : \bar{\Omega} \times \mathbb{M}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}$  existiert, so daß

$$\hat{T}(x, F) = \frac{\partial \hat{W}}{\partial F}(x, F) \text{ für alle } x \in \bar{\Omega}, F \in \mathbb{M}_+^3.$$

#### Satz 3

Ein *St. Venant-Kirchhoff-Material* ist *hyperelastisch* und besitzt das Energiefunktional

$$\hat{W}(x, F) = \check{W}(E) = \frac{\lambda}{2}(\text{tr}E)^2 + \mu \text{tr}E^2. \quad (2.3)$$

#### 2.1.4 Reduzierte Zustände – ebener Verzerrungszustand

Vielfach ist es nicht nötig, das volle dreidimensionale Problem zu lösen, da – wenn die Ausdehnung des Bauteils in eine Dimension sehr klein ist – eine Reduktion auf ein- oder zweidimensionale Modelle möglich ist.

Es sei ein Körper  $\Omega \times (-\frac{t}{2}, \frac{t}{2})$  gegeben, wobei  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  ein Gebiet und die Dicke  $t > 0$  des Körpers sehr viel kleiner als der Durchmesser von  $\Omega$  ist. Durch die Vorgabe entsprechender Randbedingung wird dafür gesorgt, daß alle Größen unabhängig von der  $z$ -Komponente sind und  $u_3$  verschwindet. Dies ist z. B. bei Bauteilen, die bezüglich der  $x$ - $y$ -Ebene symmetrisch sind oder die eine große Ausdehnung in  $z$ -Richtung besitzen, der Fall.

Die Gleichungen des *ebenen Verzerrungszustandes* ergeben sich durch Ausblenden der  $z$ -Komponente:

$$\begin{aligned} E_{ij}(x, y, z) &= E_{ij}(x, y), & i, j &= 1, 2, \\ E_{i3} &= E_{3i} = 0, & i &= 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Damit gilt für das lineare Materialgesetz  $\sigma = 2\mu E + \lambda(\text{tr}E)I$

$$\begin{aligned} \sigma_{i3} &= \sigma_{3i} = 0, & i &= 1, 2 \text{ und} \\ \sigma_{33} &= \lambda(E_{11} + E_{22}). \end{aligned}$$

## 2.2 Lineare Elastizitätstheorie

In der *geometrisch linearen Theorie*, bei der man von kleinen Verzerrungen ausgeht, werden die quadratischen Terme der Verzerrung  $E$  vernachlässigt, und man erhält die Linearisierung

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T), \quad (2.4)$$

bzw.

$$\epsilon = \epsilon(u) = Du$$

mit dem Differentialoperator  $D$ .

Werden dazu noch lineare Stoffgesetze verwendet, erhält man die *vollständig lineare Theorie*.

### 2.2.1 Herleitung der Variationsgleichung

Für hyperelastische Materialien, deren Oberflächen- und Volumenkräfte konservativ sind, d. h. die sich mittels  $f = \text{grad } \mathcal{F}$  und  $g = \text{grad } \mathcal{G}$  aus Gradientenfeldern ableiten lassen, existiert zur Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} -\text{div } \hat{T}(x, \nabla \phi(x)) &= \hat{f}(x, \nabla \phi(x)), & x \in \Omega \\ \phi(x) &= \phi_0(x), & x \in \Gamma_D \\ \hat{T}(x, \nabla \phi(x)) \mathbf{n} &= \hat{g}(x, \nabla \phi(x)), & x \in \Gamma_N \end{aligned} \quad (2.5)$$

eine Variationsformulierung. Die Lösungen des Randwertproblems (2.5) sind dann stationäre Punkte der Gesamtenergie, wenn die zulässigen Deformationen  $\Psi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Bedingungen  $\det \nabla \Psi > 0$  in  $\Omega$  und  $\Psi = \phi_0$  auf  $\Gamma_D$  erfüllen. Sind die äußeren Kräfte Totlasten, dann ist die Gesamtenergie

$$\Pi(\Psi) = \int_{\Omega} [\hat{W}(x, \nabla \Psi(x)) - f \cdot \Psi] dx + \int_{\partial\Omega} g \cdot \Psi da.$$

**Bemerkung 1** Wegen (2.3) gilt im linearen Fall

$$\check{W}(E) = \frac{1}{2} \epsilon : \sigma,$$

wobei  $\epsilon : \sigma = \sum_{ij} \epsilon_{ij} \sigma_{ij} = \text{tr}(\epsilon^T \sigma)$  ist.

Als Vereinfachungen werden Nullrandbedingungen auf  $\Gamma_D$  vorausgesetzt. Um zu einer Variationsformulierung zu gelangen, ist  $\Pi(v)$  zu minimieren

$$\Pi(v) \rightarrow \min_{v \in \mathbb{V}}$$

wobei  $\mathbb{V} := (H_0^1(\Omega))^3 = \{v \in (H^1(\Omega))^3 : v(x) = 0, x \in \Gamma_D\}$  ist.



Die zugehörige Variationsformulierung, auch *schwache Formulierung* genannt, lautet:

$$\text{Finde } u \in \mathbb{V} : a(u, v) = f(v) \quad \forall v \in \mathbb{V} \quad (2.6)$$

mit

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} \epsilon(u) : \sigma(v) \, dx \\ f(v) &= \int_{\Omega} f \cdot v \, dx + \int_{\Gamma_N} g \cdot v \, da \end{aligned}$$

sowie den Randbedingungen auf  $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$

$$\begin{aligned} u|_{\Gamma_D} &= 0 \\ \sigma(u)\mathbf{n}|_{\Gamma_N} &= g. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Für einen reinen Verschiebungsansatz werden  $\sigma$  und  $\epsilon$  gemäß (2.2) und (2.4) ersetzt. Damit läßt sich  $a(u, v)$  in der vollständig linearen Theorie wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} [2\mu \epsilon(u) : \epsilon(v) + \lambda \operatorname{tr}(\epsilon(u)) \operatorname{tr}(\epsilon(v))] \, dx \\ &= \int_{\Omega} [2\mu \epsilon(u) : \epsilon(v) + \lambda \operatorname{div}(u) \operatorname{div}(v)] \, dx. \end{aligned} \quad (2.8)$$

### 2.2.2 Existenz- und Eindeutigkeit

Die Bilinearform (2.8) der linearen Elastizitätstheorie ist beschränkt und  $H^1$ -elliptisch, wenn  $\int_{\Omega} \epsilon(u) : \epsilon(v) \, dx$  diese Eigenschaft hat. Dies ist Aussage der zweiten Kornschen Ungleichung:

#### Satz 4

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  eine offene, beschränkte Menge mit stückweise glattem Rand. Ferner habe  $\Gamma_D \subset \partial\Omega$  ein positives 2-dimensionales Maß. Dann gibt es eine positive Zahl  $c = c(\Omega, \Gamma_D)$ , so daß

$$\int_{\Omega} \epsilon(v) : \epsilon(v) \, dx \geq c \|v\|_1^2 \quad \text{für } v \in H_1^1(\Omega)$$

gilt. Dabei ist  $H_1^1(\Omega)$  der Abschluß von  $\{v \in C^\infty(\Omega)^3 : v(x) = 0 \text{ für } x \in \Gamma_D\}$  bezüglich der  $\|\cdot\|_1$ -Norm.

Damit sind die Voraussetzungen des Lemmas von Lax-Milgram erfüllt, und es gilt der folgende

#### Satz 5 (Existenz- und Eindeutigkeitssatz)

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  ein Gebiet mit stückweise glattem Rand, und  $\Gamma_D$  habe ein positives zweidimensionales Maß. Dann hat die Variationsaufgabe (2.6) der linearen Elastizitätstheorie genau eine Lösung.

### 2.2.3 Matrix-Schreibweise

Für die Finite-Elemente-Methode, die in Abschnitt 2.3 erläutert wird, ist die Darstellung von (2.6) in Matrix-/Vektorschreibweise vorteilhaft. Man definiert dazu

$$\begin{aligned} \underline{u} &= (u_1, u_2, u_3)^T, & \underline{\epsilon} &= (\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}, 2\epsilon_{12}, 2\epsilon_{13}, 2\epsilon_{23})^T, \\ \underline{\sigma} &= (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23})^T, & \underline{\nabla} &= \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)^T, \\ \mathbf{D}(\underline{x}) &= \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \\ x_2 & x_1 & 0 \\ x_3 & 0 & x_1 \\ 0 & x_3 & x_2 \end{pmatrix} & \text{und } \mathbf{C} &= \begin{pmatrix} 2\mu + \lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2\mu + \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2\mu + \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\underline{\epsilon} = \mathbf{D}(\underline{\nabla})\underline{u}, \quad \underline{\sigma} = \mathbf{C}\underline{\epsilon}$$

und

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} \underline{\epsilon}(u)^T \mathbf{C} \underline{\epsilon}(v) dx \\ &= \int_{\Omega} (\mathbf{D}(\underline{\nabla})\underline{u})^T \mathbf{C} \mathbf{D}(\underline{\nabla})\underline{v} dx. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Für den ebenen Verzerrungszustand sind alle Komponenten, die zu  $x_3$  gehören zu streichen, und Gleichung (2.9) gilt mit

$$\begin{aligned} \underline{u} &= (u_1, u_2)^T, & \underline{\epsilon} &= (\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, 2\epsilon_{12})^T, \\ \underline{\sigma} &= (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12})^T, & \underline{\nabla} &= \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^T, \\ \mathbf{D}(\underline{x}) &= \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix} & \text{und } \mathbf{C} &= \begin{pmatrix} 2\mu + \lambda & \lambda & 0 \\ \lambda & 2\mu + \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

## 2.3 Die Finite-Elemente-Methode (FEM)

Die Finite-Elemente-Methode ist ein sehr leistungsfähiges Verfahren, um die Lösung von Problemen zweiter oder vierter Ordnung in Variationsformulierung über einem Raum  $\mathbb{V}$  zu approximieren. Eine ausführliche Darstellung der Grundlagen findet sich in [7], [8].

### 2.3.1 Grundlagen

Betrachtet wird das abstrakte Variationsproblem

$$\text{Finde } u \in \mathbb{V} : a(u, v) = f(v) \quad \forall v \in \mathbb{V}, \quad (2.10)$$

wobei der Raum  $\mathbb{V}$ , die Bilinearform  $a(u, v)$  und das lineare Funktional  $f$  die Voraussetzungen des Lemmas von Lax-Milgram erfüllen sollen.

Eine konforme FE-Methode für (2.10) besteht darin, eine Näherungslösung  $u_h$  in einem endlich-dimensionalen Unterraum  $\mathbb{V}_h$  des Raumes  $\mathbb{V}$  zu finden, wobei  $u_h$  die Lösung des Problems

$$\text{Finde } u_h \in \mathbb{V}_h : a(u_h, v_h) = f(v_h) \quad \forall v_h \in \mathbb{V}_h \quad (2.11)$$

ist. Die eindeutige Lösung von (2.11) folgt aus dem Lemma von Lax-Milgram.

Sei  $(\varphi_j)_{j=1}^n$  eine Basis in  $\mathbb{V}_h$ . Dann erhält man die Näherungslösung  $u_h = \sum_{j=1}^n u_j \varphi_j$  von (2.11) durch Lösen des linearen Gleichungssystems

$$\mathbf{K}_h \underline{u}_h = \underline{f}_h \quad (2.12)$$

mit der *Steifigkeitsmatrix*  $\mathbf{K}_h = (a(\varphi_j, \varphi_i))_{i,j=1}^n$ , der Lösung  $\underline{u}_h = (u_j)_{j=1}^n$  und der rechten Seite  $\underline{f}_h = (f(\varphi_i))_{i=1}^n$ . Auf die Indizierung mit dem Diskretisierungsparameter  $h$  wird im folgenden wieder verzichtet.

#### Wahl der Basisfunktionen $\varphi_i$

Die Besonderheit der FEM ist die Wahl von Basisfunktionen  $\varphi_i$  mit lokalem Träger, indem  $\Omega$  in Teilgebiete zerlegt und die Basisfunktionen so definiert werden, daß sie über diesen Teilgebieten Polynome sind.

**Bemerkung 2** *Der Vorteil von Basisfunktionen mit lokalem Träger liegt in der Erzeugung schwach besetzter Matrizen, da die Einträge  $a(\varphi_j, \varphi_i)$  der Matrix  $\mathbf{K}_h$  Null sind, wenn der Durchschnitt der Träger der Basisfunktionen  $\varphi_j$  und  $\varphi_i$  vom Maß Null ist.*

$\Omega$  sei ein polyedrisches Gebiet im  $\mathbb{R}^2$ . Es wird eine Triangulierung  $\mathcal{T}_h$  über der Menge  $\Omega$  eingeführt, indem das Gebiet  $\Omega$  durch eine endliche Vereinigung  $\cup_{T \in \mathcal{T}_h} T$  von Drei- oder Vierecken  $T$  dargestellt wird. Die Triangulierung sei *zulässig*, d. h. wenn  $T_1$  und  $T_2$  zwei verschiedene Drei- bzw. Vierecke von  $\mathcal{T}_h$  sind, muß der Durchschnitt  $T_1 \cap T_2$  entweder leer, ein gemeinsamer Knoten oder eine gemeinsame Seite von  $T_1$  und  $T_2$  sein.

Formal definiert man ein *Finites Element* als Tripel  $(T, \mathbb{P}_T, \Sigma_T)$ , wobei  $T$  ein Polyeder im  $\mathbb{R}^d$ ,  $\mathbb{P}_T$  ein Unterraum der Dimension  $s$  von  $\mathcal{C}(T)$  und  $\Sigma_T$  eine Menge von  $s$  linear unabhängigen Funktionalen über  $\mathbb{P}$  ist.

In SPC-PM2Ad, das im folgenden Abschnitt vorgestellt wird, sind die folgenden Finiten Elemente implementiert:

- das lineare Dreieckselement

$$(T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < 1 - x\}; \mathbb{P}_T = \mathcal{P}_1; \\ \Sigma_T = \{p(a_i), 1 \leq i \leq 3\}),$$

- das quadratische Dreieckselement

$$(T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < 1 - x\}; \mathbb{P}_T = \mathcal{P}_2; \\ \Sigma_T = \{p(a_i), 1 \leq i \leq 3, p(a_{ij}), 1 \leq i < j \leq 3\}),$$

- das bilineare Viereckselement

$$(T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 1, -1 < y < 1\}; \mathbb{P}_T = \mathcal{Q}_1; \\ \Sigma_T = \{p(a_i), 1 \leq i \leq 4\})$$

- und das 8-Knoten-Element der Serendipity-Klasse

$$(T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 1, -1 < y < 1\}; \mathbb{P}_T = \mathcal{Q}'_2; \\ \Sigma_T = \{p(a_i), 1 \leq i \leq 4, p(a_{ij}), 1 \leq i < j \leq 4, |i - j| = 1\}).$$

Dabei bezeichnet  $\mathcal{P}_k$  die Menge aller Polynome höchstens  $k$ -ten Grades,  $\mathcal{Q}_m$  die Menge aller Polynome, die das Produkt von Polynomen vom Höchstgrad  $m$  in jeder Variablen sind und  $\mathcal{Q}'_m \subset \mathcal{Q}_m$  die Menge aller Polynome in  $\mathcal{Q}_m$  außer dem Produkt von Polynomen mit Höchstgrad  $m$  in allen Variablen.  $a_i$  sind die Eckknoten und  $a_{ij} = (a_i + a_j)/2$  die Seitenmittelnknoten des Finiten Elements.

Mit einer solchen Triangulation ist ein Raum  $\mathbb{V}_h$  von Funktionen verbunden, die über  $\bar{\Omega}$  definiert sind und deren Einschränkung auf jedes Dreieck  $T$  zu einem endlich-dimensionalen Raum  $\mathcal{P}$  von Funktionen gehört, die über der Menge  $T$  definiert sind.


Sind  $\mathbb{P} \subset H^1(T)$  für alle  $T \in \mathcal{T}_h$  und  $\mathbb{V}_h \subset C^0(\bar{\Omega})$ , dann gilt  $\mathbb{V}_h \subset H^1(\Omega)$ . Wenn zusätzlich die Funktionen in  $\mathbb{V}_h$  auf  $\Gamma_D$  verschwinden, dann gilt  $\mathbb{V}_h \subset H_0^1(\Omega)$ , d. h. die Finiten Elemente sind konform.

### 2.3.2 Das adaptive FE-Programm SPC-PM2Ad

Das adaptive FE-Programm SPC-PM2Ad [9] dient zur Lösung von zweidimensionalen Potential- bzw. Reaktions-Diffusions-Problemen bzw. der zweidimensionalen Lamé-Gleichung der linearen Elastizität. In dieser Arbeit werden nur Aspekte des Programms erläutert, die für den letzteren Fall von Bedeutung sind.

Folgende Schritte, die nachfolgend genauer erklärt werden, kennzeichnen ein adaptives FE-Programm:

0. Einlesen der Daten und fundamentale Steuerung

- 
1. Netzverfeinerung
  2. Generierung/Assemblierung der Steifigkeitsmatrix
  3. Definition eines Startvektors und PCGM
  4. Post Processing und Grafik
  5. Fehlerschätzer

### Netzverfeinerung

In SPC-PM2Ad sind drei Arten der Netzverfeinerung realisiert: rote (h), rot-grüne (r), und Bänsch-grüne (g) Verfeinerung.

Bei der roten Verfeinerung [7] wird ein Dreieck in vier kongruente Dreiecke durch die Verbindung der Seitenmitten zerlegt. Geschieht dies nur lokal, so entstehen im Allgemeinen hängende Knoten (engl.: hanging nodes) und die Triangulierung ist nicht mehr zulässig. Daher werden die Nachbardreiecke halbiert (grüne Verfeinerung). Wird jedoch zu oft der selbe Winkel halbiert, so nimmt die Qualität der Triangulierung ab. Dies kann durch folgenden Algorithmus zur rot-grünen Verfeinerung vermieden werden:

Gegeben sei eine zulässige Triangulierung  $\mathcal{T}$ .

1. Trifft ein lokales Verfeinerungskriterium zu, so wird das Dreieck rot geteilt.
2. Hat ein Dreieck mehr als einen hängenden Knoten, so wird es rot verfeinert. Dies geschieht solange, bis die Bedingung nicht mehr erfüllt ist.
3. Dreiecke mit einem hängenden Knoten werden durch grüne Verfeinerung in zwei Dreiecke zerlegt.
4. Vor einer weiteren Verfeinerung wird zunächst die grüne Verfeinerung aus Schritt 3 rückgängig gemacht.

Bei der Bänsch-grünen Verfeinerung wird das markierte Dreieck halbiert, indem der Seitenmittelpunkt der sogenannten „Teilungskante“ [10] des Dreiecks mit dem gegenüberliegenden Eckknoten verbunden wird.

### Generierung/Assemblierung der Steifigkeitsmatrix

Im Rahmen der Elastizitätstheorie wählt man

$$\Phi = (\varphi_1 \underline{e}_1, \varphi_1 \underline{e}_2, \dots, \varphi_1 \underline{e}_{n_{dof}}, \varphi_2 \underline{e}_1, \varphi_2 \underline{e}_2, \dots, \varphi_2 \underline{e}_{n_{dof}}, \dots, \varphi_{n_k} \underline{e}_{n_{dof}})$$

als Basis in  $\mathbb{V}_h$ , wobei  $n_{dof}$  die Anzahl der Freiheitsgrade pro Knoten,  $n_k$  die Anzahl der Knoten,  $\underline{e}_j, j = 1, \dots, n_{dof}$  die Einheitsvektoren und  $\varphi_i, i = 1, \dots, n_k$  die knotenorientierten Basisfunktionen bezeichnet. Es gilt also

$$\varphi_i(x_l) = \delta_{il}, \quad 1 \leq i, l \leq n_k.$$

Man setzt  $u_h = \Phi \underline{u}$ , wobei die Komponenten des Vektor  $\underline{u} \in \mathbb{R}^{n_k \cdot n_{dof}}$  die Zerlegungskoeffizienten bezüglich der Basis  $\Phi$  sind. Damit erhält man die Steifigkeitsmatrix

$$K = (a(\varphi_j \underline{e}_m, \varphi_i \underline{e}_l))_{\substack{i,j=1 \\ l,m=1}}^{n_k \quad n_{dof}}.$$

Wegen (2.9) und  $D(\nabla) \varphi_j \underline{e}_l = D(\nabla \varphi_j) \underline{e}_l$  ist

$$K = \int_{\Omega} \hat{D}^T C \hat{D} d\Omega$$

mit  $\hat{D} = \left( D(\nabla \varphi_1) \dot{D}(\nabla \varphi_2) \dot{D}(\nabla \varphi_3) \dots \dot{D}(\nabla \varphi_{n_k}) \right)$ .

Wie üblich wird die Steifigkeitsmatrix elementweise berechnet und dann aufakkumuliert. Auf Elementebene gilt

$$K_{el} = \int_{\Omega} \hat{D}_{el}^T C \hat{D}_{el} d\Omega$$

mit  $\hat{D}_{el} = \left( D(\nabla \varphi_1^e) \dot{D}(\nabla \varphi_2^e) \dot{D}(\nabla \varphi_3^e) \dots \dot{D}(\nabla \varphi_{n_e}^e) \right)$ , wobei  $n_e$  die Anzahl der Elementformfunktionen bezeichnet.  $K_{el}$  berechnet sich näherungsweise durch Gauß-Integration mit den Gewichten  $\omega_{\hat{g}}$  an den Gauß-Punkten  $\hat{g}$  aus

$$K_{el} = \sum_{\forall \hat{g} \in \hat{T}} \omega_{\hat{g}} \det(J(\hat{g})) \hat{D}_{\hat{g}}^T C \hat{D}_{\hat{g}}, \quad (2.13)$$

wobei  $\det(J)$  die Funktionaldeterminante der affinen Transformation des Einheitselements auf das Wellelement ist.

**Bemerkung 3** In SPC-PM2Ad wird auch bei linearen Ansatzfunktionen das 6- bzw. 8-Knoten-Element verwendet. Vor der Generierung der Elementsteifigkeitsmatrizen wird das Makroelement in vier kongruente Dreiecke oder Vierecke zerlegt, jedoch sind die Materialeigenschaften nur für das Makroelement definiert.

**PCGM (engl.: preconditioned conjugate gradient method)**

Bei der FEM entstehen sehr große, schwach besetzte Gleichungssysteme. Direkte Verfahren können aufgrund von „fill in“ (Ersetzung von Null- durch Nicht-Null-Einträge) und ihres hohen Aufwands nicht eingesetzt werden. Die Alternative sind iterative Verfahren, bei denen die Anzahl der Iterationen wesentlich kleiner als die Dimension des Gleichungssystems sein sollte.

Die Methode der konjugierten Gradienten (engl.: conjugate gradient method), kurz cg-Verfahren, wurde 1952 von Hestens und Stiefel entwickelt, gewann aber erst ab Beginn der 80er Jahre an Bedeutung [5].

Die Iterationszahlen  $n_{it}$  des cg-Verfahrens sind von der Konditionszahl  $\kappa$  der Steifigkeitsmatrix abhängig. Genauer, für das cg-Verfahren mit Lösung  $\underline{x}_*$  gilt für alle Startvektoren  $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  nach dem  $i$ -ten Iterationsschritt die Fehlerabschätzung

$$\|\underline{x}_i - \underline{x}_*\| \leq 2 \left( \frac{\sqrt{\kappa} - 1}{\sqrt{\kappa} + 1} \right)^i \|\underline{x}_i - \underline{x}_0\|. \quad (2.14)$$

In der Praxis konvergiert das Verfahren jedoch schneller, da für Gleichung (2.14) vorausgesetzt wurde, daß die Eigenwerte gleichmäßig zwischen  $\lambda_{\min}$  und  $\lambda_{\max}$  verteilt sind. Eigenwerte treten aber häufig in Gruppen auf, was die Konvergenz beschleunigt.

Trotzdem kann dies für die Steifigkeitsmatrizen in FE-Anwendungen nicht ausreichen, da die Konditionszahl  $\kappa$  der Steifigkeitsmatrix bezüglich einer knotenorientierten Basis mit  $O\left(\left(\frac{1}{h}\right)^2\right)$  anwächst. Deshalb löst man statt (2.12) ein Gleichungssystem

$$C^{-1}K\underline{u} = C^{-1}\underline{b},$$

wobei die symmetrische, positiv definite Matrix  $C$  eine Näherung für  $K$  sein soll. Diese Technik bezeichnet man als Vorkonditionierung (engl.: preconditioning), die Methode als PCG-Verfahren. Der Algorithmus des PCG-Verfahrens ist in Abb. 2.1 dargestellt.

Eine Möglichkeit zur Vorkonditionierung ist die Verwendung von hierarchischen Basen nach Yserentant [12].

Zu jedem Verfeinerungslevel  $k = 0, 1, \dots$  sei eine Triangulierung  $\mathcal{T}_k$  gegeben. Wir bezeichnen mit  $\mathbb{V}^k$  den FE-Raum zur Triangulation  $\mathcal{T}_k$  und mit  $\mathbb{W}^j, j = 1, 2, \dots$  den Unterraum von  $\mathbb{V}^j$  mit denjenigen FE-Funktionen, die in Knoten des Levels  $j - 1$  verschwinden.

---

Start: wählen Startvektor  $\underline{u}_0$

$$\underline{r}_0 = \mathbf{K}\underline{u}_0 - \underline{b}$$

$$\underline{w}_0 = \mathbf{C}^{-1}\underline{r}_0$$

$$\underline{q}_0 = \underline{w}_0$$

$$\gamma_0 = \underline{r}_0^T \underline{w}_0$$

für  $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\underline{v}_k = \mathbf{K}\underline{q}_k$$

$$\delta_k = \underline{v}_k^T \underline{q}_k, \quad \alpha_k = -\frac{\gamma_k}{\delta_k}$$

$$\underline{u}_{k+1} = \underline{u}_k + \alpha_k \underline{q}_k$$

$$\underline{r}_{k+1} = \underline{r}_k + \alpha_k \underline{v}_k$$

$$\underline{w}_{k+1} = \mathbf{C}^{-1}\underline{r}_{k+1}$$

$$\gamma_{k+1} = \underline{r}_{k+1}^T \underline{w}_{k+1}, \quad \beta_k = \frac{\gamma_{k+1}}{\gamma_k}$$

$$\underline{q}_{k+1} = \underline{w}_{k+1} + \beta_k \underline{q}_k$$

bis  $\gamma_{k+1} \leq \epsilon_{\text{rel}}^2 \gamma_0$ .

---

Abb. 2.1: Algorithmus des pcg-Verfahrens: Lösen  $\mathbf{K}\underline{u} = \underline{b}$  mit Vorkonditionierung  $\mathbf{C}$

Die *hierarchische Basis*  $\Psi$  lässt sich leicht rekursiv definieren. In  $\mathbb{V}^0$  entspricht die hierarchische Basis der Knotenbasis. Für  $k \geq 1$  besteht die hierarchische Basis aus den hierarchischen Basisfunktionen des  $k-1$ -ten Levels und den Funktionen, die eine Knotenbasis in  $\mathbb{W}^k$  bilden.

Die Steifigkeitsmatrix bezüglich einer hierarchischen Basis im FE-Raum hat eine Konditionszahl, die nur mit  $O((\log h)^2)$  anwächst. Das pcg-Verfahren benötigt also nur  $O(\log n)$  Iterationsschritte. Allerdings erhält man bei der Verwendung von hierarchischen Basen voll besetzte und relativ komplizierte Steifigkeitsmatrizen. Deshalb assembliert man die Steifigkeitsmatrix nicht bezüglich der hierarchischen Basis, sondern nutzt die Vorteile des Basiswechsels nur zur Vorkonditionierung.

Es existiert eine Matrix  $\mathbf{Q}$  mit

$$\Psi = \Phi \mathbf{Q}.$$

Damit gilt für die Eigenwerte  $\lambda_i$  der hierarchischen Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_H$

$$\lambda_i(\mathbf{K}_H) = \lambda_i(\mathbf{Q}^T \mathbf{K} \mathbf{Q}) = \lambda_i(\mathbf{Q} \mathbf{Q}^T \mathbf{K})$$

und wir definieren  $\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T$ .

**Bemerkung 4** Bei roter Verfeinerung erfolgt zusätzlich eine Projektion (siehe [13]).



Die programmtechnische Realisierung der Vorkonditionierung erfolgt unter Zuhilfenahme einer Verfeinerungsliste, in der die Knotennummern von dem Sohnknoten  $S$  und den beiden Vaterknoten  $V_1$  und  $V_2$  gespeichert sind.

Algorithmus: Berechnung von  $\underline{w} = C^{-1} \underline{r} = Q Q^T \underline{r}$

$$\begin{aligned} \underline{y} = Q^T \underline{r} : \quad & \underline{y} = \underline{r} \\ & \forall \text{ Knoten in Verfeinerungsliste rückwärts do} \\ & \quad \underline{y}(V_1) = \underline{y}(V_1) + \frac{1}{2} \underline{y}(S) \\ & \quad \underline{y}(V_2) = \underline{y}(V_2) + \frac{1}{2} \underline{y}(S) \\ \underline{w} = Q \underline{y} : \quad & \underline{w} = \underline{y} \\ & \forall \text{ Knoten in Verfeinerungsliste vorwärts do} \\ & \quad \underline{w}(S) = \underline{w}(S) + \frac{1}{2} (\underline{w}(V_1) + \underline{w}(V_2)) \end{aligned}$$

Diese Vorkonditionierung verwendet ausschließlich Informationen über die Netzverfeinerung und ist unabhängig von der zugrundeliegenden Differentialgleichung. Dieser Nachteil kann behoben werden, indem man die Diagonale der Steifigkeitsmatrix  $D_K$  mittels

$$C^{-1} = J_0 Q D_K^+ Q^T J_0 \quad (2.15)$$

zur Vorkonditionierung nutzt oder einen Grobgitterlöser verwendet:

$$C^{-1} = J_0 Q \begin{pmatrix} C_0^{-1} & 0 \\ 0 & D_R^+ \end{pmatrix} Q^T J_0. \quad (2.16)$$

Dabei bezeichnet  $C_0$  die sogenannte *Groggittermatrix*, also die Steifigkeitsmatrix zu  $\mathcal{T}_0$ . Die Diagonalmatrix  $D_R$  enthält die Elemente der Diagonale der Steifigkeitsmatrix  $D_K$  zu Knoten, die nicht im Grobnetz repräsentiert sind. Die verallgemeinerte Inverse  $M^+$  einer Diagonalmatrix  $M := \text{diag}(m_i)_{i=1}^n$  und die Diagonalmatrix  $J_0$  sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} M^+ &= \text{diag}(m_i^+)_{i=1}^n \text{ mit } m_i^+ = \begin{cases} 0 & \text{falls } m_i = 0 \\ \frac{1}{m_i} & \text{sonst} \end{cases} \\ J_0 &= \text{diag}(j_i)_{i=1}^n \text{ mit } j_i = \begin{cases} 0 & \text{falls } (D_K^+)_{ii} = 0 \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Da die Dimension von  $\mathbb{V}^0 \cap H_0^1(\Omega)$  normalerweise vergleichsweise klein ist, kann die Cholesky-Zerlegung  $LL^T$  von  $C_0$  billig berechnet werden.

### Post Processing und Grafik

Die Visualisierung der Ergebnisse erfolgt mit den an der TU Chemnitz vorhandenen Tools, deren Aufruf und Benutzung in [14] erklärt wird.

### Fehlerschätzer

Ein Finites Element  $T$  habe den geschätzten Elementfehler  $\eta_T^2$ . Der maximale Elementfehler wird mit  $\eta = \max_{T \in \mathcal{T}}(\eta_T^2)$  bezeichnet. Dann werden zwei Verfeinerungsstrategien verfolgt:

1. Es werden diejenigen Elemente  $T$  zum Verfeinern bzw. Vergrößern markiert, bei denen der geschätzte Elementfehler nahe  $\eta$  oder sehr viel geringer als  $\eta$  ist, d. h.

$$\begin{aligned} \eta_T > th_R * \eta &\Rightarrow \text{Verfeinerung} \\ \eta_T < th_C * \eta &\Rightarrow \text{Vergrößerung,} \end{aligned} \quad (2.17)$$

wobei  $th_R$  den Verfeinerungs- und  $th_C$  den Vergrößerungsschwellwert bezeichnet.

2. Es wird mindestens ein bestimmter Prozentsatz der Elemente zur Verfeinerung markiert. Ist dies nicht der Fall, so wird  $th_R$  solange mit einem Faktor  $th_{scale} < 1$  multipliziert, bis ein vorgegebener minimaler Wert für  $th_R$  erreicht ist.

Für ein Finites Element  $T$  mit den Kanten  $e_i$  wird der geschätzte Elementfehler  $\eta_T^2$  aus geschätzten Kantenfehlern  $\eta_{e_i}^2$  berechnet. Bei Elastizitätsproblemen spielt der Wert

$$\sum_{e_i \subset \partial T} h_T * \|[\sigma \mathbf{n}]\|_{L^2(e_i)}^2$$

eine bedeutende Rolle, wobei  $[\cdot]$  den Sprung über die Kante  $e_i$  bezeichnet. Deshalb definieren wir den kantenorientierten Fehlerschätzer als

$$\eta_{e_i}^2 = h_T \|[\sigma \mathbf{n}]\|_{L^2(e_i)}^2.$$

Durch Anwendung der Mittelpunktsregel ergibt sich

$$\eta_{e_i}^2 = h_T * |e_i| * \|[\sigma \mathbf{n}]\|_{x_M}^2, \quad (2.18)$$

wobei  $x_M$  den Mittelpunkt der Kante  $e_i$  bezeichnet. Da für isotrope Elemente  $h_T \sim |e_i|$  und  $|e_i| \mathbf{n} = e_i^\perp$  gilt, läßt sich der kantenorientierte Fehlerschätzer als

$$\eta_{e_i}^2 = \|[\sigma * e_i^\perp]\|_{x_M}^2$$

berechnen.

Für anisotrope Elemente wird der kantenorientierte Fehlerschätzer um einen Faktor korrigiert. Haben zwei Elemente  $T_1$  und  $T_2$  die gemeinsame Kante  $e_i$ , so gilt:

$$\eta_{e_i}^2 := \eta_{e_i}^2 \cdot \frac{\min(\min_{e_j \subset T_1} |e_j|, \min_{e_k \subset T_2} |e_k|)}{|T_1| + |T_2|}. \quad (2.19)$$

Daraus ergibt sich der Elementfehlerschätzer

$$\eta_T^2 = \frac{\sum_{e_i \in T} \eta_{e_i}^2}{\min(2\mu, \lambda)}. \quad (2.20)$$

Für die Rechnungen in Kapitel 3 ist der geschätzte relative Fehler  $\eta^{(k)}$  bezüglich der Energienorm im aktuellen  $k$ -ten Schritt als

$$\eta^{(k)} = \frac{\sum_{T \in \mathcal{T}} \eta_T^2}{\underline{\mathbf{u}}^T \mathbf{K} \underline{\mathbf{u}}} \quad (2.21)$$

angegeben.



# 3 Pseudomaterial und Materialfunktionen

## 3.1 Einführung – Analytische Betrachtung

In diesem Abschnitt wird das ursprüngliche Deformationsproblem über  $\Omega_0$  durch ein Deformationsproblem über  $\Omega \supset \Omega_0$  mit einem ortsabhängigen Materialtensor  $C(\underline{x})$  ersetzt. Dabei soll die zugehörige Variationsformulierung die Voraussetzungen des Lemmas von Lax-Milgram erfüllen.

Ausgangspunkt ist das Deformationsproblem über  $\Omega_0$ , das ein Bauteil mit komplizierter Geometrie beschreibt, wobei sich im linear-elastischen Fall die zugehörige Variationsgleichung wie folgt darstellen läßt:

$$\text{Finde } u \in \mathbb{V} := (H_0^1(\Omega_0))^3 : a_0(u, v) = f_0(v) \quad \forall v \in \mathbb{V} \quad (3.1)$$

mit

$$\begin{aligned} a_0(u, v) &= \int_{\Omega_0} \epsilon(u) : C : \epsilon(v) \, dx \\ f_0(v) &= \int_{\Omega_0} f \cdot v \, dx + \int_{\Gamma_{N,0}} g \cdot v \, da, \end{aligned}$$

und den Randbedingungen auf  $\partial\Omega_0 = \Gamma_D \cup \Gamma_{N,0}$

$$\begin{aligned} u|_{\Gamma_D} &= 0 \\ \sigma(u)\mathbf{n}|_{\Gamma_{N,0}} &= g. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Um das Deformationsproblem (3.1) zu lösen, müßte man aufgrund der geometrischen Besonderheiten des Gebietes  $\Omega_0$  ein sehr feines Startnetz wählen. Um dies zu vermeiden, wird der unbelastete Spannungsrand, also die Menge  $\{\underline{x} \in \Gamma_{N,0} : \sigma \mathbf{n} = 0\}$ , neu definiert, so daß ein Gebiet  $\Omega$  entsteht, welches  $\Omega_0$  enthält und einfach zu vernetzen ist. Mit  $\Omega_*$  wird die offene Menge  $\Omega \setminus \bar{\Omega}_0$  bezeichnet, die somit ein kompliziertes Loch, eine komplizierte Auskerbung etc. beschreibt.

Statt der Variationsgleichung (3.1) über  $\Omega_0$  wird die Variationsgleichung

$$\text{Finde } u \in \tilde{\mathbb{V}} := (\tilde{H}(\Omega))^3 : a(u, v) = f(v) \quad \forall v \in \tilde{\mathbb{V}} \quad (3.3)$$

über  $\Omega$  mit

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} \epsilon(u) : C(\underline{x}) : \epsilon(v) \, dx \\ f(v) &= \int_{\Omega} f \cdot v \, dx + \int_{\Gamma_N} g \cdot v \, da \end{aligned}$$

und den Randbedingungen

$$\begin{aligned} u|_{\Gamma_D} &= 0 \\ \sigma(u)\mathbf{n}|_{\Gamma_N} &= g \end{aligned} \quad (3.4)$$

auf  $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$  gelöst. Dabei wird der ortsabhängige Materialtensor  $C(\underline{x})$  so gewählt, daß er auf  $\bar{\Omega}_0$  mit dem Materialtensor  $C$  des Variationsproblems (3.1) übereinstimmt und in  $\Omega_*$  das ursprünglich nicht vorhandene Material, das als *Pseudomaterial* bezeichnet wird, möglichst gut modelliert. Diese Ortsabhängigkeit des Materialtensors wird im Rahmen der FEM durch Materialfunktionen beschrieben, deren Definition in den folgenden Abschnitten erfolgt.

**Bemerkung 5** *Im Falle der vollständig linearen Theorie sind die ortsabhängigen Materialparameter der Elastizitätsmodul  $E(\underline{x})$  und die Querkontraktionszahl  $\nu(\underline{x})$ .*

Das Variationsproblem (3.3) ist über dem Raum  $\left(\tilde{H}(\Omega)\right)^3$  definiert. Bei dem Raum  $\tilde{H}(\Omega)$  handelt es sich nicht, wie man aus (3.1) folgern könnte, um den Raum  $H_0^1(\Omega)$ , da die Bilinearform  $a(u, v)$  z. B. für  $C(\underline{x}) = 0 \quad \forall \underline{x} \in \Omega_*$  auf  $\left(H_0^1(\Omega)\right)^3$  nicht koerziv ist.

### 3.1.1 Definition von $\left(\tilde{H}(\Omega)\right)^3$

Der Raum  $\left(\tilde{H}(\Omega)\right)^3$  besteht aus Funktionen  $\tilde{u} \in \left(\tilde{H}(\Omega)\right)^3$ , für die

$$\tilde{u}(\underline{x}) = \begin{cases} u(\underline{x}) & \text{für } \underline{x} \in \bar{\Omega}_0, \quad u \in \left(H_0^1(\Omega_0)\right)^3 \\ u_*(\underline{x}) & \text{für } \underline{x} \in \Omega_* \end{cases}$$

ist, wobei  $u_*$  die harmonische Fortsetzung der Spur von  $u$  auf  $\Gamma_* := \partial\Omega_*$  in  $\Omega_*$  ist.

Aufgrund der Definition von  $\left(\tilde{H}(\Omega)\right)^3$  existiert eine eindeutige Abbildung von  $\left(H_0^1(\Omega_0)\right)^3$  auf  $\left(\tilde{H}(\Omega)\right)^3$ . Folglich ist  $a(u, v)$  koerziv auf  $\left(\tilde{H}(\Omega)\right)^3$ , da

$$a(\tilde{u}, \tilde{u}) \geq a_0(u, u) \geq C_c \|u\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3}^2 \quad \forall \tilde{u} \in \left(\tilde{H}(\Omega)\right)^3$$

ist.

Im Weiteren betrachten wir *nur* Funktionen  $\tilde{u} \in \left(\tilde{H}(\Omega)\right)^3$ . Da die Beschränktheit und Symmetrie von  $a(u, v)$  offensichtlich ist, sind somit die Voraussetzungen des Lemmas von Lax-Milgram erfüllt.

## 3.2 Sinnfälligkeit der Vorgehensweise am Beispiel mit und ohne Pseudomaterial

In diesem Abschnitt wird die prinzipielle Machbarkeit und die Qualität der Lösung bei der Verwendung von ortsabhängigen Materialparametern untersucht.

Dazu wird die Menge  $\Omega_*$ , die ein Loch oder eine Auskerbung verkörpert, so gewählt, daß sie exakt im Grobnetz repräsentiert ist, d. h. ihr Rand  $\partial\Omega_*$  mit den Kanten von Finiten Elementen des Grobnetzes zusammenfällt. Dadurch ist ein direkter Vergleich zwischen Rechnungen mit vernetzter Geometrie und mit Pseudomaterial möglich. Die Finiten Elemente, die vollständig in  $\Omega_*$  liegen, werden als *Pseudoelemente* bezeichnet, und erhalten zunächst einen zweiten Materialtyp, der durch die konstanten Materialparameter  $E_{ps}$  und  $\nu_{ps}$  gekennzeichnet ist.

Anhand der Modellprobleme, die der nächste Abschnitt vorgestellt, wird zunächst geklärt, wie die Materialparameter im Pseudomaterial  $E_{ps}$  und  $\nu_{ps}$  gewählt werden sollten und ob das adaptive FE-Programm mit dieser Parameterwahl arbeitet (Kap. 3.2.2). Anschließend (Kap. 3.2.3) werden mögliche Auswirkungen bezüglich der Konditionszahl der Steifigkeitsmatrix bei der Verwendung von Pseudomaterial anstelle eines vernetzten Lochs untersucht.

### 3.2.1 Modellprobleme

Als Modellproblem dient ein Vierecksgebiet  $\Omega = (0, 4) \times (0, 4) \text{ cm}^2$  mit den Materialparametern  $E_0 = 2 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$  und  $\nu_0 = 0.3$ , das auf

$$\Gamma_D = \{(x, 0) : 0 \leq x \leq 4\}$$

fest eingespannt ist. Auf

$$\Gamma_N = \{(4, y) : 2 \leq y \leq 3\} \quad (3.5)$$

greift eine Kraft  $\vec{f} = (f_1, f_2)^T$  mit  $f_1 = 0 \frac{\text{N}}{\text{cm}^3}$  und  $f_2 = -0.1 \frac{\text{N}}{\text{cm}^3}$  an.

Bei dem ersten Modellproblem befindet sich in der Mitte ein quadratisches Loch mit

$$\Omega_* = \{(x, y) \in \Omega : 1 < x < 3, 1 < y < 3\}. \quad (3.6)$$

Entweder ist das quadratische Loch vernetzt (Abb. 3.1) oder es enthält Pseudomaterial (Abb. 3.2).

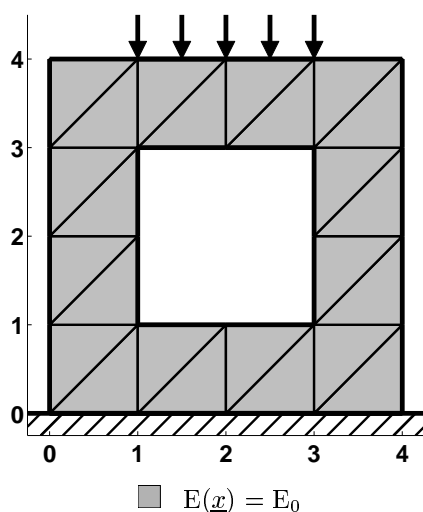


Abb. 3.1: Deformationsproblem mit quadratischem Loch (3.6), vernetzte Geometrie

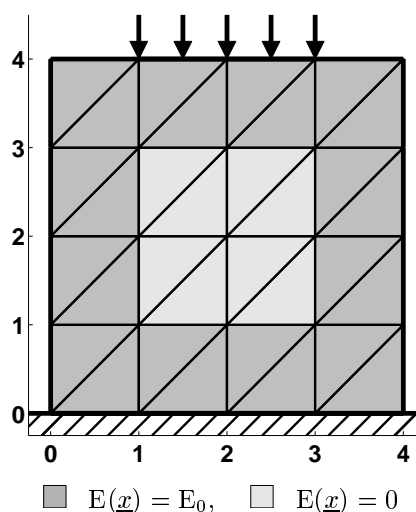


Abb. 3.2: Deformationsproblem mit quadratischem Loch (3.6), mit Pseudomaterial

Das zweite Modellproblem hat am Rand eine rechteckige Auskerbung, die ebenfalls entweder vernetzt ist oder durch Pseudomaterial modelliert wird. Dabei wurde

$$\Omega_* = \{(x, y) \in \Omega : x \in (0, 1) \cup (3, 4), 1 < y < 3\} \quad (3.7)$$

gewählt.

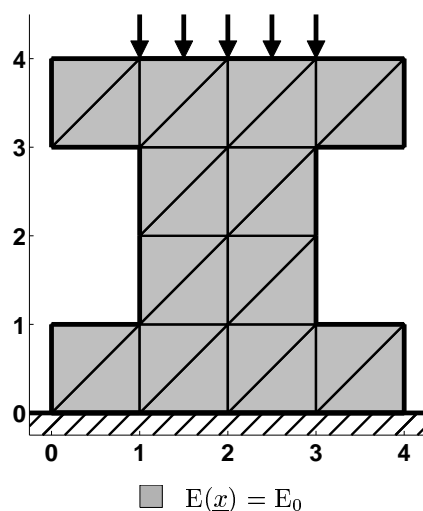


Abb. 3.3: Deformationsproblem mit rechteckiger Auskerbung (3.7), vernetzte Geometrie

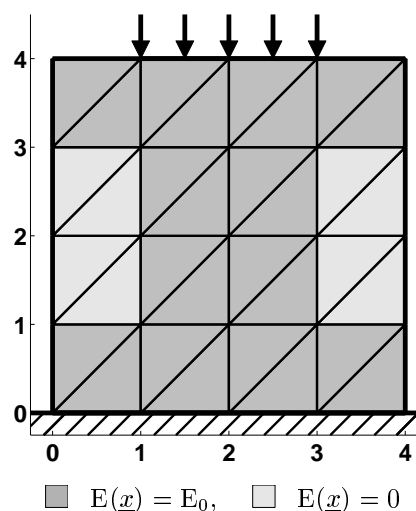


Abb. 3.4: Deformationsproblem mit rechteckiger Auskerbung (3.7), mit Pseudomaterial



### 3.2.2 Wahl der Materialparameter und Überprüfung der Funktionsfähigkeit von SPC-PM2Ad

Wir bezeichnen mit  $\chi_{\Omega_0}(\underline{x})$  die charakteristische Funktion zu  $\Omega_0$ , d. h.

$$\chi_{\Omega_0}(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } \underline{x} \in \Omega_0 \\ 0 & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

Für die Wahl der Materialparameter betrachten wir zwei Fälle:

Fall 1:  $E(\underline{x}) = \chi_{\Omega_0}(\underline{x})E_0$ , d. h.  $E_{ps} = 0$ .

Damit sind die Lamé-Konstanten  $\lambda$  und  $\mu$  in  $\Omega_*$  – unabhängig von  $\nu_{ps}$  – beide Null. Folglich sind die Elementsteifigkeitsmatrizen für Pseudoelemente Nullmatrizen. Dies entspricht der intuitiven Idee eines „verschwindenden“ Materials.

Fall 2:  $\nu(\underline{x}) = \chi_{\Omega_0}(\underline{x})\nu_0$ ,  $E(\underline{x}) = \begin{cases} E_0 & , \text{ falls } \underline{x} \in \Omega_0 \\ C \cdot E_0, 0 < C \ll 1 & , \text{ sonst} \end{cases}$

d. h.  $\nu_{ps} = 0$ ,  $E_{ps}$  klein.

Damit ist in  $\Omega_*$   $\lambda = 0$  und  $\mu = C \frac{E_0}{2}$  klein. Dies simuliert ein leicht komprimierbares Material. Es soll vermieden werden, daß sich bei der graphischen Darstellung der Verschiebungen die Punkte am Rande des Pseudomaterials mit jenen im Inneren überlappen.

Die elementweise rechte Seite eines Pseudoelements ist in beiden Fällen gleich Null.

Im Fall 2 sind keine besonderen Schwierigkeiten zur Laufzeit zu erwarten, da hier zwei wohldefinierte Materialien verwendet werden. Lediglich durch das Vorhandensein von nichtverschwindenden Elementsteifigkeitsmatrizen in  $\Omega_*$  könnten sich im Vergleich zur vernetzten Geometrie andere Iterationszahlen ergeben.

Der Fall 1 verdient jedoch als Grenzfall besondere Beachtung.

#### 1. Grobgitterlöser:

Sind Knoten des Grobnetzes von Pseudoelementen umgeben, so ist die Grobgittermatrix singulär. In SPC-PM2Ad wird jedoch die Hautdiagonale der Grobgittermatrix mit  $10^{-25}$  initialisiert, so daß die Cholesky-Zerlegung der Grobgittermatrix erfolgreich ist und der Grobgitterlöser arbeitet.

## 2. Vorkonditionierung:

Bei der Vorkonditionierung ist aufgrund der verschwindenden Elementsteifigkeitsmatrizen  $\underline{r}_k = 0 \quad \forall \underline{x}_k \in \Omega_*$ . Damit spielt die Initialisierung von  $D_K$  (siehe Abschnitt 2.3.2), die standardmäßig  $10^{-20}$  beträgt, keine Rolle, da die invertierten Initialisierungswerte auf Nulleinträge von  $\mathbf{Q}^T \mathbf{J}_0 \underline{r}$  treffen (Lemma und Beweis siehe Anhang A). Durch die Anwendung von  $\mathbf{Q}^T$  entsteht für  $w$ , und folglich für  $q$  und  $u$  eine pseudoharmonische Fortsetzung ins Innere von  $\Omega_*$ .

Sind Knoten in  $\Omega_*$  von Pseudoelementen umgeben, so hat die Steifigkeitsmatrix den Eigenwert Null. Das PCG-Verfahren arbeitet jedoch in einem Unterraum, so daß sich dieser Eigenwert nicht störend auf die Konvergenz auswirkt.

## 3. Fehlerschätzer:

In  $\Omega_*$  ist  $\sigma \mathbf{n}$  aufgrund der verschwindenden Materialparameter Null. Elemente am Übergang zum Pseudomaterial werden zur Verfeinerung markiert, solange die Kantensprünge  $[\sigma \mathbf{n}]$  und damit  $\sigma \mathbf{n}$  in  $\Omega_0$  relativ groß sind. So wird mit zunehmender Verfeinerung die „harte“ Randbedingung  $\sigma \mathbf{n} = 0$  des vernetzten Lochs angenähert. Bei Auskerbungen wird die Neumann-Randbedingung  $\sigma \mathbf{n} = 0$  des ursprünglichen Randes  $\Gamma_{N,0}$  durch die Pseudoelemente erfüllt.

Pseudoelemente selbst werden immer zur Vergrößerung und nie zur Verfeinerung markiert. Die Verfeinerungen im Pseudomaterial sind ausschließlich auf Netzabschluß zurückzuführen. Der Grund liegt darin, daß für den Elementefehlerschätzer (2.20) mit

$$\begin{cases} (\min(2\mu, \lambda))^{-1} & \text{in } \Omega_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

multipliziert wird.

Jedoch ändert sich bei der Verwendung von Pseudomaterial im Vergleich zu der Rechnung mit vernetztem Loch das Laufzeitverhalten. Zum einen ist die Elementanzahl und damit der Prozentsatz der zum Verfeinern markierten Elemente unterschiedlich. Zum anderen weicht bei der Verwendung des anisotropen Fehlerschätzers wegen (2.19) der Wert von  $\eta_{e_i}^2$  für Elemente am Übergang zum Pseudomaterial ab. Deshalb wird der anisotrope Fehlerschätzer stets deaktiviert.

**Bemerkung 6** Ohne Grobgitterlöser muß also für ein exakt gleiches Laufzeitverhalten der isotrope Fehlerschätzer verwendet werden, und der Prozentsatz der zum Verfeinern markierten Elemente darf nur aus markierten Elementen, die in  $\Omega_0$  liegen, berechnet werden.

Bei Verwendung des Grobgitterlösers ist zusätzlich zu beachten, daß es im allgemeinen bei der Verwendung von Pseudomaterial durch das Vorhandensein zusätzlicher Knoten zu einer Permutation der Knotennummerierung und dadurch zu einer Veränderung der Summationsreihenfolge bei der Berechnung der Cholesky-Faktoren bzw. dem Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen während der Vorkonditionierung kommt. Dadurch entstehen kleine Abweichungen. Hier ist gleiches Laufzeitverhalten nur möglich, wenn die Knoten von Elementen, die in  $\Omega_0$  liegen, zuerst in gleicher Reihenfolge durchnummeriert werden und zusätzlich die Reste der Initialisierung (vgl. Abschnitt 3.3.1) nach der Cholesky-Zerlegung der Grobgittermatrix mit Nullen überschrieben werden.

Zusammenfassend läßt sich also sagen, daß Grobgitterlöser, PCG-Verfahren und Fehlerschätzer in gewünschter Weise arbeiten.

Nach der Untersuchung der prinzipiellen Machbarkeit, betrachten wir die Qualität der Lösung. In Tab. 3.1 ist die Verschiebung für das quadratische Loch (3.6) bei vernetzter Geometrie in x- bzw. y-Richtung exemplarisch in den Punkten (3, 2) und (4, 2) nach  $k$  Verfeinerungsschritten angegeben.

	k	2·#kn	$u_x(3, 2) \cdot 10^6$	$u_x(4, 2) \cdot 10^6$	$\eta^{(0)}$	$\eta^{(k)}$
$\Delta_{lr}$	17	618750	10.04273605	11.98706436	1.3E+01	7.0E-03
$\Delta_{lg}$	17	622588	10.04266739	11.98709583	1.3E+01	3.9E-03
$\Delta_{lh}$	20	754026	10.04248905	11.98659420	1.3E+01	7.0E-03
$\Delta_{qr}$	33	542958	10.04383278	11.98818493	6.4E-01	3.0E-06
$\Delta_{qg}$	32	578106	10.04382515	11.98818493	6.4E-01	4.5E-06
$\Delta_{qh}$	40	447422	10.04383945	11.98820400	6.4E-01	1.4E-06
$\square_{l2}$	20	577258	10.04350758	11.98787975	1.7E+00	1.0E-03
$\square_{q2}$	22	61226	10.04381466	11.98817635	3.2E-01	1.5E-06

Tab. 3.1: Verschiebungen des Deformationsproblems mit quadratischen Loch (3.6) bei vernetzter Geometrie nach  $k$  Verfeinerungsschritten

**Bemerkung 7** Die Kürzel wie ' $\Delta_{qg}$ ' oder ' $D_{qg}$ ' in Tabellen und Abbildungen stehen für verwendete Elemente, Ansatzfunktionen und Verfeinerung bzw. Anisotropie-Faktor. Dabei stehen 'D' bzw.  $\Delta$  oder 'V' bzw.  $\square$  für die Art der verwendeten Elemente und 'l' oder 'q' für lineare bzw. quadratische Ansatzfunktionen. Bei Dreiecken ist zusätzlich die Verfeinerungsmethode ('r' – rot-

grün, 'g' – Bänsch-grün, 'h' – hanging nodes) angegeben und bei Vierecken der Anisotropie-Faktor. Die Referenzwerte  $u_{x,ref}(x_1, x_2)$  und  $u_{y,ref}(x_1, x_2)$ , mit denen die relativen Fehler (vgl. Gl. (3.8) bzw. (3.9)) berechnet werden, sind jeweils in Kursivschrift gesetzt.

Vergleichend hierzu werden in Referenzpunkten die betragsmäßigen relativen Fehler der Verschiebung in Prozent in  $x$ -Richtung

$$\bar{u}_x(x_1, x_2) = \left| \frac{u_x(x_1, x_2) - u_{x,ref}(x_1, x_2)}{u_{x,ref}(x_1, x_2)} \right| \cdot 100\% \quad (3.8)$$

bzw.  $y$ -Richtung

$$\bar{u}_y(x_1, x_2) = \left| \frac{u_y(x_1, x_2) - u_{y,ref}(x_1, x_2)}{u_{y,ref}(x_1, x_2)} \right| \cdot 100\% \quad (3.9)$$

nach 15 Verfeinerungsschritten berechnet. Nach dieser Anzahl von Verfeinerungsschritten hat sich bei quadratischen Elementen das Quadrat des relativen geschätzten Fehlers bezüglich der Energienorm  $\eta^{(k)}$  ungefähr um vier Zehnerpotenzen erniedrigt. Bei quantitativen Auswertungen wurde im letzten Verfeinerungsschritt immer solange gerechnet, bis das CG-Residuum  $\langle r, w \rangle$  möglichst klein war.

Die Tabellen 3.2 und 3.3 zeigen den Approximationsfehler für das quadratische Loch (3.6) Dabei ist die Approximation der wirklichen Verschiebung im Fall 2 (Pseudomaterial mit  $E_{ps} > 0$ ) sowohl am Übergang zum Loch als auch in einiger Entfernung zum Loch etwas schlechter als jene im Fall 1 (Pseudomaterial mit  $E_{ps} = 0$ ).

	2-#kn	$\bar{u}_x(3, 2)$	$\bar{u}_x(4, 2)$
$\Delta_{lr}$	307920	0.03 %	0.03 %
$\Delta_{lg}$	303404	0.02 %	0.02 %
$\Delta_{lh}$	155280	0.06 %	0.06 %
$\Delta_{qr}$	29544	< 0.01 %	< 0.01 %
$\Delta_{qg}$	41008	< 0.01 %	< 0.01 %
$\Delta_{qh}$	29496	0.01 %	< 0.01 %
$\square_{l2}$	93768	0.01 %	0.02 %
$\square_{q2}$	11176	0.01 %	0.01 %

Tab. 3.2: Approximationsfehler des Deformationsproblems mit quadratischem Loch (3.6), mit Pseudomaterial nach 15 Verfeinerungsschritten bei Wahl  $E_{ps} = 0$  (Fall 1)

	2·#kn	$\bar{u}_x(3, 2)$	$\bar{u}_x(4, 2)$
$\Delta_{lr}$	307826	0.07 %	0.06 %
$\Delta_{lg}$	304560	0.07 %	0.06 %
$\Delta_{lh}$	155366	0.11 %	0.10 %
$\Delta_{qr}$	29496	0.05 %	0.04 %
$\Delta_{qg}$	40928	0.05 %	0.04 %
$\Delta_{qh}$	29496	0.05 %	0.04 %
$\square_{l2}$	93794	0.07 %	0.06 %
$\square_{q2}$	11176	0.06 %	0.05 %

Tab. 3.3: Approximationsfehler des Deformationsproblems mit quadratischem Loch (3.6), mit Pseudomaterial nach 15 Verfeinerungsschritten bei Wahl  $E_{ps} = 10$ ,  $\nu_{ps} = 0$  (Fall 2)

**Bemerkung 8** Wie aus Abb. 3.5 ersichtlich, ist der Trick,  $E_{ps}$  größer Null, aber klein zu wählen und damit eine gute graphische Darstellung zu erreichen, im allgemeinen nicht nötig. Durch die Anwendung der Vorkonditionierung nach Yserentant entsteht eine pseudoharmonische Fortsetzung der Lösung ins Innere von  $\Omega_*$ .

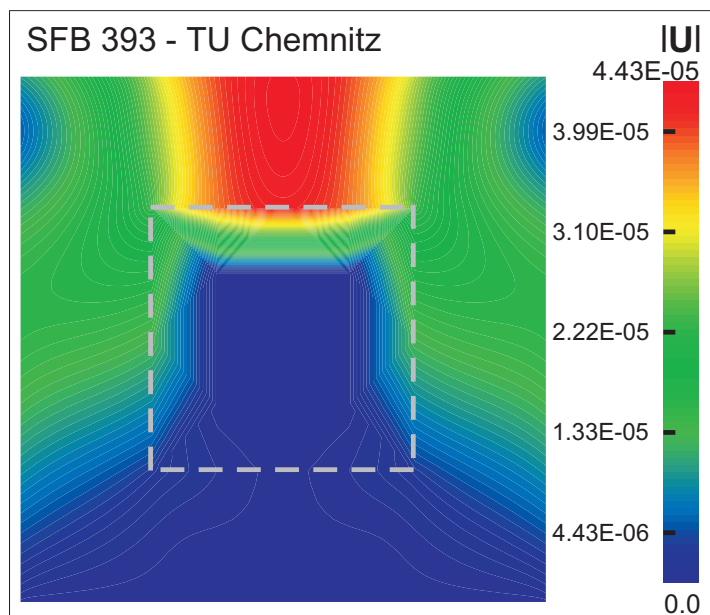


Abb. 3.5: Betrag der Verschiebung  $|\vec{u}|$  des Deformationsproblems mit quadratischem Loch (3.6) nach zehn Verfeinerungsschritten bei Wahl  $E_{ps} = 0$ ,  $\Delta_{lg}$

Bei anderen Geometrien (z. B. Schlitz) und stärkeren Belastungen kann natürlich bei der graphischen Darstellung eine Überlappung am Übergang zu  $\Omega_*$  nicht ausgeschlossen werden.

Auch für die rechteckige Auskerbung mit Pseudomaterial ergibt sich mit  $E_{ps} = 0$  eine bessere Approximation der wirklichen Verschiebungen. In Tab. 3.4 sind die Verschiebungen bei vernetzter Geometrie in y-Richtung in den Punkten (2, 2) und (3, 2) dargestellt und in den Tabellen 3.5 und 3.6 der Approximationsfehler bei der Verwendung von Pseudomaterial.

	k	2·#kn	$u_y(2, 2) \cdot 10^6$	$u_y(3, 2) \cdot 10^6$	$\eta^{(0)}$	$\eta^{(k)}$
$\Delta_{lr}$	18	657762	-7.74468565	-7.85799217	1.5E+00	1.1E-03
$\Delta_{lg}$	18	545966	-7.74467659	-7.85800076	1.5E+00	7.8E-04
$\Delta_{lh}$	18	428372	-7.74463463	-7.85782766	1.5E+00	1.9E-03
$\Delta_{qr}$	24	226954	-7.74481297	-7.85812902	8.3E-02	4.7E-07
$\Delta_{qg}$	22	236260	-7.74481201	-7.85812712	8.3E-02	4.3E-07
$\Delta_{qh}$	27	213332	-7.74481297	-7.85812140	8.3E-02	5.1E-07
$\square_{l2}$	17	164236	-7.74468279	-7.85801888	3.5E-01	6.7E-04
$\square_{q2}$	23	55530	-7.74481297	-7.85812616	1.4E-01	7.3E-07

Tab. 3.4: Verschiebungen des Deformationsproblems mit rechteckiger Auskerbung (3.7) bei vernetzter Geometrie nach  $k$  Verfeinerungsschritten

	2·#kn	$\bar{u}_y(2, 2)$	$\bar{u}_y(3, 2)$
$\Delta_{lr}$	215422	0.01 %	0.01 %
$\Delta_{lg}$	239490	< 0.01 %	< 0.01 %
$\Delta_{lh}$	145766	0.01 %	0.01 %
$\Delta_{qr}$	33018	< 0.01 %	< 0.01 %
$\Delta_{qg}$	47642	< 0.01 %	< 0.01 %
$\Delta_{qh}$	40760	< 0.01 %	< 0.01 %
$\square_{l2}$	44894	0.01 %	0.01 %
$\square_{q2}$	12758	< 0.01 %	< 0.01 %

Tab. 3.5: Approximationsfehler des Deformationsproblems mit rechteckiger Auskerbung (3.7), mit Pseudomaterial nach 15 Verfeinerungsschritten bei Wahl  $E_{ps} = 0$  (Fall 1)

	$2 \cdot \#\text{kn}$	$\bar{u}_x(3, 2)$	$\bar{u}_x(4, 2)$
$\triangle\text{lr}$	215540	0.01 %	0.01 %
$\triangle\text{lg}$	239644	0.01 %	0.01 %
$\triangle\text{lh}$	145930	0.01 %	0.03 %
$\triangle\text{qr}$	33018	0.01 %	0.01 %
$\triangle\text{qg}$	47750	0.01 %	0.01 %
$\triangle\text{qh}$	40760	0.01 %	0.01 %
$\square\text{l2}$	44840	0.02 %	0.01 %
$\square\text{q2}$	12758	0.01 %	0.01 %

Tab. 3.6: Approximationsfehler des Deformationsproblems mit rechteckiger Auskerbung (3.7), mit Pseudomaterial nach 15 Verfeinerungsschritten bei Wahl  $E_{ps} = 10$ ,  $\nu_{ps} = 0$  (Fall 2)

### 3.2.3 Iterationszahlen

Die Iterationszahlen für die Modellprobleme mit quadratischem Loch (3.6) bzw. rechteckiger Auskerbung (3.7) sind in Abb. 3.6 und 3.7 grafisch dargestellt.

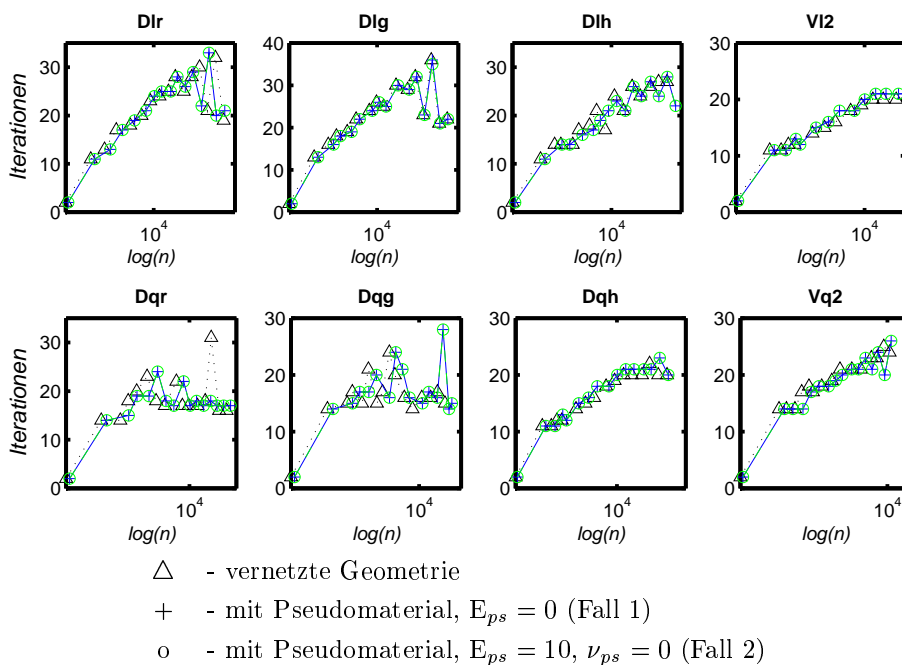


Abb. 3.6: Iterationszahlen des Deformationsproblems mit quadratischem Loch (3.6) bei unterschiedlicher Wahl des Elastizitätsmoduls

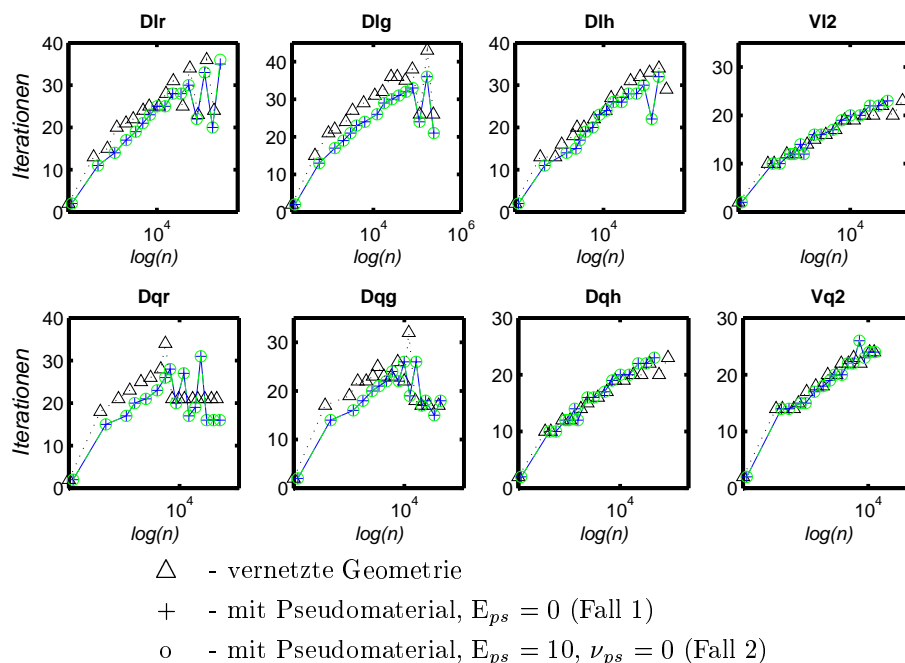


Abb. 3.7: Iterationszahlen des Deformationsproblems mit rechteckiger Auskerbung (3.7) bei unterschiedlicher Wahl des Elastizitätsmoduls

Im wesentlichen erhält man für die vernetzte Geometrie sowie bei der Verwendung von Pseudomaterial die gleichen Iterationszahlen. Die leichten Unterschiede sind auf die unterschiedliche Anzahl von Elementen zurückzuführen. Es treten kleinere Sprünge auf und die Iterationszahlen steigen leicht an. Dieses Phänomen ist problemabhängig und tritt sowohl bei quadratischen als auch bei rautenförmigen Löchern auf, während bei kreisförmigen Löchern die Iterationszahlen ab dem 5. Verfeinerungsschritt annähernd konstant sind. Grund sind also die vorhandenen Singularitäten.

### 3.2.4 Definition einer Materialfunktion

Im Sinne einer späteren Verallgemeinerung auf Löcher, deren Ränder nicht mit den Elementengrenzen zusammenfallen, wird nun nur *ein* Material mit den konstanten Materialparametern  $E_0$  und  $\nu_0$  verwendet und das Pseudomaterial durch folgende *einfache Materialfunktion* modelliert:

$$m_1 : \underline{x} \mapsto E(\underline{x}) = \chi_{\Omega_0}(\underline{x}_s) E_0, \quad (3.10)$$

wobei  $\underline{x}_s$  den Schwerpunkt des Finiten Elementes bezeichnet.



Werden die in Abb. 3.8 dargestellten Grobnetze verwendet, verlaufen die Rechnungen mit dieser einfachen Materialfunktion für die bisher betrachteten Probleme analog zu den Rechnungen bei Verwendung eines 2. Materialtyps.

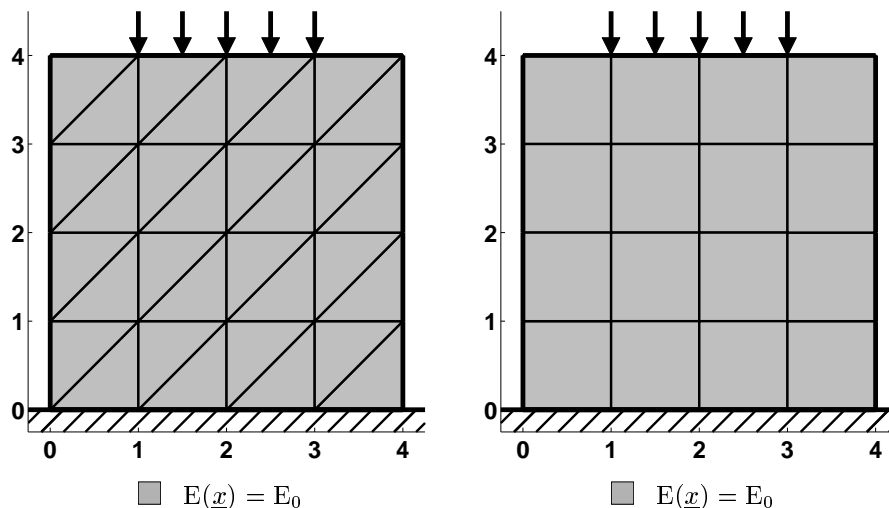


Abb. 3.8: Ersatz-Deformationsprobleme

### 3.2.5 Zusammenfassung

Bei der Verwendung ortsabhängiger Materialparameter treten bei den Modellproblemen keine Probleme bei der Ausführung des adaptiven FE-Programms auf. Der Grobgitterlöser sowie das PCG-Verfahren arbeiten, und es wird an den richtigen Stellen verfeinert.

In  $\Omega_*$  wird der Elastizitätsmodul  $E_{ps} = 0$  gesetzt. Mit dieser Wahl sind die Abweichungen der berechneten Verschiebungen im Vergleich zur vernetzten Geometrie sehr klein. Aufgrund der entstehenden pseudoharmonischen Fortsetzung ist darüber hinaus eine gute graphische Darstellbarkeit der Ergebnisse gewährleistet. Die Iterationszahlen der Rechnungen mit Pseudomaterial sind im wesentlichen gleich groß wie die Iterationszahlen der Rechnungen mit vernetzter Geometrie. Der anisotrope Fehlerschätzer wird bei allen Rechnungen deaktiviert, um eine bessere Vergleichbarkeit der Iterationszahlen zu erreichen. Die Wahl  $E_{ps}$  klein und  $\nu_{ps} = \nu_0$  wird im weiteren aufgrund schlechterer Approximationseigenschaften nicht näher betrachtet.

Durch den Gebrauch der Materialfunktion anstelle eines zweiten Materialtyps können nun Deformationsprobleme für allgemeinere Gebiete  $\Omega_*$  berechnet werden.

### 3.3 Löcher und Auskerbungen allgemeinerer Form

Im Gegensatz zu Abschnitt 3.2 wird nun auf die Voraussetzung verzichtet, daß das Gebiet  $\Omega_*$ , welches ein Loch oder eine Auskerbung verkörpert, im Grobnetz repräsentiert ist.  $\Omega_*$  soll jedoch bis auf weiteres eine konvexe Menge oder die Vereinigung konvexer durchschnittsfremder Mengen sein.

#### 3.3.1 Probleme und Lösungsstrategien

Bei Löchern allgemeinerer Form und Verwendung der einfachen Materialfunktion (3.10) treten zwei Probleme auf, die ihre Ursachen

1. in der Initialisierung der zur Vorkonditionierung verwendeten Diagonalen  $D_K$  der Steifigkeitsmatrix (vgl. Gl. (2.15) bzw. (2.16)) mit  $10^{-20}$ , und
2. in der Initialisierung der Diagonalen der Grobgittermatrix mit  $10^{-25}$

haben.

Diese Probleme werden nun an Beispielen dargestellt. Es werden verschiedene Lösungsstrategien erläutert, die dann in den Kapiteln 3.3.3 und 3.3.4 genauer zu untersuchen sind.

Das erste Problem mit der Initialisierung von  $D_K$  wird am Beispiel eines rautenförmigen Loches mit

$$\Omega_* = \{(x, y) \in \Omega : |x - 2| + |y - 2| < 1\} \quad (3.11)$$

bei Verwendung von Viereckselementen mit linearen Ansatzfunktionen im 3. Verfeinerungsschritt deutlich (siehe Abb. 3.9).

Der Sohnknoten  $S$  hat eine nichtverschwindende Verschiebung  $\underline{u}(S)$ . Diese wird bei der Vorkonditionierung mit  $\mathbf{Q}^T$  zur Hälfte auf den Vaterknoten  $V_1$  addiert. Da  $V_1$  im Pseudomaterial liegt, sind die Elementsteifigkeitsmatrizen der umgebenden Elemente Nullmatrizen, also bleibt auf der Diagonalen der Steifigkeitsmatrix der Wert der Initialisierung erhalten. Damit wird  $\underline{u}(V_1)$  mit  $10^{20}$  multipliziert und dann bei der Anwendung von  $\mathbf{Q}$  auf die entsprechenden Sohnknoten von  $V_1$  aufaddiert, womit  $\underline{r}^T \underline{u}$  viel zu groß wird. Dies stört die weitere sichere Konvergenz des PCGM.

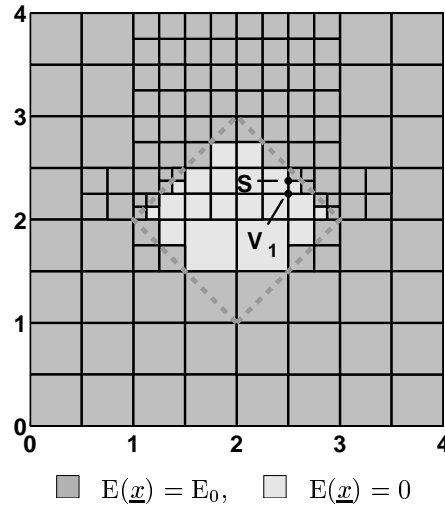


Abb. 3.9: Material des Deformationsproblems mit rautenförmigem Loch (3.11) im 3. Verfeinerungsschritt mit einfacher Materialfunktion  $m_1$ , □12

Die einfachste Möglichkeit, dieses Problem zu lösen, besteht darin, die Diagonale der Steifigkeitsmatrix  $D_K$ , die bei der Vorkonditionierung verwendet wird, mit Null statt mit  $10^{-20}$  zu initialisieren. Dadurch werden alle Koeffizienten von Ansatzfunktionen bezüglich der *knotenorientierten* Basis, deren Träger ganz in  $\Omega_*$  liegen, gleich Null gesetzt. Die Matrix  $D_K$  wird aber nach der Basistransformation mit  $Q^T$  angewendet und wirkt deshalb bezüglich der *hierarchischen* Basis. Es werden also Koeffizienten zu hierarchischen Basisfunktionen gleich Null gesetzt, auch wenn deren Träger *nicht* vollständig in  $\Omega_*$  liegen (vgl. hierarchische Ansatzfunktion zum Knoten  $V_1$ , Abb. 3.9). Damit ist unklar, ob ein systematischer Fehler entsteht, da die modifizierte hierarchische Basis mittels  $Q$  nicht mehr ordnungsgemäß in die knotenorientierte Basis zurücktransformiert werden kann.

Das zweite Problem – die Initialisierung der Grobgittermatrix mit  $10^{-25}$  – ist am Beispiel des Kreises mit

$$\Omega_* = \{(x, y) \in \Omega : (x - 2)^2 + (y - 2)^2 < 1\} \quad (3.12)$$

ersichtlich (Abb. 3.10, 3.11).

Im 0. Verfeinerungsschritt wird die Grobgittermatrix  $C_0$  aufgebaut. Da die Träger der Ansatzfunktionen zu den Knoten  $V_1$  und  $V_2$  in  $\Omega_*$  liegen, sind alle Elementsteifigkeitsmatrizen der umliegenden Elemente Nullmatrizen und auf der Diagonalen der Grobgittermatrix  $C_0$  bleibt der Wert  $10^{-25}$  der Initialisierung

für die zugeordneten Freiheitsgrade erhalten. Nach der Cholesky-Zerlegung steht dort ein Wert in der Größenordnung von  $10^{-13}$  ( $\sqrt{10^{-25}} \approx 3.16 \cdot 10^{-13}$ ).

Im 1. Verfeinerungsschritt erhält man wegen der einspringenden Ecke ein im Punkt  $S$  nicht verschwindendes Residuum  $\underline{r}(S) \neq 0$ . Dieses wird bei der Vorkonditionierung mit  $Q^T$  jeweils zur Hälfte auf die Vaterknoten  $V_1$  und  $V_2$  aufaddiert, d. h. der Vektor  $Q^T J_0 \underline{r}$  hat an den Komponenten zu  $V_1$  und  $V_2$  Nichtnullen. Durch Anwendung der beiden Cholesky-Faktoren werden diese mit  $10^{25}$  multipliziert und u. a. auf den Sohnknoten  $S$  aufaddiert. Dadurch wird  $\underline{w}(S)$  unverhältnismäßig groß.

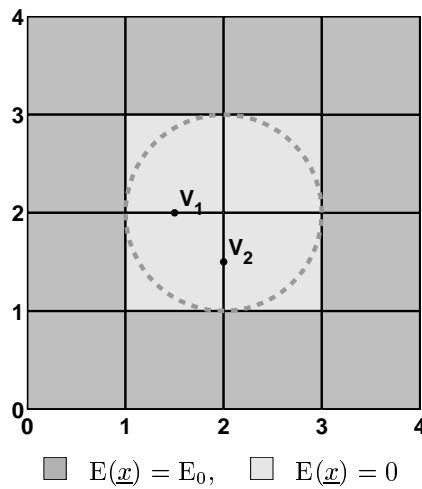


Abb. 3.10: Material des Deformationsproblems mit kreisförmigem Loch (3.12) im 0. Verfeinerungsschritt mit einfacher Materialfunktion  $m_1$ , □|2

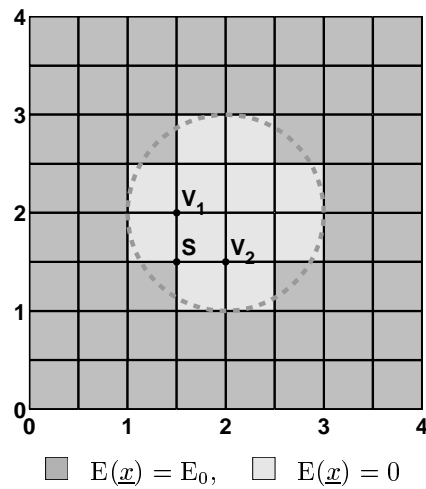


Abb. 3.11: Material des Deformationsproblems mit kreisförmigem Loch (3.12) im 1. Verfeinerungsschritt mit einfacher Materialfunktion  $m_1$ , □|2

Bei der Problemlösung ist zu bedenken, daß keine „grundsätzliche“ Änderung an der Initialisierung vorgenommen werden darf. Würde die Diagonale der Grobgittermatrix z. B. mit Nullen initialisiert, so wäre die Matrix singulär, falls Grobgitterknoten von Pseudoelementen umgeben sind. Der Grobgitterlöser würde dann nicht mehr arbeiten.

Zur Lösung gibt es drei verschiedene Ansätze:

1. Idee:

Man sorgt dafür, daß die Initialisierung der Diagonalen von  $C_0$  an Problemknoten überschrieben wird. Also dürfen die Elementsteifigkeitsmatrizen der Elemente, die nicht vollständig im Pseudomaterial liegen, keine Nullmatrizen sein.

Um dies zu erreichen, wird statt der einfachen Materialfunktion (3.10) eine neue Materialfunktion

$$m_2 : \underline{x} \mapsto \mathbb{E}(\underline{x}) = \frac{n_e(T) - n_{e,ps}(T)}{n_e(T)} \mathbb{E}_0 \text{ für } \underline{x} \in T, \quad (3.13)$$

verwendet, die als *gewichtete Materialfunktion* bezeichnet wird. Dabei bezeichnet  $n_e(T)$  die Gesamtzahl der Knotenpunkte des Elements  $T$  und  $n_{e,ps}(T)$  soll die Anzahl der Knotenpunkte von  $T$  sein, die im Loch oder in der Auskerbung liegen (die genaue Definition der Materialfunktion  $m_2$  erfolgt im nächsten Kapitel).

2. Idee:

Man verhindert, daß die nach der Cholesky-Zerlegung vorhandenen Reste der Initialisierung, also Diagonalelemente der Größenordnung  $10^{-13}$ , auf nichtverschwindende Komponenten des Vektors  $\mathbf{Q}^T \mathbf{J}_0 \underline{x}$  treffen. Da die Diagonale bereits invertiert gespeichert ist, geschieht dies durch Nullsetzen der Diagonalelemente der Grobgittermatrix, die größer als  $10^{10}$  sind.

3. Idee:

Man verzichtet ganz auf den Grobgitterlöser.

### 3.3.2 Vorbetrachtung: die gewichtete Materialfunktion

In diesem Abschnitt soll die gewichtete Materialfunktion (3.13) sauber definiert und ihre Eigenschaften (Approximationsfehler, Iterationszahlen) untersucht werden.

Bei der gewichteten Materialfunktion (3.13) wurden im Gegensatz zur einfachen Materialfunktion (3.10) Punkte auf dem Rand der Finiten Elemente, nämlich die Knotenpunkte, zur Definition verwendet. Stellt man sich unter  $n_{e,ps}(T)$  die Anzahl der Knotenpunkte in  $\Omega_*$  und  $n_e(T) - n_{e,ps}(T)$  die Anzahl der Knotenpunkte in  $\Omega_0$  vor, so besteht ein Problem, sobald  $\Gamma_*$  mit den Rändern von Finiten Elementen zusammenfällt, wie dies z. B. bei den Modellproblemen (3.6) bzw. (3.7) der Fall ist. Da  $\Omega_0$  und  $\Omega_*$  beide als offene Mengen definiert wurden (siehe Kapitel 3.1), ist im Moment noch nicht präzisiert, wie die gewichtete Materialfunktion wirkt.

**Bemerkung 9** *Auch wenn jetzt noch Klärungsbedarf bei der Definition der gewichteten Materialfunktion besteht, wurden bewußt Punkte auf dem Rand der Finiten Elemente zur Definition verwendet, da die Materialfunktion die Verwendung des Grobgitterlösers sicher stellen soll. Werden zur Definition der gewichteten Materialfunktion statt der Knotenpunkte Punkte im Inneren des Elements,*

wie z. B. die Gaußpunkte benutzt, so lassen sich Beispiele finden, bei denen alle Knotenpunkte in  $\Omega_*$  liegen, das Element aber kein Pseudoelement ist. Dadurch kommt es zu Problemen mit nichtüberschriebenen Initialisierungswerten in der Grobgittermatrix, sobald bei der Verfeinerung dieses Elements Knoten entstehen, die in  $\Omega_0$  liegen.

Für die Definition der gewichteten Materialfunktion bestehen also folgende Möglichkeiten:

$$m_{2,k} : \underline{x} \mapsto E(\underline{x}) = \frac{n_e(T) - n_{e,ps}(T)}{n_e(T)} E_0 \text{ für } \underline{x} \in T, \quad (3.14)$$

wobei  $n_{e,ps}(T)$  die Anzahl der Knotenpunkte von  $T$  ist, die in der Menge  $\Omega_*$  liegen, oder

$$m_{2,nk} : \underline{x} \mapsto E(\underline{x}) = \frac{n_e(T) - n'_{e,ps}(T)}{n_e(T)} E_0 \text{ für } \underline{x} \in T, \quad (3.15)$$

wobei  $n'_{e,ps}(T)$  die Anzahl der Knotenpunkte von  $T$  ist, die in der Abschließung von  $\Omega_*$ , also in  $\bar{\Omega}_*$  liegen. Es gilt  $m_{2,nk} \leq m_{2,k}$ .

Die Indizierung mit  $k$  bzw.  $nk$  leitet sich von dem Spezialfall ab, bei dem das Loch bzw. die Auskerbung im Grobnetz repräsentiert ist, da dort eine konforme bzw. nichtkonforme FE-Methode entsteht.

Bei beiden Materialfunktion liegen – eine genügend feine Vernetzung vorausgesetzt – Elemente mit *vollem Material*, also Elemente mit Materialparameter  $E_0$  und  $\nu_0$ , in  $\Omega_0$  und Elemente mit Nullmaterial in  $\Omega_*$ . Der Unterschied zwischen  $m_{2,nk}$  und  $m_{2,k}$  liegt in der Zuordnung der Übergangselemente: bei  $m_{2,nk}$  liegen diese in  $\Omega_0$ , bei  $m_{2,k}$  hingegen in  $\Omega_*$  (vgl. Abbildungen 3.12 und 3.13). Dadurch haben bei Verwendung der Materialfunktion  $m_{2,k}$  die Elemente in  $\Omega_0$  die selben Materialparameter wie bei Betrachtung des ursprünglichen Variationsproblems (3.1) mit einer analogen Vernetzung. Deshalb bezeichnen wir die Materialfunktion  $m_{2,k}$  im folgenden der Einfachheit halber auch im allgemeinen Fall als *konforme gewichtete Materialfunktion* und  $m_{2,nk}$  als *nichtkonforme gewichtete Materialfunktion*.

Beim Gebrauch der gewichteten Materialfunktion treten zwei gegensätzliche Tendenzen auf:

Einerseits wird der harte Übergang von normalem zu Pseudomaterial durch einen „verschmierten“ Übergang ersetzt, wodurch eine schlechtere Approximation als bei Verwendung der einfachen Materialfunktion zu erwarten ist. Andererseits werden die Übergangselemente, bei denen der Faktor  $\frac{n_e(T) - n_{e,ps}(T)}{n_e(T)}$  zwischen 0 und 1 liegt, bevorzugt geteilt, da zwischen Übergangs- und Pseudoelementen  $\sigma n$  springt.

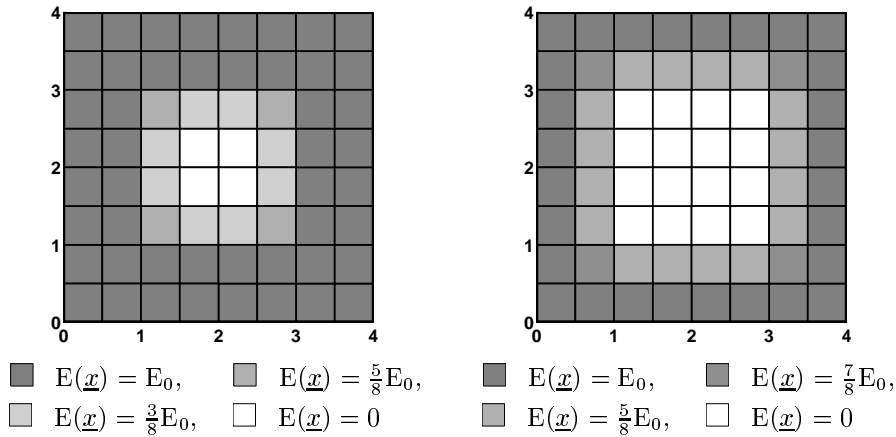


Abb. 3.12: Material des Deformationsproblems mit quadratischem Loch (3.6) mit konformer gewichteter Materialfunktion  $m_{2,k}$ ,  $k = 1, \square 2$

Abb. 3.13: Material des Deformationsproblems mit quadratisches Loch (3.6) mit nichtkonformer gewichteter Materialfunktion  $m_{2,nk}$ ,  $k = 1, \square 2$

**Bemerkung 10** Der Nachteil der einfachen Materialfunktion, daß Elemente am Übergang zum Pseudomaterial, deren Schwerpunkt innerhalb von  $\Omega_*$  liegt, nicht mehr zum Verfeinern markiert werden, sondern nur durch Netzabschluß geteilt werden können, existiert bei der gewichteten Materialfunktion nicht.

Dafür sind bei der gewichteten Materialfunktion stärkere Verfeinerungen zu erwarten, da aufgrund des Vorhandenseins von Übergangselementen die maximal auftretenden Kantensprünge im Vergleich zur einfachen Materialfunktion reduziert werden und durch den verschmierten Übergang mehr Elemente große geschätzte Fehler besitzen können. Außerdem können bei der Verwendung von der konformen gewichteten Materialfunktion  $m_{2,k}$  Elemente im Loch markiert werden, was bei der einfachen Materialfunktion nicht möglich ist.

In Abb. 3.14 ist der prozentuale Approximationsfehler in x-Richtung am Punkt (3,2), also am Rand des Loches, dargestellt. Für den prozentualen Approximationsfehler in x-Richtung am Punkt (4,2), also in einiger Entfernung des Loches, zeigt sich ein ähnliches Verhalten.

Es ist ersichtlich, daß eine starke Verfeinerung am Rand von  $\Omega_*$  den Fehler, der durch den gewichteten Übergang entsteht, nicht kompensieren kann und die Approximation vor allem während der ersten Verfeinerungsschritte sehr viel schlechter ist als bei Verwendung der einfachen Materialfunktion  $m_1$ . Dies war auch zu erwarten, da in Kapitel 3.2.2 schon eine schlechtere Approximation nachgewiesen wurde, falls  $E_{ps}$  und  $\nu_{ps}$  nicht Null gewählt werden.

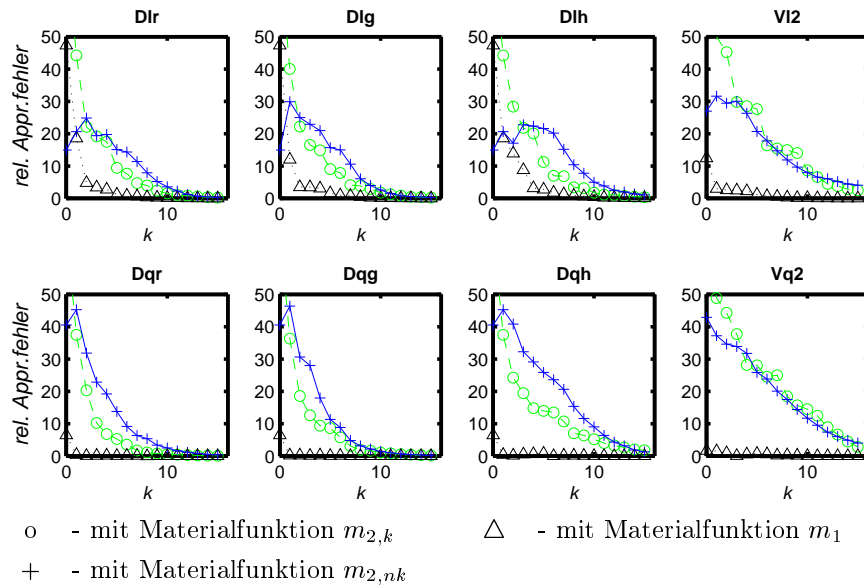


Abb. 3.14: Approximationsfehler des Deformationsproblems mit quadratischem Loch (3.6) bei Verwendung von gewichteten Materialfunktionen

Auch die Iterationszahlen, die in Abb. 3.15 dargestellt sind, sprechen eher gegen die Verwendung einer gewichteten Materialfunktion.

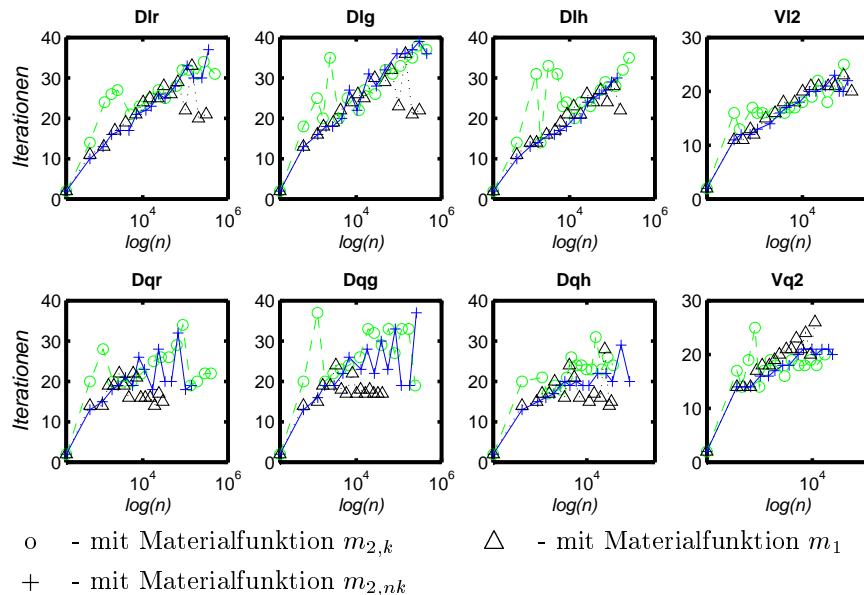


Abb. 3.15: Iterationszahlen des Deformationsproblems mit quadratischem Loch (3.6) bei Verwendung von gewichteten Materialfunktionen



**Bemerkung 11** *Es fällt auf, daß die Iterationszahlen der konformen gewichteten Materialfunktion in den ersten Verfeinerungsschritten sehr groß sind. Dies liegt bei linearen Elementen an der Verwendung von Makroelementen (vgl. S. 18, Bem. 3). Dadurch wird eine Grobgittermatrix assembliert, die nur die Materialeigenschaften des 0. Verfeinerungslevels kennt, obwohl auf dem 1. Level gearbeitet wird. Berücksichtigt man die Materialkenntnisse des 1. Levels in der Grobgittermatrix, so erhält man in etwa die gleichen Iterationszahlen wie bei Verwendung der Materialfunktion  $m_{2,nk}$ .*

*Im Endeffekt sind kleine Iterationszahlen während der ersten Verfeinerungsschritte unwichtig, da die benötigte Zeit zum Lösen des Gleichungssystems im Millisekunden-Bereich liegt.*

Der Gebrauch der gewichteten Materialfunktion verursacht also nachteilige Effekte, sowohl bei der Approximation als auch bei den Iterationszahlen.

Für den Einsatz des Grobgitterlösers ist es jedoch ausreichend, wenn nur im 0. Verfeinerungsschritt die gewichtete Materialfunktion und sonst die einfache Materialfunktion verwendet wird.

Deshalb wird die *gemischte Materialfunktion*

$$m_3 : \underline{x} \mapsto E(\underline{x}) = \begin{cases} \frac{n_e(T) - n_{e,ps}(T)}{n_e(T)} E_0 & \text{für } \underline{x} \in T \quad \text{im 0. Schritt} \\ \chi_{\Omega_0}(\underline{x}_s) E_0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.16)$$

eingeführt.

Damit ist die Verwendung des Grobgitterlösers gesichert und die guten Eigenschaften der einfachen Materialfunktion bezüglich Approximation und Iterationszahlen werden genutzt. Außerdem ist der Rechenaufwand im Vergleich zur gewichteten Materialfunktion geringer.

In Abb. 3.16 - 3.18 sind die Iterationszahlen für die Beispiele für Löcher in Form eines Kreises (vgl. 3.12), einer Raute (vgl. 3.11) und eines kleinen Quadrats mit

$$\Omega_* = \{(x, y) \in \Omega : 1.5 < x < 2.5, 1.5 < y < 2.5\} \quad (3.17)$$

für die beiden Varianten mit gewichteter und gemischter Materialfunktion dargestellt.

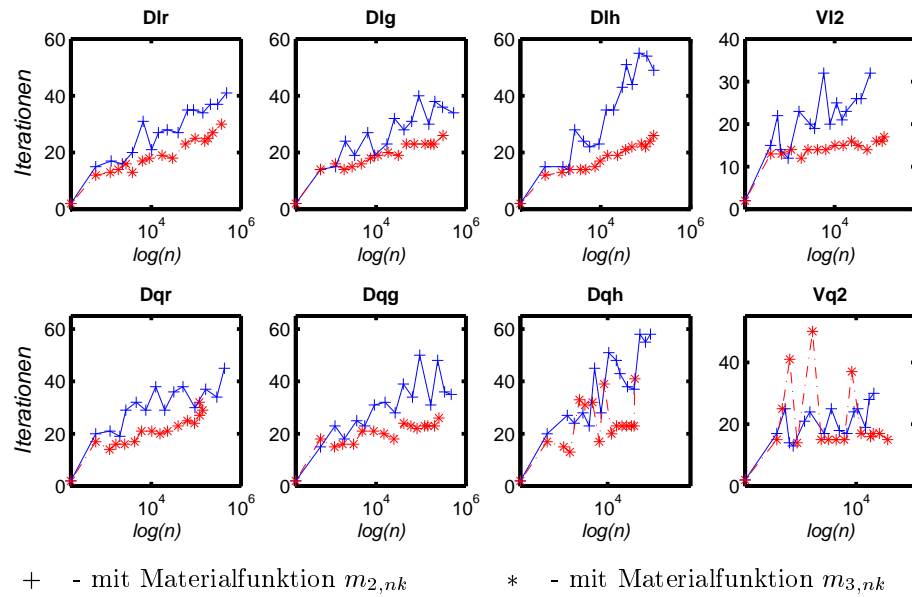


Abb. 3.16: Iterationszahlen des Deformationsproblems mit kreisförmigem Loch (3.12) für gewichtete und gemischte Materialfunktion

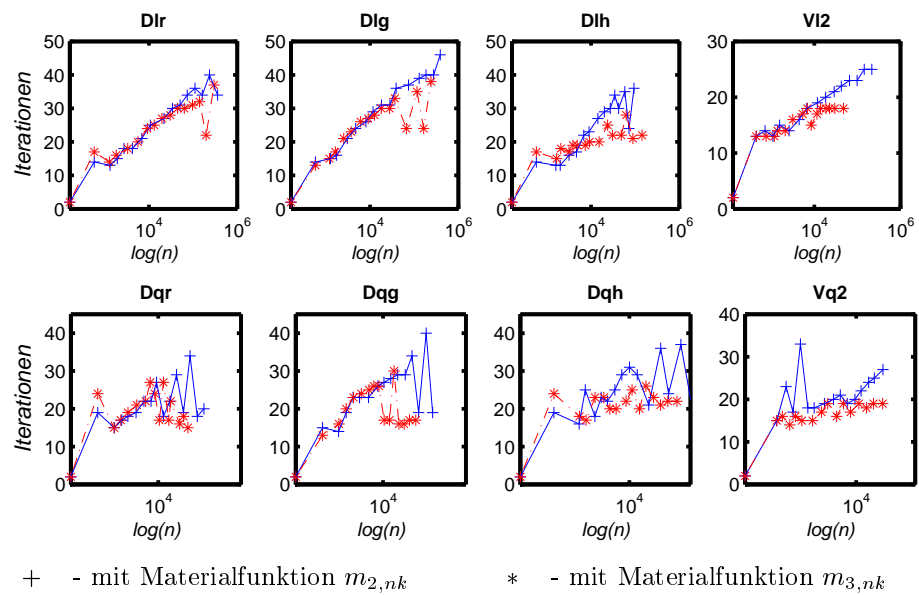


Abb. 3.17: Iterationszahlen des Deformationsproblems mit raute-förmigem Loch (3.11), Vergleich gewichtete und gemischte Materialfunktion

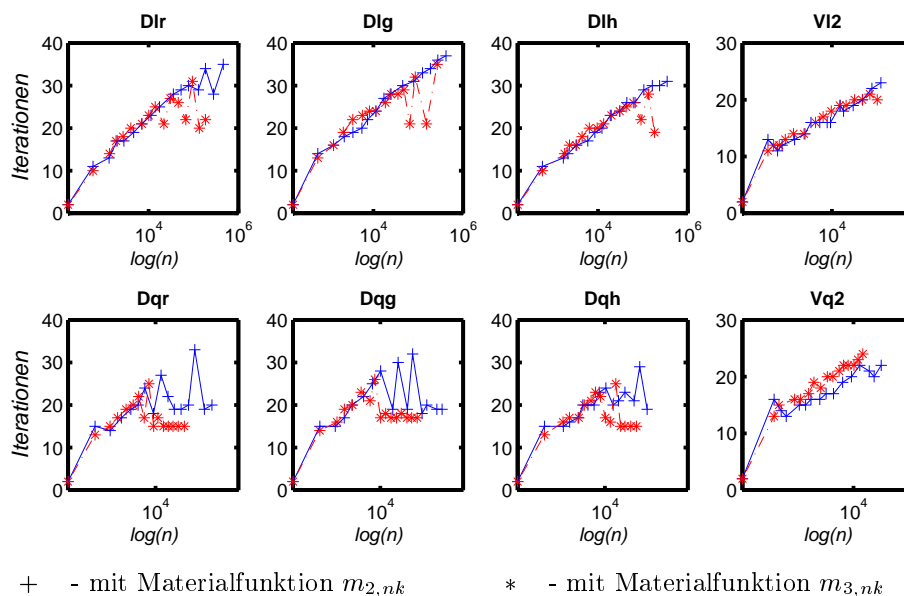


Abb. 3.18: Iterationszahlen des Deformationsproblems mit kleinem quadratischen Loch (3.17), Vergleich gewichtete und gemischte Materialfunktion

Durch die Verwendung der gemischten Materialfunktion verbessern sich die Iterationszahlen beim Beispiel des kreisförmigen Loches deutlich im Vergleich zur gewichteten Materialfunktion. Probleme gibt es nur bei Viereckselementen und quadratischen Ansatzfunktionen. Beim kleinen quadratischen Loch zeigt sich ein ähnliches Bild: die gemischte Materialfunktion ist bis auf den Fall der Viereckselemente mit quadratischen Ansatzfunktionen besser. Beim rautenförmigen Loch sind in allen Fällen leichte Verbesserungen erkennbar.

### Zusammenfassung

Soll also die Initialisierung der Grobgittermatrix überschrieben werden, ist statt der gewichteten Materialfunktion die gemischte Materialfunktion zu verwenden, wobei sowohl die konforme als auch die nichtkonforme gewichtete Materialfunktion im 0. Verfeinerungsschritt eingesetzt werden können.

### 3.3.3 Vorkonditionierung bei Materialsprüngen

Wie schon in Abschnitt 3.3.1 erläutert, ist zu klären, ob die bei der Vorkonditionierung verwendete Diagonale  $D_K$  der Steifigkeitsmatrix im allgemeinen Fall mit Null statt mit  $10^{-20}$  initialisiert werden darf oder ob dabei ein systematischer

Fehler entsteht, da Koeffizienten zu Ansatzfunktionen bezüglich der hierarchischen Basis, deren Träger nicht vollständig in  $\Omega_*$  liegen, Null gesetzt werden und somit Informationen bei der Rücktransformation in die knotenorientierte Basis verloren gehen.

### Numerische Ergebnisse

Dazu werden zwei Diagonalmatrizen zur Vorkonditionierung eingesetzt, bei denen eine Nulleinträge zu Knoten in  $\Omega_*$  besitzt und die andere nicht. Diese beiden Diagonalmatrizen werden vor der Assemblierung mit Null initialisiert und wie folgt konstruiert:

Für die erste Diagonalmatrix wird die Hauptdiagonale der Steifigkeitsmatrix  $K_{\text{pseudo}}$ , die beim Gebrauch einer Materialfunktion entsteht, verwendet.

Für die zweite Diagonale wird die Hauptdiagonale der „vollen“ Steifigkeitsmatrix  $K_{\text{voll}}$  (mit  $E(\underline{x}) = E_0 \quad \forall \underline{x} \in \Omega$ ) verwendet. Deren verallgemeinerte Inverse enthält nur Nulleinträge an Knoten mit Dirichlet-Randbedingungen (da dort bei der verallgemeinerten Invertierung die Penalty-Einträge  $10^{40}$  auf Null abgebildet werden). Dies ist vergleichbar zu einer Initialisierung mit  $10^{-20}$ , da in diesem Fall  $D_K^+$  ebenfalls nur Nullen an Knoten mit Dirichlet-Randbedingungen besitzt.

Nach Gl. (2.15) bzw. (2.16) aus Kapitel 2.3.2 ergeben sich also vier Möglichkeiten für die Vorkonditionierung:

- a)  $J_0$  und  $D_K$  aus  $\text{diag}(K_{\text{pseudo}})$
  - b)  $J_0$  aus  $\text{diag}(K_{\text{pseudo}})$  und  $D_K$  aus  $\text{diag}(K_{\text{voll}})$
  - c)  $J_0$  aus  $\text{diag}(K_{\text{voll}})$  und  $D_K$  aus  $\text{diag}(K_{\text{pseudo}})$
  - d)  $J_0$  und  $D_K$  aus  $\text{diag}(K_{\text{voll}})$ .
- (3.18)

Möglichkeit b) ist nur der Vollständigkeit halber angegeben, da es unsinnig ist,  $J_0$  so zu wählen, daß  $J_0$  mehr Nulleinträge als  $D_K$  besitzt.

Wegen der noch ungeklärten Fragen bezüglich der Grobgittermatrix wird der Grobgitterlöser deaktiviert und zunächst mit der einfachen Materialfunktion gearbeitet.

Der folgende Algorithmus stellt die beiden Diagonalmatrizen zur Verfügung, so daß die Varianten a) - d) zur Vorkonditionierung untersucht werden können:

1. Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrizen mit den Materialparametern  $E_0$  und  $\nu_0$ , wobei Elemente, deren Schwerpunkt im Pseudomaterial liegt, markiert werden

2. Assemblieren der Diagonalen  $\text{diag}(K_{\text{voll}})$  aus allen Elementsteifigkeitsmatrizen (entspricht der Wahl von  $E(\underline{x}) = E_0 \quad \forall \underline{x} \in \Omega$ )
3. Assemblieren einer zweiten Diagonale  $\text{diag}(K_{\text{pseudo}})$  aus den Elementsteifigkeitsmatrizen nichtmarkierter Elemente (entspricht der Verwendung der einfachen Materialfunktion)
4. Modifikation der elementweisen Matrix-Vektor-Multiplikation im PCG-Verfahren, so daß nur nichtmarkierte Elemente verwendet werden

In Abb. 3.19 und 3.20 sind die Iterationszahlen für das quadratische Loch (3.6) und das kreisförmige Loch (3.12) für alle vier Varianten der Vorkonditionierung (vgl. 3.18) bei Verwendung der einfachen Materialfunktion dargestellt.

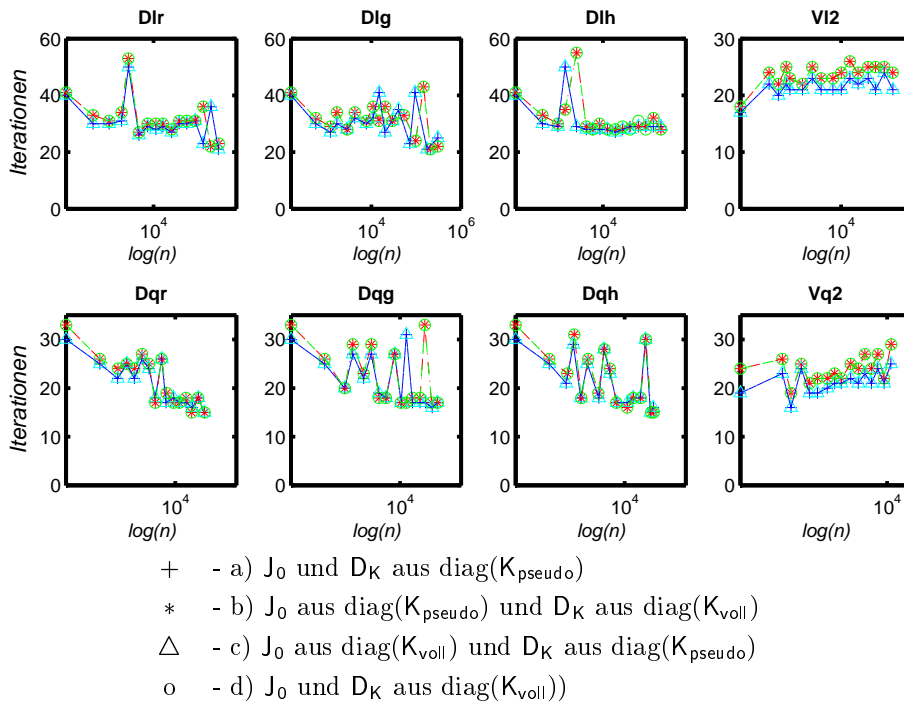


Abb. 3.19: Iterationszahlen des Deformationsproblems mit quadratischem Loch (3.6) für die verschiedenen Varianten der Vorkonditionierung (3.18) mit Materialfunktion  $m_1$

Beim quadratischen Loch sind kaum Unterschiede erkennbar, lediglich bei Viereckselementen liefern die Varianten mit  $D_K$  aus  $\text{diag}(K_{\text{pseudo}})$  geringfügig bessere Iterationszahlen. Dies ist auch nicht verwunderlich, da sich die Fortsetzung der einzelnen Varianten nicht wesentlich voneinander unterscheidet. Beim kreisförmigen Loch ist jedoch ein deutlicher Vorteil erkennbar, wenn die Matrix  $D_K$  aus  $\text{diag}(K_{\text{pseudo}})$  gebildet wird.

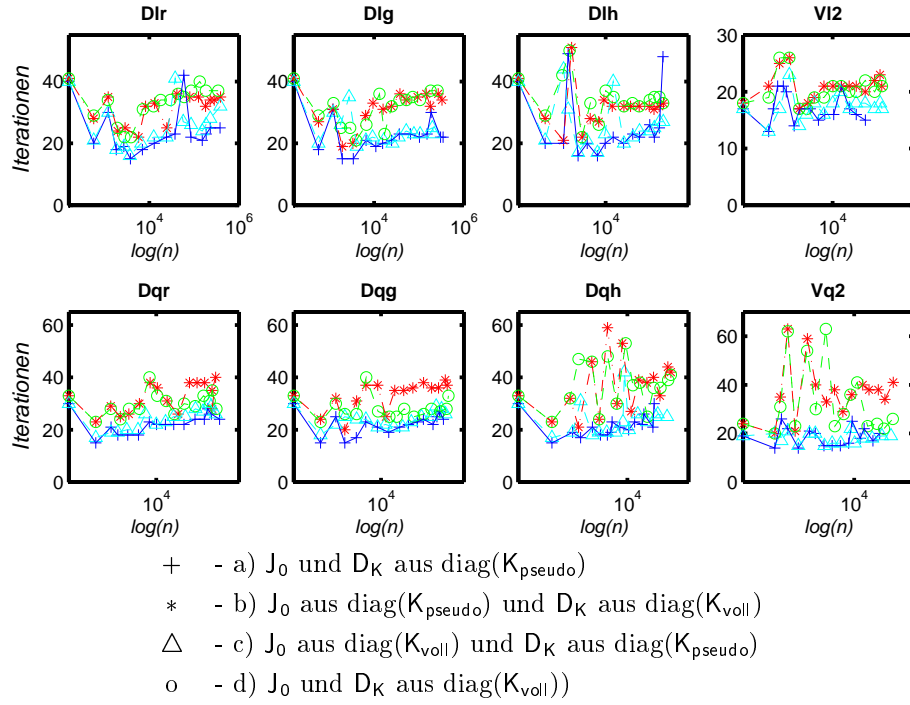


Abb. 3.20: Iterationszahlen des Deformationsproblems mit kreisförmigem Loch (3.12) für die verschiedenen Varianten der Vorkonditionierung (3.18) mit Materialfunktion  $m_1$

Diese vier Möglichkeiten der Vorkonditionierung hat man auch bei Verwendung der gewichteten Materialfunktion, allerdings ist hier der Algorithmus zur Bereitstellung der beiden Diagonalmatrizen  $\text{diag}(K_{\text{voll}})$  und  $\text{diag}(K_{\text{pseudo}})$  etwas komplizierter:

1. Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrizen mit den Materialparametern  $E_0$  und  $\nu_0$
2. Assemblieren der ersten Diagonalen  $\text{diag}(K_{\text{voll}})$  (entspricht der Wahl von  $E(\underline{x}) = E_0$  für alle  $\underline{x} \in \Omega$ )
3. Modifikation der Elementsteifigkeitsmatrizen:

$$A_T = \frac{n_e(T) - n_{e,ps}(T)}{n_e(T)} \cdot A_T$$

mit dem Faktor der gewichteten Materialfunktion  $m_2$  (vgl. Gl. (3.13))

4. Assemblieren einer zweiten Diagonale  $\text{diag}(K_{\text{pseudo}})$  (entspricht der Verwendung der gewichteten Materialfunktion)

5. vor dem nächsten Verfeinerungsschritt: Wiederherstellung der vollen Elementsteifigkeitsmatrizen (entspricht der Annulierung des 2. Schrittes) mittels

$$A_T = \frac{n_e(T)}{n_e(T) - n_{e,ps}(T)} \cdot A_T,$$

falls  $n_e - n_{e,ps} > 0$  ist

Das Ergebnis für das kreisförmige Loch (3.12) bei konformer Methode ist in Abb. 3.21 dargestellt. Auch hier ist es vorteilhaft,  $D_K$  aus  $\text{diag}(K_{\text{pseudo}})$  zu verwenden.

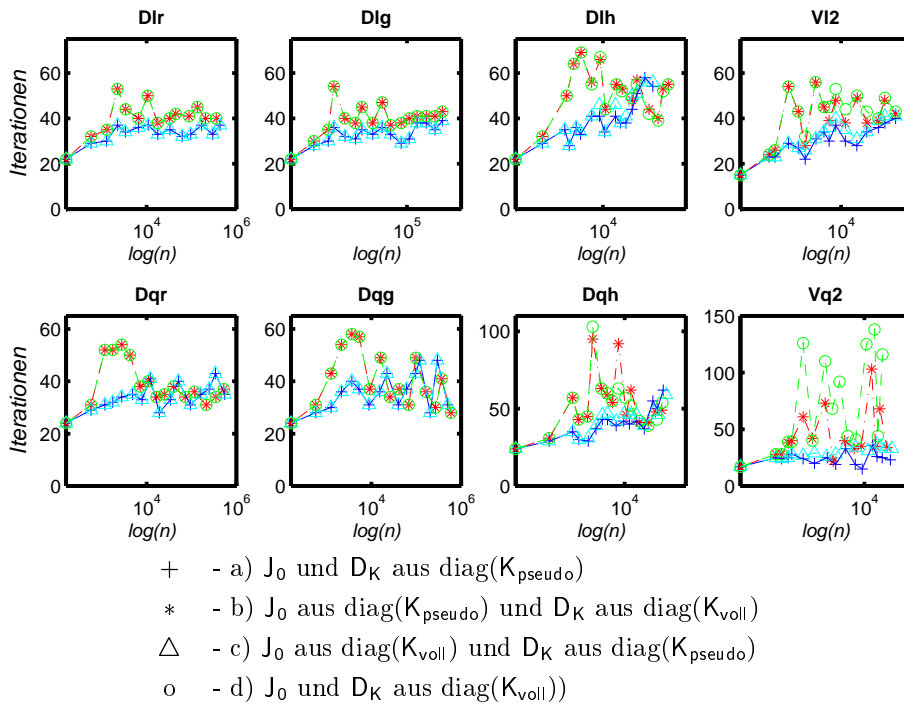


Abb. 3.21: Iterationszahlen des Deformationsproblems mit kreisförmigem Loch (3.12) für die verschiedenen Varianten der Vorkonditionierung (3.18) mit Materialfunktion  $m_{2,k}$

Dagegen zeigen sich bei einer großen rautenförmigen Auskerbung mit mit

$$\Omega_* = \{(x, y) \in \Omega : x + |y - 2| < 1.2\} \cup \{(x, y) \in \Omega : 4 - x + |y - 2| < 1.2\} \quad (3.19)$$

keine eindeutigen Vorteile (Abb. 3.22). Bei Dreieckselementen mit roter Verfeinerung haben die Varianten mit  $D_K$  aus  $\text{diag}(K_{\text{voll}})$  kleinere Iterationszahlen als jene, bei denen  $D_K$  aus  $\text{diag}(K_{\text{pseudo}})$  gewählt wird, bei Viereckselementen ist es umgekehrt.

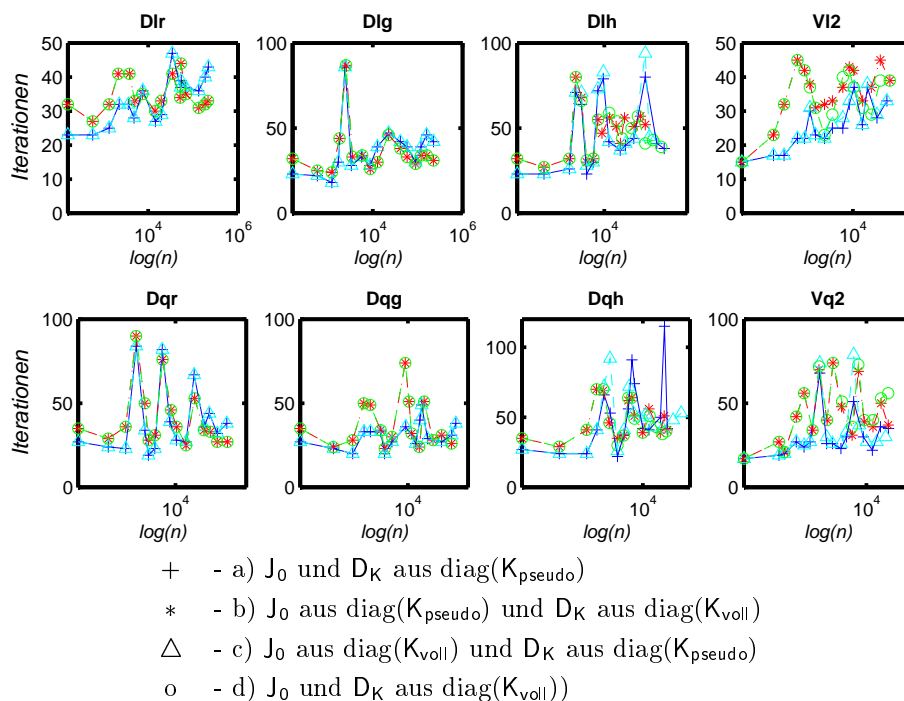


Abb. 3.22: Iterationszahlen des Deformationsproblems mit großer rautenförmiger Auskerbung (3.19) für die verschiedenen Varianten der Vorkonditionierung (3.18) mit Materialfunktion  $m_{2,k}$

Zusammengefaßt läßt sich also sagen, daß die Anzahl der Iterationen im PCG-Verfahren entscheidend von der Wahl von  $D_K$  abhängt, wobei die Wahl von  $D_K$  aus  $\text{diag}(K_{\text{pseudo}})$  vorteilhaft ist, d. h. die Kenntnis des Materialsprunges sollte bei der Vorkonditionierung verwendet werden. Die Wahl von  $J_0$  hat kaum Einfluß auf die Iterationszahlen. Da die Implementierung wesentlich einfacher ist, wenn  $J_0$  aus  $\text{diag}(K_{\text{pseudo}})$  gebildet wird, wird diese Variante bevorzugt.

### Analytische Betrachtung

Die Rechnungen des letzten Abschnitts werden nun im Bezug auf die entstehenden Fortsetzungen betrachtet.

Zunächst wird die einfache Materialfunktion verwendet und noch einmal auf das Beispiel des quadratischen, im Grobnetz repräsentierten Loches eingegangen (siehe Abb. 3.2). Dabei ergibt sich im 0. Verfeinerungsschritt nach einigen CG-Schritten folgende Situation:



Die Komponenten des Residuums  $\underline{r}$ , die von Pseudoelementen umgeben sind, haben den Wert Null. Nach der Anwendung von  $\mathbf{Q}^T \mathbf{D}_K \mathbf{Q} \mathbf{J}_0$  auf den Residuumvektor  $\underline{r}$  erhält man ohne Grobgitterlöser durch die Anwendung von  $\mathbf{Q}^T$  – unabhängig von der Initialisierung der zur Vorkonditionierung verwendeten Hauptdiagonale der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{D}_K$  – eine Fortsetzung bis zum Knoten (2, 2), also bis zu dem Grobgitterknoten, der am zweitnächsten zum Rand liegt (die Kantenmittelknoten der Makroelemente im Grobnetz werden als Sohnknoten bei der Vorkonditionierung aufgefaßt). Der Unterschied liegt bei der abschließenden Anwendung von  $\mathbf{J}_0$ .

Bei einer Initialisierung mit  $10^{-20}$  sind die Elemente von  $\mathbf{D}_K^+$  zu Knoten im Pseudomaterial nicht Null, also enthält auch  $\mathbf{J}_0$  an den entsprechenden Stellen keine Nullen. Damit kann die Fortsetzung bis zum Knoten (2, 2) korrigiert werden.

Bei der Initialisierung von  $\mathbf{D}_K$  mit Nullen sind im Gegensatz zu vorher die Diagonalelemente von  $\mathbf{J}_0$  zu Knoten im Pseudomaterial Null, also werden Werte von  $\underline{u}$  in  $\Omega_*$  nicht verändert. Da aber bei einer Verfeinerung neue Knoten mit Werten initialisiert werden, die durch lineare bzw. quadratische Interpolation der bereits vorhandenen Knoten auf der Kante entstehen, entsteht bei einer Initialisierung von  $\mathbf{D}_K$  mit Nullen ebenfalls eine ordentliche Fortsetzung, deren Verlauf ungefähr der linearen bzw. quadratischen Fortsetzung bezüglich des Grobnetzes entspricht.

Zuerst werden Fortsetzungen betrachtet, die bei einer Initialisierung von  $\mathbf{D}_K$  mit Nullen entstehen, wenn das Loch im Grobnetz repräsentiert ist und Grobgitterknoten enthält.

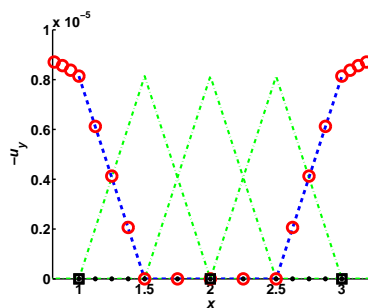


Abb. 3.23: Fortsetzung der Lösung des Deformationsproblems bei einem im Grobnetz repräsentierten Loch mit Grobgitterknoten und linearen Ansatzfunktionen

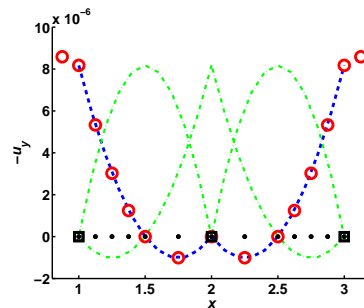


Abb. 3.24: Fortsetzung der Lösung des Deformationsproblems bei einem im Grobnetz repräsentierten Loch mit Grobgitterknoten und quadratischen Ansatzfunktionen

Die Abbildungen 3.23 und 3.24 zeigen einen eindimensionalen Schnitt der Fortsetzungen entlang der Gerade  $y = 2$  am Beispiel des quadratischen Loches (3.6) bei Verwendung von Viereckselementen mit linearen bzw. quadratischen Ansatzfunktionen. Dabei sind die Koeffizienten der hierarchischen Ansatzfunktionen zu Knoten in  $\Omega_*$  Null.

**Bemerkung 12** *Im Gegensatz dazu würde bei einer Initialisierung von  $D_K$  mit  $10^{-20}$  sowohl bei linearen als auch bei quadratischen Ansatzfunktionen eine annähernd lineare Fortsetzung bis zum Knoten  $(2, 2)$  entstehen.*

Für den Spezialfall, daß das Loch, das im Grobnetz repräsentiert ist, keine Grobgitterknoten enthält, ist die Fortsetzung einfach eine Gerade (Abb. 3.25) bzw. Parabel (Abb. 3.26).

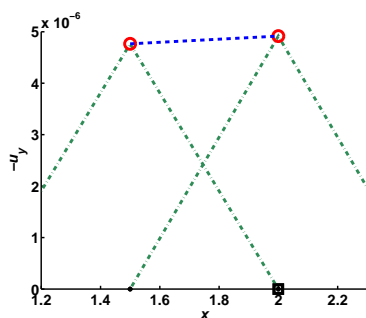


Abb. 3.25: Fortsetzung der Lösung des Deformationsproblems bei einem im Grobnetz repräsentierten Loch, das keine Grobgitterknoten enthält, bei linearen Ansatzfunktionen

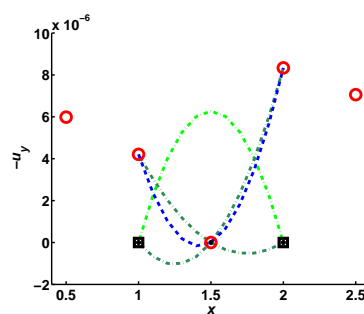


Abb. 3.26: Fortsetzung der Lösung des Deformationsproblems bei einem im Grobnetz repräsentierten Loch, das keine Grobgitterknoten enthält, bei quadratischen Ansatzfunktionen

**Bemerkung 13** *Bei einem Loch oder einer Auskerbung, in dem keine Schwerpunkte von Finiten Elementen liegen und welches nicht im Grobnetz repräsentiert ist, entsteht anfänglich eine Fortsetzung wie in den Abb. 3.25 und 3.26. Diese fällt bei weiterer Verfeinerung normalerweise nicht auf Null ab, da die anfängliche Fortsetzung in späteren Verfeinerungsschritten nur randnah verändert wird. Man erhält also Verschiebungen an Knoten in  $\Omega_*$ .*

Ragt die Funktion  $u$  auf beiden Seiten über die Grobgitterknoten hinaus, wie am Beispiel eines kleinen kreisförmigen Loches mit

$$\Omega_* = \{(x, y) \in \Omega : (x - 2)^2 + (y - 2)^2 < 0.8^2\} \quad (3.20)$$

in Abb. 3.25 dargestellt, so besteht die Fortsetzung neben Ansatzfunktionen

zu Knoten, die in  $\Omega_0$  liegen, aus Ansatzfunktionen zu Knoten in  $\Omega_*$ , die eine nichtverschwindende Initialisierung besitzen. Letzteres ist z. B. bei der Ansatzfunktion zum Knoten mit  $x = 1.375$  der Fall.

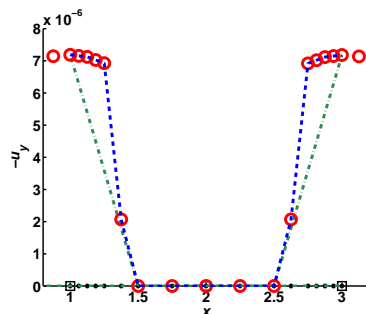


Abb. 3.27: Fortsetzung der Lösung eines Deformationsproblems mit Loch, das nicht im Grobnetz repräsentiert ist, bei linearen Ansatzfunktionen

Zum Vergleich sind in Abb. 3.28 – 3.31 die Fortsetzungen, die beim Deformationsproblem mit dem kreisförmigen Loch (3.20) entstehen, für die anderen Varianten der Vorkonditionierung (vgl. Gl. (3.18), Abschnitt 3.3.3) angegeben. Man beachte, daß sich die Fortsetzung, die entsteht, wenn  $D_K$  aus  $\text{diag}(K_{\text{pseudo}})$  und  $J_0$  aus  $\text{diag}(K_{\text{voll}})$  gewählt werden (Abb. 3.28), nur geringfügig von der Fortsetzung unterscheidet, die bei der Wahl von  $D_K$  und  $J_0$  aus  $\text{diag}(K_{\text{pseudo}})$  entsteht (Abb. 3.27).

### Zusammenfassung

Es wurde gezeigt, daß bei der Vorkonditionierung mit  $D_K$  aus  $\text{diag}(K_{\text{pseudo}})$  und  $J_0$  aus  $\text{diag}(K_{\text{voll}})$  eine pseudoharmonische Fortsetzung entsteht, welche die harmonische Fortsetzung  $u_*$ , die zur Definition von  $\tilde{H}(\Omega)$  verwendet wurde, approximiert. Diese Fortsetzung ist außerdem normerhaltend, wodurch die  $H^1$ -Norm des Verschiebungsfeldes bei zunehmender Verfeinerung nicht gegen unendlich geht. Die zur Vorkonditionierung verwendete Diagonale  $D_K$  der Steifigkeitsmatrix kann also mit Null initialisiert werden.

In Abschnitt 3.3.3 wurde jedoch deutlich, daß die Wahl von  $J_0$  aus  $\text{diag}(K_{\text{pseudo}})$  keine nachteiligen Auswirkungen auf die Iterationszahlen hat. Dabei entsteht allein durch die Initialisierung der Verschiebung von neu entstehenden Knoten mittels linearer bzw. quadratischer Interpolation eine normerhaltende annähernd lineare oder quadratische Fortsetzung ins Innere von  $\Omega_*$ .

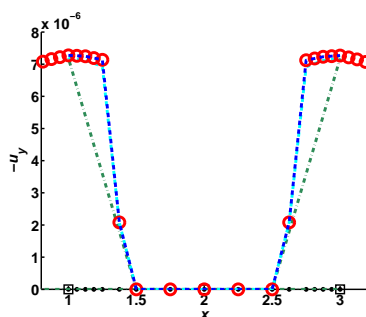


Abb. 3.28: Fortsetzung für Variante (b) ( $J_0$  aus  $\text{diag}(K_{\text{pseudo}})$  und  $D_K$  aus  $\text{diag}(K_{\text{voll}})$ ) bei Materialfunktion  $m_1$  ohne Grobgitterlöser

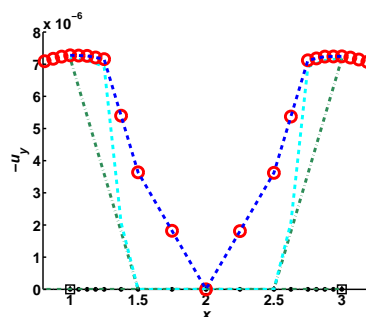


Abb. 3.29: Fortsetzung bei Variante (c) ( $J_0$  aus  $\text{diag}(K_{\text{voll}})$  und  $D_K$  aus  $\text{diag}(K_{\text{pseudo}})$ ) bei Materialfunktion  $m_1$  ohne Grobgitterlöser

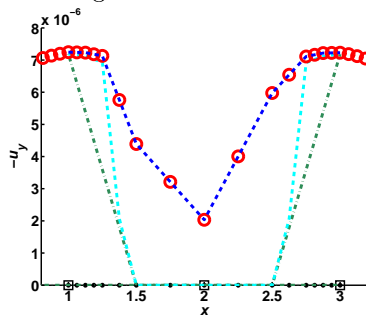


Abb. 3.30: Fortsetzung bei Variante (d) ( $J_0$  und  $D_K$  aus  $\text{diag}(K_{\text{voll}})$ ) bei Materialfunktion  $m_1$  ohne Grobgitterlöser

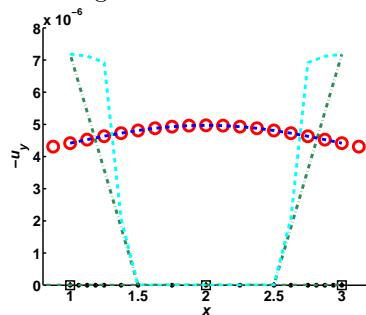


Abb. 3.31: Fortsetzung bei Variante (a) ( $J_0$  und  $D_K$  aus  $\text{diag}(K_{\text{pseudo}})$ ) bei Materialfunktion  $m_{2,k}$  ohne Grobgitterlöser

Aufgrund dieser Ergebnisse wird von jetzt an die zur Vorkonditionierung verwendete Hauptdiagonale der Steifigkeitsmatrix  $D_K$  mit Null statt mit  $10^{-20}$  initialisiert.

### 3.3.4 Verbesserungen und Alternativen zum Grobgitterlöser

In Kapitel 3.3.1 wurden drei verschiedene Ideen zur Lösung des Initialisierungsproblems für die Grobgittermatrix angesprochen: die Verwendung einer gewichteten Materialfunktion, das Nullsetzen von Initialisierungsresten in der Grobgittermatrix und der Verzicht auf den Grobgitterlöser.

Diese Ideen sollen nun anhand von Beispielen miteinander verglichen werden. Aufgrund der Untersuchungen in Kapitel 3.3.2 verwenden wir für die Rechnungen anstelle der gewichteten Materialfunktion (3.13) die gemischte Materialfunktion (3.16).

Doch zuvor soll noch ein Problem erläutert werden, welches beim Nullsetzen von Initialisierungsresten in der Grobgittermatrix und Verwendung der einfachen Materialfunktion auftritt.

### Problem beim Nullsetzen von Initialisierungsresten der Grobgittermatrix

Dabei werden, wie schon erläutert, die Werte der Grobgittermatrix, bei denen die Initialisierung nicht überschrieben wurde, nach der Cholesky-Zerlegung Null gesetzt, d. h. wir verwenden statt der üblichen Cholesky-Faktoren  $\mathbf{R} = (r_{ij})$  modifizierte Cholesky-Faktoren

$$\tilde{\mathbf{R}} = (\tilde{r}_{ij}) \text{ mit } \frac{1}{\tilde{r}_{ii}} = \begin{cases} 0 & \text{falls } (C_0)_{ii} = 10^{-25} \\ \frac{1}{r_{ii}} & \text{sonst} \end{cases}. \quad (3.21)$$

Allerdings ist diese Maßnahme, kombiniert mit der einfachen Materialfunktion, in manchen Fällen nicht ausreichend, wie am Beispiel einer rautenförmigen Auskerbung mit

$$\Omega_* = \{(x, y) \in \Omega : x + |y - 2| < 1\} \cup \{(x, y) \in \Omega : 4 - x + |y - 2| < 1\} \quad (3.22)$$

bei der Verwendung von linearen Ansatzfunktionen deutlich wird.

Wie in Abb. 3.32 dargestellt, liegen die Schwerpunkte der Dreiecke  $T_{17}$  und  $T_{18}$  genau auf dem Rand der Auskerbung. Die berechneten Schwerpunkte können aber beide durch Rundungsfehler innerhalb der Auskerbung liegen. Folglich werden bei Gebrauch der einfachen Materialfunktion die Materialparameter in beiden Dreiecken Null gesetzt. Dadurch bleibt die Initialisierung am Knoten  $P$  erhalten, und durch Nullsetzen der Initialisierungsreste in der Grobgittermatrix entstehen an den zugehörigen Freiheitsgraden Nullspalten sowie -zeilen. Dadurch ist die Lösung am Knoten  $P$  jedoch für beide Freiheitsgrade Null, da die zugehörigen Einträge der rechten Seite beim Rückwärts- bzw. Vorwärtseinsetzen einfach mit Null multipliziert werden (die Diagonale ist ja bereits invertiert gespeichert). An Knoten auf  $[QP]$  werden hingegen vernünftige Verschiebungen berechnet, so daß sich mit zunehmender Verfeinerung entlang dieser Kante der Verlauf der Verschiebung immer mehr einem Sprung annähert. So entsteht eine starke Verfeinerung um den Punkt  $P$  (vgl. Abb. 3.33).

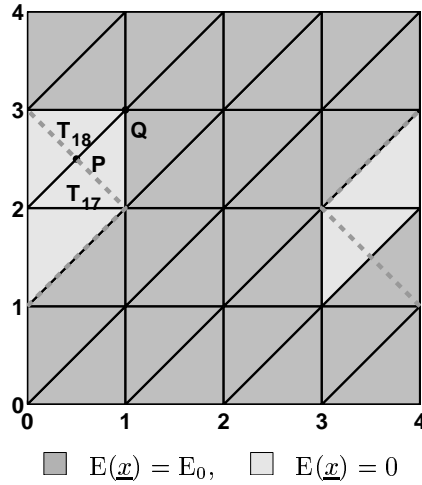


Abb. 3.32: Material bei rautenförmiger Auskerbung (3.22) im 0. Verfeinerungsschritt mit Materialfunktion  $m_1$ ,  $\Delta \lg$

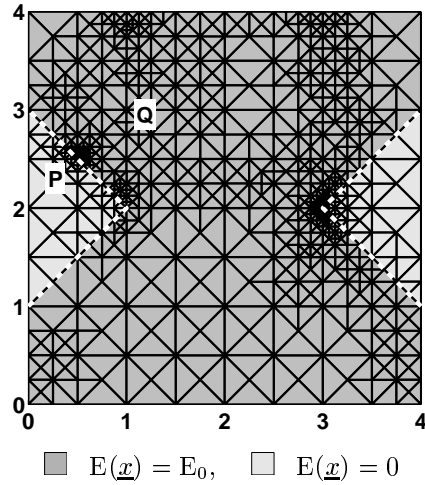


Abb. 3.33: Material bei rautenförmiger Auskerbung (3.22) im 5. Verfeinerungsschritt mit Materialfunktion  $m_1$ ,  $\Delta \lg$

Um dieses Problem zu vermeiden, muß also auch hier im 0. Verfeinerungsschritt eine gewichtete Materialfunktion verwendet werden. Da mit den Materialfunktionen  $m_{2,k}$  oder  $m_{2,nk}$  der Grobgitterlöser bereits ohne Nullsetzen der Initialisierungsreste eingesetzt werden könnte, wird hier eine Mittelung über innere Punkte, wie zum Beispiel über die Gaußpunkte, verwendet, d. h. man wählt

$$m_4 : \underline{x} \mapsto E(\underline{x}) = \begin{cases} \frac{n_g(T) - n_{g,ps}(T)}{n_g(T)} E_0 & \text{für } \underline{x} \in T \quad \text{im 0. Schritt} \\ \chi_{\Omega_0}(\underline{x}_s) E_0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (3.23)$$

wobei  $n_g(T)$  die Anzahl der Gauß-Punkte des Elements  $T$  und  $n_{g,ps}(T)$  die Anzahl der Gauß-Punkte bezeichnet, die in  $\Omega_*$  liegen.

### Numerische Ergebnisse

In den Abbildungen 3.34 – 3.37 sind die Iterationszahlen der verschiedenen Möglichkeiten, die das Initialisierungsproblem bei der Grobgittermatrix lösen, für das quadratische im Grobnetz repräsentierte Loch (3.6), das kreisförmige Loch (3.12), die rautenförmige Auskerbung (3.22) sowie für den einfachen Schlitz mit

$$\Omega_* = \{(x, y) \in \Omega : (x - 2)^2 + (y - 2)^2 < 0.25^2\} \cup \{(x, y) \in \Omega : x > 2, 1.75 < y < 2.25\} \quad (3.24)$$

dargestellt.

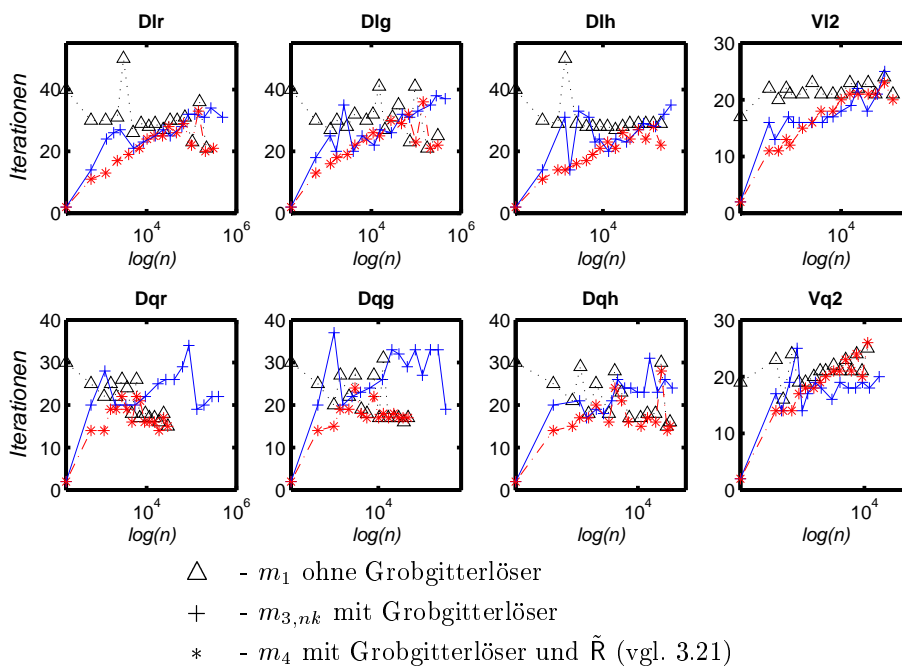


Abb. 3.34: Iterationszahlen des Deformationsproblems mit quadratischem Loch (3.6) mit bzw. ohne Grobgitterlöser

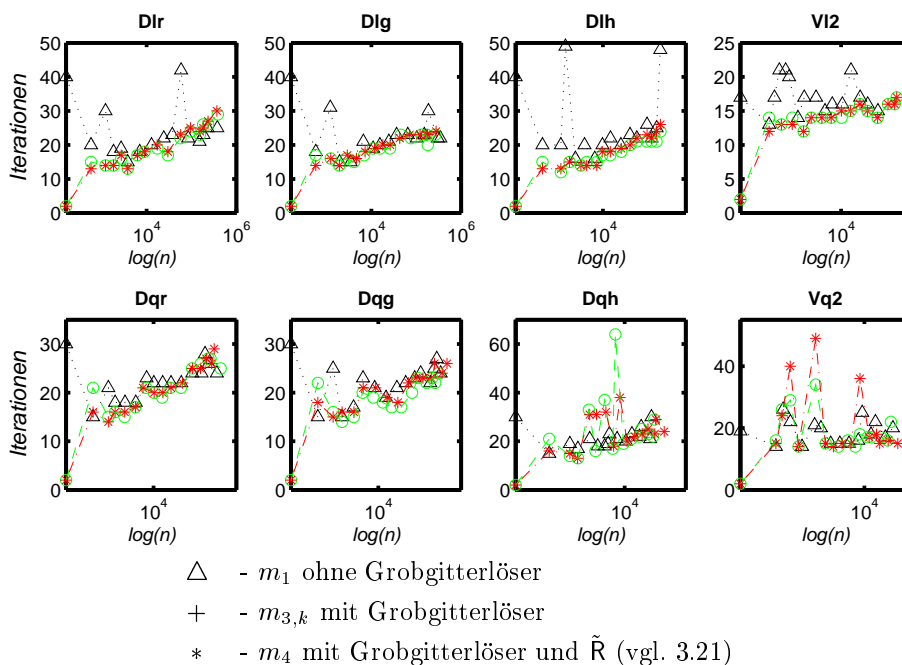


Abb. 3.35: Iterationszahlen des Deformationsproblems mit kreisförmigem Loch (3.12) mit bzw. ohne Grobgitterlöser

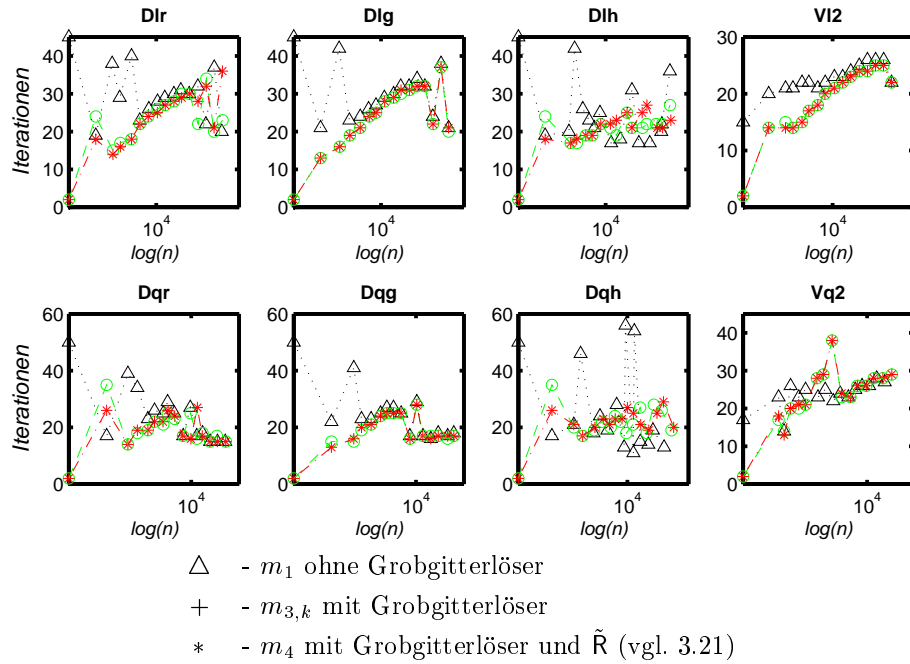


Abb. 3.36: Iterationszahlen des Deformationsproblems mit rautenförmiger Auskerbung (3.22) mit bzw. ohne Grobgitterlöser

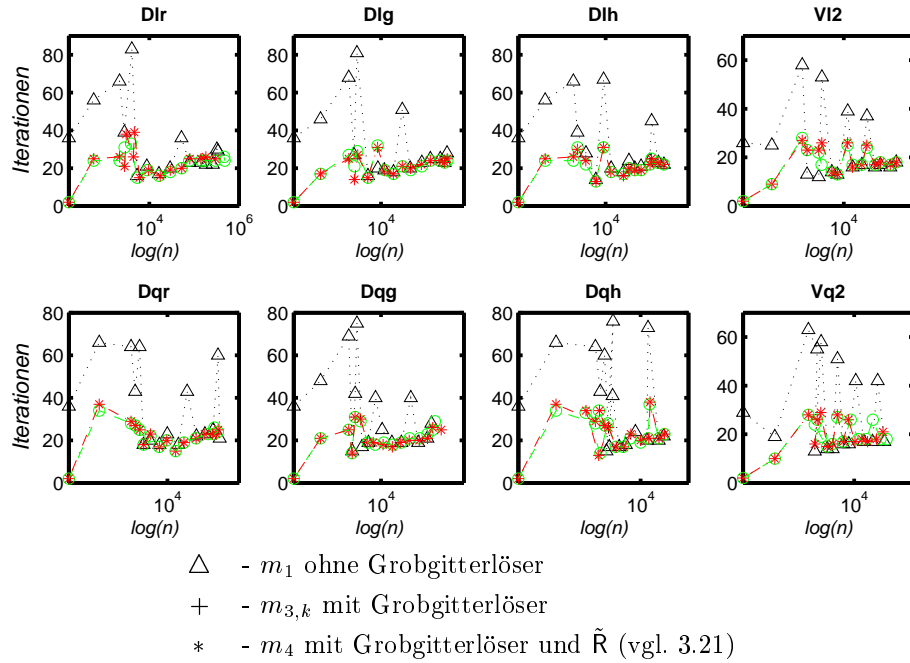


Abb. 3.37: Iterationszahlen des Deformationsproblems mit einfachen Schlitz (3.24) mit bzw. ohne Grobgitterlöser



Im wesentlichen besteht kaum ein Unterschied zwischen den einzelnen Verfahren. Für den Spezialfall des quadratischen Loches, das im Grobnetz repräsentiert ist, zeigen sich deutliche Abweichungen bei Verwendung der gemischten Materialfunktion. Außerdem treten bei Verwendung der einfachen Materialfunktion immer wieder Sprünge in den Iterationszahlen auf.

### Ergebnisse

Prinzipiell ist der Einsatz des Grobitterlösers durch die Verwendung einer gemischten Materialfunktion möglich, wobei eventuell die Initialisierungsreste der Grobittermatrix Null gesetzt werden müssen.

Nach einer gewissen Anzahl von Verfeinerungsschritten nähern sich die Iterationszahlen für die Varianten mit und ohne Grobitterlöser an. Dies läßt sich wie folgt erklären:

Durch die Approximation des Loches oder der Auskerbung im 0. Verfeinerungsschritt erhält man keine exakte Lösung, sondern nur eine Approximation der niederfrequenten Anteile der Lösung. Diese Approximation ist während der ersten Iterationsschritte, bei denen die PCG-Zeiten im Millisekundenbereich liegen, gut, und die Iterationszahlen sind niedriger als beim Verzicht auf den Grobitterlöser.

Nach vielen Verfeinerungsschritten ist die Startlösung für das PCG-Verfahren schon sehr gut und nur noch wenige hochfrequente Anteile der Lösung sind falsch. Dadurch erhalten wir auch ohne Grobitterlöser eine schnelle Konvergenz. Dagegen liefert der Grobitterlöser, gemessen an den jetzigen Materialkenntnissen, eine schlechte Approximation der Lösung.

Es zeigt sich jedoch bei komplizierteren Geometrien, auf die in Kapitel 3.5 noch genauer eingegangen wird, daß die Verwendung des Grobitterlösers eine stabilisierende Wirkung hat und Sprünge in den Iterationszahlen vermieden werden.

Folglich verzichtet man im Normalfall auf den Grobitterlöser und verwendet die einfache Materialfunktion. Mit dieser können außerdem nichtkonvexe Löcher und Auskerbungen berechnet werden, ohne daß man sich um die Initialisierungsreste der Grobittermatrix kümmern muß.

Für die Berechnung komplizierterer Geometrien ist der Einsatz einer gemischten Materialfunktion mit Grobitterlöser vorteilhaft. Da im 0. Verfeinerungsschritt die Methode des Nullsetzens der Initialisierungsreste aufgrund der Berechnung der Welt-Gaußpunkte viel aufwendiger ist als eine Mittelung über die Knotenpunkte des Elements, wird die gemischte Materialfunktion  $m_3$  verwendet.

### 3.3.5 Ein Fehlversuch: Materialübergänge innerhalb von Finiten Elementen

Bisher wurde der Übergang zum Pseudomaterial elementweise approximiert. Bei der einfachen Materialfunktion entsteht ein harter Übergang zwischen normalem und Pseudomaterial, dessen Verlauf von der Lage der Schwerpunkte der Finiten Elemente abhängig ist und somit mehr oder minder zufällig ist. Bei einer gewichteten Materialfunktion entsteht durch die nachträgliche Modifikation der Elementsteifigkeitsmatrizen zusätzlicher Rechenaufwand.

Wenn man statt dessen bei der Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrizen an jedem Gaußpunkt bzw. jedem Seitenmittelpunkt des Weltelements überprüft, ob dieser in  $\Omega_*$  liegt oder nicht, und die entsprechenden Summanden beim Aufbau der Elementsteifigkeitsmatrix (vgl. Gl. (2.13)) berücksichtigt bzw. vernachlässigt, so erhält man einen gewichteten Übergang zwischen Material und Pseudomaterial, der die vorhandenen Kenntnisse des Materialübergangs optimal nutzt.

Für die einzelnen Schritte des adaptiven FE-Verfahrens bedeutet dies folgendes:

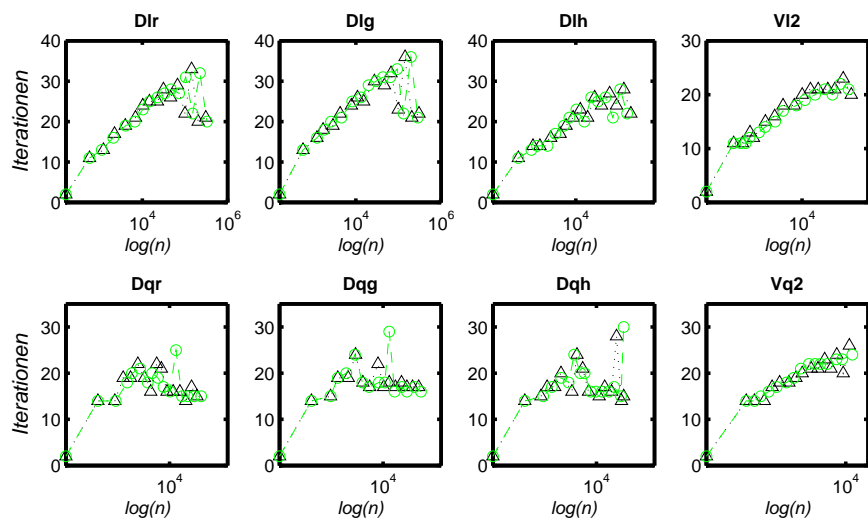
- Assemblierung: liegt der Weltpunkt eines Gaußpunktes in  $\Omega_*$ , so wird die Berechnung des entsprechenden Summanden der Elementsteifigkeitsmatrix in Gl. (2.13) übersprungen.
- Kantenfehlerschätzer: liegt der Weltpunkt des Kantenmittelpunktes in  $\Omega_*$ , wird die Berechnung von  $\sigma * n$  übersprungen.
- Elementfehlerschätzer: hier werden gemittelte Materialparameter ähnlich der gewichteten Materialfunktion verwendet:

$$E(\underline{x}) = \frac{n_g(T) - n_{g,ps}(T)}{n_g(T)} E_0 \text{ für } \underline{x} \in T,$$

wobei  $n_{g,ps}(T)$  die Anzahl der Gaußpunkte bezeichnet, die in  $\Omega_*$  liegen.

#### Quadratisches, im Grobnetz repräsentiertes Loch

Für das Beispiel eines im Grobnetz repräsentierten quadratischen Loches (3.6) erhalten wir kein gleiches Laufzeitverhalten, weil der Kantenfehlerschätzer entlang  $\Gamma_*$  unterschiedliche Werte liefert. Die Iterationszahlen bei einer nichtkonformen Abfrage für die Weltgaußpunkte, also der Abfrage, ob die Punkte in  $\bar{\Omega}_*$  liegen, sind aber im wesentlichen mit jener der einfachen Materialfunktion zu vergleichen (siehe Abb. 3.38).



$\triangle$  -  $m_1$  mit Grobgitterlöser       $\circ$  - Materialfunktion über Gaußpunkte

Abb. 3.38: Iterationszahlen des Deformationsproblems mit quadratischem Loch (3.6), Materialfunktion über Gaußpunkte mit Grobgitterlöser

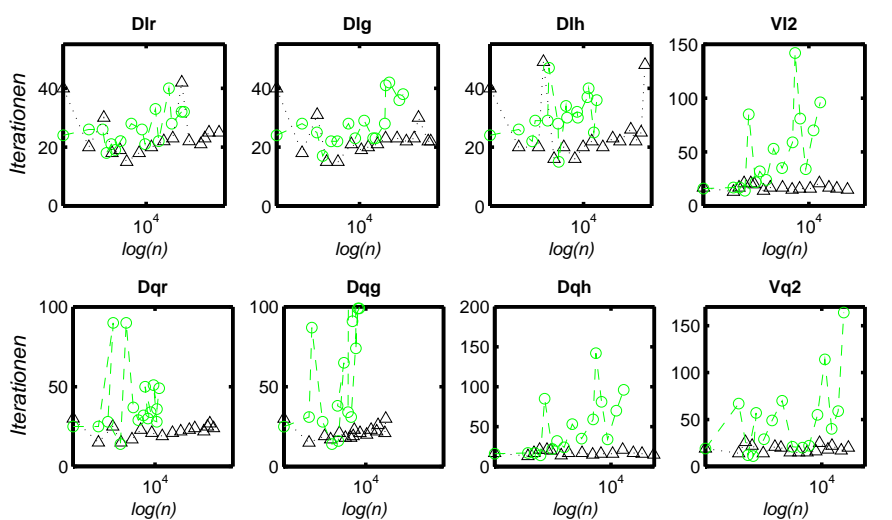
**Bemerkung 14** *Es darf keinesfalls eine konforme Abfrage (d. h. Punkte auf  $\Gamma_*$  zählen zum Gebiet mit normalem Material) für die Weltgaußpunkte verwendet werden, weil dadurch immer große Sprünge an den Kanten, die auf  $\Gamma_*$  liegen, berechnet würden. Außerdem könnte ein Pseudoelement mit einem verschwindenden Elementfehler einen Beitrag zum Kantenfehler liefern, worin eine gewisse Inkonsistenz läge.*

### Kreisförmiges Loch

Da auch hier Probleme mit der Initialisierung der Grobgittermatrix auftreten können, deaktivieren wir den Grobgitterlöser und verwenden die einfache Materialfunktion.

Außer bei Dreieckselementen mit linearen Ansatzfunktionen und rot-grüner bzw. Bänsch-grüner Verfeinerung kommt es zu großen Sprüngen bei den Iterationszahlen sowie zu häufigen Vergrößerungen (vgl. Abb. 3.39).

Obwohl die relativen Approximationsfehler in Tab. 3.7 verglichen mit den Ergebnissen aus Kapitel 3.4 (vgl. Tab. 3.11) – gemessen an den deutlich geringeren Verfeinerungen – akzeptabel sind, liegt der relative geschätzte Fehler bezüglich der Energienorm nach 15 Verfeinerungsschritten  $\eta^{(15)}$  bei quadratischen Elementen nahe oder sogar über dem geschätzten Anfangsfehler  $\eta^{(0)}$ .



$\triangle$  -  $m_1$  mit Grobgitterlöser       $\circ$  - Materialfunktion über Gaußpunkte

Abb. 3.39: Iterationszahlen des Deformationsproblems mit kreisförmigem Loch (3.12), Materialfunktion über Gaußpunkte ohne Grobgitterlöser

	$\bar{u}_x(3, 2)$	$\bar{u}_x(4, 2)$	$\eta^{(0)}$	$\eta^{(15)}$
$\triangle lr$	0.03 %	0.14 %	3.4E+01	1.5E-01
$\triangle lg$	0.03 %	0.08 %	3.4E+01	6.3E-02
$\triangle lh$	0.30 %	0.26 %	3.4E+01	5.4E-01
$\triangle qr$	0.09 %	0.48 %	2.3E+00	6.3E+01
$\triangle qg$	0.01 %	0.13 %	2.3E+00	1.8E+01
$\triangle qh$	1.03 %	0.46 %	2.3E+00	4.0E+01
$\square l2$	0.01 %	0.15 %	2.5E+01	1.9E-01
$\square q2$	0.43 %	0.16 %	1.7E+00	1.9E+01

Tab. 3.7: Approximationsfehler des Deformationsproblems mit kreisförmigem Loch (3.12), Materialfunktion über Gaußpunkte nach 15 Verfeinerungsschritten

Um die Ursachen zu verstehen, betrachten wir Viereckselemente mit quadratischen Ansatzfunktionen, da dort die meisten Probleme auftreten. Die Verfeinerungen konzentrieren sich auf die Punkte  $(1, 2)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(2, 3)$  und  $(3, 2)$ , und der maximale geschätzte Elementfehler sowie der maximale geschätzte Kantenfehler steigen im 1. Verfeinerungsschritt um vier Größenordnungen an. Der Anstieg des maximalen geschätzten Kantenfehlers wird durch die Kantensprünge zu den Mittelknoten  $(1, 1.75)$ ,  $(1, 2.25)$ ,  $(3, 1.75)$  und  $(3, 2.25)$  verursacht. Bei quadratischen Elementen sind die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial u}{\partial x_1}$  und  $\frac{\partial u}{\partial x_2}$  sehr groß, wenn, wie dort, einige der Eckknoten des Finiten Elements in  $\Omega_0$  und einige in  $\Omega_*$  liegen. Dies verursacht zudem Verfeinerungen von Elementen, die gar nicht am Materialübergang liegen.

Es empfiehlt sich also nicht, das Material für den Kantenfehlerschätzer unabhängig vom Material des Finiten Elements zu wählen. Aber auch eine „Verbesserung“ der Idee, indem man bei der Berechnung des geschätzten Kantenfehlers statt der Überprüfung der Gaußpunkte – analog zur Berechnung des geschätzten Elementfehlers – eine gewichtete Materialfunktion verwendet, hat keine positiven Auswirkungen auf die Iterationszahlen. Für Viereckselemente mit quadratischen Ansatzfunktionen tritt immer noch ein Sprung vom 0. zum 1. Verfeinerungsschritt von zwei Größenordnungen beim maximalen geschätzten Kantenfehler und von drei Größenordnungen beim maximalen geschätzten Elementfehler auf. Im Verlauf der Rechnung kommt es aufgrund von Abweichungen bei der Berechnung der Kantenfehler zu unsymmetrischen Verfeinerungen. Schließlich steigt der geschätzte Fehler bezüglich der Energienorm im 15. Verfeinerungsschritt während der Minimierung des CG-Residuums an.

Kombiniert man umgekehrt die gewichtete Materialfunktion zur Generierung der Elementsteifigkeitsmatrizen mit den ursprünglichen Ideen für den Kanten- (Abfrage der Weltgaußpunkte) sowie Elementfehlerschätzer (gewichtetes Material), so hat dies nur beim Auftreten von hängenden Knoten negative Konsequenzen, die sich aber in Grenzen halten.

Die Ursache für die Probleme liegen also vorwiegend in den Veränderungen der Elementsteifigkeitsmatrizen. Eine teilweise Assemblierung der Elementsteifigkeitsmatrix je nach Lage der Weltgaußpunkte ist also nicht sinnvoll.

### 3.4 Verifikation bei nicht im Grobnetz repräsentierten Löchern und Auskerbungen

Bisher wurde die Korrektheit der berechneten Ergebnisse bei Verwendung von Materialfunktionen nur bei Löchern und Auskerbungen überprüft, die im Grobnetz repräsentiert waren. Für den allgemeinen Fall soll dies nun nachgeholt werden.

Dazu wird neben einem mittelgroßen quadratischen Loch mit

$$\Omega_* = \{(x, y) \in \Omega : 1.25 < x < 2.75, 1.25 < y < 2.75\}, \quad (3.25)$$

das kreisförmige Loch (3.12) und die große rautenförmige Auskerbung (3.19) betrachtet. Die verwendeten Ausgangsnetze sind in den Abbildungen 3.40 – 3.42 dargestellt, die entsprechenden Verschiebungen an den Referenzpunkten finden sich in den Tabellen 3.8 – 3.10.

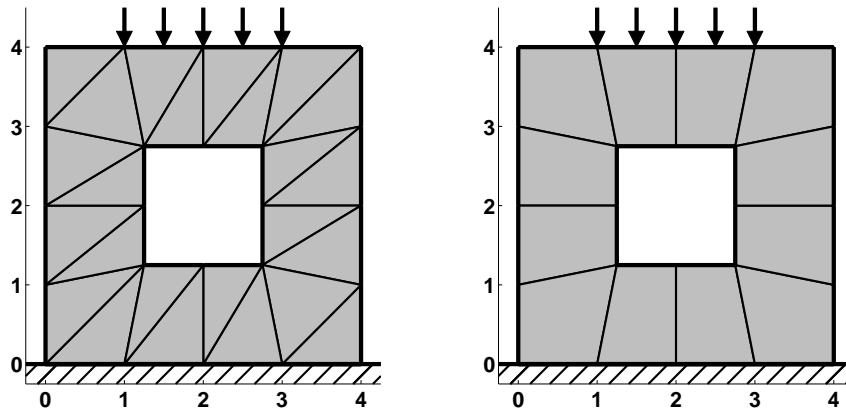


Abb. 3.40: Deformationsproblem mit mittelgroßem quadratischem Loch (3.25), vernetzte Geometrie

	k	2·#kn	$u_y(2.75, 2) \cdot 10^6$	$u_y(4, 2) \cdot 10^6$	$\eta^{(0)}$	$\eta^{(k)}$
$\Delta_{lr}$	16	457582	-7.03680849	-6.77267790	1.1E+01	9.7E-03
$\Delta_{lg}$	17	475502	-7.03684568	-6.77272511	1.1E+01	5.2E-03
$\Delta_{lh}$	17	413686	-7.03683424	-6.77246284	1.1E+01	1.2E-02
$\Delta_{qr}$	21	140168	-7.03715706	-6.77310371	3.9E-01	2.9E-06
$\Delta_{qg}$	22	204770	-7.03717375	-6.77307320	3.9E-01	1.7E-06
$\Delta_{qh}$	26	157160	-7.03718281	-6.77307415	3.9E-01	2.5E-06
$\square_{l2.5}$	18	337020	-7.03714228	-6.77298975	1.4E+00	1.5E-03
$\square_{q2.5}$	20	38564	-7.03716373	-6.77309990	2.0E-01	5.1E-06

Tab. 3.8: Verschiebungen des Deformationsproblems mit mittelgroßem quadratischem Loch (3.25) bei vernetzter Geometrie nach  $k$  Verfeinerungsschritten

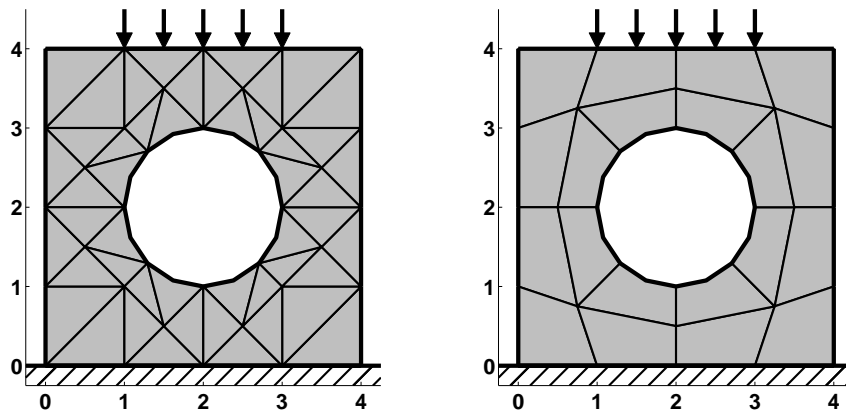


Abb. 3.41: Deformationsproblem mit kreisförmigen Loch (3.12), vernetzte Geometrie

	k	2·#kn	$u_x(3,2) \cdot 10^6$	$u_x(4,2) \cdot 10^6$	$\eta^{(0)}$	$\eta^{(k)}$
$\Delta_{lr}$	14	614548	9.78419590	11.07902813	5.4E+00	8.1E-03
$\Delta_{lg}$	15	354760	9.78321266	11.07842159	5.4E+00	7.0E-03
$\Delta_{lh}$	16	410090	9.78365803	11.07951164	5.4E+00	6.7E-03
$\Delta_{qr}$	19	533072	9.78543377	11.08024406	3.2E-01	1.4E-07
$\Delta_{qg}$	18	430552	<i>9.78543282</i>	<i>11.08024693</i>	3.2E-01	1.9E-07
$\Delta_{qh}$	24	234100	9.78543186	11.08024693	3.2E-01	3.3E-07
$\square_{l2.5}$	18	437600	9.78474617	11.07974052	1.9E+00	1.7E-03
$\square_{q2.5}$	25	116860	9.78542995	11.08024597	4.0E-01	2.7E-07

Tab. 3.9: Verschiebungen des Deformationsproblems mit kreisförmigen Loch (3.12) bei vernetzter Geometrie nach  $k$  Verfeinerungsschritten

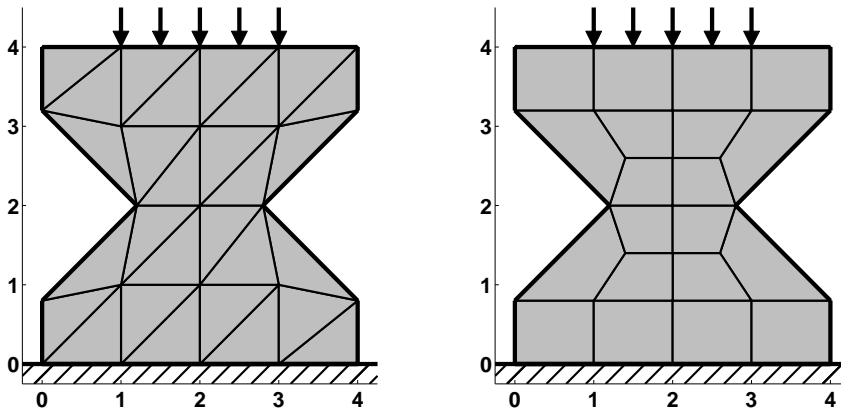


Abb. 3.42: Deformationsproblem mit großer rautenförmiger Auskerbung (3.19), vernetzte Geometrie

	k	2·#kn	$u_y(2,4) \cdot 10^6$	$\eta^{(0)}$	$\eta^{(k)}$
$\Delta_{lr}$	17	470382	-16.56458855	3.1E+00	4.0E-03
$\Delta_{lg}$	17	453426	-16.56464386	3.1E+00	2.4E-03
$\Delta_{lh}$	18	370532	-16.56403351	3.1E+00	7.9E-03
$\Delta_{qr}$	22	198816	-16.56500435	2.3E-01	8.7E-07
$\Delta_{qg}$	22	210276	<i>-16.56500435</i>	2.3E-01	7.7E-07
$\Delta_{qh}$	26	153028	-16.56500435	2.3E-01	1.8E-06
$\square_{l2.5}$	19	306946	-16.56484413	1.8E+00	9.8E-04
$\square_{q2.5}$	20	44140	-16.56501961	2.6E-01	3.0E-06

Tab. 3.10: Verschiebungen des Deformationsproblems mit rautenförmiger Auskerbung (3.19) bei vernetzter Geometrie nach  $k$  Verfeinerungsschritten

In Tab. 3.11 sind die relativen prozentualen Abweichungen bei der Berechnung der obigen Beispiele mit gewichteten konformen Materialfunktion und Grobgitterlöser angegeben.

	mittelgroßes, quadratisches Loch		kreisförmiges Loch		große, rautenförmige Auskerbung
	$\bar{u}_y(2.75, 2)$	$\bar{u}_y(4, 2)$	$\bar{u}_x(3, 2)$	$\bar{u}_x(4, 2)$	$\bar{u}_y(2, 4)$
$\Delta_{lr}$	0.03 %	< 0.01 %	0.02 %	0.04 %	0.01 %
$\Delta_{lg}$	0.01 %	< 0.01 %	0.02 %	0.06 %	< 0.01 %
$\Delta_{lh}$	0.01 %	0.01 %	0.05 %	0.13 %	0.01 %
$\Delta_{qr}$	0.01 %	< 0.01 %	0.05 %	0.08 %	0.01 %
$\Delta_{qg}$	< 0.01 %	< 0.01 %	0.05 %	0.08 %	0.01 %
$\Delta_{qh}$	< 0.01 %	< 0.01 %	0.38 %	0.56 %	0.04 %
$\square_{l2}$	0.02 %	0.02 %	0.29 %	0.44 %	0.02 %
$\square_{q2}$	< 0.01 %	< 0.01 %	0.61 %	0.87 %	0.04 %

Tab. 3.11: Approximationsfehler der Deformationsprobleme für das mittelgroße quadratische Loch (3.25), das kreisförmige Loch (3.12) und die große rautenförmige Auskerbung (3.19), Materialfunktion  $m_{3,k}$  nach 15 Verfeinerungsschritten

Nach 15 Verfeinerungsschritten betragen alle betrachteten relativen Approximationsfehler weniger als ein Prozent.

Stellt man die Abweichungen zu den wirklichen Verschiebungen in x- und y-Richtung an den Referenzpunkten in Abhängigkeit von der Anzahl der Verfeinerungsschritte graphisch dar (siehe Abb. 3.43 für das kreisförmige Loch am Punkt (3,2)), so zeigt sich ein abklingendes Verhalten, welches jedoch nicht monoton ist.

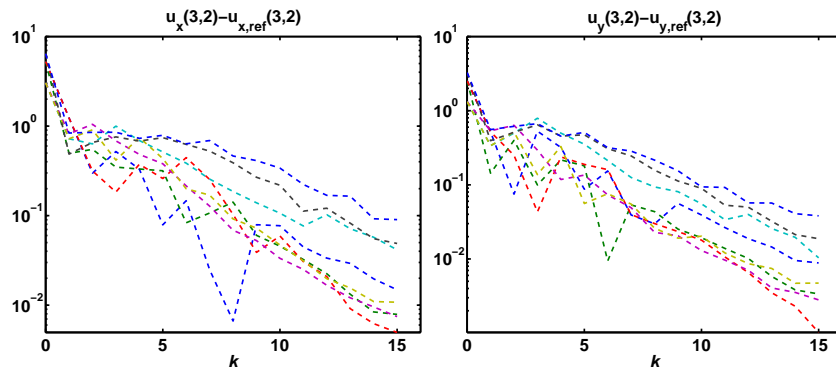


Abb. 3.43: Entwicklung des absoluten Fehlers bei Deformationsproblem mit kreisförmigem Loch (3.12)



Somit ist die Korrektheit der berechneten Verschiebungen bei der Verwendung von Materialfunktionen auch für Löcher und Auskerbungen, die nicht im Grobnetz liegen, verifiziert.

### 3.5 Komplizierte Geometrien: Schlitz- und nicht-konvexe Gebiete $\Omega_*$

In diesem Abschnitt werden Gebiete  $\Omega_*$  mit komplizierter Geometrie untersucht, die sich im 0. Verfeinerungsschritt bei Verwendung der einfachen Materialfunktion entweder gar nicht mehr oder nur unzureichend darstellen lassen (z. B. wenn die Schwerpunkte aller Finiten Elemente des Grobnetzes außerhalb von  $\Omega_*$  liegen).

#### 3.5.1 Einführung

Bei den bisher betrachteten Gebieten  $\Omega_*$  entstanden bei Verwendung der einfachen Materialfunktion bereits im 0. Verfeinerungsschritt genügend Elemente mit Nullmaterial. Die Geometrie wurde also soweit erkannt, daß das Ersatz-Deformationsproblem über  $\Omega$  bereits eine gute Näherung für das ursprüngliche Deformationsproblem über  $\Omega_0$  ist. Damit arbeitet der Fehlerschätzer in gewünschter Weise und markiert u. a. Elemente am Materialübergang mit großen Spannungen zur Verfeinerung.

Besitzt umgekehrt  $\Omega_*$  Abmessungen, die kleiner als der Durchmesser der Finiten Elemente im Grobnetz sind, so wird die Geometrie nur unzureichend erkannt und die Deformation des berechneten Problems ist völlig anders als jene Deformation, die man bei einer exakten Vernetzung von  $\Omega_*$  erhalten hätte. Dadurch kann an den falschen Stellen verfeinert werden und es besteht sogar die Möglichkeit, daß die adaptive Verfeinerung grundsätzlich gestört wird: durch die Verfeinerung von Elementen und dem Erlernen der Materialgrenze kann es zu so starken Änderungen des Deformationsproblems kommen, daß die eben verfeinerten Elemente wieder vergrößert werden, an einer ganz anderen Stelle verfeinert wird usw.

Folglich muß am Anfang so lange (total) verfeinert werden, bis die Geometrie ungefähr erkannt ist, also eine ausreichende Anzahl von Elementen Nullmaterial besitzt.

**Bemerkung 15** *Streng genommen hätte man bei Verwendung der gewichteten Materialfunktion bei den bisher betrachteten Problemen schon durch eine gezielte Verfeinerung dafür sorgen müssen, daß Elemente mit Nullmaterial entstehen. Hier ist zwar die Approximation des ursprünglichen Deformationsproblems zufriedenstellend, aber die korrekte Arbeitsweise des Fehlerschätzers und eine optimale Steuerung der Netzverfeinerung im 0. Verfeinerungsschritt ist fraglich. Beim kreisförmigen Loch (3.12) existieren zum Beispiel im 0. Verfeinerungsschritt nur Elemente mit normalem Material und Übergangselemente, aber keine Elemente mit Nullmaterial. Am Übergang zwischen zwei Materialien (hart und weich) geht jedoch der Sprung  $\sigma_n$  gegen Null. Folglich werden die Elemente am Materialübergang mit großer Wahrscheinlichkeit nicht verfeinert, sondern andere Elemente.*

*Bisher gab es jedoch mit der Steuerung der Netzverfeinerung keine Probleme, da im 0. Verfeinerungsschritt immer automatisch total verfeinert wurde, wodurch im nächsten Verfeinerungsschritt auch bei Verwendung der gewichteten Materialfunktion Elemente mit Nullmaterial entstanden.*

Am Beispiel eines einfachen Schlitzes (Abb. 3.44) werden zunächst einige grundlegende Überlegungen angestellt, die bei der Berechnung von komplizierten Gebieten  $\Omega_*$ , bei denen erst im Laufe der Zeit Pseudoelemente entstehen, hilfreich sind. Danach werden ein verschobener Schlitz, ein u-förmiges Loch und ein komplizierter Schlitz (Abbildungen im folgenden) betrachtet.

### 3.5.2 Einfacher Schlitz

In Abb. 3.44 sind die Ausgangsvernetzungen für den einfachen Schlitz (3.24) dargestellt, die Referenzwerte finden sich in Tab. 3.12. Im Gegensatz zu den bisherigen Problemen greift nun auf

$$\Gamma_N = \{(4, y) : 3 \leq y \leq 4\} \quad (3.26)$$

eine Kraft  $\vec{f} = (f_1, f_2)^T$  gleicher Größe mit  $f_1 = 0 \frac{\text{N}}{\text{cm}^3}$  und  $f_2 = -0.1 \frac{\text{N}}{\text{cm}^3}$  an.

Bei der Berechnung der Schlitz mit Materialfunktionen werden weiterhin die üblichen Grobnetze (vgl. Abb. 3.8) mit der geänderten Neumann-Randbedingung (3.26) verwendet. Da bereits festgestellt wurde, daß es bei komplexen Geometrien und Verwendung der einfachen Materialfunktion ohne Grobgitterlöser zu Sprüngen in den Iterationszahlen kommen kann (vgl. Abb. 3.37), wird vorwiegend die gemischte Materialfunktion  $m_{3,k}$  mit Grobgitterlöser benutzt. Um die Geometrie des einfachen Schlitzes zu erkennen, wird anfangs zweimal total verfeinert.

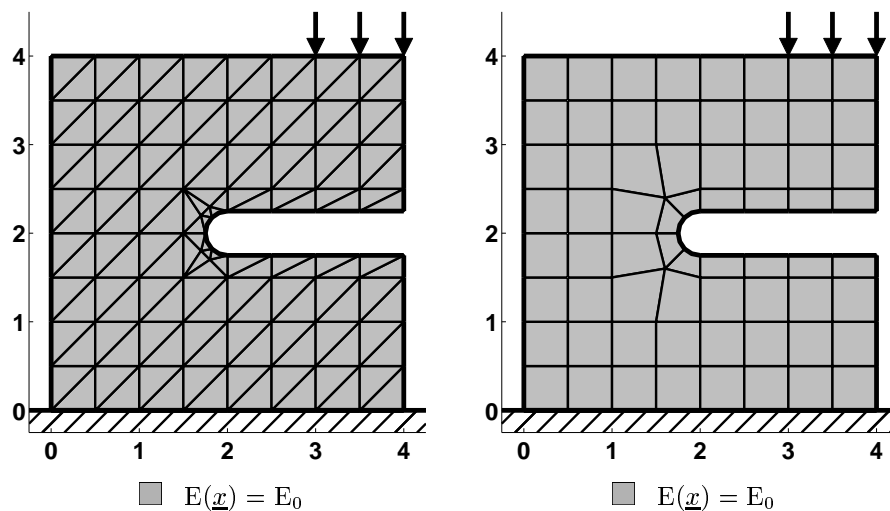


Abb. 3.44: Deformationsproblem mit einfachem Schlitz (3.24), vernetzte Geometrie

	k	2·#kn	$u_y(4, 2.25) \cdot 10^6$	$u_y(4, 4) \cdot 10^6$	$\eta^{(0)}$	$\eta^{(k)}$
$\Delta_{lr}$	15	516374	-206.15052795	-210.38265991	5.5E+00	8.0E-03
$\Delta_{lg}$	16	572312	-206.15496826	-210.38691711	5.5E+00	3.8E-03
$\Delta_{lh}$	16	574976	-206.15435791	-210.38647461	5.5E+00	6.6E-03
$\Delta_{qr}$	18	616566	-206.16720581	-210.39962769	6.1E-02	5.7E-08
$\Delta_{qg}$	16	508136	-206.16720581	-210.39962769	6.1E-02	9.6E-08
$\Delta_{qh}$	39	573448	-206.16720581	-210.39961243	6.1E-02	6.4E-08
$\square_{l2.5}$	16	560626	-206.16387939	-210.39625549	8.8E-01	9.2E-04
$\square_{q2.5}$	29	177792	-206.16720581	-210.39961243	5.1E-02	7.4E-08

Tab. 3.12: Verschiebungen des Deformationsproblems mit einfachem Schlitz (3.24) bei vernetzter Geometrie nach  $k$  Verfeinerungsschritten

### Vergrößerung über den Materialübergang hinweg

Vergrößerungen über den Materialübergang hinweg sind prinzipiell möglich, da Pseudoelemente wegen des verschwindenden geschätzten Elementfehlers (vgl. Gl. (2.20)) immer zum Vergrößern markiert werden und zusätzlich weitere „normale“ Elemente am Übergang zum Pseudomaterial markiert werden können (z. B. falls  $u \approx 0$  ist). Dadurch wird der Rand von  $\Omega_*$  nicht mehr vollständig graphisch dargestellt.

Dies geschieht z. B. beim einfachen Schlitz bei Dreieckselementen mit linearen Ansatzfunktionen und rot-grüner Verfeinerung.

Im 0. und 1. Verfeinerungsschritt wird jeweils total verfeinert, wodurch die Geometrie des einfachen Schlitzes, wie in Abb. 3.45 dargestellt, gut approximiert wird.

Im darauffolgenden Verfeinerungsschritt werden alle Elemente zum Vergrößern markiert, deren Elementfehler unter dem Vergrößerungsschwellwert von  $4.7 \cdot 10^{-9}$  liegt, so auch das Element mit den Eckknoten  $(3.75, 2.25)$ ,  $(4, 2.25)$  und  $(4, 2.5)$ , dessen Elementfehler ca.  $3.4 \cdot 10^{-9}$  beträgt. Der Verfeinerungsschwellwert beträgt zum Vergleich  $2.3 \cdot 10^{-6}$ . Die gesetzten Markierungen sind in Abb. 3.46 dargestellt.

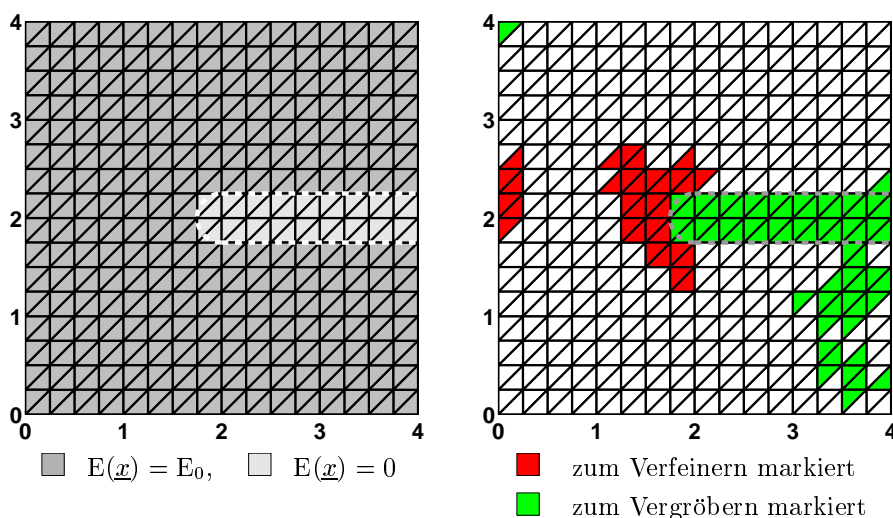


Abb. 3.45: Material des Deformationsproblems mit einfachem Schlitz (3.24) im 2. Verfeinerungsschritt mit Materialfunktion  $m_{3,k}$ ,  $\Delta l$

Abb. 3.46: markierte Elemente des Deformationsproblems mit einfachem Schlitz (3.24) im 2. Verfeinerungsschritt mit Materialfunktion  $m_{3,k}$ ,  $\Delta l$

Durch das Zusammentreffen der zum Vergrößern markierten Elemente um den Punkt  $(4, 2.25)$  wird an dieser Stelle vergrößert, wodurch dort die Geometrie des Schlitzes nicht mehr im Netz repräsentiert ist (Abb. 3.47).

**Vergrößerungen, nach denen die Kontur von  $\Omega_*$  wie in Abb. 3.47 nicht mehr deutlich erkennbar ist, sind *nicht* prinzipiell schlecht.**

Betrachtet man den einfachen Schlitz, so ist die resultierende Verformung im wesentlichen von der Länge und der Lage von  $\Gamma_N$ , der Größe der dort angreifenden Kraft, der Lage des Schlitzes (Abstand zur y-Achse) sowie die Krümmung des Schlitzes abhängig. Die genaue Ausformung des Schlitzes um den Punkt  $(4, 2.25)$  spielt erst eine Rolle, wenn die Verschiebungen sehr exakt berechnet werden sollen.

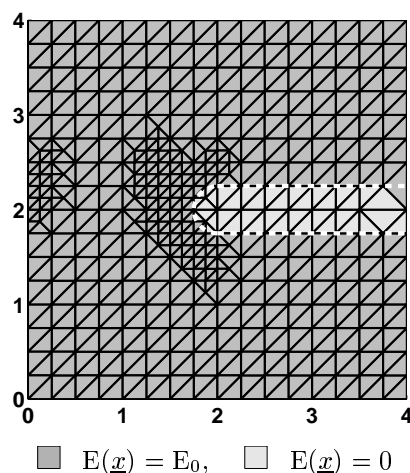


Abb. 3.47: Material des Deformationsproblems mit einfachem Schlitz (3.24) im 3. Verfeinerungsschritt mit Materialfunktion  $m_{3,k}$ ,  $\Delta l_r$

Für das Ersatz-Deformationsproblem über  $\Omega$  bedeutet dies, daß der Materialübergang dort, wo die Krümmung des Schlitzes nachgebildet wird, genau aufgelöst werden muß, da dies die Deformation wesentlich beeinflusst. Der Materialübergang an Stellen wie um den Punkt  $(4, 2.25)$  sind für Berechnungen, bei denen die  $H^1$ -Norm um vier bis fünf Größenordnungen erniedrigt werden soll, unwichtig.

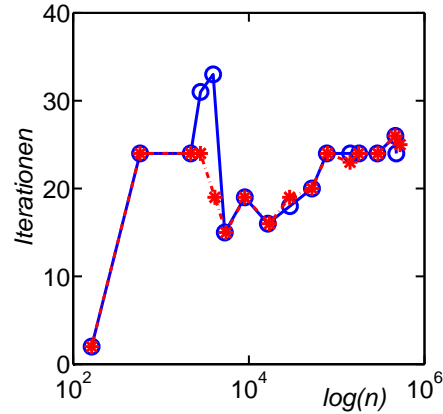
Genau dies wird im Fehlerschätzer gesteuert. Dort, wo der Materialübergang wichtig ist, wird aufgrund von großen Spannungen verfeinert, was zu einer besseren Auflösung des Materialübergangs führt. An Stellen, an denen kleine Änderungen der Geometrie des Bauteils praktisch keine Auswirkungen auf die Deformation haben, ist  $\sigma$  nahe Null, und es wird unabhängig von der Materialverteilung vergrößert.

Ziel ist und bleibt die Approximation des ursprünglichen Deformationsproblems über  $\Omega_0$ , und nicht eine exakte Wiedergabe des Materialübergangs nur der graphischen Darstellung wegen.

Darüber hinaus kann man aus einer Vergrößerung über den Materialübergang hinweg sogar Nutzen ziehen. Man erhält so Informationen über konstruktiv wichtige bzw. unwichtige Stellen des Bauteils. Vergrößerung sind nur dort möglich, wo dies keinen Einfluß auf die Deformation hat, also an konstruktiv unwichtigen Stellen. So ist es zum Beispiel an der Unterseite des Schlitzes zwischen den Punkten  $(3, 1.75)$  und  $(4, 1.75)$  lange Zeit völlig egal, ob das Bauteil einen glatten, gezackten oder gewellten Rand hat.

Diese Argumentation läßt sich sehr gut am Beispiel eines verschobenen Schlitzes nachvollziehen, das auf S. 77 ff. behandelt wird.

Der Nachteil ist, daß solche Vergrößerungen kleinere Sprünge in den Iterationszahlen hervorrufen, wie in Abb. 3.48 dargestellt.



\* - ohne Vergrößerung, o - mit Vergrößerung

Abb. 3.48: Iterationszahlen des Deformationsproblems mit einfachem Schlitz (3.24) mit bzw. ohne Vergrößerung bei zweimaliger totaler Verfeinerung und Materialfunktion  $m_{3,k}$ ,  $\Delta l_r$

### Approximation und Iterationszahlen

In Tab. 3.13 sind die relativen Approximationsfehler für den Schlitz (3.24) angegeben, die wiederum alle deutlich unter einem Prozent liegen.

	$\bar{u}_y(4, 2.25)$	$\bar{u}_y(4, 4)$
$\Delta l_r$	< 0.01 %	< 0.01 %
$\Delta l_b$	< 0.01 %	< 0.01 %
$\Delta l_h$	< 0.01 %	< 0.01 %
$\Delta q_r$	0.01 %	0.01 %
$\Delta q_b$	0.01 %	0.01 %
$\Delta q_h$	0.04 %	0.04 %
$\square l_2$	0.05 %	0.05 %
$\square q_2$	0.11 %	0.11 %

Tab. 3.13: Approximationsfehler des Deformationsproblems mit einfachem Schlitz (3.24) bei gemischter Materialfunktion  $m_{3,k}$  und zweimaliger totaler Verfeinerung nach 15 Verfeinerungsschritten

Jedoch sind die in Abb. 3.49 dargestellten Iterationszahlen verglichen mit jenen des vernetzten Gebiets schlechter.

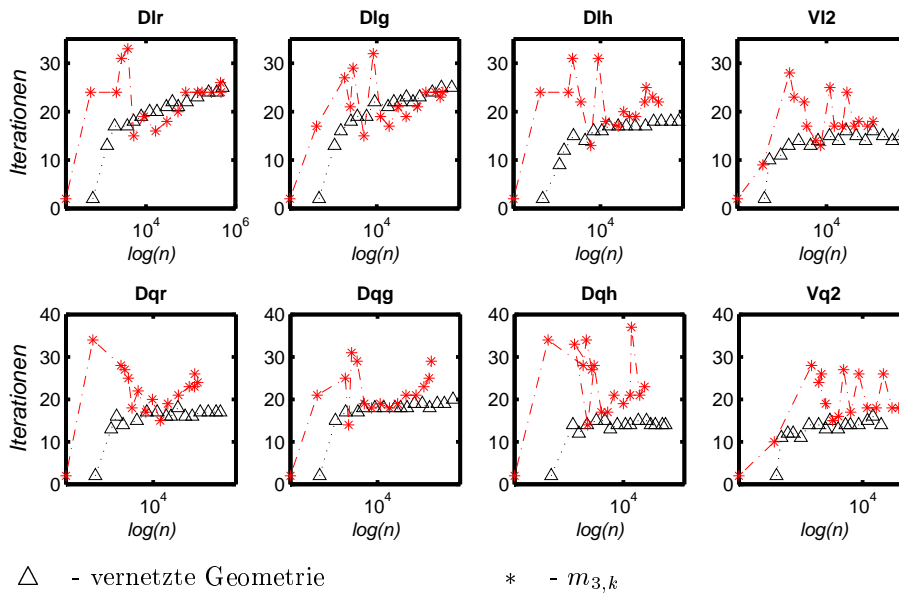


Abb. 3.49: Iterationszahlen des Deformationsproblems mit einfachem Schlitz (3.24) bei totaler Verfeinerung

### Partielle statt totale Verfeinerung

Da der ursprüngliche Verwendungszweck von Materialfunktionen, die Berechnung von Kurbelwellen, ein 3D-Problem ist, ist eine Totalverfeinerung am Anfang zur Geometrieeerkennung nicht möglich.

Als Alternative dazu werden in den ersten Verfeinerungsschritten nur die Elemente am Materialübergang zur Verfeinerung markiert. Der Fehlerschätzer wird während dieser Phase deaktiviert, da dieser, solange die Geometrie noch nicht erkannt ist, von falschen Voraussetzungen ausgeht und somit auch falsche Ergebnisse liefert.

Eine Möglichkeit ist, Elemente, deren Kanten von  $\Gamma_*$  geschnitten werden, zu markieren. Dabei wird folgende Fallunterscheidung gemacht:

- Ist  $E(\underline{x}_s) = 0$  ( $\underline{x}_s$  - Schwerpunkt des Finiten Elements), so wird abgefragt, ob die Eckknoten des Elements in  $\bar{\Omega}_*$  liegen (nichtkonforme Abfrage)
- Ist  $E(\underline{x}_s) \neq 0$ , so wird abgefragt, ob die Eckknoten des Elements in  $\Omega_*$  liegen (konforme Abfrage)

Wenn nicht alle Eckknoten des Elements in  $\Omega_*$  oder  $\Omega_0$  liegen, so wird das entsprechende Element zur Verfeinerung markiert. Die Fallunterscheidung ist

notwendig, damit nicht automatisch in jedem Verfeinerungsschritt am Rand von  $\Omega_*$  verfeinert wird, sondern nur so lange, bis eine Kante des Elements mit  $\Gamma_*$  zusammenfällt.

**Bemerkung 16** Bei einem sehr groben Startnetz kann es jedoch vorkommen, daß alle Eckknoten des Finiten Elements  $T$  in  $\Omega_0$  liegen, aber  $T \cap \Omega_* \neq \emptyset$  ist. In diesem Fall kann man die Elemente markieren, bei denen der Quotient, der sich aus der Zahl der Gaußpunkte, die in  $\Omega_0$  liegen, und der Gesamtzahl der Gaußpunkte berechnet, ungleich Null oder Eins ist.

In Abb. 3.50 sind die Iterationszahlen bei zweimaliger totaler bzw. partieller Verfeinerung dargestellt. Man erkennt deutlich, daß die Anzahl der Freiheitsgrade am Anfang bei partieller Verfeinerung deutlich geringer ist. Dieser Vorteil gleicht sich bei Dreieckselementen sehr spät wieder aus, bei Viereckselementen zeigen sich dauerhaft kleinere Gleichungssystemdimensionen  $n$ . Der relative Approximationsfehler im Punkt (4, 4) ist, im Verhältnis zu  $n$  gesehen, bei partieller Verfeinerung vielfach besser oder zumindest gleich groß. Insgesamt, d. h. beim relativen geschätzten Fehler bezüglich der Energienorm (vgl. Gl. (2.21)), erzielt man bei gleichen Problemgrößen jedoch keine Verbesserungen.

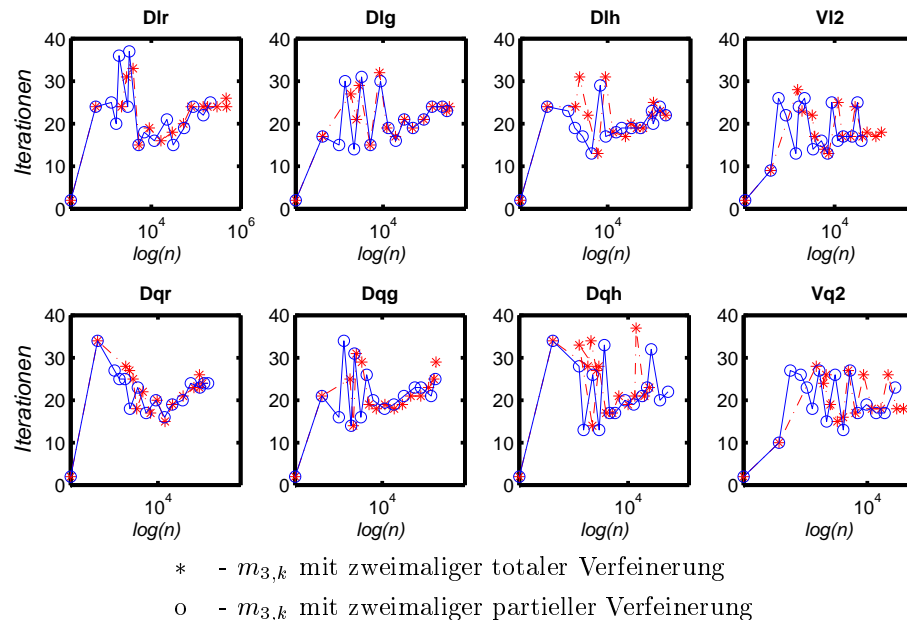


Abb. 3.50: Iterationszahlen des Deformationsproblems mit einfachem Schlitz (3.24) bei totaler bzw. partieller Verfeinerung



## Erkenntnisse

Für die weiteren Berechnungen wird die partielle Verfeinerung zur anfänglichen Geometriekennung genutzt und es werden Vergrößerungen zugelassen, auch wenn diese kleinere Sprünge in den Iterationszahlen bewirken können.

### 3.5.3 Vershobener einfacher Schlitz

An diesem Beispiel soll verdeutlicht werden, daß an konstruktiv wichtigen Stellen des Bauteils, die die Deformation wesentlich beeinflussen, ausreichend verfeinert wird.

Es wird nun ein Schlitz mit

$$\Omega_* = \{(x, y) \in \Omega : (x - 2.05)^2 + (y - 2.05)^2 < 0.25^2\} \cup \{(x, y) \in \Omega : x > 2, 1.8 < y < 2.3\}, \quad (3.27)$$

betrachtet, der im Vergleich zu dem einfachen Schlitz im letzten Kapitel um 0.05 cm in y-Richtung verschoben wurde. Dadurch läßt sich der Rand des verschobenen Schlitzes (3.27) nicht mehr nach endlich vielen Verfeinerungsschritten exakt approximieren.

Es wird untersucht, ob die Verfeinerung bzw. die Darstellung des Materialübergangs auch an Stellen von  $\Gamma_*$ , an denen keine Spannungsspitzen auftreten (hier um den Punkt (4, 3.2)), ausreichend ist und keine Auswirkungen auf die Approximation in Punkten hat, die weit von  $\Omega_*$  entfernt sind.

Dazu werden die relativen Approximationsfehler im Punkt (4, 4) bei zwei- bzw. viermaliger partieller Verfeinerung miteinander verglichen. Es wird die Materialfunktion  $m_{3,k}$  mit Grobgitterlöser verwendet. Die Referenzwerte im Punkt (4, 4) der in Abb. 3.51 dargestellten Vernetzungen sind in Tab. 3.14 angegeben.

Aus Tab. 3.15 ist ersichtlich, daß die Qualität der Lösung unabhängig von einer sehr feinen Vernetzung und folglich einer sehr guten Approximation des Materialübergangs um den Punkt (4, 3.2) ist

### 3.5.4 Nichtkonvexes Loch

Obwohl jetzt auch nichtkonvexe Gebiete  $\Omega_*$  zugelassen werden, sollen die Gebiete lokal konvex bezüglich des Grobnetzes sein, d. h. daß ein Finites Element  $T$  des Grobnetzes bei Verwendung der gewichteten Materialfunktion  $m_{3,nk}$  nur dann Nullmaterialparameter besitzt, wenn  $T \cap \Omega_0 = \emptyset$  ist.

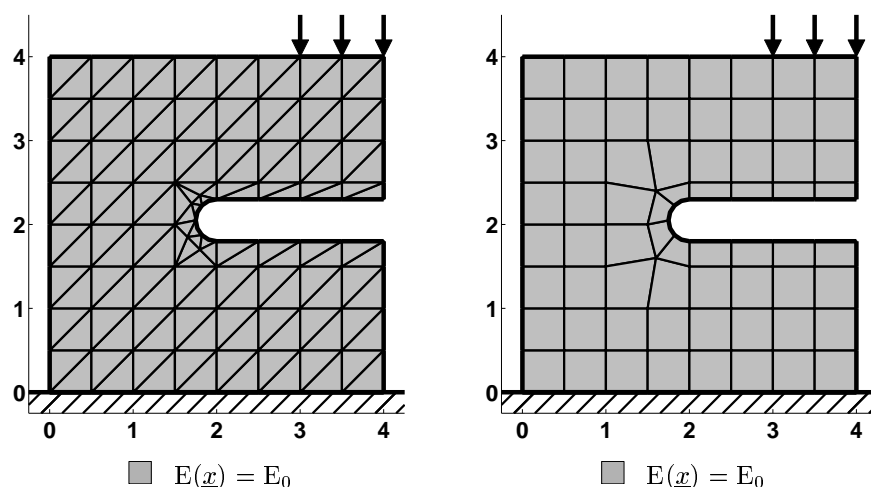


Abb. 3.51: Deformationsproblem mit verschobenem Schlitz (3.27), vernetzte Geometrie

	k	2·#kn	$u_y(4,4) \cdot 10^6$	$u_y(4,4) \cdot 10^6$	$\eta^{(0)}$	$\eta^{(k)}$
$\Delta_{lr}$	12	463268	130.40414429	-214.72776794	5.8E+00	9.4E-03
$\Delta_{lg}$	15	434544	130.40583801	-214.73051453	5.8E+00	4.9E-03
$\Delta_{lh}$	15	421824	130.40419006	-214.72863770	5.8E+00	9.1E-03
$\Delta_{qr}$	16	484150	<i>130.41584778</i>	<i>-214.74731445</i>	6.1E-02	9.2E-08
$\Delta_{qg}$	16	404348	130.41584778	-214.74731445	6.1E-02	1.4E-07
$\Delta_{qh}$	28	282654	130.41586304	-214.74729919	6.1E-02	1.3E-07
$\square_{l2.5}$	16	487476	130.41343689	-214.74339294	9.1E-01	1.0E-03
$\square_{q2.5}$	23	75262	130.41584778	-214.74728394	5.3E-02	2.9E-07

Tab. 3.14: Verschiebungen des Deformationsproblems mit verschobenem Schlitz (3.27) bei vernetzter Geometrie nach  $k$  Verfeinerungsschritten

Es wird ein u-förmiges Loch mit abgerundeten Ecken betrachtet, das durch

$$\begin{aligned}
\Omega_* = & \{(x, y) \in \Omega : (x-1)^2 + (y-1)^2 < 0.25^2\} \cup \\
& \{(x, y) \in \Omega : (x-1)^2 + (y-3)^2 < 0.25^2\} \cup \\
& \{(x, y) \in \Omega : (x-3)^2 + (y-1)^2 < 0.25^2\} \cup \\
& \{(x, y) \in \Omega : (x-3)^2 + (y-3)^2 < 0.25^2\} \cup \\
& \{(x, y) \in \Omega : x \in (0.75, 1.25) \cup (2.75, 3.25), 1 < y < 3\} \cup \quad (3.28) \\
& \{(x, y) \in \Omega : 1 < x < 3, 0.75 < y < 1.5\} \cap \\
& \{(x, y) \in \Omega : (x-1.5)^2 + (y-1.5)^2 < 0.25^2\} \cap \\
& \{(x, y) \in \Omega : (x-2.5)^2 + (y-1.5)^2 < 0.25^2\} \cap \\
& \{(x, y) \in \Omega : 1.5 < x < 2.5, y > 1.25\}.
\end{aligned}$$

beschrieben wird.

	zwei part. Verf.				vier part. Verf.			
	k	2·#kn	$\bar{u}_x(4,4)$	$\bar{u}_y(4,4)$	k	2·#kn	$\bar{u}_x(4,4)$	$\bar{u}_y(4,4)$
$\Delta_{lr}$	15	190472	0.02 %	0.02 %	15	216466	0.01 %	0.02 %
$\Delta_{lg}$	15	197692	0.01 %	0.02 %	14	194048	0.02 %	0.02 %
$\Delta_{lh}$	15	93092	0.04 %	0.07 %	16	93312	0.04 %	0.06 %
$\Delta_{qr}$	15	70874	0.03 %	0.04 %	13	89098	0.03 %	0.03 %
$\Delta_{qg}$	15	89040	0.04 %	0.04 %	13	83984	0.04 %	0.04 %
$\Delta_{qh}$	15	19844	0.22 %	0.29 %	13	20056	0.30 %	0.36 %
$\square_{l2}$	15	37010	0.18 %	0.24 %	14	35076	0.22 %	0.32 %
$\square_{q2}$	15	8904	0.33 %	0.45 %	14	8702	0.31 %	0.43 %

Tab. 3.15: Approximationsfehler des Deformationsproblems mit verschobenem Schlitz (3.27), gemischte Materialfunktion  $m_{3,k}$  mit anfänglicher zwei- bzw. viermaliger partieller Verfeinerung (Kantenschnitt-Algorithmus) nach 15 Verfeinerungsschritten

Die Grobnetze sind in Abb. 3.52 dargestellt, die Referenzwerte sind in Tab. 3.16 angegeben.

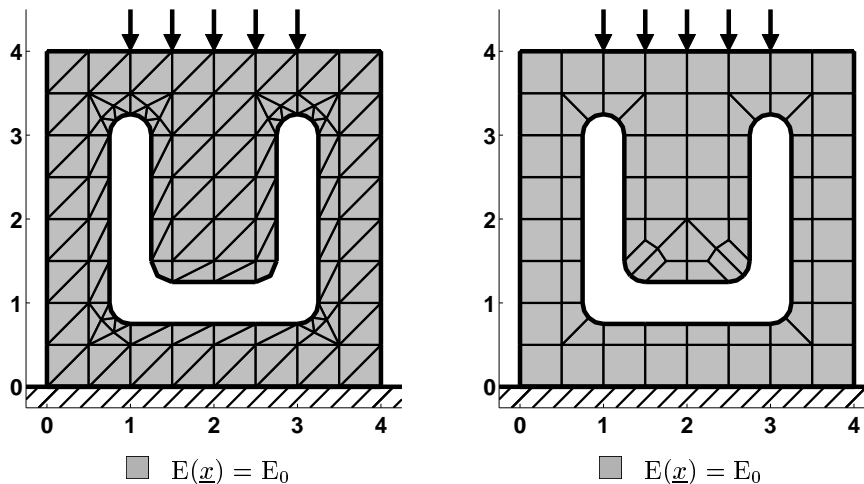


Abb. 3.52: Deformationsproblem mit u-förmigem Loch (3.28), vernetzte Geometrie

	k	2·#kn	$u_y(2, 1.25) \cdot 10^6$	$u_y(2, 4) \cdot 10^6$	$\eta^{(0)}$	$\eta^{(k)}$
$\Delta_{lr}$	15	507896	-60.49787140	-66.04200745	9.4E+00	1.7E-02
$\Delta_{lg}$	16	520934	-60.50053406	-66.04357910	9.4E+00	8.4E-03
$\Delta_{lh}$	15	452718	-60.49803543	-66.04018402	9.4E+00	1.9E-02
$\Delta_{qr}$	18	368582	-60.50925064	-66.05175781	1.2E-01	5.7E-07
$\Delta_{qg}$	16	374320	-60.50926590	-66.05175781	1.2E-01	6.8E-07
$\Delta_{qh}$	24	231388	-60.50926590	-66.05173492	1.2E-01	8.9E-07
$\square_{l2.5}$	18	450152	-60.50666046	-66.04925537	1.3E+00	2.3E-03
$\square_{q2.3}$	21	106804	-60.50926971	-66.05176544	2.0E-01	7.8E-07

Tab. 3.16: Verschiebungen des Deformationsproblems mit u-förmigem Loch (3.28) bei vernetzter Geometrie nach  $k$  Verfeinerungsschritten

Bei Berechnung mit der gemischten konformen Materialfunktion  $m_{3,k}$  liegt der in Tab. 3.17 angegebene relative Approximationsfehler nach 15 Verfeinerungsschritten wiederum deutlich unter einem Prozent.

	2·#kn	$\bar{u}_y(2, 1.25)$	$\bar{u}_y(2, 4)$
$\Delta_{lr}$	322424	< 0.01 %	< 0.01 %
$\Delta_{lb}$	336012	0.01 %	0.01 %
$\Delta_{lh}$	91726	0.06 %	< 0.05 %
$\Delta_{qr}$	172712	0.02 %	0.02 %
$\Delta_{qb}$	120924	0.04 %	0.03 %
$\Delta_{qh}$	21908	0.21 %	0.19 %
$\square_{l2}$	138814	0.09 %	0.08 %
$\square_{q2}$	23318	0.33 %	0.32 %

Tab. 3.17: Approximationsfehler des Deformationsproblems mit u-förmigem Loch (3.28), gemischte Materialfunktion  $m_{3,k}$  mit anfänglicher dreimaliger partieller Verfeinerung (Kantenschnitt-Algorithmus) nach 15 Verfeinerungsschritten

Die in Abb. 3.53 dargestellten Iterationszahlen weisen bei Dreieckselementen mit linearen Ansatzfunktionen und rot-grüner Verfeinerung sowie bei Dreieckselementen, quadratischen Ansatzfunktionen und Bänsch-grüner oder roter Verfeinerung große Sprünge auf. Bei Viereckselementen mit quadratischen Ansatzfunktionen kommt es zu Oszillationen in den Iterationszahlen.

Wie kommt es nun zu den Sprüngen in den Iterationszahlen? Zur Veranschaulichung betrachten wir Dreieckselemente mit quadratischen Ansatzfunktionen und hanging nodes bei anfänglicher dreimaliger partieller Verfeinerung.

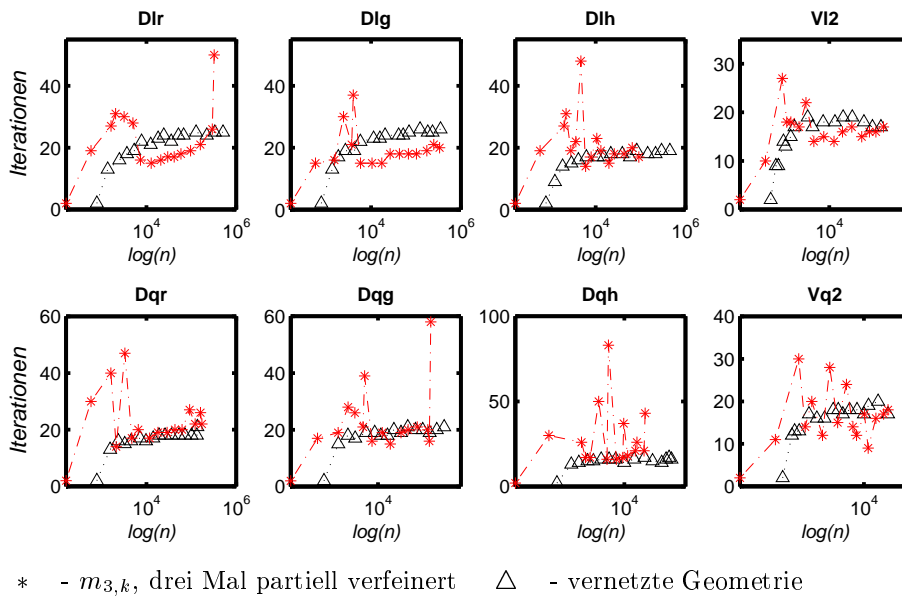


Abb. 3.53: Iterationszahlen des Deformationsproblems mit u-förmigem Loch (3.28) bei vernetzter Geometrie bzw. Materialfunktion

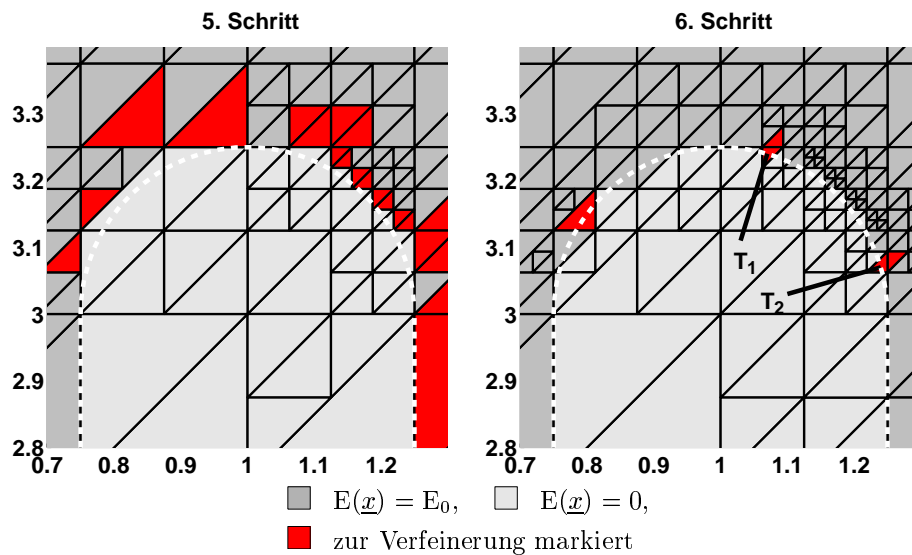


Abb. 3.54: Material und zur Verfeinerung markierte Elemente des Deformationsproblems mit u-förmigem Loch (3.28) im 5. bzw. 6. Verfeinerungsschritt bei drei partiellen Verfeinerungen und Materialfunktion  $m_{3,k}$ ,  $\Delta qh$

Wie in Abb. 3.54 dargestellt, wird im 5. Verfeinerungsschritt entlang des Kreisbogens stark verfeinert, wobei der maximale geschätzte Elementfehler bei  $2.8E-07$  liegt. Dadurch entstehen neue Elemente  $T_1$  und  $T_2$ , die wie Zacken in das u-förmige Loch hineinragen. Deshalb treten dort sehr große Spannungen auf, wodurch der maximale geschätzte Elementfehler im 6. Verfeinerungsschritt auf  $2.3E-06$  ansteigt.

Der Grund für diesen Anstieg des maximalen geschätzten Elementfehlers liegt einzig und allein in der Modellierung des Materialübergangs als gezackte Linie. Dadurch entstehen zusätzlich lokale Singularitäten, die sich nachteilig auf die Iterationszahlen im folgenden Verfeinerungsschritt auswirken: aufgrund des zu hohen maximalen geschätzten Elementfehlers ist die Arbeitsweise des Algorithmus, der den Verfeinerungsschwellwert schrittweise erniedrigt, um so einen Mindestprozentsatz der Elemente zur Verfeinerung zu markieren, unzureichend, und es werden nur sehr wenige (hier neun) Elemente geteilt. Dadurch ist das Startresiduum des PCG im 7. Verfeinerungsschritt schon sehr gut und dies führt zu hohen Iterationszahlen.

Deutet man geringe Verfeinerungen in Kombination mit einem Anstieg des maximalen geschätzten Elementfehlers als Zeichen für das Auftreten einer lokalen Singularität, so besteht ein möglicher Ausweg darin, in diesem Fall solange zusätzliche Elemente zu markieren, bis mindestens ein bestimmter Prozentsatz  $\mu$  der Elemente markiert ist, unabhängig vom Maximalwert. Dadurch besteht natürlich die Gefahr, daß mehr Elemente als nötig markiert werden. Dennoch ist es besser, nicht optimal zu rechnen, als auf die Kombination  $\Delta$ qh wegen Sprüngen in den Iterationszahlen ganz zu verzichten.

**Bemerkung 17** *Besser wäre es natürlich, wenn die geforderte Mindest-Prozentszahl  $\mu$  nicht konstant gewählt wird, sondern bei wachsender Anzahl der Freiheitsgrade kleiner wird.*

In Abb. 3.55 sind die Iterationszahlen bei Dreiecken mit quadratischen Ansatzfunktionen und roter Verfeinerung mit anfänglicher viermaliger partieller Verfeinerung für  $\mu = 0.5\%$ ,  $1\%$ ,  $2\%$  und  $5\%$  dargestellt.

Während bei  $\mu = 0.5\%$  und  $\mu = 1\%$  noch Sprünge in den Iterationszahlen aufgrund von zu geringen Verfeinerungen auftreten, sind bei  $\mu = 2\%$  die Iterationszahlen gut und die Gleichungssystemdimensionen sind etwa so groß wie bei der Vergleichsrechnung mit vernetztem Loch. Bei der Wahl  $\mu = 5\%$  sind die Iterationszahlen weiterhin niedrig, aber wir haben bereits geringfügig stärkere Verfeinerungen.

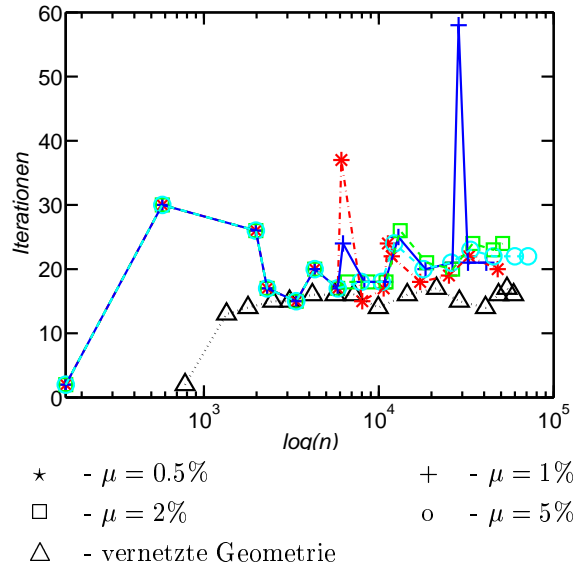


Abb. 3.55: Iterationszahlen des Deformationsproblems mit u-förmigem Loch (3.28) mit Materialfunktion  $m_{3,k}$  und vier partiellen Verfeinerungen bei verschiedenen Mindestprozentsätzen zu markierender Elemente,  $\Delta_{qh}$

Bei diesem Beispiel zeigt sich also, daß ein geforderter Mindest-Prozentsatz zu markierender Elemente von  $\mu = 2$  Prozent helfen würde, Sprünge in den Iterationszahlen vermeiden. Im allgemeinen ist jedoch der geeignete Prozentsatz, bei dem weder Sprünge auftreten, noch zu stark verfeinert wird, schwer zu bestimmen. In einigen Fällen, wie bei dem komplizierten Schlitz, der im nächsten Abschnitt betrachtet wird, hat eine zusätzlichen Verfeinerung keine stabilisierende Wirkung bei den Iterationszahlen.

### 3.5.5 Komplizierter Schlitz

Als letztes wird ein komplizierter Schlitz mit

$$\begin{aligned}
 \Omega_* = & \{(x, y) \in \Omega : (x - 1)^2 + (y - 1)^2 < 0.25^2\} \cup \\
 & \{(x, y) \in \Omega : (x - 1)^2 + (y - 2.5)^2 < 0.25^2\} \cup \\
 & \{(x, y) \in \Omega : (x - 1)^2 + (y - 3)^2 < 0.25^2\} \cup \\
 & \{(x, y) \in \Omega : x > 1, 0.75 < y < 1.25\} \cup \\
 & \{(x, y) \in \Omega : 2.5 < x < 3, 1 < y < 3.25\} \cup \\
 & \{(x, y) \in \Omega : 0.75 < x < 1.5, 2.5 < y < 3\} \cup \\
 & \{(x, y) \in \Omega : (x - 1.5)^2 + (y - 1.5)^2 < 0.25^2\} \cap \\
 & \{(x, y) \in \Omega : (x - 1.5)^2 + (y - 2.5)^2 \leq 0.25^2\}
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

betrachtet, der zugleich die Grenzen des Verfahrens aufzeigt.

Die Grobnetze sind in Abb. 3.56 dargestellt, die Referenzwerte sind in Tab. 3.18 angegeben.

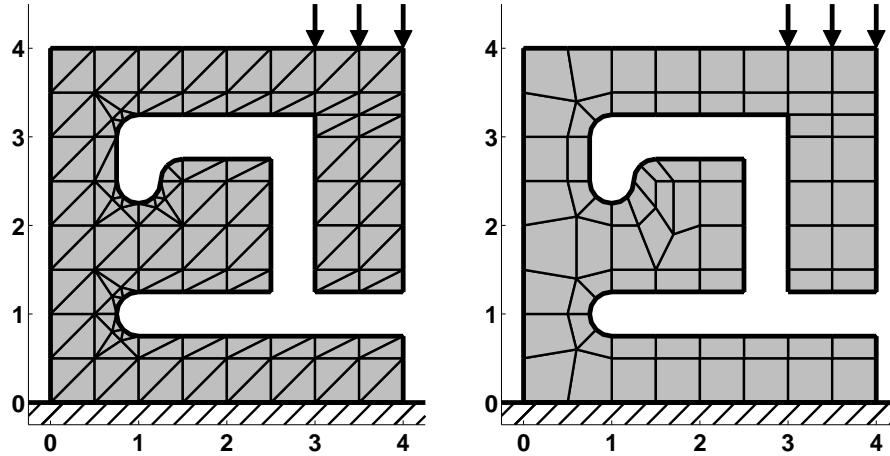


Abb. 3.56: Deformationsproblem mit kompliziertem Schlitz (3.29), vernetzte Geometrie

	k	2·#kn	$u_y(3, 1.25) \cdot 10^6$	$u_y(4, 4) \cdot 10^6$	$\eta^{(0)}$	$\eta^{(k)}$
$\Delta_{lr}$	15	420352	-3320.50805664	-4838.28808594	2.0E+01	2.1E-02
$\Delta_{lg}$	14	490336	-3320.70043945	-4838.58789062	2.0E+01	9.4E-03
$\Delta_{lh}$	18	457270	-3320.55517578	-4838.34619141	2.0E+01	2.2E-02
$\Delta_{qr}$	20	369728	-3321.18750000	-4839.34423828	1.1E-01	3.6E-07
$\Delta_{qg}$	19	359522	-3321.18725586	-4839.34423828	1.1E-01	4.7E-07
$\Delta_{qh}$	24	332652	-3321.18750000	-4839.34423828	1.1E-01	8.5E-07
$\square_{l2.5}$	16	377832	-3321.03515625	-4839.10644531	2.0E+00	2.6E-03
$\square_{q2.5}$	34	87252	-3321.18676758	-4839.34375000	1.2E-01	1.7E-06

Tab. 3.18: Verschiebungen des Deformationsproblems mit kompliziertem Schlitz (3.29) bei vernetzter Geometrie nach  $k$  Verfeinerungsschritten

Bei diesem Bauteil versagt der Kantenschnitt-Algorithmus zur Geometriererkennung. Das Element mit den Eckpunkten (2, 2), (3, 2) und (3, 3) (Abb. 3.57) sollte zur Teilung markiert werden, aber alle Eckpunkte liegen außerhalb von  $\Omega_*$ . Deshalb wird nun zusätzlich überprüft, ob alle Gaußpunkte in  $\Omega_0$  liegen.

Außerdem wird jegliche Vergrößerung verboten, da sonst die Iterationszahlen, wie in Abb. 3.58 dargestellt, häufig große Sprünge aufweisen.



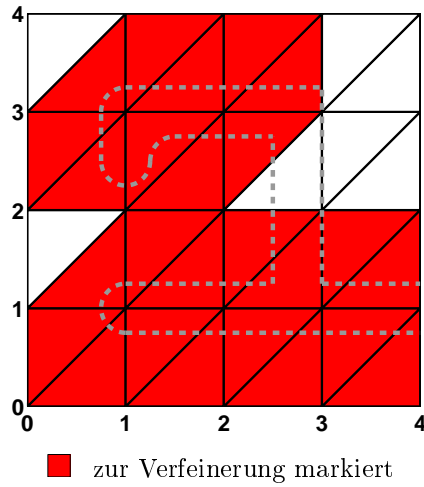


Abb. 3.57: zur Verfeinerung markierte Elemente bei Deformationsproblem mit kompliziertem Schlitz (3.29) im 0. Verfeinerungsschritt mit Kantenschnitt-Algorithmus

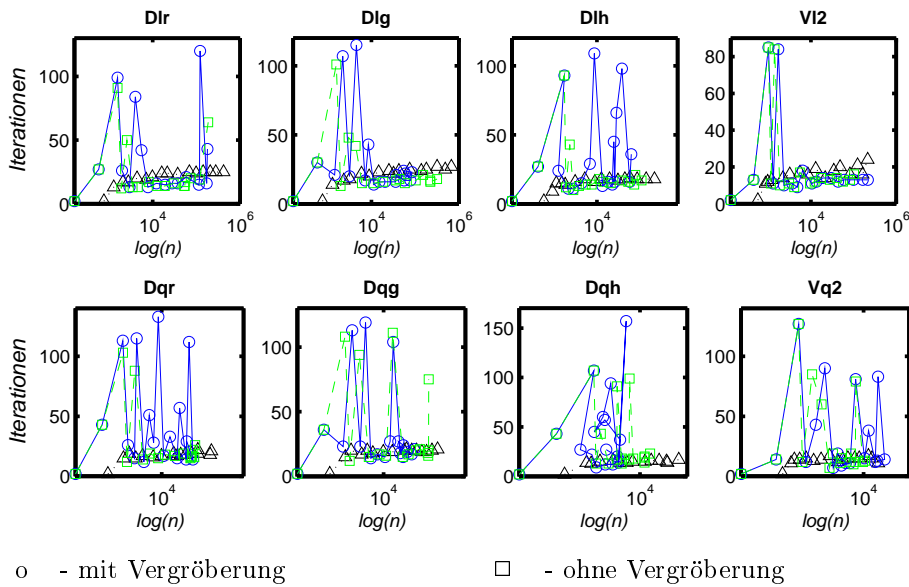


Abb. 3.58: Iterationszahlen für Deformationsproblem mit kompliziertem Schlitz (3.29) mit Materialfunktion  $m_{3,k}$  und dreimaliger partieller Verfeinerung (Kantenschnitt- und Gaußpunkte-Algorithmus) mit bzw. ohne Vergrößerung

**Bemerkung 18** Da die Anzahl der Knoten beim Vergrößern von Elementen nicht in einfacher Art und Weise aktualisiert werden kann, sind in ihr auch Knoten enthalten, die nicht mehr verwendet werden. Erst bei einer Komprimierung wird die Knotenanzahl wieder auf den richtigen Wert gesetzt. So entstehen bei der graphischen Darstellung der Iterationszahlen in Abhängigkeit der Gleichungssystemdimension Rückwärtssprünge.

Doch auch ohne Vergrößerung kommt es bei Dreieckselementen mit quadratischen Ansatzfunktionen und hängenden Knoten sowie bei Viereckselementen mit quadratischen Ansatzfunktionen (wie auch schon beim u-förmigen Loch) zu großen Sprüngen in den Iterationszahlen (Abb. 3.59). Außerdem treten willkürliche Sprünge bei Verwendung der gemischten Materialfunktion  $m_{3,k}$  mit Grobgitterlöser auf. Die einfache Materialfunktion ohne Grobgitterlöser ist, von dem Sprung bei Dreiecken mit linearen Ansatzfunktionen und Bänsch-grüner Verfeinerung abgesehen, eine ernstzunehmende Alternative.

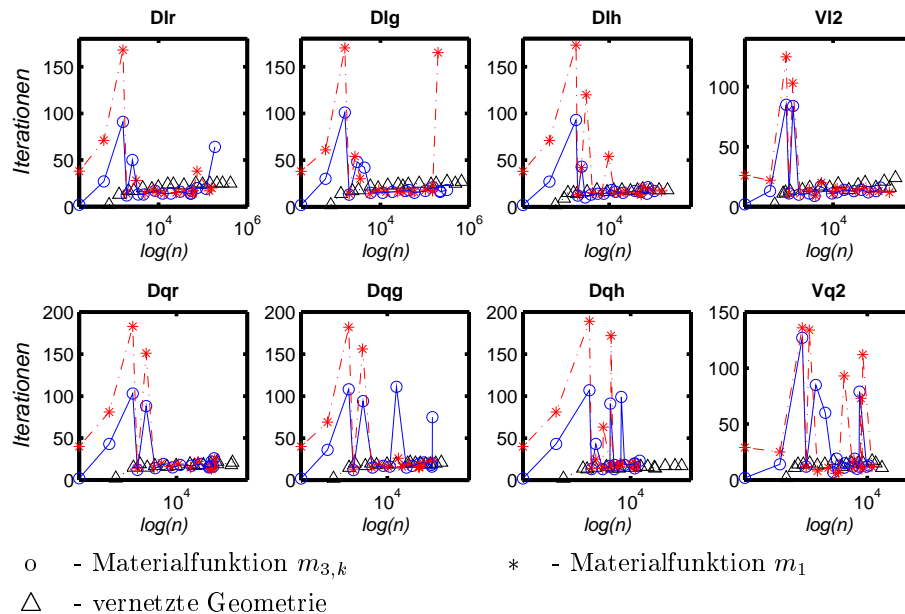


Abb. 3.59: Iterationszahlen für Deformationsproblem mit kompliziertem Schlitz (3.29) bei dreimaliger partieller Verfeinerung (Kantenschnitt- und Gaußpunkte-Algorithmus) mit vernetzter Geometrie bzw. Materialfunktion

Die relativen Approximationsfehler, die Tab. 3.19 dargestellt, sind weiterhin klein und liegen wiederum unter einem Prozent. Bemerkenswert ist allerdings, daß der relative Approximationsfehler bei Dreieckselementen mit linearen Ansatzfunktionen und hanging nodes sowie bei quadratischen Ansatzfunktionen

und rot-grüner Verfeinerung nicht stetig kleiner wird, sondern bei der Minimierung des CG-Residuums von 4-5 Prozent auf die angegebenen Werte fällt.

	2·#kn	$\bar{u}_y(3, 1.25)$	$\bar{u}_y(4, 4)$
$\Delta_{lr}$	186052	0.03 %	0.02 %
$\Delta_{lb}$	318882	0.01 %	< 0.01 %
$\Delta_{lh}$	87108	0.04 %	0.02 %
$\Delta_{qr}$	49352	0.09 %	0.09 %
$\Delta_{qb}$	86826	0.06 %	0.06 %
$\Delta_{qh}$	14074	0.40 %	0.37 %
$\square_{l2}$	102260	0.13 %	0.12 %
$\square_{q2}$	10498	0.90 %	0.84 %

Tab. 3.19: Approximationsfehler des Deformationsproblems mit dem komplizierten Schlitz (3.29), gemischte Materialfunktion  $m_{3,k}$  mit anfänglicher dreimaliger partieller Verfeinerung (Kantenteilung- und Gaußpunkte-Algorithmus) nach 16 Verfeinerungsschritten

### Zusammenfassung

Es wurde gezeigt, daß Materialfunktionen gezielt dazu eingesetzt werden können, konstruktiv wichtige von konstruktiv unwichtigen Stellen des Bauteils zu unterscheiden. Allerdings bewirken Vergrößerungen über die Grenze vom normalen zum Pseudomaterial hinweg meist Sprünge in den Iterationszahlen. Diese können, wie beim Beispiel des komplizierten Schlitzes, so stark werden, daß jegliche Vergrößerung unterbunden werden muß.

Daneben treten bei komplizierten Geometrien verfahrensbedingte Probleme mit dem Fehlerschätzer auf:

Bei exakt vernetzten Geometrien wird der Fehler bezüglich einer festen exakten Lösung geschätzt. Bei der Verwendung von Materialfunktionen hingegen wird durch fortschreitende Verfeinerung die Geometrie immer besser erlernt, wodurch sich auch die „exakte Lösung“ ständig ändert. Dadurch ist nicht mehr gesichert, daß die Werte des Fehlerschätzers von einem Verfeinerungsschritt zum nächsten fallen müssen.

Zudem läßt sich der Rand nicht wie bei einem vernetzten Bauteil beliebig genau annähern, sondern ist immer eine gezackte Line, je nach Lage der Schwerpunkte der Finiten Elemente. Dadurch erhält man zusätzliche Spannungsspitzen, die die qualitative Beurteilung der Lösung durch den Fehlerschätzer verhindern.

Anders sieht es bei der Verwendung der gewichteten Materialfunktion ohne Vergrößerung und mit umfassenden Verfeinerungen zur Geometriererkennung aus. Beim komplizierten Schlitz hat man dort im wesentlichen fallende Startresiduen im PCG-Verfahren. Durch den gewichteten Übergang zum Pseudomaterial können sich die Spannungen dort gut ausgleichen. Allerdings bewirkt die Verwendung der gewichteten Materialfunktion an sich hohe Iterationszahlen, so daß sie keine Alternative darstellt.

Obwohl die Approximation noch akzeptabel ist, muß man aufgrund der Sprünge und Oszillationen bei den Iterationszahlen feststellen, daß die Berechnung von komplizierten Geometrien die Grenzen des Verfahrens aufzeigt.

## 4 Zusammenfassung

Dieses Kapitel faßt die Ergebnisse der Arbeit zusammen, diskutiert die Vor- und Nachteile der Verwendung von Materialfunktionen und gibt einen Ausblick.

### 4.1 Ergebnisse

Das Ziel der Arbeit war es, Deformationsprobleme über komplizierten Gebieten  $\Omega_0$  durch Ersatz-Deformationsprobleme über geometrisch einfacheren Gebieten  $\Omega$  mit einem ortsabhängigen Spannungstensor zu ersetzen, wobei die Ortsabhängigkeit des Spannungstensors durch Materialfunktionen modelliert wurde.

Wie in Abschnitt 3.1.1 erläutert, ist das Ersatz-Deformationsproblem über dem Raum  $(\tilde{H}(\Omega))^3$  definiert. Dieser Raum besteht aus den Funktionen  $u$ , die sich jeweils aus den über  $\Omega_0$  definierten Funktionen  $u_0$  und aus den harmonischen Fortsetzungen  $u_*$  der Spur von  $u_0$  auf  $\Gamma_*$  ins Innere von  $\Omega_*$  zusammensetzen.

Die gewünschte pseudoharmonische Fortsetzung in  $\Omega_*$  (Abschnitt 3.3.3) entsteht für den Fall, daß  $J_0$  aus  $\text{diag}(K_{\text{voll}})$  gewählt wird, durch die Vorkonditionierung nach Yserentant oder – wenn  $J_0$  aus  $\text{diag}(K_{\text{pseudo}})$  gebildet wird – aus der Fortsetzung bezüglich des Grobnetzes verbunden mit der Initialisierung der Verschiebung an neuen Knoten durch Interpolation.

In Kapitel 3.2 wurden Probleme untersucht, bei denen das Loch oder die Auskerbung  $\Omega_*$  im Grobnetz repräsentiert ist. Damit konnte für Elemente in  $\Omega_*$  zunächst ein zweiter Materialtyp für das Pseudomaterial verwendet werden und ein direkter Vergleich mit dem vernetzten Gebiet war möglich.

Die Materialparameter in  $\Omega_*$  wurden wie folgt festgelegt:

$$E(\underline{x}) = 0 \quad \forall \underline{x} \in \Omega_* \quad \text{und} \quad \nu(\underline{x}) = \nu_0 \quad \forall \underline{x} \in \Omega_*.$$

Es zeigte sich, daß mit den so gewählten Materialparametern eine gute Approximation des ursprünglichen Deformationsproblems über  $\Omega_0$  möglich ist. Die Iterationszahlen der Rechnungen mit vernetzter Geometrie und mit Pseudomaterial sind etwa gleich groß. Es wird „sinnvoll“ verfeinert, da am Übergang von  $\Omega_0$  zu  $\Omega_*$  bei großen Spannungen auch große Kantensprünge  $[\sigma n]$  auftreten.

Die Variante, den Elastizitätsmodul  $E(\underline{x})$  in  $\Omega_*$  nicht Null und klein zu wählen, mußte wegen der schlechteren Approximation der Deformation des über  $\Omega_0$  definierten Elastizitätsproblems wieder verworfen werden.

Durch den Einsatz einer einfachen Materialfunktion (3.10) anstelle des zweiten Materialtyps, die die Materialparameter für ein Finites Element in Abhängigkeit von der Lage seines Schwerpunktes wählt, wurde die Möglichkeit zur Berechnung von Deformationsproblemen über allgemeineren Gebieten  $\Omega_*$  gegeben.

Für Löcher und Auskerbungen, die nicht im Grobnetz repräsentiert sind, wurden in Kapitel 3.3 zunächst die Probleme erläutert, die bei Verwendung der einfachen Materialfunktion in Zusammenhang mit den Initialisierungen der Grobgittermatrix sowie der zur Vorkonditionierung verwendeten Diagonale der Steifigkeitsmatrix  $D_K$  auftreten. Mögliche Lösungen wurden diskutiert und an Beispielen miteinander verglichen.

Wie in Abschnitt 3.3.3 gezeigt, läßt sich das Initialisierungsproblem von  $D_K$  durch eine Initialisierung mit Null beheben. Damit entspricht  $D_K$  der Diagonalmatrix, die bei der Assemblierung von Elementsteifigkeitsmatrizen mit der einfachen oder gemischten Materialfunktion entstehen würde. Ein Vergleich bei der Vorkonditionierung mit Diagonalmatrizen, die aus der Assemblierung von Elementsteifigkeitsmatrizen ohne den Gebrauch einer Materialfunktion entstanden, zeigte, daß die Kenntnis der Materialsprünge bei der Vorkonditionierung wichtiger ist, als eine vollständige Darstellung der Ansatzfunktionen bezüglich der hierarchischen Basis.

Für das Initialisierungsproblem beim Grobgitterlöser wurden in Abschnitt 3.3.4 drei Lösungsideen vorgestellt: die Verwendung der gewichteten Materialfunktion über die Knotenpunkte, das Nullsetzen von Initialisierungsresten nach der Cholesky-Zerlegung in Kombination mit der gewichteten Materialfunktion über die Gaußpunkte und der Verzicht auf den Grobgitterlöser. Aufgrund der Ergebnisse aus Abschnitt 3.3.2 wurde statt der gewichteten Materialfunktion über die Knotenpunkte die gemischte Materialfunktion verwendet, die die Vorteile der einfachen Materialfunktion (niedrige Iterationszahlen, gute Approximation) und der gewichteten Materialfunktion über die Knotenpunkte (Verwendung des Grobgitterlösers) kombiniert.

Anhand von Beispielen zeigte sich, daß alle drei Ideen etwa gleich große Iterationszahlen liefern. Da die Variante des Nullsetzens von Initialisierungsresten in Verbindung mit einer gewichteten Materialfunktion über Gaußpunkte im 0. Verfeinerungsschritt aufgrund der Berechnung der Weltgaußpunkte programmtechnisch aufwendig ist, wurde im folgenden nur die Verwendung der gemischten Materialfunktion mit Grobgitterlöser und der einfachen Materialfunktion ohne Grobgitterlöser untersucht. Bei letzterer kam es in seltenen Fällen zu Oszillationen in den Iterationszahlen.

Die guten Approximationseigenschaften der gemischten Materialfunktion in Bezug auf das ursprüngliche Deformationsproblem bei allgemeinen Gebieten  $\Omega_*$  wurden in Kapitel 3.4 numerisch an einigen Beispielen nachgewiesen.

Bei Schlitz- und nichtkonvexen Gebieten  $\Omega_*$  (Kap. 3.5) kann statt einer Totalverfeinerung zur Geometriekennung eine partielle Verfeinerung verwendet werden, wobei zwei Algorithmen eingesetzt wurden: der erste untersucht, ob  $\Gamma_*$  die Kanten der Finiten Elemente schneidet und markiert die entsprechenden Elemente, wohingegen der zweite Algorithmus zusätzlich Informationen über die Lage der Weltgaußpunkte nutzt.

Es wurde dargelegt, daß auftretende Vergrößerungen über den Materialsprung hinweg konstruktiv unwichtige Stellen kennzeichnen und keine negativen Auswirkungen auf die Approximation des ursprünglichen Deformationsproblems haben. Sie können jedoch Sprünge in den Iterationszahlen verursachen, weshalb bei sehr komplizierten Gebieten  $\Omega_*$  jegliche Vergrößerung unterbunden werden muß.

Desweiteren wurde erklärt, daß es verfahrensbedingt durch den Einsatz der einfachen Materialfunktion zu lokalen Singularitäten kommt, da der Materialübergang entlang einer gezackten Linie verläuft. Diese verhindern, daß das Startresiduum sowie der geschätzte Fehler bezüglich der Energienorm monoton fallen, wodurch große willkürliche Sprünge in den Iterationszahlen auftreten.

Die Approximation des ursprünglichen Deformationsproblems war immer noch ausreichend.

## 4.2 Diskussion

Damit dieses Verfahren eingesetzt werden kann, müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

Die Initialisierung der zur Vorkonditionierung verwendeten Hauptdiagonale der Steifigkeitsmatrix erfolgt mit Null. Soll der Grobgitterlöser in Zusammenhang mit der gewichteten Materialfunktion verwendet werden, so muß das Gebiet  $\Omega_*$  lokal konvex bezüglich des Grobnetzes sein. Außerdem muß eine ausreichende Anzahl von Elementen Nullmaterial besitzen. Ist dies nicht der Fall, wird entsprechend partiell verfeinert, wobei der Fehlerschätzer während dieser Phase deaktiviert wird.

Unter diesen Voraussetzungen können bereits mit sehr wenig Aufwand Materialfunktionen zur Berechnung komplizierter Geometrien eingesetzt werden. Es ist lediglich die Implementierung der einfachen und eventuell der gemischten Mate-

rialfunktion notwendig. Damit erhält man in der Regel eine gute Approximation der Verschiebungen des Ausgangsproblems über  $\Omega_0$  bei niedrigen Iterationszahlen.

Sind bei der vernetzten Geometrie Dreieckselemente mit Kreisbögen, an denen keine sehr großen Spannungen auftreten, vorhanden, dann sind die Rechnungen mit Materialfunktionen stabiler. Der Grund liegt darin, daß bei der Verwendung von Materialfunktionen aufgrund der normalen Dreiecke die Transformationsmatrizen, die das Welt- auf das Einheitsselement abbilden, vererbt werden können, was bei Dreieckselementen mit Kreisbögen nicht möglich ist. Folglich können bei der Verwendung von Materialfunktionen auch keine Probleme mit einer ungünstigen Wahl der Vernetzung der Kreisbögen auftreten, die dann aufgrund von Instabilitäten zu schlechten Ergebnissen führen würden.

Außerdem erlaubt die Verwendung von Materialfunktionen bei geometrisch einfacheren Bauteilen eine konstruktive Bewertung der für die Deformation relevanten Teilbereiche, wobei Vergrößerungen (auch über den Materialübergang hinweg) unwichtige Stellen markieren.

Das Verfahren zeigt aber auch folgende Nachteile:

Der Grobgitterlöser kann nur dann verwendet werden, wenn das Gebiet  $\Omega_*$  lokal-konvex bezüglich des Grobnetzes ist und nicht zu viele Grobgitterknoten in  $\Omega_*$  liegen (sonst würde die Grobgittermatrix trotz Initialisierung singular). Je nach Komplexität der Geometrie des Bauteils können bei der Verwendung der einfachen Materialfunktion ohne Grobgitterlöser Sprünge in den Iterationszahlen auftreten.

Der geschätzte Fehler bezüglich der Energienorm nach 15 Verfeinerungsschritten  $\eta^{(15)}$  ist bei der Verwendung von Materialfunktionen im Normalfall bei linearen Ansatzfunktionen etwa eine, bei quadratischen Ansatzfunktionen ca. zwei Größenordnungen schlechter als bei einer vergleichbaren Rechnung mit vernetztem Gebiet.

Bei sehr komplizierten Geometrien kommt es aufgrund der Modellierung des Materialüberganges zu lokalen Singularitäten, die Sprünge in den Iterationszahlen hervorrufen und die die adäquate Beurteilung durch den Fehlerschätzer verhindern. Auch ein Konvergenzbeweis für die Verwendung von Materialfunktionen ist aus diesen Gründen wahrscheinlich nicht möglich. Außerdem kann das Bauteil nicht mehr konstruktiv bewertet werden, da jegliche Vergrößerung unterbunden werden muß.

**Falls die Berechnung von komplizierten Gebieten in Zukunft nicht ermöglicht werden kann, so sind die Anwendungen von Materialfunktionen zur effizienten Berechnung komplizierten Geometrien als begrenzt zu bewerten.**



### 4.3 Ausblick

Da Materialfunktionen bisher noch nicht bei der Berechnung von Deformationsproblemen eingesetzt wurden, bietet die Thematik neben den in dieser Arbeit dargestellten Ergebnissen noch viele offene Fragen.

Zunächst sollten Materialfunktionen auch bei sehr komplizierten Geometrien eingesetzt werden können, bei denen an kritischen Stellen wie Kreisbögen große Spannungen auftreten. Dazu sollte die Linie, die durch den Materialübergang festgelegt wird, gegen  $\Gamma_*$  konvergieren. Durch irreguläre Teilungen, bei denen ein Finites Element nicht in vier kongruente Teile zerlegt wird, könnte man Knoten bei Verfeinerungen so platzieren, daß sie auf  $\Gamma_*$  liegen. Diese Approximation von  $\Gamma_*$  durch Sekanten vermeidet, Elemente zu generieren, die in das Loch hineinragen und lokale Singularitäten verursachen. Diese Methode wurde schon bei Reißproblemen angewendet. Sie zieht jedoch weitere Schwierigkeiten nach sich: so können die Transformationsmatrizen, die zwischen Welt- und Einheits-element wirken, nicht mehr vererbt werden. Dies konnte bisher nur durch ein rigoroses Verbot jeglicher Vererbung gelöst werden, wodurch sich aber die Anzahl der stabilen Verfeinerungsschritte verkleinert. Auch gestaltet sich die Vorkonditionierung komplizierter.

Sind die Iterationszahlen bei allen betrachteten Beispielen zufriedenstellend, kann das Verfahren weiter optimiert werden.

Erweist sich der Einsatz der gemischten Materialfunktion, wie bisher bei komplizierten Geometrien, als notwendig, so sollte eine verbesserte gewichtete Materialfunktion im 0. Schritt so wirken, daß die Voraussetzung der lokalen Konvexität der Finiten Elemente bezüglich des Grobnetzes nicht mehr erforderlich ist und auch Materialübergänge wie in Abb. 4.1 ohne Schwierigkeiten berechnet werden können.

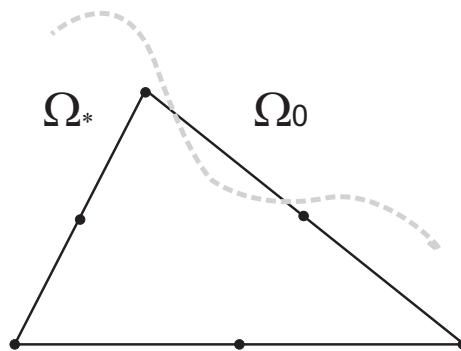


Abb. 4.1: bezüglich der Vernetzung lokal nichtkonvexes Gebiet  $\Omega_*$

Eine weitere Verbesserung wäre es auch, wenn die Grobgittermatrix bei komplizierten Geometrien nicht im 0. Verfeinerungsschritt aufgebaut werden müßte, sondern erst nach k-maliger partieller Verfeinerung. Dabei sind die partiellen Verfeinerungen mit Netzabschluß durchzuführen, da das Grobnetz keine hängenden Knoten enthalten darf. Dies führt aber bei Viereckselementen zu Problemen, da dort je nach Anisotropiefaktor entweder hängende Knoten entstehen oder das Netz total verfeinert wird.

Während der ganzen Arbeit wurde der anisotrope Fehlerschätzer deaktiviert. Kurze Tests mit dem anisotropen Fehlerschätzer zeigten keine Probleme. Es bleibt zu untersuchen, ob eine anisotrope Teilung von Vorteil ist, da möglicherweise weniger Teilungen am Materialübergang notwendig sind.

---

# Literaturverzeichnis

- [1] Schneider, René: *Auslegung von Kurbelwellenhauptabmessungen unter Einsatz der Finite-Elemente-Methode auf Hexaedernetzen*, Diplomarbeit, TU Chemnitz, 2002
- [2] Beuchler, Sven, Meyer, Arndt: *SPC-PM3AdH v1.0 – Programmer’s Manual*, Preprint SFB393/01-08, TU Chemnitz, 2001
- [3] Nestler, Peter: *Konstruktions-Tool für Kurbelwellen*, TU Chemnitz, 2003
- [4] Ciarlet, Philippe G.: *Mathematical Elasticity, Volume I: Three Dimensional Elasticity*, Elsevier Science Publishers B.V, Amsterdam, 1988
- [5] Braess, Dietrich: *Finite Elemente: Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, <sup>2</sup> 1997
- [6] Antman, Stuart S.: *Nonlinear Problems of Elasticity*, Applied Mathematical Sciences, Volume 107, Springer-Verlag, New York, 1995
- [7] Knabner, Peter, Angermann, Lutz: *Numerik partieller Differentialgleichungen: eine anwendungsorientierte Einführung*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2000
- [8] Ciarlet, P.G., Lions, J.L. eds.: *Handbook of Numerical Analysis, Volume II: Finite Element Method (Part 1)*, Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam, 1991
- [9] Meyer, Arndt: *Programmer’s Manual for Adaptive Finite Element Code SPC-PM2Ad*, Preprint SFB-393/01-18, TU Chemnitz, 2001
- [10] Bänsch, E., *Local mesh refinement in 2 and 3 dimensions*, IMPACT of Computing in Science and Engineering 3, p. 181-191, 1991
- [11] Kardestuncer, H., ed., u.a.: *Finite Element Handbook*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1987
- [12] Yserentant, Harry: *On the Multi-Level Splitting of Finite Element Spaces*, Numer. Math. 49, 379-412, 1986
- [13] Meyer, Arndt: *Projected PCGM for Handling Hanging Nodes in Adaptive Finite Element Procedures*, Preprint SFB393/99-25, TU Chemnitz, 1999
- [14] Pester, Matthias: *Visualization Tools for 2D and 3D Finite Element Programs - User’s Manual*, Preprint SFB393/02-02, TU Chemnitz, 2002



# Tabellenverzeichnis

3.1	Verschiebungen des Deformationsproblems mit quadratischem Loch, vernetzte Geometrie . . . . .	31
3.2	Approximationsfehler des Deformationsproblems mit quadratischem Loch, mit Pseudomaterial bei Wahl $E_{ps} = 0$ . . . . .	32
3.3	Approximationsfehler des Deformationsproblems mit quadratischem Loch, mit Pseudomaterial bei Wahl $E_{ps} = 10, \nu_{ps} = 0$ . . . . .	33
3.4	Verschiebungen des Deformationsproblems mit rechteckiger Auskerbung, vernetzte Geometrie . . . . .	34
3.5	Approximationsfehler des Deformationsproblems mit rechteckiger Auskerbung, mit Pseudomaterial bei Wahl $E_{ps} = 0$ . . . . .	34
3.6	Approximationsfehler des Deformationsproblems mit rechteckiger Auskerbung, mit Pseudomaterial bei Wahl $E_{ps} = 10, \nu_{ps} = 0$ . . . . .	35
3.7	Approximationsfehler des Deformationsproblems mit kreisförmigem Loch, Materialfunktion über Gaußpunkte . . . . .	64
3.8	Verschiebungen des Deformationsproblems mit mittelgroßem quadratischem Loch, vernetzte Geometrie . . . . .	66
3.9	Verschiebungen des Deformationsproblems mit kreisförmigen Loch, vernetzte Geometrie . . . . .	67
3.10	Verschiebungen des Deformationsproblems mit rautenförmiger Auskerbung, vernetzte Geometrie . . . . .	67
3.11	Approximationsfehler der Deformationsprobleme für das mittelgroße quadratische Loch, das kreisförmige Loch und die große rautenförmige Auskerbung, Materialfunktion $m_{3,k}$ . . . . .	68
3.12	Verschiebungen des Deformationsproblems mit einfachem Schlitz, vernetzte Geometrie . . . . .	71
3.13	Approximationsfehler des Deformationsproblems mit einfachem Schlitz, Materialfunktion $m_{3,k}$ . . . . .	74
3.14	Verschiebungen des Deformationsproblems mit verschobenem Schlitz, vernetzte Geometrie . . . . .	78

---

3.15	Approximationsfehler des Deformationsproblems mit verschobenem Schlitz, Materialfunktion $m_{3,k}$ , zwei- bzw. viermalige partielle Verfeinerung . . . . .	79
3.16	Verschiebungen des Deformationsproblems mit u-förmigem Loch, vernetzte Geometrie . . . . .	80
3.17	Approximationsfehler des Deformationsproblems mit u-förmigem Loch, Materialfunktion $m_{3,k}$ , dreimalige partielle Verfeinerung . . . . .	80
3.18	Verschiebungen des Deformationsproblems mit kompliziertem Schlitz, vernetzte Geometrie . . . . .	84
3.19	Approximationsfehler des Deformationsproblems mit kompliziertem Schlitz, Materialfunktion $m_{3,k}$ , dreimalige partielle Verfeinerung . . . . .	87

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Modell einer Kurbelwelle . . . . .	1
2.1	Algorithmus des pcg-Verfahrens . . . . .	20
3.1	Deformationsproblem mit quadratischem Loch, vernetzte Geometrie . . . . .	28
3.2	Deformationsproblem mit quadratischem Loch, mit Pseudomaterial . . . . .	28
3.3	Deformationsproblem mit rechteckiger Auskerbung, vernetzte Geometrie . . . . .	28
3.4	Deformationsproblem mit rechteckiger Auskerbung, mit Pseudomaterial . . . . .	28
3.5	Betrag der Verschiebung des Deformationsproblems mit quadratischem Loch . . . . .	33
3.6	Iterationszahlen des Deformationsproblems mit quadratischem Loch bei unterschiedlicher Wahl des Elastizitätsmoduls . . . . .	35
3.7	Iterationszahlen des Deformationsproblems mit rechteckiger Auskerbung bei unterschiedlicher Wahl des Elastizitätsmoduls . . . . .	36
3.8	Ersatz-Deformationsprobleme . . . . .	37
3.9	Material des Deformationsproblems mit rautenförmigem Loch, 3. Verfeinerungsschritt, Materialfunktion $m_1$ . . . . .	39
3.10	Material des Deformationsproblems mit kreisförmigem Loch, 0. Verfeinerungsschritt, Materialfunktion $m_1$ . . . . .	40
3.11	Material des Deformationsproblems mit kreisförmigem Loch, 1. Verfeinerungsschritt, Materialfunktion $m_1$ . . . . .	40
3.12	Material des Deformationsproblems mit quadratischem Loch, 1. Verfeinerungsschritt, Materialfunktion $m_{2,k}$ . . . . .	43
3.13	Material des Deformationsproblems mit quadratisches Loch, 1. Verfeinerungsschritt, Materialfunktion $m_{2,nk}$ . . . . .	43

3.14	Approximationsfehler des Deformationsproblems mit quadratischem Loch für gewichtete Materialfunktionen . . . . .	44
3.15	Iterationszahlen des Deformationsproblems mit quadratischem Loch für gewichtete Materialfunktionen . . . . .	44
3.16	Iterationszahlen des Deformationsproblems mit kreisförmigem Loch, Vergleich gewichtete und gemischte Materialfunktion . . .	46
3.17	Iterationszahlen des Deformationsproblems mit rautenförmigem Loch, Vergleich gewichtete und gemischte Materialfunktion . . .	46
3.18	Iterationszahlen des Deformationsproblems mit kleinem quadratischen Loch, Vergleich gewichtete und gemischte Materialfunktion . . . . .	47
3.19	Iterationszahlen des Deformationsproblems mit quadratischem Loch, Vergleich der verschiedenen Varianten der Vorkonditionierung, Materialfunktion $m_1$ . . . . .	49
3.20	Iterationszahlen des Deformationsproblems mit kreisförmigem Loch, Vergleich der verschiedenen Varianten der Vorkonditionierung, Materialfunktion $m_1$ . . . . .	50
3.21	Iterationszahlen des Deformationsproblems mit kreisförmigem Loch, Vergleich der verschiedenen Varianten der Vorkonditionierung, Materialfunktion $m_{2,k}$ . . . . .	51
3.22	Iterationszahlen des Deformationsproblems mit großer rautenförmiger Auskerbung, Vergleich der verschiedenen Varianten der Vorkonditionierung, Materialfunktion $m_{2,k}$ . . . . .	52
3.23	Fortsetzung bei im Grobnetz repräsentierten Loch mit Grobgitterknoten, lineare Ansatzfunktionen . . . . .	53
3.24	Fortsetzung bei im Grobnetz repräsentierten Loch mit Grobgitterknoten, quadratische Ansatzfunktionen . . . . .	53
3.25	Fortsetzung bei im Grobnetz repräsentierten Loch ohne Grobgitterknoten, lineare Ansatzfunktionen . . . . .	54
3.26	Fortsetzung bei im Grobnetz repräsentierten Loch ohne Grobgitterknoten, quadratische Ansatzfunktionen . . . . .	54



3.27 Fortsetzung für nicht im Grobnetz repräsentiertes Loch, lineare Ansatzfunktionen . . . . .	55
3.28 Fortsetzung bei Variante (b) ( $J_0$ aus $\text{diag}(K_{\text{pseudo}})$ und $D_K$ aus $\text{diag}(K_{\text{voll}})$ ), Materialfunktion $m_1$ . . . . .	56
3.29 Fortsetzung bei Variante (c) ( $J_0$ aus $\text{diag}(K_{\text{voll}})$ und $D_K$ aus $\text{diag}(K_{\text{pseudo}})$ ), Materialfunktion $m_1$ . . . . .	56
3.30 Fortsetzung bei Variante (d) ( $J_0$ und $D_K$ aus $\text{diag}(K_{\text{voll}})$ ), Mate- rialfunktion $m_1$ . . . . .	56
3.31 Fortsetzung bei Variante (a) ( $J_0$ und $D_K$ aus $\text{diag}(K_{\text{pseudo}})$ ), Mate- rialfunktion $m_{2,k}$ . . . . .	56
3.32 Material bei rautenförmiger Auskerbung, 0. Verfeinerungsschritt, Materialfunktion $m_1$ . . . . .	58
3.33 Material bei rautenförmiger Auskerbung, 5. Verfeinerungsschritt, Materialfunktion $m_1$ . . . . .	58
3.34 Iterationszahlen des Deformationsproblems mit quadratischem Loch, Vergleich mit bzw. ohne Grobgitterlöser . . . . .	59
3.35 Iterationszahlen des Deformationsproblems mit kreisförmigem Loch, Vergleich mit bzw. ohne Grobgitterlöser . . . . .	59
3.36 Iterationszahlen des Deformationsproblems mit rautenförmiger Auskerbung, Vergleich mit bzw. ohne Grobgitterlöser . . . . .	60
3.37 Iterationszahlen des Deformationsproblems mit einfachen Schlitz, Vergleich mit bzw. ohne Grobgitterlöser . . . . .	60
3.38 Iterationszahlen des Deformationsproblems mit quadratischem Loch, Materialfunktion über Gaußpunkte . . . . .	63
3.39 Iterationszahlen des Deformationsproblems mit kreisförmigem Loch, Materialfunktion über Gaußpunkte . . . . .	64
3.40 Deformationsproblem mit mittelgroßem quadratischen Loch, ver- netzte Geometrie . . . . .	66
3.41 Deformationsproblem mit kreisförmigen Loch, vernetzte Geometrie . . . . .	66

3.42	Deformationsproblem mit großer rautenförmiger Auskerbung, vernetzte Geometrie . . . . .	67
3.43	Fehlerentwicklung bei Deformationsproblem mit kreisförmigem Loch . . . . .	68
3.44	Deformationsproblem mit einfachem Schlitz, vernetzte Geometrie	71
3.45	Material des Deformationsproblems mit einfachem Schlitz, 2. Verfeinerungsschritt, Materialfunktion $m_{3,k}$ . . . . .	72
3.46	markierte Elemente des Deformationsproblems mit einfachem Schlitz, 2. Verfeinerungsschritt mit Materialfunktion $m_{3,k}$ . . . . .	72
3.47	Material des Deformationsproblems mit einfachem Schlitz, 3. Verfeinerungsschritt, Materialfunktion $m_{3,k}$ . . . . .	73
3.48	Iterationszahlen des Deformationsproblems mit einfachem Schlitz, Vergleich mit bzw. ohne Vergrößerung, Materialfunktion $m_{3,k}$ . . . . .	74
3.49	Iterationszahlen des Deformationsproblems mit einfachem Schlitz bei totaler Verfeinerung . . . . .	75
3.50	Iterationszahlen des Deformationsproblems mit einfachem Schlitz, Vergleich totale bzw. partielle Verfeinerung . . . . .	76
3.51	Deformationsproblem mit verschobenem Schlitz, vernetzte Geometrie . . . . .	78
3.52	Deformationsproblem mit u-förmigem Loch, vernetzte Geometrie	79
3.53	Iterationszahlen des Deformationsproblems mit u-förmigem Loch, Vergleich vernetzte Geometrie bzw. Materialfunktion . . . . .	81
3.54	Material und zur Verfeinerung markierte Elemente des Deformationsproblems mit u-förmigem Loch, 5. bzw. 6. Verfeinerungsschritt, Materialfunktion $m_{3,k}$ . . . . .	81
3.55	Iterationszahlen des Deformationsproblems mit u-förmigem Loch, Vergleich von verschiedenen Mindestprozentsätzen zu markierenden Elemente . . . . .	83
3.56	Deformationsproblem mit kompliziertem Schlitz, vernetzte Geometrie . . . . .	84

---

3.57 zur Verfeinerung markierte Elemente bei Deformationsproblem mit kompliziertem Schlitz, 0. Verfeinerungsschritt mit Kanten- schnitt-Algorithmus . . . . .	85
3.58 Iterationszahlen für Deformationsproblem mit kompliziertem Schlitz, Vergleich mit bzw. ohne Vergrößerung . . . . .	85
3.59 Iterationszahlen für Deformationsproblem mit kompliziertem Schlitz, Vergleich vernetze Geometrie bzw. Materialfunktion . . .	86
4.1 bezüglich der Vernetzung lokal nichtkonvexes Gebiet $\Omega_*$ . . . . .	93



## **Erklärung**

Ich erkläre an Eides Statt, daß ich die vorliegende Arbeit (entsprechend der genannten Verantwortlichkeit) selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Literatur und Hilfsmittel angefertigt habe.

Chemnitz, den 21.07.2004



# A Beweis

## Lemma 1

Bei im Grobnetz repräsentierten Löchern und Auskerbungen  $\Omega_*$  (vgl. Kap. 3.2) sind die Nichtnull-Eigenwerte von  $C^{-1}K$  bei vernetzter Geometrie und bei der Verwendung von Pseudomaterial mit  $E(\underline{x}) = 0 \quad \forall \underline{x} \in \Omega_*$  identisch, d. h. die Initialisierung der bei der Vorkonditionierung verwendeten Diagonalmatrix  $D_K$  in Gl. (2.15) spielt keine Rolle.

## Beweis:

Die Steifigkeitsmatrix des Deformationsproblems mit vernetztem Gebiet  $\Omega_*$  wird mit  $A$  bezeichnet.

Die Nummerierung der Knoten bei dem Deformationsproblem mit Pseudomaterial sei so, daß zunächst alle Knoten in  $\Omega_0$  in gleicher Reihenfolge wie bei der vernetzten Geometrie durchnummeriert werden und dann alle Knoten in  $\Omega_*$  folgen.

Dann läßt sich die Steifigkeitsmatrix  $K$  des Deformationsproblems mit Pseudomaterial wie folgt darstellen:

$$K = \begin{pmatrix} A & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix}$$

In der rechten unteren Ecke von  $K$  steht wirklich eine Nullmatrix, da die Elementsteifigkeitsmatrizen von Elementen, die in  $\Omega_*$  liegen, Nullmatrizen sind.

Die bei der Vorkonditionierung auftretenden Matrizen  $Q$  und  $D_K$  werden als Blockmatrizen

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix}, \quad D_K = \begin{pmatrix} \text{diag}(A) & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & D_{\text{init}} \end{pmatrix}$$

geschrieben. In der Diagonalmatrix  $D_{\text{init}}$  stehen die Werte der Initialisierung, da diese bei der Assemblierung der verschwindenden Elementsteifigkeitsmatrizen von Elementen in  $\Omega_*$  nicht überschrieben werden. Damit ist

$$\begin{aligned} C^{-1}K &= QD_K^+Q^TK \\ &= \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{diag}(A)^{-1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & D_{\text{init}}^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{11}^T & Q_{21}^T \\ Q_{12}^T & Q_{22}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Q_{11}\text{diag}(A)^{-1}Q_{11}^TA & \mathbb{O} \\ \dots & \mathbb{O} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Folglich gilt für das Spektrum von  $C^{-1}K$ :

$$\sigma \left( \begin{array}{cc} Q_{11} \text{diag}(A)^{-1} Q_{11}^T A & \mathbb{O} \\ \dots & \mathbb{O} \end{array} \right) = \sigma \left( Q_{11} \text{diag}(A)^{-1} Q_{11}^T A \right) \cup \{0\}.$$

■



# Thesen

1. Elastizitätsprobleme mit kleinen Deformationen können mit Hilfe der vollständig linearen Theorie modelliert und mit der Finite-Elemente-Methode näherungsweise berechnet werden.
2. Für die Berechnung von Bauteilen komplizierter Geometrie, die Besonderheiten aufweisen, deren Abmessung sehr klein im Vergleich zu den Dimensionen des Bauteils sind, war bisher die Konstruktion feiner Startnetze nötig, deren Verwendung nachteilig ist.
3. Hingegen lassen sich Ersatz-Deformationsprobleme mit ortsabhängigen Materialparametern über geometrisch einfacheren Gebieten  $\Omega$  durch die Verwendung eines groben Startnetzes effizient berechnen.
4. Die ortsabhängigen Materialparameter werden als

$$E(\underline{x}) = \chi_{\Omega_0}(\underline{x})E_0, \quad \nu(\underline{x}) = \nu_0 \quad \forall \underline{x} \in \Omega$$

gewählt.

5. Die Cholesky-Zerlegung der Grobgittermatrix ist aufgrund der nichtverschwindenden Initialisierung der Hauptdiagonale auch dann erfolgreich, wenn einige Grobgitterknoten von Finiten Elementen mit Nullmaterial umgeben sind.
6. Zur Bildung der Diagonalmatrix  $D_K = \text{diag}(K)$ , die zur Vorkonditionierung verwendet wird, wird eine Steifigkeitsmatrix  $K$  verwendet, in der der Materialübergang berücksichtigt ist.
7. Der Grobgitterlöser kann eingesetzt werden, wenn im 0. Verfeinerungsschritt die gewichtete Materialfunktion über die Knotenpunkte verwendet wird, und hat unter Umständen stabilisierende Wirkung. Der Einsatz der einfachen Materialfunktion ohne Grobgitterlöser ist im Allgemeinen genauso effizient.
8. Die Ersatzprobleme mit Pseudomaterial approximieren die ursprünglichen Deformationsprobleme über komplizierten Gebieten sehr gut.
9. Bei der Berechnung komplizierter Geometrien müssen anfangs eine ausreichende Anzahl von Elementen mit Nullmaterial vorhanden sein oder durch partielle Verfeinerungen erzeugt werden. Im weiteren Verlauf der Rechnung wird der Materialübergang dort, wo große Spannungen auftreten, genauer aufgelöst.

10. Bei komplizierten Geometrien kommt es durch die Modellierung des Materialübergangs zu lokalen Singularitäten, die eine qualitative Bewertung der Lösung durch den Fehlerschätzer verhindern.