

Konvergenzbeschleunigung für Binomialmethoden zur Bewertung von Barriereoptionen

K. Ilzig^a, H.-J. Starkloff^a, R. Wunderlich^b

^aTechnische Universität Chemnitz, Fakultät für Mathematik,
09107 Chemnitz, Germany

^bWestsächsische Hochschule Zwickau (FH), Fachgruppe Mathematik,
Dr.-Friedrichs-Ring 2A, 08056 Zwickau, Germany

Zusammenfassung

Für die Bewertung zahlreicher Barriereoptionen stehen keine analytischen Preisformeln zur Verfügung. Ein mögliches Näherungsverfahren, welches für die Bepreisung eingesetzt werden kann, ist das Binomialmodell. Dieser Artikel analysiert die bei der binomialen Bewertung von Barriereoptionen auftretende Sägezahnkonvergenz. Es werden vier Verfahren mit verbesserten Konvergenzverhalten beschrieben. Dabei stellt sich heraus, daß durch alle betrachteten Verfahren eine deutliche Konvergenzbeschleunigung erreicht werden kann. Numerische Beispiele illustrieren die vorgestellten Verfahren.

Schlagerworte: Barriereoption, Binomialmodell, Sägezahnkonvergenz, Konvergenzverbesserung

MSC2000 Klassifikation: 91B28, 62P05, 91B62

1 Einleitung

Barriereoptionen sind exotische Finanzderivate, für die es nur in speziellen Fällen - beispielsweise für europäische Optionen mit konstanter Barriere oder exponentiell veränderlicher Barriere - eine analytische Preisformel gibt. In den anderen Fällen zeitabhängiger Barrieren stehen keine analytischen Preisformeln zur Verfügung, so daß auf Näherungsverfahren zurückgegriffen werden muß. Eine Möglichkeit einer näherungsweisen Bewertung bietet das Binomialmodell. Eine Anwendung der naiven Binomialmethode auf das Problem der Preisfindung von Barriereoptionen führt jedoch zu sehr ungenauen Ergebnissen - auch noch bei sehr feiner Diskretisierungsschrittzahl. Eine graphische Darstellung der berechneten Optionspreise in Abhängigkeit von der Baumtiefe ergibt die in der Literatur häufig beschriebene Sägezahnkonvergenz.

In dieser Arbeit werden vier in der Literatur aufgezeigte Möglichkeiten der Verbesserung des Konvergenzverhaltens beschrieben. Die Verfahren werden auf ihre Flexibilität untersucht und miteinander an numerischen Beispielen verglichen. Außerdem erfolgt eine experimentelle Bestimmung der Konvergenzordnungen der Verfahren an verschiedenen Beispielen. An einigen Stellen kann im Bezug auf ausführliche Herleitungen, die den Rahmen der Arbeit sprengen würden, auf die Diplomarbeit [9] verwiesen werden. Die Implementierung des Binomialmodells und der betrachteten Modifikationen erfolgte mit MatlabR12 auf einem PC mit Athlon XP 1800+ Prozessor, Hauptspeicher 256 MB unter dem Betriebssystem MS Windows XP.

Neben den hier dargestellten Verbesserungen des Binomialmodells für Barriereoptionen mit stetiger Überprüfung der Barriere (continuous monitoring) sind in der Literatur auch viele Methoden zur Verbesserung anderer numerischer Verfahren zu finden. Beispielsweise entwickelten Boyle und Tian [1] 1998 eine modifizierte Finite-Differenzen-Methode zur Bewertung von Barriereoptionen, Leisen (1999) konstruierte ein randomisiertes Trinomialmodell für kontinuierliche Barriereoptionen. Mit der Bewertung von diskreten Barriereoptionen beschäftigten sich unter anderem Broadie, Glasserman in [2] und Ahn, Figlewski und Gao in [4]. Letztere entwickelten das Adaptive-Mesh-Modell, welches ein modifiziertes Trinomialmodell ist. Um die Barriere wird in diesem Modell ein feines Gitter gelegt, wohingegen im restlichen Teil des Baums grobe Aktienkurs- und Zeitschritte verwendet werden.

2 Bewertung von Barriereoptionen im naiven Binomialmodell

2.1 Barriereoptionen

Neben den Standardoptionen gibt es die sogenannten exotischen Optionen. Mit diesem Begriff werden Finanzverträge bezeichnet, deren Auszahlungseigenschaften von zusätzlichen Bedingungen abhängen, die aus spezifischen Kundenbedürfnissen entstehen. Die Auszahlung kann bei solchen Verträgen nicht nur vom Schlußkurs eines Basisgutes zum

Ausübungszeitpunkt abhängig sein, sondern auch von der Kursentwicklung bis zu diesem Zeitpunkt beeinflusst werden. Die Option wird dann als pfadabhängig bezeichnet. Ein Beispiel hierfür sind die Barriereoptionen in ihren verschiedenen Ausprägungen. Sie sind für einige Marktteilnehmer interessant, weil ihre Prämie im Vergleich zu den Standardoptionen geringer ist.

Barriereoptionen werden unterschieden in knock-out Optionen und knock-in Optionen. Das Optionsrecht einer knock-out Option erlischt, wie der Name sagt, sobald der Kurs des Basisgutes eine bestimmte Barriere erreicht. Im Gegensatz dazu leben knock-in Optionen erst dann auf, wenn der Kurs des underlying eine Barriere trifft. Die knock-out Optionen werden wiederum unterteilt in down-and-out und up-and-out Optionen. Bei den ersteren erlischt das Optionsrecht, sobald eine Kursschranke, die unterhalb des Anfangskurses des Basisgutes liegt, erreicht wird. Im Falle einer up-and-out Option wird die Option mit dem Berühren einer über dem Anfangskurs der Aktie liegenden Barriere wertlos. In gleicher Weise können die knock-in Optionen in down-and-in und up-and-in Optionen untergliedert werden. Down-and-in Optionen bleiben wertlos, solange der Kurs des Basisgutes über einer unteren Schranke liegt. Das Optionsrecht einer up-and-in Option hingegen besteht erst dann, wenn eine über dem Anfangskurs des Basisgutes liegende Kursschranke getroffen wird.

Werden diese vier genannten Typen jeweils mit den zwei Optionstypen - Put und Call - kombiniert, entstehen die acht Grundformen von Barriereoptionen, deren Auszahlungsfunktionen beispielsweise in [14] zu finden sind. Eine Verallgemeinerung stellen double-barrier Optionen dar. Diese gibt es sowohl in der knock-in als auch in der knock-out Form. Letztere sind in der Literatur häufiger anzutreffen.

Nun wird wiederum noch zwischen Barriereoptionen des europäischen und des amerikanischen Typs unterschieden. Außerdem kann der Verfall des Optionsrechts darüber hinaus zu einer Rückvergütung (rebate) führen. Diese kann bei Optionen des out-Typs zum Fälligkeitszeitpunkt (payment at expiry) und zum Zeitpunkt des Berührens der Barriere (payment at hit) erfolgen, bei knock-in Optionen ist nur das erstere möglich. Die Barrierebedingung kann kontinuierlich überprüft werden (continuous monitoring) oder nur zu bestimmten im Optionskontrakt spezifizierten Zeitpunkten (discrete monitoring).

Dieser Artikel ist im wesentlichen auf europäische knock-out Optionen mit Basispreis K ohne Rebate-Zahlung beschränkt. Allgemein läßt sich ihr Auszahlungsprofil formal schreiben als

$$I_{\{T < \tau\}} f(S_T)$$

mit der Indikatorfunktion

$$I_{\{T < \tau\}} := \begin{cases} 1 & \text{wenn } T < \tau \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$f(S_T) := \begin{cases} (S_T - K)^+ := \max\{S_T - K, 0\} & \text{wenn Call} \\ (K - S_T)^+ & \text{wenn Put,} \end{cases}$$

$$\tau := \inf\{t > 0 : S_t \notin \mathcal{D}(t)\},$$

$$\mathcal{D}(t) := \begin{cases} [0, H_u(t)) & \text{für obere Barriere } H_u(t), t \in [0, T] \\ (H_d(t), +\infty) & \text{für untere Barriere } H_d(t), t \in [0, T] \\ (H_d(t), H_u(t)) & \text{für double-barrier } H_d(t), H_u(t), t \in [0, T]. \end{cases}$$

Für Optionen mit konstanten Barrieren lassen sich im Black-Scholes-Modell analytische Preisformeln finden: In diesem Modell erfolgt unter der Annahme der Arbitragefreiheit ein kontinuierlicher Handel mit zwei Finanzgütern; einem riskanten (nichtdividenden-zahlende Aktie) und einem risikolosen Wertpapier (Anleihe, Bond). Der Aktienkurs folgt einer geometrischen Brownschen Bewegung

$$S_t = S_0 \exp((\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t) \quad (2.1)$$

und ist Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

wobei $\sigma > 0$ und μ, σ konstant, W_t ein Wiener Prozeß und S_0 der Anfangskurs der Aktie sind. Der Bondpreis werde durch den deterministischen Prozeß

$$B_t = B_0 \exp(\tilde{r}t)$$

beschrieben, wobei \tilde{r} der konstante Marktzins ist. Dann gilt: Der faire Preis einer down-and-out Calloption mit Basispreis K , konstanter Barriere H_d , Verfallszeitpunkt T und Rebate-Zahlung R (payment at hit) ist Lösung der Differentialgleichung

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} + \tilde{r}S \frac{\partial v}{\partial S} - \tilde{r}v = 0 & \text{für } (t, S) \in [0, T) \times (H_d, \infty) \\ v(T, S) = (S - K)^+ & \text{für } S \in (H_d, \infty) \\ v(t, H_d) = R & \text{für } t \in [0, T). \end{cases}$$

Nach [18] und [7] ergibt sich als Preis für den europäischen down-and-out Call

$$\begin{aligned} v(0, S_0) &=: {}^{BS}c_0^{do}(S_0, K, T, H_d) \\ &= {}^{BS}c_0(S_0, K \vee H_d, T) - {}^{BS}c_0\left(\frac{H_d^2}{S_0}, K \vee H_d, T\right) \left(\frac{S_0}{H_d}\right)^{1-\alpha} \\ &\quad + R \frac{S_0}{H_d} \left(\left(\frac{S_0}{H_d}\right)^{-1-\alpha} \Phi\left(\tilde{d}_1\left(\frac{S_0}{H_d}\right)\right) + \Phi\left(-\tilde{d}_1(H_d)\right) \right), \end{aligned} \quad (2.2)$$

wobei

$${}^{BS}c_0(x, y, T) = x\Phi(d_1(y)) - K \exp(-\tilde{r}T)\Phi(d_2(y))$$

und

$$d_{1/2}(y) := \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left(\ln\left(\frac{x}{y}\right) + \left(\frac{\tilde{r}}{\sigma^2} \pm \frac{1}{2}\right)\sigma^2 T \right), \quad \alpha := \frac{2\tilde{r}}{\sigma^2},$$

$$\tilde{d}_1(y) := \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left(\ln\left(\frac{S_0}{y}\right) + \left(\frac{\tilde{r}}{\sigma^2} + \frac{1}{2}\right)\sigma^2 T \right), \quad K \vee H_d := \max\{K, H_d\}$$

sind. $\Phi(\cdot)$ bezeichnet die Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung. Für die Bewertungsformeln der anderen sieben Typen von Barriereoptionen mit konstanter Barriere wird auf [14] verwiesen. Für double-barrier Optionen entwickelten Geman und Yor in [5] eine Preisformel. Sie geben Ausdrücke für die Laplacetransformierte der Wertfunktion der double-barrier Option an, invertieren diese numerisch und erhalten den Preis.

2.2 Binomialmodell

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Dabei bezeichne Ω mit $|\Omega| < \infty$ den Raum der Elementarereignisse, \mathcal{F} mit $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ die σ -Algebra, und \mathbf{P} ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathcal{F} . Das Binomialmodell ist ein zeitdiskretes Finanzmarktmodell. Es seien $t \in \mathbb{I}$ mit

$$\mathbb{I} = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T\} \quad (2.3)$$

äquidistante Handelszeitpunkte, d. h. $t_{i+1} - t_i = \delta t = \frac{T}{N} \forall i = 0, 1, \dots, N-1$ und $t_i = i\delta t$. Der Finanzmarkt bestehe aus einer festverzinslichen Anlage mit Zinssatz r in jeder Zeitperiode δt und einer nichtdividendenzahlenden Aktie mit Anfangskurs S_0 . Zu jeder Zeit t_i $i = 1, \dots, N$ kann der Aktienkurs die Werte

$$S_i = \begin{cases} uS_{i-1} & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p \\ dS_{i-1} & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1-p \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

annehmen, wobei u und d Konstanten mit

$$u > 1 + r > d > 0 \quad (2.4)$$

sind und $p \in (0, 1)$ ist. Die stochastische Modellierung des Aktienpreisprozesses erfolgt unter Verwendung einer Folge Y_1, Y_2, \dots von i. i. d. Zufallsgrößen mit $\mathbf{P}(Y_k = u) = p$ und $\mathbf{P}(Y_k = d) = 1 - p$ durch

$$S_i = S_0 \prod_{k=1}^i Y_k = S_0 u^j d^{i-j}, \quad (2.5)$$

wobei $j = |\{k \leq i : Y_k = u\}|$ die zufällige Anzahl der Aufwärtsbewegungen im Binomialbaum bis zur Zeit i ist. Somit kann $\Omega = \{u, d\}^N$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ und $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ gewählt werden. Für $i = 1, 2, \dots, N$ ist die σ -Algebra \mathcal{F}_i gleich $\sigma(S_1, S_2, \dots, S_i)$. In Abbildung 2.1 ist der Binomialbaum für den Aktienkurs dargestellt. Ein solcher Binomialprozess heißt *rekombinierend*. Diese Bezeichnung verweist darauf, daß der Aktienkurs S_i über mehrere Pfade im Binomialmodell erreichbar ist. Es kann gezeigt werden, daß eine Wahl der Parameter nach (2.4) für $p \in (0, 1)$ äquivalent mit der Arbitragefreiheit des beschriebenen Binomialmodells ist. Mehr noch, das Modell ist sogar vollständig - d. h. jedes

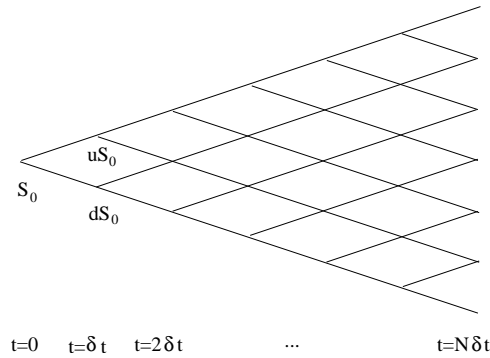


Abbildung 2.1: Rekombinierender Binomialprozeß

Derivat kann durch ein Portfolio bestehend aus festverzinslicher Anlage und Aktie dupliziert werden - weil ein äquivalentes Martingalmaß sogar eindeutig existiert. Unter dem äquivalenten Martingalmaß ist die Wahrscheinlichkeit einer Aufwärtsbewegung im Aktienkurs gegeben durch

$$q = \frac{1 + r - d}{u - d}.$$

Zu einer ausführlichen Definition der Begriffe zur Modellierung von Finanzmärkten und der Beschreibung obiger Zusammenhänge soll an dieser Stelle auf [10] verwiesen werden.

Die Parameter u und d mit $u > 1 + r > d > 0$ waren bisher frei wählbar. In [11] werden einige Möglichkeiten der Wahl dieser Parameter angegeben, die mit dem kontinuierlichen Black-Scholes-Modell durch die Anpassung der Momente des Aktienkursprozesses verträglich sind. Bezeichnet \tilde{r} den stetigen Zinssatz, so ist mit $1 + r = e^{\tilde{r}\delta t}$ eine - aufgrund der Einfachheit sehr gebräuchliche und deshalb auch im folgenden verwendete - Wahl der Parameter u , d und q nach Cox et al. (1979) gegeben mit

$$u = e^{\sigma\sqrt{\delta t}}, \quad d = e^{-\sigma\sqrt{\delta t}}, \quad q = \frac{e^{\tilde{r}\delta t} - d}{u - d}. \quad (2.6)$$

2.3 Rekursive Bewertung von Barriereoptionen im Binomialmodell und Analyse des Konvergenzverhaltens

Im arbitragefreien und rekombinierenden Binomialmodell können rekursive Berechnungsformeln für die Bewertung von Optionen angegeben werden. Die Algorithmen folgen dem Prinzip der Rückwärtsinduktion, welches auf der Martingaleigenschaft des diskontierten Preisprozesses und der Vollständigkeit des Binomialmodells beruht (siehe dazu beispielsweise [14]). Wird eine europäische down-and-out Calloption auf eine Aktie mit Kurschranke H_d und Basispreis K bepreist, muß berücksichtigt werden, daß der Wert der Option Null ist, wenn die unter dem Anfangskurs S_0 der Aktie liegende Kurschranke berührt oder unterschritten wird. Bezeichnet $c^{do}(i, j)$ den Wert eines europäischen down-and-out Calls mit Vertragsbeginn t_i und Verfallszeitpunkt t_N , so ergibt sich folgendes rekursives Rechenverfahren:

- Zum Verfallszeitpunkt $t_N = N\delta t$

$${}^{BIN}C^{do}(N, j) = \begin{cases} (u^j d^{N-j} S_0 - K)^+ & \text{wenn } u^j d^{N-j} S_0 > H_d \\ 0 & \text{wenn } u^j d^{N-j} S_0 \leq H_d. \end{cases} \quad (2.7)$$

- Zu allen Zeitpunkten $t_i, i \in \{0, 1, \dots, N-1\}, j = 0, 1, \dots, i$:

$${}^{BIN}C^{do}(i, j) = \begin{cases} \frac{1}{1+r} [q {}^{BIN}C^{do}(i+1, j+1) + (1-q) {}^{BIN}C^{do}(i+1, j)] & \text{wenn } u^j d^{i-j} S_0 > H_d \\ 0 & \text{wenn } u^j d^{i-j} S_0 \leq H_d. \end{cases} \quad (2.8)$$

Dabei wird der Index *BIN* verwendet zur Kennzeichnung von Preisen, die mit dem naiven Binomialmodell bestimmt werden. Dies ermöglicht im weiteren eine klare Unterscheidung zu den im folgenden dargestellten Verbesserungsmethoden. In Gleichung (2.7) wird der Wert der down-and-out Option in allen Knoten des Binomialbaumes zur Zeit t_N bestimmt. Durch (2.8) erfolgt die Bewertung in einem Knoten rekursiv je nachdem, ob der Aktienkurs in dem Knoten (i, j) über- oder unterhalb der Kursschranke H_d liegt. Im ersten Fall ergibt sich der Wert der Option durch die Diskontierung der Summe aus den mit den Wahrscheinlichkeiten q bzw. $1-q$ unter dem äquivalenten Martingalmaß \mathbf{Q} gewichteten Werten der Option in den Knoten $(i+1, j+1)$ und $(i+1, j)$. Im zweiten Fall ist durch die Unterschreitung der Kursschranke der Wert der Option in (i, j) Null.

Durch ähnliche Überlegungen lassen sich Rekursionsverfahren auch für die anderen Grundtypen von Barriereoptionen angeben.

Beispiel 2.1 Betrachtet wird ein down-and-out Call mit folgenden Parametern:

S_0	σ	\tilde{r}	K	H_d	T
50	0.4	0.1	50	44.55	5/12

Aus $e^{\tilde{r}\delta t} = 1 + r$ folgt $r = 0.0084$. Die in (2.2) angegebene analytische Formel liefert

$$v(0, S_0) = {}^{BS}C_0^{do}(50, 50, 5/12, 44.55) = 4.64423.$$

Wird $N = 5$, d. h. $\delta t = \frac{1}{12}$ gewählt, erhält man nach (2.6) $u = 1.1224$, $d = 0.8909$ und $q = 0.5073$. Mit Hilfe der Rekursionsformel (2.7) und (2.8) ergibt sich der in Abbildung 2.2 dargestellte Binomialbaum. In jedem Knoten sind der Aktienkurs als oberer Zahlenwert und der Wert der Option als die untere Zahl angegeben. Der Wert des Calls zur Zeit $t = 0$ nach dem Binomialmodell ist 4.78.

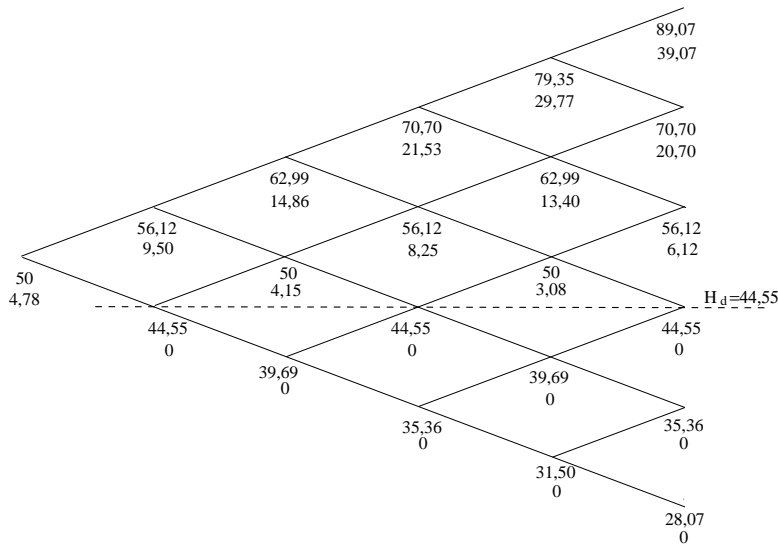


Abbildung 2.2: Binomialbaum zu Beispiel 2.1

N	$BIN_{c^{do}}(0, 0)$	Zeit Sek.
5	4.78133	0.0000
10	5.38966	0.0000
20	4.64055	0.0000
45	4.66098	0.0000
50	5.18740	0.0000
80	4.64410	0.0000
100	4.91325	0.0160
125	4.65108	0.0160
150	4.86568	0.0150
180	4.64486	0.0320
200	4.89032	0.0470
245	4.64835	0.0620
400	4.66055	0.1410
600	4.65556	0.2960
800	4.71266	0.5160
1000	4.78932	0.7970
2000	4.64544	3.0310

Tabelle 2.1: Naives Binomialmodell zu Beispiel 2.1

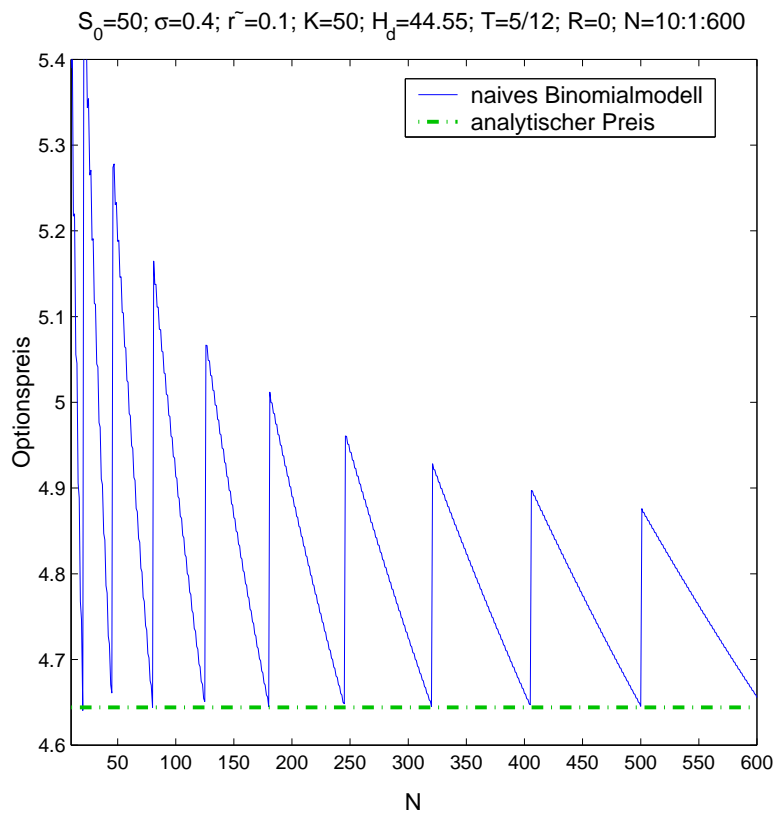


Abbildung 2.3: Analytischer Preis und Binomialpreis für den down-and-out Call in Beispiel 2.1

Wird nun der nach dem Binomialmodell berechnete Preis des down-and-out Calls in Abhängigkeit von der Diskretisierungsschrittzahl N dargestellt, so wäre eine wachsende Genauigkeit mit der Erhöhung von N wünschenswert. Jedoch nähern sich die Werte - wie Abbildung 2.3 zeigt - „sägezahnartig“, sehr langsam von oben dem analytischen Preis. Bei einer Baumtiefe von $N = 125$ ergibt sich mit 4.65108 eine vergleichsweise gute Annäherung gegenüber von $N = 525$ mit 4.81985.

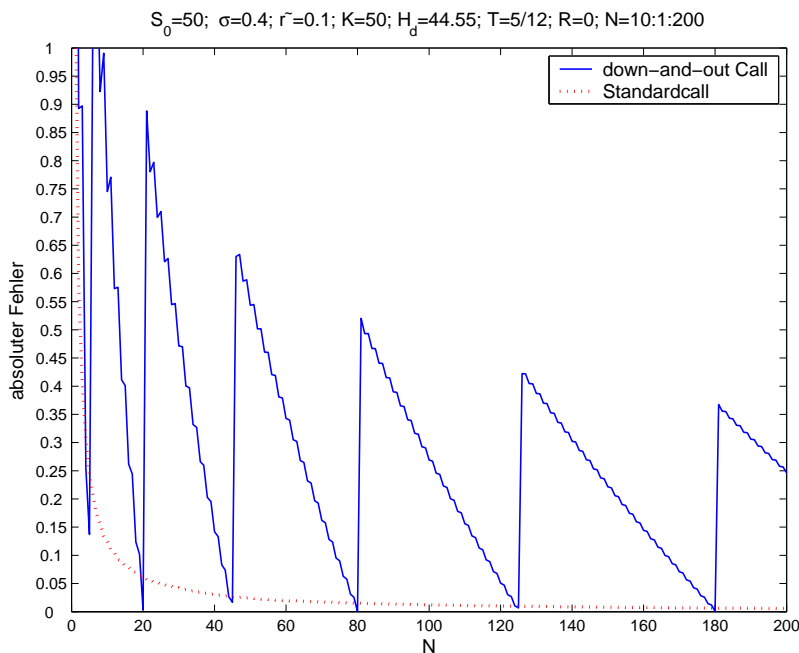


Abbildung 2.4: Absoluter Fehler für down-and-out Call aus Beispiel 2.1 und sonst identischen Standardcall

In Bild 2.4 ist der absolute Fehler bei der Bewertung des oben genannten down-and-out Calls und eines in den Parametern identischen europäischen Standardcalls im Binomialmodell über der Baumtiefe dargestellt. Die für den Standardcall berechneten Preise konvergieren schnell mit wachsender Diskretisierungsschrittzahl. Nach $N = 30$ ist der absolute Fehler $|^{BIN}C_0(50, 50, 5/12, 30) - ^{BS}C_0(50, 50, 5/12)| < 0.05$. Im Gegensatz dazu beträgt der absolute Fehler für die Barriereoption bei $N = 525$ noch 0.176.

In diesem Zusammenhang ergeben sich zwei Fragen: Welche Gründe besitzt diese „Sägezahnkonvergenz“? Warum ist gleiches nicht bei europäischen Standardvarianten festzustellen? Für die Beantwortung dieser Fragen unterscheiden Derman et al. (vgl. [3]) zwei Fehler: „quantization error“ und „specification error“. Die erstgenannte Ungenauigkeit resultiert aus der Approximation des Aktienpreisprozesses durch ein Gitter von Aktienkursen, die zu den Zeiten $t_i \in [0, T]$ beobachtet werden können. Somit ist der ermittelte Optionspreis nur korrekt, wenn der Aktienpreisprozeß tatsächlich ein solches diskretes Verhalten aufweist. Die Erhöhung der Baumtiefe führt zur Verringerung dieses Fehlers.

Der „specification error“ entsteht, weil der Binomialbaum nur unzureichend in der Lage ist, die Optionsparameter exakt zu beschreiben. Unter der Voraussetzung, daß die

Diskretisierung so gewählt wird, daß der letzte Diskretisierungszeitpunkt t_N mit dem Verfallsdatum T übereinstimmt, ergeben sich die korrekten Auszahlungen in den Knoten des Binomialbaums zu t_N . Damit existiert kein „specification error“ bei der Bewertung von europäischen Standardoptionen; bei ihnen tritt nur „quantization error“ auf. Im Gegensatz dazu hängt der Preis der Barriereoption von der Lage der Barriere im Gitter ab. Fällt die Barriere zwischen zwei Knotenlinien, so tritt das Erlöschen der Option durch die Barriere H_d im Binomialbaum erst in den Knoten direkt unter der Barriere auf (siehe Abbildung 2.5).

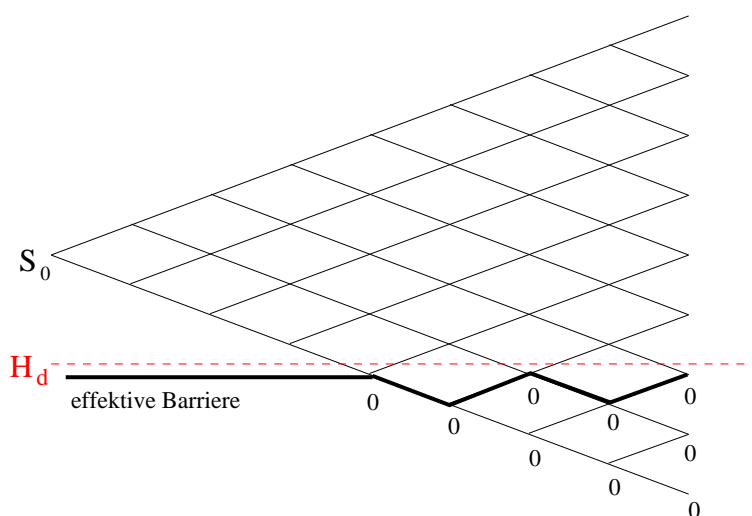


Abbildung 2.5: Specification error bei der Bewertung einer down-and-out Option

Die so bewertete Option besitzt eine Barriere, die unterhalb von H_d liegt, damit sind die durch das Binomialmodell berechneten Optionspreise höher als der analytische Preis. Der „specification error“ existiert nicht, wenn die Barriere mit einer horizontalen Knotenlinie des Binomialbaums zusammenfällt. Im Gegensatz zum „quantization error“ verschwindet der „specification error“ mit wachsender Baumtiefe nur sehr langsam. Das erklärt die im Vergleich zur Standardoption auftretende „gezackte“ verlangsamte Konvergenz. Verbesserungen des Binomialmodells müssen deshalb darauf abzielen, den „specification error“ zu verringern.

3 Methoden zur Verbesserung des Konvergenzverhaltens

In diesem Abschnitt werden vier in der Literatur vorgeschlagene Möglichkeiten der Verbesserung des naiven Binomialmodells kurz beschrieben. Ein erster Vergleich wird anhand des in Beispiel 2.1 betrachteten down-and-out Calls vorgenommen.

3.1 Wahl der Baumtiefen nach Boyle und Lau

Bewertet wird eine down-and-out Option mit konstanter Barriere H_d . Eine erste Idee, den „specification error“ zu verringern, ist, die Baumtiefe so zu wählen, daß die horizontale Knotenlinie direkt unter der Barriere H_d , möglichst nahe an H_d liegt (vgl. [12]). Dazu sei j^* eine fixierte Anzahl an Abwärtsschritten. Gesucht ist das größte N , für das gilt $S_0 d^{j^*} \leq H_d$. Mit (2.6) und $\delta t = \frac{T}{N}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} S_0 \exp\left(-\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}j^*\right) &\leq H_d \\ \sigma\sqrt{\frac{T}{N}}j^* &\geq \ln\left(\frac{S_0}{H_d}\right) \\ N &\leq \frac{\sigma^2 T (j^*)^2}{\left(\ln\left(\frac{S_0}{H_d}\right)\right)^2}. \end{aligned}$$

Für das in Abschnitt 2.3 betrachtete Beispiel 2.1 ergeben sich die in Tabelle 3.1 dargestellten Baumtiefen in Abhängigkeit von N . Ein Vergleich mit Abbildung 2.3 und

j^*	1	2	3	4	5	6	7	...
$N(j^*)$	5	20	45	80	125	180	245	...
$BIN_C^{do}(0,0)$	4.7813	4.6405	4.6610	4.6441	4.6511	4.6449	4.6483	...

Tabelle 3.1: Baumtiefen nach Boyle und Lau für 2.1

Tabelle 2.1 zeigt, daß für diese Diskretisierungsschrittzahlen eine bestmögliche Annäherung an den analytischen Preis erreicht wird. Nachteil dieser Methode ist, daß sie für Optionen mit zeitabhängiger Barriere versagt und somit keine Lösung für das eigentliche Bewertungsproblem darstellt.

3.2 Verbesserungsmethode nach Derman

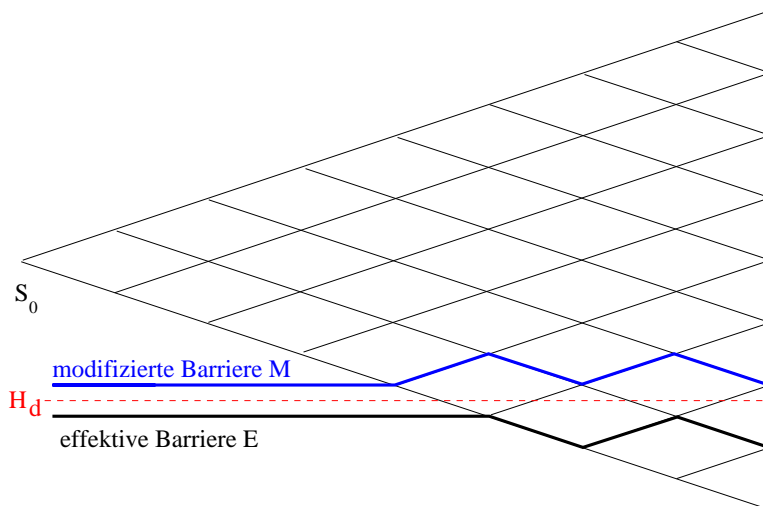


Abbildung 3.1: Modifizierte und effektive Barriere für eine down-and-out Option

Das Prinzip der in [3] angegebenen Verbesserungsmethode des Binomialmodells, wenn die Barriere nicht mit einer horizontalen Knotenlinie identisch ist, wird anhand von Abbildung 3.1 dargestellt. Zu bewerten ist ein down-and-out Call mit konstanter Barriere H_d , Anfangskurs der Aktie S_0 , Basispreis K und Rebate-Zahlung R . Die Knotenmenge E der effektiven Barriere enthält die Knoten E_i des Binomialbaums direkt unter der tatsächlichen Barriere H_d , d. h.

$$E_i = u^{j_E} d^{i-j_E} S_0 \text{ mit } j_E = \max\{0 \leq j \leq i : u^j d^{i-j} S_0 \leq H_d\} \cup \{0\}, \quad i = 0, \dots, N-1. \quad (3.1)$$

Die Knotenmenge M der modifizierten Barriere besteht aus den Knoten M_i direkt über der Barriere, wobei

$$M_i = u^{j_M} d^{i-j_M} S_0 \text{ mit } j_M = \min\{0 \leq j \leq i : u^j d^{i-j} S_0 \geq H_d\} \cup \{0\}, \quad i = 0, \dots, N-1. \quad (3.2)$$

Durch die naive Binomialmethode wird eine Option mit Barriere E statt der tatsächlichen Kursschranke H_d bewertet; die Knoten der modifizierten Barriere M erhalten zu hohe Knotenbewertungen. Ziel der Verbesserung nach Derman ist eine Korrektur der nach dem naiven Binomialmodell berechneten Knotenbewertungen der modifizierten Barriere. Dazu sei ein Zeitpunkt $i\delta t$, $1 \leq i < N$ mit $j_E \neq 0 \vee j_M \neq 0$ fixiert. Im stetigen Modell seien zur Zeit $i\delta t$ $V(S_i)$ der Wert der down-and-out Option mit Barriere H_d zum Kurs S_i und $\hat{V}(S_i)$ der Wert der down-and-out Option mit Barriere E_i aber sonst identischen Parametern. Sei \hat{V} zweimal differenzierbar, so ergibt eine Taylorreihenentwicklung von \hat{V} um M_i

$$\begin{aligned} \hat{V}(E_i) &= \hat{V}(M_i) + \hat{V}'(M_i)(E_i - M_i) + o(E_i - M_i) \\ &= \hat{V}(M_i) - \hat{V}'(M_i)(M_i - E_i) + o(M_i - E_i) \end{aligned}$$

und somit

$$\hat{V}'(M_i) = \frac{\hat{V}(M_i) - \hat{V}(E_i)}{M_i - E_i} + o(1).$$

Grundidee der Verbesserung ist, daß durch das Verschieben der Barriere von H_d nach E_i in einer Umgebung von M_i gilt

$$V(S_i) = \hat{V}(S_i - d_i) + o(d_i),$$

mit $d_i = H_d - E_i$ dem Abstand der Barrieren H_d und E_i . Insbesondere gilt

$$V(M_i) = \hat{V}(M_i - d_i) + o(d_i).$$

Erfolgt nun eine Taylorreihenentwicklung von \hat{V} um die modifizierte Barriere M_i , so gilt

$$\begin{aligned} \hat{V}(M_i - d_i) &= \hat{V}(M_i) - \hat{V}'(M_i)d_i + o(d_i) \\ &= \hat{V}(M_i) + \frac{\hat{V}(M_i) - \hat{V}(E_i)}{M_i - E_i}(E_i - H_d) + o(M_i - E_i) \\ &= \hat{V}(M_i)\frac{M_i - H_d}{M_i - E_i} + R\frac{H_d - E_i}{M_i - E_i} + o(M_i - E_i), \end{aligned}$$

da $o(d_i) = o(H_d - E_i) = o(M_i - E_i)$. Somit ergibt sich der verbesserte Optionspreis an der modifizierten Barriere

$$\hat{V}(M_i)\frac{M_i - H_d}{M_i - E_i} + R\frac{H_d - E_i}{M_i - E_i}. \quad (3.3)$$

Wird die binomiale Näherung ${}^{BIN}C^{do}(i, j_M)$ von $\hat{V}(M_i)$ in (3.3) eingesetzt, erhält man die verbesserte Knotenbewertung für den Knoten j_M der modifizierten Barriere M mit $j_M \neq 0 \vee j_E \neq 0$ zur Zeit $i\delta t$ im Binomialmodell mit

$$D_C^{do}(i, j_M) = {}^{BIN}C^{do}(i, j_M)\frac{M_i - H_d}{M_i - E_i} + R\frac{H_d - E_i}{M_i - E_i}. \quad (3.4)$$

Dabei ist für eine Option mit einer Rebate-Zahlung R in (2.7) und (2.8) Null durch R für $S_0 u^j d^{i-j} \leq H_d$ zu ersetzen.

Bemerkung 3.1 Ist keine Rebate-Zahlung vereinbart, so gilt $R = 0$ und der zweite Summand in (3.4) verschwindet.

Bemerkung 3.2 Gleichung (3.4) ist auch als Ergebnis einer Interpolation bzw. als Linearkombination interpretierbar

$$D_C^{do}(i, j_M) = \lambda {}^{BIN}C^{do}(i, j_M) + (1 - \lambda) {}^{BIN}C^{do}(i, j_M - 1)$$

mit $\lambda = \frac{M_i - H_d}{M_i - E_i}$.

Bemerkung 3.3 Fällt die Barriere H_d nicht mit einer Knotenlinie zusammen, dann ist $j_M = j_E + 1$ für $j_M \neq 0 \vee j_E \neq 0$ und damit $M_i = E_i \frac{u}{d}$, also

$$\begin{aligned} M_i - E_i &= E_i \left(\frac{u}{d} - 1 \right) \\ &= E_i (e^{2\sigma\sqrt{\delta t}} - 1) \\ &= E_i (2\sigma\sqrt{\delta t} + O(\delta t)). \end{aligned}$$

Da $E_i = H_d + h$ mit $h \leq M_i - E_i$ ist, gilt $(M_i - E_i) = H_d 2\sigma\sqrt{\delta t} + O(\delta t)$ und somit $o(M_i - E_i) = o(\sqrt{\delta t})$.

Zusammenfassend ergibt sich für knock-out Optionen nach [3] folgendes verbessertes Vorgehen:

- 1.Schritt:** Rekursive Bewertung der knock-out Option nach der naiven Binomialmethode (für down-and-out Call vgl. Formeln (2.7) und (2.8)).
- 2.Schritt:** Berechnung der verbesserten Optionswerte in den Knoten der modifizierten Barriere und erneute Rekursion mit den veränderten Knotenbewertungen. Für einen down-and-out Call ergibt sich der nach Derman verbesserte Optionswert $D_C(0, 0)$ aus

- Zum Verfallszeitpunkt $t_N = N\delta t$

$$D_C^{do}(N, j) = \text{BIN}_C^{do}(N, j). \quad (3.5)$$

- Für t_i , $i \in \{0, 1, \dots, N-1\}$, $j = j_M, \dots, i$ mit $j_M \neq 0 \vee j_E \neq 0$:

$$D_C^{do}(i, j) = \begin{cases} \frac{1}{1+r} [q D_C^{do}(i+1, j+1) + (1-q) D_C^{do}(i+1, j)] & \text{wenn } u^j d^{i-j} S_0 > H_d, \\ & j \neq j_M \\ \text{BIN}_C^{do}(i, j) \frac{M_i - H_d}{M_i - E_i} + R \frac{H_d - E_i}{M_i - E_i} & \text{wenn } j = j_M. \end{cases} \quad (3.6)$$

- Für t_i , $i \in \{0, \dots, N-1\}$, $j = 0, 1, \dots, i$ mit $j_M = 0 \wedge j_E = 0$:

$$D_C^{do}(i, j) = \frac{1}{1+r} [q D_C^{do}(i+1, j+1) + (1-q) D_C^{do}(i+1, j)]. \quad (3.7)$$

N	$D_{C^{do}}(0, 0)$	Zeit Sek.
5	4.78024	0.0000
10	4.60449	0.0000
20	4.63918	0.0000
45	4.65947	0.0160
50	4.57556	0.0160
80	4.64257	0.0310
100	4.59919	0.0470
125	4.64955	0.0470
150	4.60959	0.0630
180	4.64335	0.0790
200	4.61246	0.1250
245	4.64686	0.1560
400	4.64164	0.3430
600	4.64272	0.6870
800	4.63832	1.1410
1000	4.63656	1.7030
2000	4.64409	6.5000

Tabelle 3.2: Optionspreise und Rechenzeiten für Beispiel 2.1 nach Implementierung der Verbesserung nach Derman

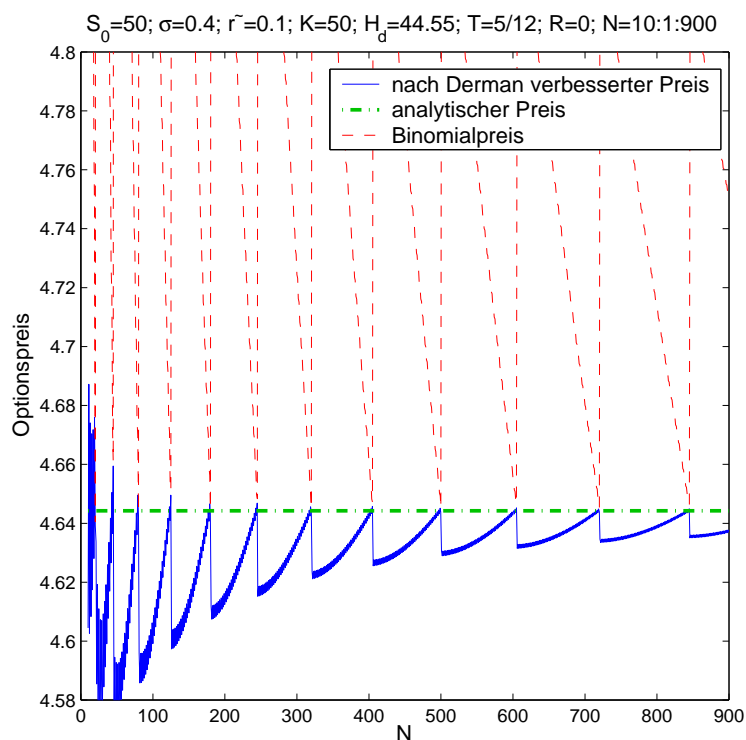


Abbildung 3.2: Analytischer Preis und Binomialpreis vor und nach Implementierung der Verbesserung nach Derman für down-and-out Call in Beispiel 2.1

Tabelle 3.2 und Abbildung 3.2 zeigen die Ergebnisse einer so modifizierten Binomialmethode am im Beispiel 2.1 betrachteten down-and-out Call. Es wird eine deutliche Verbesserung des Konvergenzverhaltens gegenüber dem naiven Binomialmodell erreicht. Die Größe der Sägezähne wird reduziert. Im Gegensatz zum naiven Binomialmodell erfolgt eine Annäherung von unten an den analytischen Preis von 4.64423. Es ergeben sich für die nach Boyle und Lau bestimmten Baumtiefen die bestmöglichen Annäherungen an den analytischen Preis. Ein Nachteil dieses Vorgehens ist, daß eine zweimalige Rekursion notwendig ist, was sich in etwas höheren Rechenzeiten im Vergleich zum herkömmlichen Binomialmodell ausdrückt (vergleiche dazu die Tabellen 3.2 und 2.1). Dennoch zeichnet sich diese Methode der Verbesserung des Binomialmodells durch eine hohe Flexibilität aus. Sie ist ohne weiteres auf alle anderen Grundformen von Barriereoptionen anwendbar. Außerdem läßt sich das Verfahren auch auf Optionen mit zeitabhängigen Barrieren anwenden. Bei einem down-and-out Call mit Barriere $H_d(t)$ wird H_d in (3.1), (3.2) und der obigen Rekursion (3.5)-(3.7) durch $H_d(i\delta t)$ ersetzt. Testrechnungen zu entsprechenden Beispielen befinden sich in Abschnitt 4.

3.3 Korrekturterme nach Gobet

Die Darstellung der konvergenzverbessernden Methode nach Gobet wird auf den Fall einer down-and-out Option mit konstanter Barriere H_d ohne Rebate-Zahlung ($R = 0$) beschränkt. Die entsprechenden Korrekturterme für up-and-out Optionen und double-barrier Optionen mit konstanten Barrieren sind in [6] zu finden.

Betrachtet wird die logarithmische Aktienkursbewegung

$$X_t = \ln S_t = x_0 + \tilde{\mu}t + \sigma W_t \quad (3.8)$$

mit $x_0 = \ln S_0$, $\tilde{\mu} = \tilde{r} - \frac{\sigma^2}{2}$ und S_t aus (2.1). Sei $\tau := \inf\{t > 0 : X_t \notin (h_d, \infty)\}$ mit $h_d = \ln H_d$. Die Funktion

$$v(t, x) = \mathbf{E}\{e^{-\tilde{r}(T-t)} f(X_T) I_{\{T-t < \tau\}} | X_t = x\}$$

ist Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + \mathcal{G}v - \tilde{r}v = 0 & \text{für } (t, x) \in [0, T) \times (h_d, \infty) \\ v(T, x) = f(x) & \text{für } x \in (h_d, \infty) \\ v(t, h_d) = 0 & \text{für } t \in [0, T) \end{cases}$$

mit $\mathcal{G}u(x) = \tilde{\mu}u'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2u''(x)$. Die Auszahlungsfunktion f der Option besitze folgende Eigenschaften:

H1 Die Funktion f ist stetig; wenn $K \leq H_d$ ist $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ auf dem Intervall (H_d, ∞) , für $K \in (H_d, \infty)$ ist $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ auf jedem Intervall $(H_d, K]$ und $[K, \infty)$.

H2 Es sei die exponentielle Wachstumsbedingung erfüllt: $|f'(x)| + |f''(x)| \leq C \exp(c|x|)$ für positive Konstanten C und c .

Desweiteren werde die binomiale Approximation von (3.8) mit

$$X_{t_i}^N = x_0 + \sum_{j=1}^i \xi_j \sigma \sqrt{\delta t}$$

bezeichnet, wobei $t_i \in \mathbb{I}$ aus (2.3) und $(\xi_i)_{1 \leq i \leq N}$ i. i. d. Zufallsgrößen mit $\mathbf{P}(\xi_i = 1) = p_N = \frac{1}{2} + \frac{\tilde{\mu}}{2\sigma} \sqrt{\delta t}$ und $\mathbf{P}(\xi_i = -1) = 1 - p_N$.

Bemerkung 3.4 Dieses Binomialmodell bezüglich dem logarithmierten Aktienpreisprozeß ist äquivalent zu der in (2.5) gegebenen Modellierung, denn $X_{t_i}^N = \ln S_i = \ln S_0 + \sum_{k=1}^i \ln Y_k$. Mit (2.6) gilt $\ln Y_k = \sigma \sqrt{\delta t}$ mit Wahrscheinlichkeit p_N und $\ln Y_k = -\sigma \sqrt{\delta t}$ mit Wahrscheinlichkeit $1 - p_N$, da durch Gleichsetzen der Erwartungswerte $p_N \sigma \sqrt{\delta t} - (1 - p_N) \sigma \sqrt{\delta t} = (\tilde{r} - \frac{\sigma^2}{2}) \delta t$ gilt. Umstellen ergibt $p_N = \frac{1}{2} + \frac{\tilde{\mu}}{2\sigma} \sqrt{\delta t}$.

Es sei $\tau_N := \inf\{t_i : X_{t_i}^N \notin (h_d, \infty)\}$. Das naive Binomialmodell errechnet rekursiv

$${}^{BIN}c^{do}(0, 0) = \mathbf{E}\{e^{-\tilde{r}T} f(X_T^N) I_{\{T < \tau_N\}}\}$$

als Approximation für den analytischen Preis

$$\mathbf{E}\{e^{-\tilde{r}T} f(X_T) I_{\{T < \tau\}}\}.$$

Dabei entsteht der Fehler

$$Err(N) := \mathbf{E}\{e^{-\tilde{r}T} f(X_T^N) I_{\{T < \tau_N\}}\} - \mathbf{E}\{e^{-\tilde{r}T} f(X_T) I_{\{T < \tau\}}\}. \quad (3.9)$$

Gelingt es, eine Approximation dieses Fehlers zu bestimmen, so kann diese als Korrekturterm für die Bestimmung eines verbesserten Binomialpreises genutzt werden. Gobet erhält in [6] die im folgenden Satz angegebene Approximation.

Satz 3.5

Sei $h_d^N = \sup\{x_0 - i\sigma\sqrt{\delta t} \leq h_d : i \in \{0, 1, \dots, N\}\}$ und die Auszahlungsfunktion f erfülle die Voraussetzungen H1 und H2. Dann gilt für den Fehler (3.9) des Binomialmodells mit Baumtiefe N

$$Err(N) = e^{-\tilde{r}T} (h_d - h_d^N) \mathbf{E} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} v(\tau, h_d+) I_{\{\tau \leq T\}} \right\} + o(\sqrt{\delta t})$$

mit endlichem Wert für

$$\mathbf{E} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} v(\tau, h_d+) I_{\{\tau \leq T\}} \right\}. \quad (3.10)$$

Dabei bezeichnet $\frac{\partial}{\partial x} v(\tau, h_d+)$ die rechtsseitige Ableitung.

Ähnliche Sätze gibt Gobet für Barriereoptionen mit konstanten oberen Barrieren und konstanten Doppelbarrieren an. Diese sind angegeben in [6]. Für (3.10) erhält Gobet

$$\int_{h_d}^{\infty} f(y) \frac{2}{\sigma^2} \exp\left(\frac{\tilde{\mu}(y - x_0)}{\sigma^2} - \frac{\tilde{\mu}^2 T}{2\sigma^2}\right) g(T, 2h_d - x_0 - y) dy$$

mit $g(t, b) = \frac{|b|}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t^3}} \exp\left(-\frac{b^2}{2\sigma^2 t}\right)$. Damit ergibt sich mit obigen Überlegungen für einen down-and-out Call mit konstanter Barriere H_d der verbesserte Preis

$$G_{c^{do}}(0, 0) = {}^{BIN}c^{do}(0, 0) - e^{-\tilde{r}T} (h_d - h_d^N) \mathbf{E} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} v(\tau, h_d+) I_{\{\tau \leq T\}} \right\} \quad (3.11)$$

mit ${}^{BIN}c^{do}(0, 0)$ als Ergebnis der Rekursion aus (2.7) und (2.8). Die Auswertung des Erwartungswertes in (3.11) geschieht durch Umformungen, die auf die Verteilungsfunktion der Normalverteilung $\Phi(\cdot)$ zurückführen. Im Falle eines down-and-out Calls mit konstanter Barriere H_d ergibt sich für den Erwartungswert in (3.11)

$$e^{y_2} \left(\frac{2(\tilde{\mu} + \sigma^2)}{\sigma^2} e^{y_1} (1 - \Phi(z_1)) + \frac{2\tilde{\mu}}{\sigma^2} K (\Phi(z_2) - 1) + \frac{2}{\sqrt{2\pi T} \sigma^2} \left(e^{y_1 - \frac{z_1^2}{2}} - K e^{-\frac{z_2^2}{2}} \right) \right)$$

mit

$$\begin{aligned}
 h_{dK} &= h_d \vee \ln K = \max\{h_d, \ln K\}, \\
 y_1 &= \frac{2\tilde{\mu}T + 4h_d - 2x_0 + \sigma^2T}{2}, & z_1 &= \frac{h_{dK} - \tilde{\mu}T - 2h_d + x_0 - \sigma^2T}{\sigma\sqrt{T}}, \\
 y_2 &= \frac{2h_d\tilde{\mu} - 2x_0\tilde{\mu}}{\sigma^2}, & z_2 &= \frac{h_{dK} - \tilde{\mu}T - 2h_d + x_0}{\sigma\sqrt{T}}.
 \end{aligned}$$

Damit kann der verbesserte Preis eines down-and-out Calls bestimmt werden. Zusammenfassend ergibt sich folgender verbesserter Bewertungsalgorithmus:

- 1. Schritt:** Bewertung des down-and-out Calls durch das naive Binomialmodell mit Hilfe der Rekursion (2.7), (2.8).
- 2. Schritt:** Korrektur des nach dem naiven Binomialmodell ausgerechneten Optionspreises wie in Gleichung (3.11) angegeben.

N	$G_{c^{do}}(0,0)$	Zeit Sek.
5	4.78006	0.0000
10	4.36332	0.0000
20	4.63928	0.0000
45	4.65971	0.0000
50	4.53090	0.0000
80	4.64283	0.0160
100	4.61988	0.0160
125	4.64981	0.0160
150	4.62821	0.0160
180	4.64360	0.0320
200	4.62476	0.0470
245	4.64708	0.0630
400	4.64386	0.1410
600	4.64400	0.2810
800	4.64275	0.5000
1000	4.63794	0.7650
2000	4.64417	2.9060

Tabelle 3.3: Optionspreise und Rechenzeiten für Beispiel 2.1 nach Implementierung des Korrekturterms von Gobet

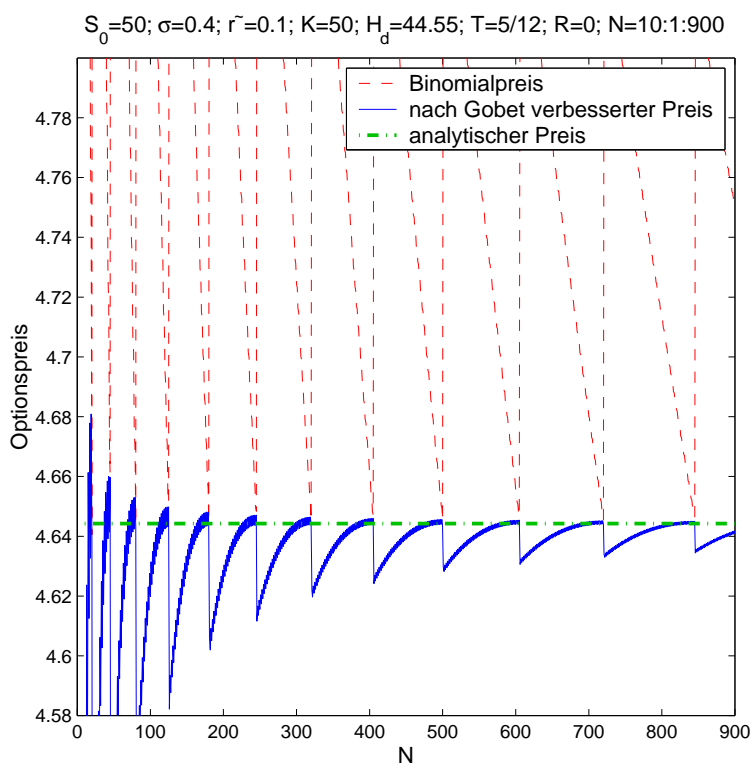


Abbildung 3.3: Analytischer Preis und Binomialpreis vor und nach Implementierung des Korrekturterms nach Gobet für down-and-out Call in Beispiel 2.1

Für den in 2.1 betrachteten down-and-out Call sind die Ergebnisse in Abbildung 3.3 und Tabelle 3.3 in Abhängigkeit von der Baumtiefe dargestellt. Es ist eine beschleunigte Konvergenz im Vergleich zum naiven Binomialmodell zu erkennen. Eine bestmögliche Annäherung ist wiederum für die nach Boyle und Lau bestimmten Baumtiefen gegeben. Insgesamt läßt sich die von Gobet gefundene Korrektur jedoch nicht ohne weiteres auf Optionen mit zeitabhängiger Barriere anwenden, da die Herleitung voraussetzt, daß die Knotenlinie $h_d^N = \sup\{x_0 - i\sigma\sqrt{\delta t} \leq h_d : i \in \{0, 1, \dots, N\}\}$ einen konstanten Abstand zur Barriere h_d besitzt.

3.4 Binomialmethode nach Rogers und Stapleton

Eine grundlegend andere Herangehensweise beschreiben Rogers und Stapleton in [15]. Sie erreichen die Zeitdiskretisierung der Laufzeit $[0, T]$ durch das Betrachten von Stoppzeiten, zu denen der logarithmische Aktienkursprozeß im Niveau entweder um $\Delta x > 0$ gefallen oder gewachsen ist. Für die so gebildete Irrfahrt werden die Übergangswahrscheinlichkeiten geeignet bestimmt. Das so veränderte Binomialmodell liefert ausgezeichnete Ergebnisse bei der Optionspreisbestimmung, wie sich zeigen wird.

3.4.1 Grundidee der Verbesserung

Betrachtet wird der logarithmische Aktienpreisprozeß aus (3.8). Zu einem fixierten $\Delta x > 0$ werden die Stoppzeiten

$$\tau_0 = 0; \quad \tau_{i+1} = \inf\{t > \tau_i : |X_t - X_{\tau_i}| > \Delta x\} \quad i \geq 0$$

betrachtet. Die Irrfahrt $(\xi_i)_{i \geq 0} = (X_{\tau_i})_{i \geq 0}$ approximiert den Prozeß X_t .

Um diese Modellierung zur Bewertung von Optionen mit Laufzeit $[0, T]$ verwenden zu können, sei $(\xi_i)_{0 \leq i \leq \nu}$ mit $\nu = \sup\{n : \tau_n < T\}$ die Approximation von $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$. In Abbildung 3.4 ist eine Realisierung von $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ und die dazugehörige Approximation $(\xi_i)_{0 \leq i \leq \nu}$ dargestellt.

Es sind zwei Probleme zu lösen:

P1 Finden der Wahrscheinlichkeit für eine Aufwärtsbewegung $p(x)$ der Irrfahrt ξ_i (Wahrscheinlichkeit für eine Aufwärtsbewegung um Δx von X_t , wenn der Prozeß in x startet).

P2 Approximation der Verteilung von ν .

Sind P1 und P2 gelöst, so kann der Preis eines Claims mit Laufzeit $[0, T]$ approximiert werden durch

$$e^{\tilde{r}T} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(\nu = n) \phi_n(0, x_0),$$

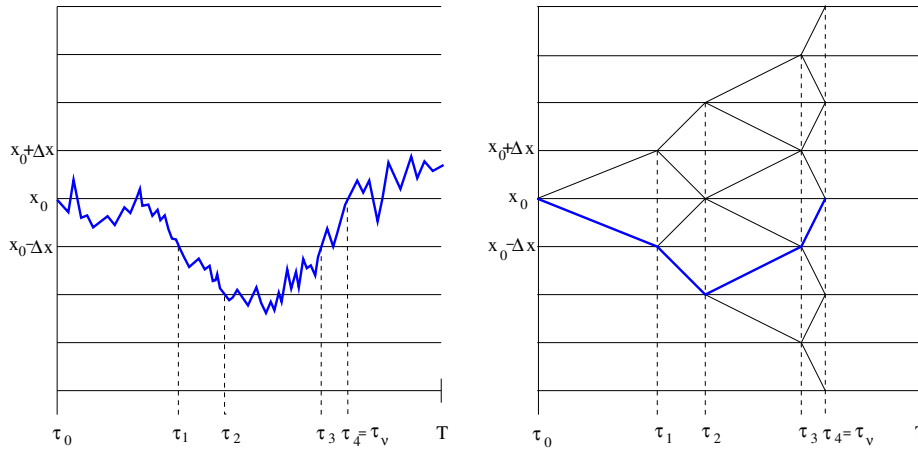


Abbildung 3.4: Realisierung $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ und die dazugehörige Approximation $(\xi_i)_{0 \leq i \leq \nu}$

wobei sich $\phi_n(0, x_0)$ aus der binomialen Rekursion

$$\begin{cases} \phi_n(n, x) = f(x) \\ \phi_n(i, x) = p(x)\phi_n(i+1, x+\Delta x) + q(x)\phi_n(i+1, x-\Delta x) \quad i = n-1, \dots, 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

mit $f(x)$ als Auszahlungsfunktion, $q(x) = 1 - p(x)$ und Werten x aus dem Gitter $x_0 + (\Delta x)\mathbb{Z}$ ergibt. Die nächsten beiden Abschnitte sind der Lösung der Probleme P1 und P2 gewidmet.

3.4.2 Wahrscheinlichkeit einer Aufwärtsbewegung

Sei X_t der logarithmierte Aktienpreisprozeß (3.8). Gesucht ist eine streng monotone Funktion $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $s \in C^2(\mathbb{R})$, die durch die Transformation $Y_t = s(X_t)$ den Prozeß X_t in ein Martingal Y_t überführt. Nach dem Satz von Ito genügt Y_t der Differentialgleichung

$$dY_t = \left(\frac{1}{2}\sigma^2 s'' + \tilde{\mu} s' \right) dt + \sigma s' dW_t.$$

Nullsetzen des Driftterms führt zu einer homogenen linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten für s

$$\frac{1}{2}\sigma^2 s'' + \tilde{\mu} s' = 0.$$

Wird diese gelöst, so ergibt sich

$$s(x) = -A \exp\left(-\frac{2\tilde{\mu}}{\sigma^2}x\right) + B \quad (3.13)$$

mit gewissen Konstanten A und B . Die Funktion (3.13) heißt *scale function* der arithmetischen Brownschen Bewegung.

Betrachtet wird der Prozeß X_t , der im Punkt x mit $a < x < b$ startet und entsprechend $Y_t = s(X_t)$. Es werden die Stoppzeiten $\tau_a = \inf\{t \geq 0 : X_t = a\} = \inf\{t \geq 0 : Y_t = s(a)\}$

und $\tau_{a,b} = \min\{\tau_a, \tau_b\}$ definiert. Nach dem Optional Sampling Theorem (vgl. [10]) gilt für alle festen Werte t

$$Y_0 = \mathbf{E}Y_{t \wedge \tau_{a,b}}$$

also auch für $t \rightarrow \infty$ mit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E}Y_{t \wedge \tau_{a,b}} = \mathbf{E}Y_{\tau_{a,b}}$$

und somit

$$\begin{aligned} s(x) = Y_0 &= \mathbf{E}Y_{\tau_{a,b}} \\ &= s(a)\mathbf{P}(\tau_a < \tau_b) + s(b)\mathbf{P}(\tau_b < \tau_a) \\ &= s(a)(1 - \mathbf{P}(\tau_b < \tau_a)) + s(b)\mathbf{P}(\tau_b < \tau_a). \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Wahrscheinlichkeit einer Aufwärtsbewegung mit

$$\mathbf{P}(\tau_b < \tau_a) = \frac{s(x) - s(a)}{s(b) - s(a)}. \quad (3.14)$$

Mit Hilfe von (3.14) ist die Wahrscheinlichkeit einer Aufwärtsbewegung in der Rekursion (3.12) gegeben durch

$$p(x) = \frac{s(x) - s(x - \Delta x)}{s(x + \Delta x) - s(x - \Delta x)}.$$

Wird

$$\tilde{s}(x) = -e^{-2cx} \quad (3.15)$$

mit

$$c = \frac{\tilde{\mu}}{\sigma^2} \quad (3.16)$$

gesetzt, so ist

$$p(x) = \frac{1 - \tilde{s}(-\Delta x)}{\tilde{s}(\Delta x) - \tilde{s}(-\Delta x)} = \frac{e^{2c\Delta x} - 1}{e^{2c\Delta x} - e^{-2c\Delta x}} \quad (3.17)$$

und

$$q(x) = 1 - p(x) = \frac{1 - e^{-2c\Delta x}}{e^{2c\Delta x} - e^{-2c\Delta x}}. \quad (3.18)$$

Für die Bewertung von knock-out Optionen ist es nicht notwendig, die Barriere genau auf eine Gitterlinie in $x_0 + (\Delta x)\mathbb{Z}$ zu legen. Stattdessen werden die Übergangswahrscheinlichkeiten angepaßt. Im Falle einer unteren Barriere H_d wird die Wahrscheinlichkeit einer Aufwärtsbewegung für die Gitterlinie

$$x_* = \min\{(x_0 - i\Delta x) : i \in \mathbb{N}, x_0 - i\Delta x > \ln H_d\} \quad (3.19)$$

direkt über der Barriere verändert. Mit $a = \ln H_d$ und $b = x_* + \Delta x$ erhält man aus (3.14) mit (3.15)

$$p(x_*) = \frac{\tilde{s}(x_*) - \tilde{s}(\ln H_d)}{\tilde{s}(x_* + \Delta x) - \tilde{s}(\ln H_d)}. \quad (3.20)$$

Mit der komplementären Wahrscheinlichkeit $q(x_*)$ wird die Barriere getroffen und das Optionsrecht der knock-out Option erlischt. Für eine Vereinfachung der Rekursion wird

diese Wahrscheinlichkeit Null gesetzt. Für Optionen mit oberer Barriere H_u wird in gleicher Weise die Wahrscheinlichkeit einer Abwärtsbewegung in der Gitterlinie $x^* = \max\{(x_0 + i\Delta x) : i \in \mathbb{N}, x_0 + i\Delta x < \ln H_u\}$ direkt unter der Barriere verändert. Mit $a = x^* - \Delta x$ und $b = \ln H_u$ erhält man aus (3.14) mit (3.15)

$$q(x^*) = 1 - p(x^*) = \frac{\tilde{s}(\ln H_u) - \tilde{s}(x^*)}{\tilde{s}(\ln H_u) - \tilde{s}(x^* - \Delta x)}.$$

Durch dieselbe Begründung wie bei unteren Barrieren wird $p(x^*) = 0$ gesetzt. Damit sind die Wahrscheinlichkeiten in der Rekursion (3.12) bestimmt.

3.4.3 Die Wahrscheinlichkeiten $\mathbf{P}(\nu = n)$

Für die Auswertung der Wahrscheinlichkeiten $\mathbf{P}(\nu = n)$ ist in [15] folgender wichtige Satz angegeben.

Satz 3.6

Die Zufallsgrößen $(\tau_{i+1} - \tau_i)_{i \geq 0}$ sind i. i. d.; ihre Verteilung ist gegeben durch die Laplacetransformierte

$$\psi(\lambda) = \mathbf{E}\{\exp(-\lambda\tau_1)\} = \frac{\cosh(c\Delta x)}{\cosh(\gamma\Delta x)} \quad (3.21)$$

mit

$$\gamma = \frac{\sqrt{\tilde{\mu} + 2\lambda\sigma^2}}{\sigma^2}$$

und c aus (3.16). Außerdem sind sie unabhängig von der Irrfahrt ξ .

Bemerkung 3.7 Aus der Laplacetransformierten (3.21) lassen sich die Momente von τ_1 bestimmen. Es ergeben sich die ersten drei Momente mit

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\tau_1 &= m(\Delta) = \frac{\Delta x}{\tilde{\mu}} \hat{c}, \\ \mathbf{E}\tau_1^2 &= \frac{2\Delta x^2}{\tilde{\mu}^2} \hat{c}^2 + \frac{\Delta x \sigma^2}{\tilde{\mu}^3} \hat{c} - \frac{\Delta x^2}{\tilde{\mu}^2}, \\ \mathbf{E}\tau_1^3 &= \frac{6\Delta x^3}{\tilde{\mu}^3} \hat{c}^3 + \frac{6\Delta x^2}{\tilde{\mu}^4} \sigma^2 \hat{c}^2 + \left(\frac{3\sigma^4 \Delta x}{\tilde{\mu}^5} - \frac{5\Delta x^3}{\tilde{\mu}^3} \right) \hat{c} - \frac{3\Delta x^2}{\tilde{\mu}^4} \sigma^2, \end{aligned} \quad (3.22)$$

wobei $\hat{c} = \tanh(c\Delta x)$.

Das Ziel ist, mit Hilfe des Satzes 3.6, eine Aussage über die Wahrscheinlichkeiten $\mathbf{P}(\nu = n)$ zu machen. Da $\mathbf{P}(\nu \geq n) = \mathbf{P}(\tau_n < T)$ gilt, ist

$$\mathbf{P}(\nu = n) = \mathbf{P}(\nu \geq n) - \mathbf{P}(\nu \geq n + 1) = \mathbf{P}(\tau_n < T) - \mathbf{P}(\tau_{n+1} < T).$$

Da $\tau_n = \sum_{i=1}^n (\tau_i - \tau_{i-1})$ gilt und die Summanden unabhängig, identisch verteilte Zufallsgrößen sind, gilt nach dem Zentralen Grenzwertsatz

$$\frac{\tau_n - nm(\Delta)}{\sqrt{n}\sigma(\Delta)} \sim N(0, 1)$$

mit $m(\Delta)$ aus (3.22) und

$$\sigma^2(\Delta) = \mathbf{E}\tau_1^2 - (\mathbf{E}\tau_1)^2.$$

Da die Anwendung des Zentralen Grenzwertsatzes eine gute Annäherung erst für große n erzeugt, wird eine Erhöhung der Genauigkeit für kleine n mit Hilfe des Satzes von Petrov in [13] erreicht durch

$$\mathbf{P}\left(\frac{\tau_1 - nm(\Delta)}{\sigma(\Delta)\sqrt{n}} \leq x\right) = \Phi(x) + Q_1(x) + o(n^{-1/2}).$$

Für den ersten Entwicklungsterm $Q_1(x)$ ergibt sich

$$Q_1(x) = \frac{1}{\sqrt{72\pi n}} e^{-\frac{x^2}{2}} (1-x^2) \frac{\mathbf{E}\{(\tau_1 - m(\Delta))^3\}}{(\sigma(\Delta))^3}$$

mit

$$\frac{\mathbf{E}\{(\tau_1 - m(\Delta))^3\}}{(\sigma(\Delta))^3} = \frac{\Delta x (A + B + C)}{\sqrt{c\Delta x^3} (1 + s(2\Delta x) + 4\Delta x cs(\Delta x))^{3/2}},$$

wobei

$$\begin{aligned} A &= 12c\Delta x (s(2\Delta x) + s(\Delta x)), \\ B &= 8c^2\Delta x^2 (s(\Delta x) - s(2\Delta x)), \\ C &= 3(1 - s(\Delta x) + s(2\Delta x) + s(3\Delta x)). \end{aligned}$$

Damit sind die beiden Probleme P1 und P2 gelöst und die in (3.12) angegebene Formel kann zur Bestimmung des Optionspreises genutzt werden. Jedoch ist in dieser Form eine Vergleichbarkeit mit den in den vorangegangenen Abschnitten beschriebenen Verbesserungsmethoden noch nicht gegeben, denn dieses Verfahren fixiert ein $\Delta x > 0$, wohingegen in den anderen Verfahren eine Baumtiefe N vorgegeben wird. Diese Schwierigkeit wird überwunden, indem zu einem gegebenen N ein $\Delta x > 0$ so bestimmt wird, das gilt

$$\mathbf{E}\tau_1 = \frac{\Delta x}{\tilde{\mu}} \tanh(c\Delta x) = \frac{T}{N}. \quad (3.23)$$

Zusammenfassend ist der faire Preis eines down-and-out Calls mit unterer Barriere H_d nach Rogers/Stapleton wie folgt bestimmbar:

1. **Schritt:** Bestimmung eines Δx zu einem gegebenen N , so daß (3.23) gilt.
2. **Schritt:** Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten $\mathbf{P}(\nu = n)$.
3. **Schritt:** Durchführung der binomialen Rekursion für $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{cases} {}^{RS}C_n^{do}(n, x) = (e^x - K)^+ \\ {}^{RS}C_n^{do}(i, x) = p(x) {}^{RS}C_n^{do}(i+1, x + \Delta x) + q(x) {}^{RS}C_n^{do}(i+1, x - \Delta x) \\ \qquad \qquad \qquad i = n-1, \dots, 0 \end{cases}$$

mit $p(x_*)$ aus (3.20) und $q(x_*) = 0$ für (3.19) und $p(x)$ und $q(x)$ aus (3.17) und (3.18) für $x > x_*$.

4. **Schritt:** Berechnung des Optionspreises mit ${}^{RS}C^{do} = e^{-\tilde{r}T} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(\nu = n) {}^{RS}C_n^{do}(0, x_0)$.

N	5	10	20	45	50	80	100
${}^{RS}C^{do}$	4.55736	4.57693	4.62380	4.63503	4.63469	4.63907	4.63907

Tabelle 3.4: Optionspreise nach Rogers/Stapleton für Beispiel 2.1

In Tabelle 3.4 sind die Ergebnisse für den down-and-out Call nach Beispiel 2.1 dargestellt. Die Ergebnisse zeigen im Vergleich zum naiven Binomialmodell eine beschleunigte Konvergenz gegen den analytischen Preis von 4.64423. Die Approximation kann noch weiter verbessert werden, indem eine Korrektur der Auszahlung vorgenommen wird. Durch die obige Rekursion wird für einen down-and-out Call mit Barriere H_d

$$e^{-\tilde{r}T} \mathbf{E}\{(S_{\tau_{N(T)}} - K)^+ I_{\{\tau > \tau_{N(T)}\}} | S_t = e^x\}$$

mit $N(T) = \sup\{n : \tau_n \leq T\}$ und $\tau = \inf\{t > 0 : S_t \notin (H_d, \infty)\}$ anstelle von

$$e^{-\tilde{r}T} \mathbf{E}\{(S_T - K)^+ I_{\{\tau > T\}} | S_t = e^x\}$$

bestimmt. Dies führt zu einem Fehler, denn im allgemeinen gilt

$$S_{\tau_{N(T)}} = e^x \neq S_T = e^{x+\zeta}$$

(siehe Abbildung 3.4). Die Idee ist deshalb, anstelle von $S_{\tau_{N(T)}}$ mit den bedingten Erwartungswerten

$$\mathbf{E}\{S_T | S_{\tau_{N(T)}} = e^x\} = \mathbf{E}\{e^{x+\zeta} | S_{\tau_{N(T)}} = e^x\} = \int_{-\Delta x}^{\Delta x} h(y) e^{x+y} dy$$

zu rechnen, wobei $h(y)$ die bedingte Dichte ist. Nach der Bestimmung der Dichte kann der oben angegebene Algorithmus verbessert werden, wenn anstelle der Auszahlung $(e^x - K)^+$

für $x \in x_0 + (\Delta x)\mathbb{Z}$ die Erwartung

$$\int_{-\Delta x}^{\Delta x} h(y) (e^{x+y} - K)^+ dy$$

eingesetzt wird, wobei

$$h(y) = \begin{cases} \frac{e^{2c(y+\Delta x)} - 1}{\Delta x (e^{2c\Delta x} - 1)} & y \leq 0 \\ \frac{-e^{2cy} + e^{2c\Delta x}}{\Delta x (e^{2c\Delta x} - 1)} & y \geq 0. \end{cases}$$

N	$RS_{c^{do}}$	Zeit Sek.
5	4.64282	0.0000
10	4.61950	0.0150
20	4.64450	0.0470
45	4.64420	0.1870
50	4.64295	0.2030
80	4.64422	0.4230
100	4.64319	0.5780
125	4.64423	0.7970
150	4.64366	1.0320
180	4.64423	1.3440
200	4.64395	1.5780
245	4.64424	2.1100
400	4.64419	4.3910
600	4.64420	8.8280
800	4.64417	14.515
1000	4.64420	21.875
2000	4.64420	79.890

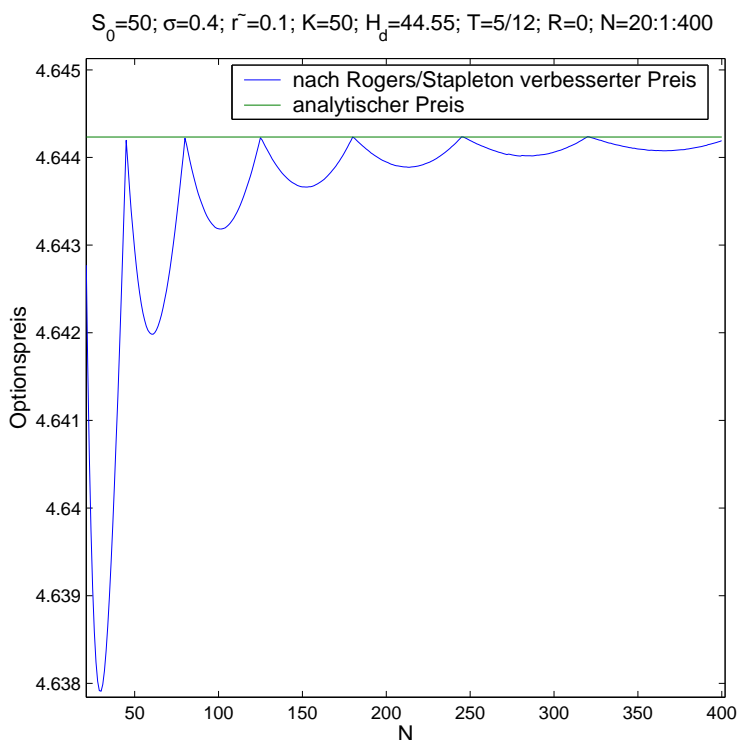


Tabelle 3.5: Optionspreise und Rechenzeiten für Beispiel 2.1 bei der Implementierung des Binomialmodells nach Rogers/Stapleton

Abbildung 3.5: Analytischer Preis, naiver Binomialpreis und Preis nach Binomialmodell von Rogers/Stapleton für den down-and-out Call in Beispiel 2.1

Wird diese Korrektur für den down-and-out Call in Beispiel 2.1 implementiert, so ergeben sich die in Abbildung 3.5 und Tabelle 3.5 angegebenen Optionspreise und Rechenzeiten.

Der Vergleich mit Tabelle 3.4 zeigt eine deutliche Konvergenzbeschleunigung durch die Berücksichtigung der Korrektur der Auszahlung. Die Optionspreise konvergieren sehr schnell mit wachsender Baumtiefe gegen den analytischen Preis von 4.64423, jedoch ist eine deutliche Erhöhung der Rechenzeiten beim Vergleich mit Tabelle 2.1 festzustellen. Im Gegensatz zum naiven Binomialmodell nähern sich die nach Rogers/Stapleton berechneten Preise von unten dem analytischen Preis. Wiederum ist eine bestmögliche Annäherung an den analytischen Preis für die nach Boyle und Lau bestimmten Baumtiefen gegeben.

4 Numerische Ergebnisse

Im ersten Abschnitt erfolgt ein Vergleich für den in Kapitel 3 betrachteten down-and-out Call mit konstanter Barriere. Danach werden down-and-out Calls mit linearer Barriere und double-barrier Optionen mit konstanten und linearen Barrieren betrachtet. Die Beispiele wurden so ausgewählt, daß, wenn möglich, ein Vergleich mit anderen in der Literatur betrachteten Verfahren erfolgen kann. Für die Bewertung der down-and-out Calls mit veränderlicher Barriere kommen von den hier betrachteten Verfahren nur die Methoden nach Derman und Rogers/Stapleton in Frage. Gleiches gilt für die Bewertung der betrachteten double-barrier Optionen mit linearen Barrieren. Bei der Bewertung nach Rogers/Stapleton wird bei einer linearen Barriere $H = a + bt$ die Barrierenposition $a + bi\mathbf{E}\tau_1$ im Zeitschritt i angenommen. Für die Bewertung der double-barrier Option mit konstanten Barrieren wurden die Verfahren nach Derman, Gobet und Rogers/Stapleton implementiert.

4.1 Verfahrensvergleich für den betrachteten down-and-out Call

In Abbildung 4.1 sind die Optionspreise nach Derman, Gobet und Rogers/Stapleton in Abhängigkeit von der Baumtiefe in einer gemeinsamen Vergleichsgrafik dargestellt. Die genannten Modifikationen führen alle zu einer deutlichen Verbesserung des Konvergenzverhaltens. Wie in den Abschnitten 3.2 und 3.3 schon rechnerisch festgestellt, besitzen die verbesserten Optionspreise nach Derman und die mit dem Korrekturterm nach Gobet bestimmten Binomialpreise ähnliches Konvergenzverhalten. In beiden Fällen ist der Fehlerterm $o(\sqrt{\delta t})$. Die größte Konvergenzbeschleunigung wird durch die Modifikation von Rogers/Stapleton erreicht. Ab einer Baumtiefe von $N = 125$ ist in der Abbildung faktisch kein Unterschied zwischen dem analytischen Preis und dem nach Rogers/Stapleton berechneten Preis festzustellen, während die nach Gobet und Derman bestimmten Optionspreise noch stark schwanken. Jedoch bedarf es auch deutlich erhöhten Rechenzeiten (vergleiche dazu die Tabellen 3.2, 3.3 und 3.5). Inwieweit diese Beobachtungen auch für Barriereoptionen mit doppelten Barrieren oder mit zeitabhängigen Barrieren gelten, wird in den nächsten Abschnitten gezeigt.

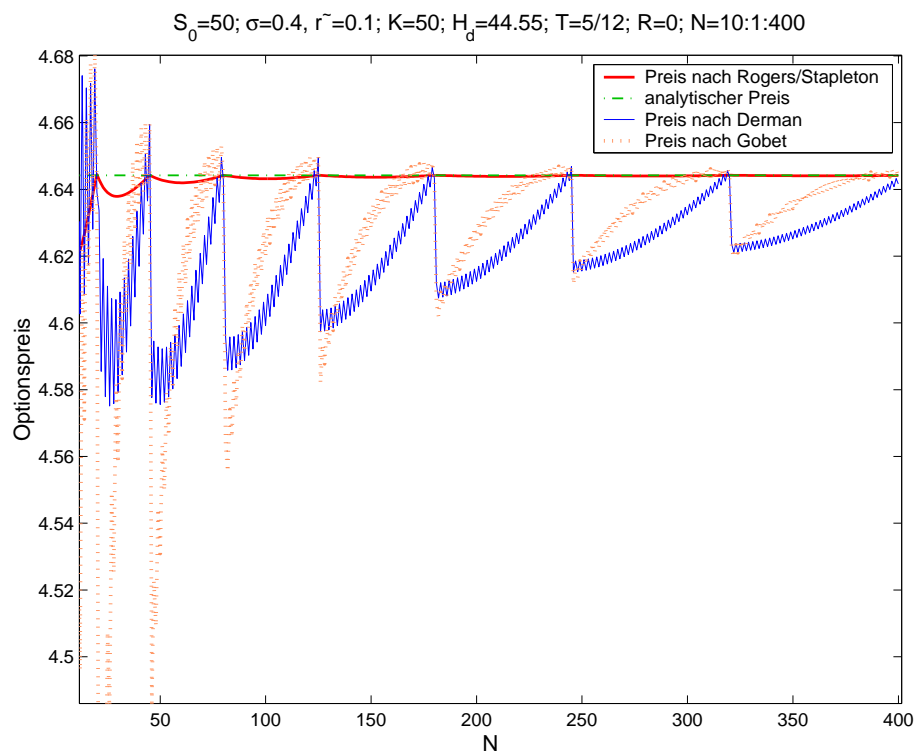


Abbildung 4.1: Vergleichsgrafik aller betrachteten Modelle für Beispiel 2.1

4.2 Down-and-out Option mit linearer Barriere

Beispiel 4.1 Betrachtet wird ein down-and-out Call mit folgenden Parametern:

S_0	σ	\tilde{r}	K	$H_d(t)$	T
95	0.25	0.1	100	$90 - 5t$	1

Die Abbildung 4.2 zeigt die Optionspreise für diesen down-and-out Call für die Berechnung nach Derman und Rogers/Stapleton. In Tabelle 4.1 sind für einige Baumtiefen die Optionspreise und in Klammern darunter die Rechenzeiten vermerkt.

Diese sind bei gleicher Baumtiefe für die nach Rogers/Stapleton berechneten Preise wesentlich höher als bei denen nach Derman. Vergleicht man die nach Derman berechneten Ergebnisse für sehr große Baumtiefen (beispielsweise erhält man für $N = 6000$ einen Preis von 6.52230) mit den Ergebnissen nach Rogers/Stapleton, so scheinen beide Verfahren sich demselben Wert zu nähern. Gleiches ist auch bei dem in Abbildung 4.3 dargestellten down-and-out Call mit Barriere $H_d(t) = 90 + 5t$ aber sonst identischen Parametern zu erkennen. Für dieses Beispiel errechnet das Programm nach Derman für eine Baumtiefe von $N = 5000$ einen Preis von 5.43225. Nach Rogers/Stapleton ergibt sich für $N = 800$ ein Preis von 5.42805.

N	$D_C^{do}(0,0)$	RS_C^{do}
50	6.52506 (0.0150)	6.56963 (0.6560)
100	6.41819 (0.0310)	6.55916 (1.8280)
200	6.40524 (0.0940)	6.54072 (5.4370)
250	6.44508 (0.1410)	6.53217 (7.6720)
300	6.57053 (0.2030)	6.52855 (9.9060)
400	6.44671 (0.3120)	6.53808 (16.920)
600	6.46444 (0.6560)	6.52524 (37.829)
800	6.46398 (1.1090)	6.52426 (66.828)

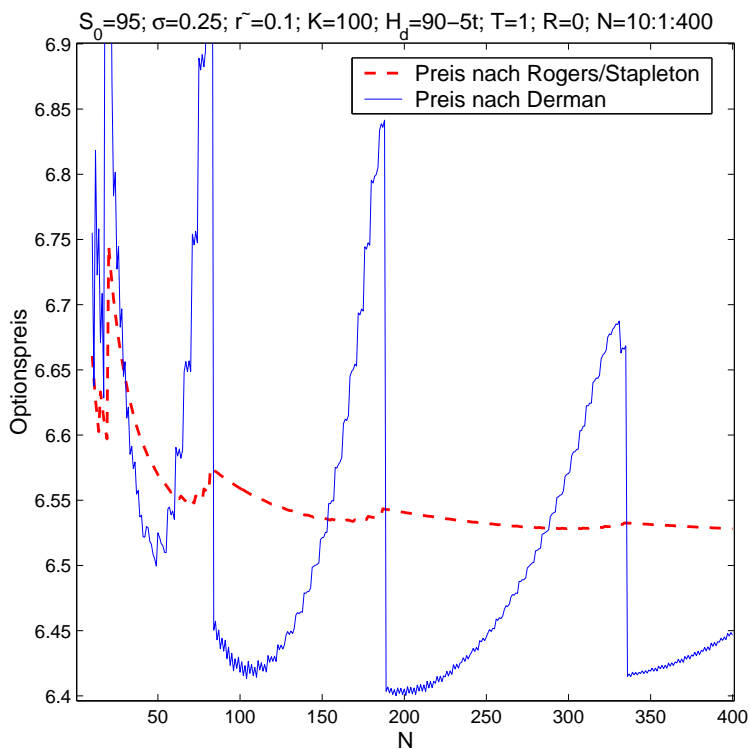


Tabelle 4.1: Preise und Rechenzeiten für down-and-out Call aus Beispiel 4.1

Abbildung 4.2: Preise nach Derman und Rogers/Stapleton für down-and-out Call aus Beispiel 4.1

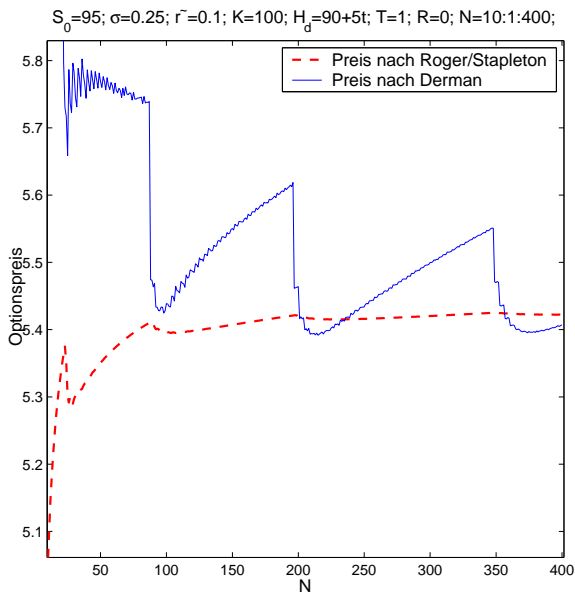


Abbildung 4.3: Preise nach Derman und Rogers/Stapleton für down-and-out Call mit Barriere $H_d = 90 + 5t$ und sonst identischen Parametern aus Beispiel 4.1

4.3 Double-barrier Option mit konstanten Barrieren

Beispiel 4.2 Betrachtet wird ein double-barrier Call mit folgenden Parametern:

S_0	σ	\tilde{r}	K	H_d	H_u	T
100	0.35	0.1	100	80	120	0.25

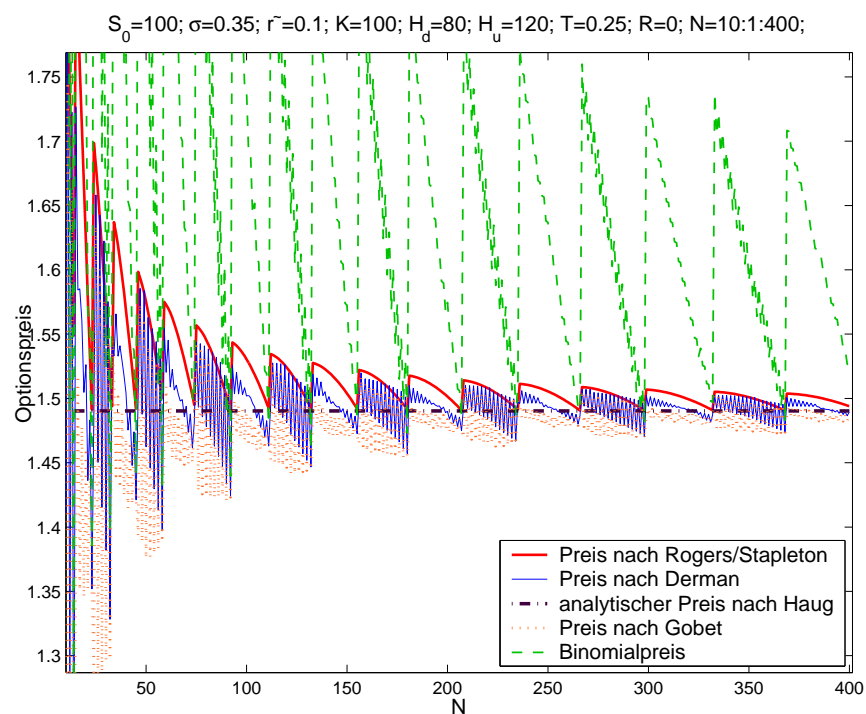


Abbildung 4.4: Vergleichsgrafik für die Bewertung der double-barrier Option aus Beispiel 4.2 mit analytischem Preis von 1.4903 nach [7]

In Abbildung 4.4 ist zu erkennen, daß auch im Fall einer double-barrier Option die Verbesserungsverfahren eine deutliche Konvergenzbeschleunigung bewirken. Für die Verbesserung nach Gobet wurde nur der erste Term nach der in [6] angegebenen Korrektur implementiert. In diesem Beispiel ist die Methode nach Rogers/Stapleton nicht so deutlich überlegen, wie im Falle der down-and-out Calls aus den Beispielen 2.1 und 4.1. Der angegebene analytische Preis stammt nach [7] aus einer Reihenentwicklung.

4.4 Double-barrier Optionen mit linearen Barrieren

Beispiel 4.3 Betrachtet wird ein double-barrier Call mit folgenden Parametern:

S_0	σ	\tilde{r}	K	$H_d(t)$	$H_u(t)$	T
95	0.25	0.1	100	$90 + 5t$	$160 - 5t$	1

Für double-barrier Optionen mit linearen Barrieren sind nur die Verfahren von Derman und Rogers/Stapleton vergleichbar. Zum Vergleich wird das in [17] berechnete Intervall $[2.637, 2.638]$ für die in Beispiel 4.3 betrachtete Option verwendet. Ebenso wie die Ergebnisse von [17] stimmen die hier gefundenen Optionspreise nicht mit dem in [16] für dieses Beispiel angegebenen Preis von 2.5438 überein. Die Abbildung 4.5 zeigt, daß die deutlichste Konvergenzbeschleunigung durch die Methode von Rogers/Stapleton erreicht wird. Gleiches gilt für den in Abbildung 4.6 dargestellten double-barrier Call, der sich von dem in Beispiel 4.3 betrachteten Call nur in den Barrieren unterscheidet. Thompson findet für diesen Call das Intervall $[4.267, 4.269]$.

N	$D_{c^{db}}(0,0)$	$RS_{c^{db}}$
50	2.82208 (0.0160)	2.62004 (0.9070)
100	2.66986 (0.0620)	2.64349 (2.4680)
200	2.68567 (0.1720)	2.64047 (7.2190)
250	2.66809 (0.2500)	2.63728 (10.578)
300	2.69408 (0.3590)	2.63647 (14.812)
400	2.65876 (0.5780)	2.64252 (25.204)
500	2.67946 (0.8750)	2.63693 (38.532)
550	2.66213 (1.0470)	2.63754 (53.904)

Tabelle 4.2: Preise und Rechenzeiten für down-and-out Call aus Beispiel 4.3

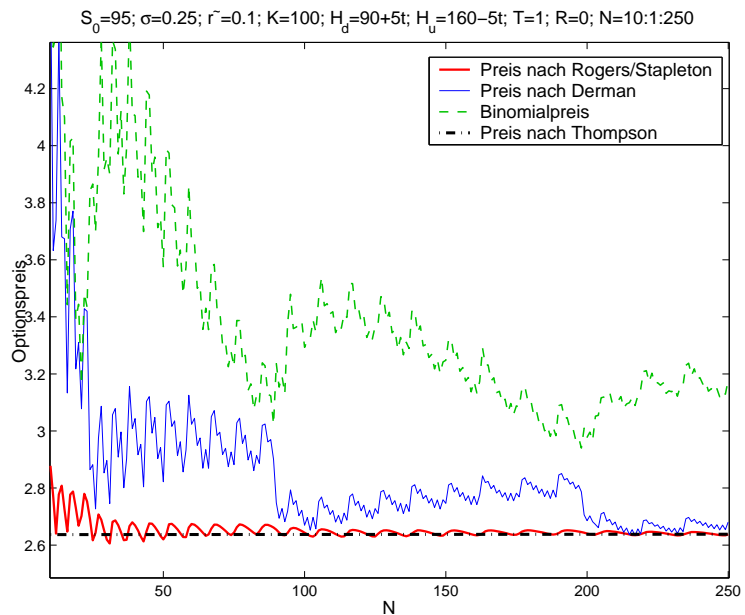


Abbildung 4.5: Vergleichsgrafik für den double-barrier Call aus Beispiel 4.3 mit Preis im Intervall $[2.637, 2.638]$ nach [17]

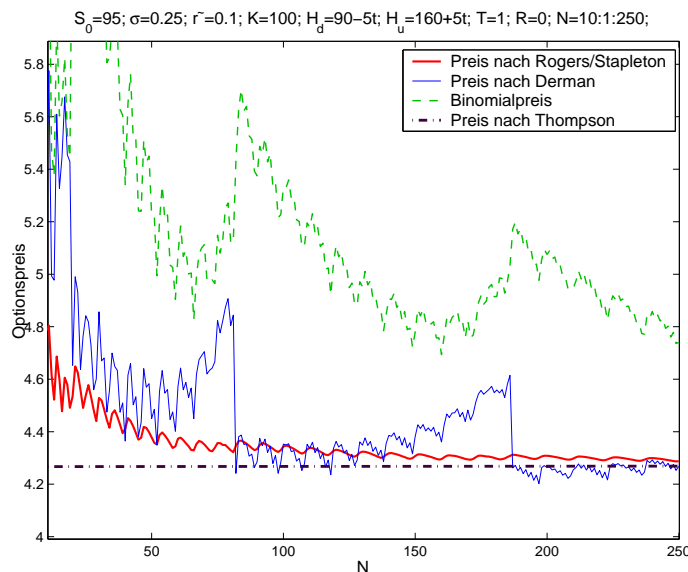


Abbildung 4.6: Vergleichsgrafik für double-barrier Call mit $S_0 = 95$, $\sigma = 0.25$, $\tilde{r} = 0.1$, $K = 100$, $H_d(t) = 90 - 5t$, $H_u(t) = 160 + 5t$ und $T = 1$ mit Preis im Intervall $[4.267, 4.269]$ nach [17]

Insgesamt ist festzustellen, daß für die betrachteten Beispiele das von Rogers/Stapleton vorgestellte Verfahren die deutlichste Konvergenzbeschleunigung bewirkt. Interessant wäre in diesem Zusammenhang eine Erprobung der Verfahren für andere Optionstypen und auch der Vergleich mit in der Literatur aufgezeigten Verbesserungsverfahren des Trinomialmodells.

4.5 Experimentelle Bestimmung der Konvergenzordnung

Zur experimentellen Bestimmung der Konvergenzordnung für die vorgestellten Verfahren wird angenommen, daß für den absoluten Fehler des mit dem jeweiligen Näherungsverfahren bestimmten Optionspreises zum analytischen Preis gilt

$$|Err(N)| \leq CN^{-k} \quad C \in \mathbb{R}^+$$

und mit $x := \log N$

$$err(x) := \log |Err(N)| \leq \log C - kx.$$

Das Bild 4.7 zeigt für den in Beispiel 2.1 betrachteten down-and-out Call mit konstanter Barriere den logarithmierten absoluten Fehler in Abhängigkeit von der logarithmierten Baumtiefe für die betrachteten Verfahren.

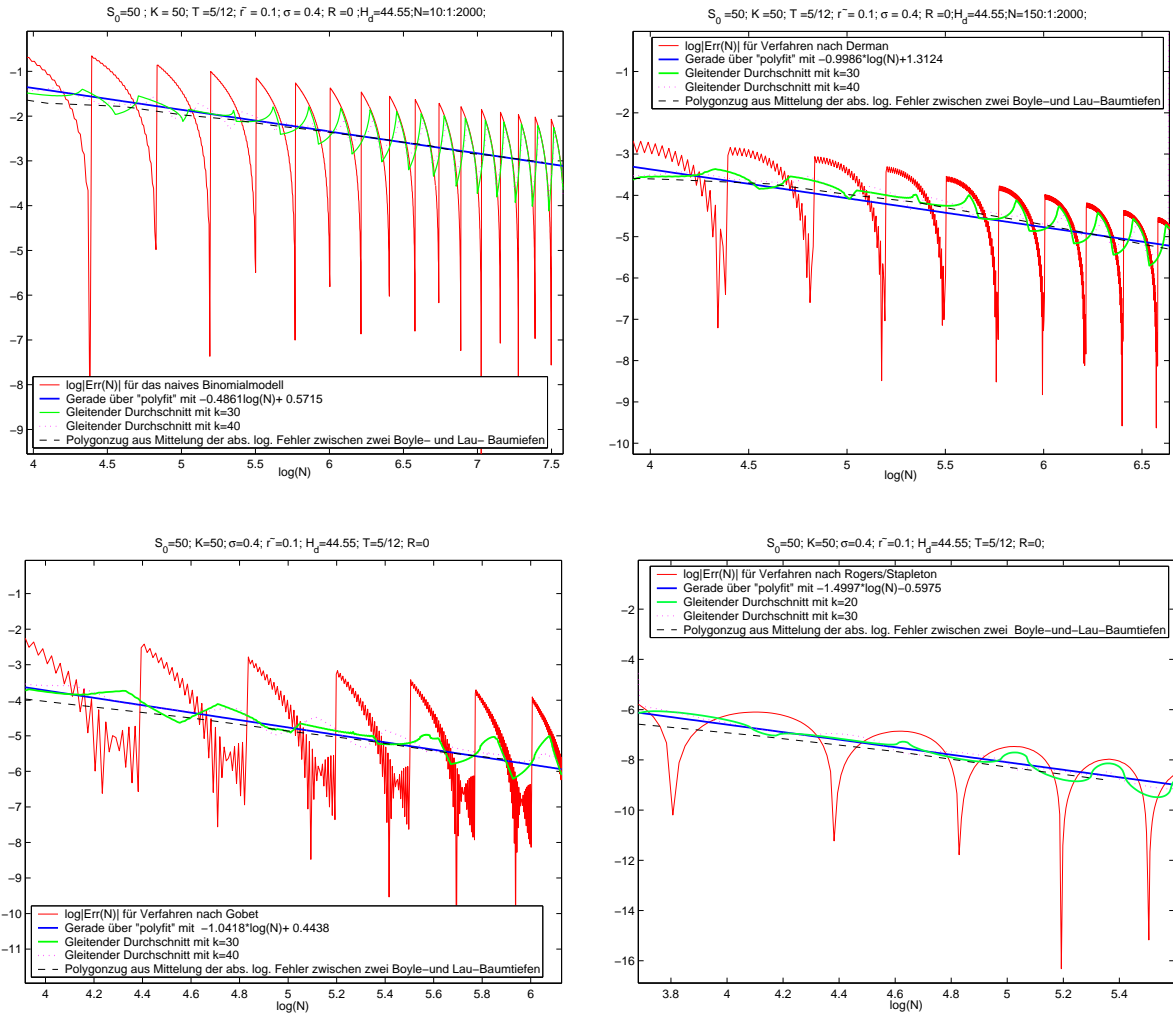


Abbildung 4.7: Logarithmierter absoluter Fehler in Abhängigkeit von der logarithmierten Baumtiefe

In jedem Bild ist eine Ausgleichsgerade, welche von Matlab mit Hilfe des Befehls „polyfit“ nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt wird, und gleitende Durchschnitte der logarithmierten absoluten Fehler zwischen den Baumtiefen N_{\min} und N_{\max}

$$g_k(N) = \frac{1}{2k+1} \sum_{j=-k}^k \log |Err(N+j)| \quad N = N_{\min} + k, \dots, N_{\max} - k$$

ingezeichnet. Weiterhin ist ein Polygonzug dargestellt, welcher die Punkte, die aus der Mittelung der absoluten logarithmierten Fehler zwischen zwei benachbarten Boyle-und Lau-Baumtiefen, eingezeichnet in der Mitte des Intervalls, miteinander verbindet. In allen Bildern liegen diese Ausgleichskurven nahe beieinander. Werden die Anstiege der von

Matlab bestimmten Ausgleichsgeraden betrachtet, so ist für die Verfahren nach Derman bzw. Gobet eine Konvergenzordnungen von $O(N^{-1})$ zu vermuten. Mit Hilfe der Beziehung $\delta t = \frac{T}{N}$ erhält man für die Methoden nach Derman und Gobet die experimentell bestimmte Konvergenzordnung von $O(\delta t)$. Diese Ergebnisse stehen nicht im Widerspruch zu den in den Abschnitten 3.2 und 3.3 bestimmten Fehlerabschätzungen. Der Anstieg der Ausgleichsgerade von -1.4997 für die Methode von Rogers/Stapleton weist auf eine Konvergenzordnung von $N^{-\frac{3}{2}}$ hin. Ein exakter Beweis dieser Vermutung wurde noch nicht gefunden.

Tabelle 4.3 faßt die Ergebnisse der experimentellen Bestimmung der Konvergenzordnung der betrachteten Beispiele für einige Beispiele zusammen. Unter den jeweils ermittelten Ausgleichsgeraden sind in Klammern die berücksichtigten Baumtiefen angegeben. Für das Beispiel 4.1 ist ein analytischer Preis nicht bekannt, so daß für diesen der sich nach Derman bei einer Baumtiefe von $N = 11000$ ergebende Preis von 6.52083 eingesetzt wurde.

Beispiel	naives Binomialmodell	Derman	Gobet	Rogers/Stapleton
2.1	$-0.4861x-0.5715$ (10:1:2000)	$-0.9986x+1.3124$ (150:1:2000)	$-1.0418x+0.4438$ (10:1:500)	$-1.4997x-0.5975$ (10:1:300)
4.1	$-0.4533x+1.9157$ (10:1:2000)	$-1.0071x+3.0738$ (150:1:2000)	-	$-0.9490x+0.7987$ (10:1:300)
4.2	$-0.4455x+0.0857$ (10:1:2000)	$-0.9644x+0.1422$ (150:1:1500)	$-0.9858x+0.6719$ (10:1:700)	$-0.9875x+0.8763$ (10:1:300)
4.3	$-0.4838x+1.8572$ (10:1:1500)	$-1.0338x+2.7419$ (150:1:1500)	-	$-1.0646x+0.0921$ (10:1:300)

Tabelle 4.3: Ausgleichsgeraden nach Matlab der verschiedenen Methoden für die betrachteten Beispiele

Literatur

- [1] W. P. Boyle, Y. S. Tian. An explicit finite difference approach to the pricing of barrier options. *Applied Mathematical Finance*, 325-348, 1998.
- [2] M. Broadie, P. Glasserman, S. Kou. A continuity correction for discrete barrier options. *Math. Finance*, **7**, 325-348, 1997.
- [3] E. Derman, I. Kani, D. Ergener, I. Bardhan. Enhanced numerical methods for options with barriers. *Goldman Sachs Quantitative Strategies Research Notes*, 1995.

-
- [4] S. Figlewski, B. Gao, D. Ahn. Pricing discrete barrier options with an Adaptive Mesh Model. *Preprint*, 1999.
- [5] H. Geman, M. Yor. Pricing and hedging double-barrier options: A probabilistic approach. *Math. Finance*, **6**, 365-378, 1999.
- [6] E. Gobet. Analysis of the zigzag convergence for barrier options with binomial trees. *Preprint*, 1999.
- [7] E. G. Haug. *The complete guide to option pricing formulas*. McGraw-Hill, New York, 1998.
- [8] D. J. Higham. Nine ways to implement the binomial method for option valuation in Matlab. *SIAM Review*, **44(4)**, 661-677, 2002.
- [9] K. Ilzig. Modifikationen des Binomialmodells zur Konvergenzbeschleunigung bei der Bewertung von Barriereoptionen. *Diplomarbeit*, TU Chemnitz, Fakultät für Mathematik, 2003.
- [10] I. Irle. *Finanzmathematik: Die Bewertung von Derivaten*. Teubner, Stuttgart, 1998.
- [11] Y. K. Kwok. *Mathematical models of financial derivatives*. Springer, Singapore, 1998.
- [12] S. M. Levitan. Lattice methods of barrier options. *Preprint*, 2001.
- [13] V. Petrov. *Limit theorems of probability theory: sequences of independent random variables*. Clarendon Press, Oxford, 1996.
- [14] K. Sandmann. *Einführung in die Stochastik der Finanzmärkte*. Springer, Berlin, 1999.
- [15] L. C. G. Rogers, E. J. Stapleton. Fast accurate binomial pricing. *Finance and Stochastics*, **2**, 3-17, 1998.
- [16] L. C. G. Rogers, O. Zane. Valuing moving barrier options. *Preprint*, 1997.
- [17] G. W. P. Thompson. Bounds on the value of barrier options with curved boundaries. *Preprint*, 2002.
- [18] P. Wilmott, J. Dewynne, S. Howison. *The mathematics of financial derivatives: A student introduction*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.