Die Anwendung der hyperkomplexen Funktionentheorie auf die Lösung partieller Differentialgleichungen

Von der Fakultät für Mathematik der Technischen Universität Chemnitz
genehmigte

D i s s e r t a t i o n

zur Erlangung des akademischen Grades

Doctor rerum naturalium

(Dr. rer. nat.)

vorgelegt

von **Dipl.-Math. Uwe Kähler**

geboren am 31. März 1971 in Stralsund

eingereicht am 11. Mai 1998

Gutachter: Prof. Dr. rer. nat. habil. K. Gürlebeck
Prof. PhD. M. V. Shapiro
Prof. Dr. rer. nat. habil. W. Sprößig

Tag der Verteidigung: 16. September 1998

Dank

An dieser Stelle möchte ich meinem Mentor Prof. Dr. Klaus Gürlebeck meinen tiefsten Dank für die intensive Zusammenarbeit trotz zeitweise widriger Umstände aussprechen. Weiterhin möchte ich mich bei Prof. Dr. Lothar Jentsch für seine Unterstützung und sein stetes Interesse an meiner Arbeit bedanken. Nichtzuletzt gilt mein Dank der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, die eine schnelle und reibungslose Durchführung des Promotionsverfahrens ermöglichte.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Es ist allgemein bekannt, daß sich die Stärke der komplexen Funktionentheorie wunderbar bei der Behandlung zweidimensionaler partieller Differentialgleichungen einsetzen läßt. Die Möglichkeiten, die sich aus der Faktorisierung des Laplaceoperators $\Delta = \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ bzw. der Verwendung konformer Abbildungen ergeben, sind nahezu unbegrenzt. Selbst solche schwierigen Probleme, wie das freie Randwertproblem der Stokes-Gleichungen, lassen sich im zweidimensionalen Fall unter Benutzung konformer Abbildungen auf einfachere Probleme, wie die Lösung der Hopper-Gleichungen oder der Löwner-Kufareev-Gleichungen zurückführen [DeG], [KO]. Außerdem lassen sich mit Hilfe funktionalanalytischer Methoden viele Resultate für holomorphe Funktionen auf Funktionenklassen verallgemeinern, die wesentlich mehr als nur die holomorphen Funktionen enthalten [Vek].

Andererseits zeigte sich durch die Arbeiten von R. Fueter [Fue], R. Delanghe [D], K. Habetha [Ha] und anderen, daß die Methoden der Funktionentheorie nicht auf die komplexe Ebene beschränkt bleiben müssen, sondern sich auch mit Erfolg auf den n-dimensionalen euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ übertragen lassen.

Das Problem dabei ist nur, daß im Gegensatz zum $\mathbb{R}^2$, der mit der komplexen Zahlenebene identifiziert werden kann, der $\mathbb{R}^n$ nur noch ein Teilraum der zugehörigen Cliffordalgebra $C\ell_{0,n}$ ist. Gerade dieses psychologische Problem erforderte eine neue Denkweise, so daß es nicht verwundert, daß die Geschichte der Anwendung der hyperkomplexen Funktionentheorie auf die Lösung von partiellen Differentialgleichungen noch sehr jung ist, wie die Arbeiten von W. Sprößig [Sp1] 1979, B. Goldschmidt [Gold] 1982, H. Malonek/B. Müller [MalMü] 1992, Z. Xu/C. Zhou [XZ] 1993 und C. Zhou [Z] 1993 zeigen.

Insbesondere die von K. Gürlebeck und W. Sprößig entwickelte Methode der Behandlung von Randwertproblemen partieller Differentialgleichungen [GSp2], die auf der orthogonalen Zerlegung des Raumes $\mathcal{L}_2(\Omega)$ basiert, zeigt die Vorteile, die die hyperkomplexe Funktionentheorie liefert. Sie ermöglicht einen einheitlichen Zugang zur Lösung aller Fragen, die bei der Behandlung von Randwertproblemen elliptischer partieller Differentialgleichungen auftreten, wie Existenz und Eindeutigkeit der Lösung, Regularitätsaussagen und Darstellungsformeln. Sie ermöglicht auch eine entsprechende numerische Behandlung des Problems durch die Ausnutzung einer zugehörigen diskreten Funktionentheorie [GSp1], [Ho]. Die Autoren zeigen die leichte Anwendbarkeit dieser Theorie an einer Reihe von Beispielen (Dirichlet-Problem für die Laplace-Gleichung, die Helmholtz-Gleichung, das Stokes-System, das Navier-Stokes-System, das Lame-System, u.a).

Leider beschränkt sich diese Theorie auf den Fall beschränkter Gebiete und der $\mathcal{W}_2^k$-Skala. Aufgrund der leichten Anwendbarkeit dieser Theorie gab es aber sogleich Bemühungen, diese Methode auch auf den Fall unbeschränkter Gebiete zu verallgemeinern, S. Bernstein [Ber] 1993 und J. Ryan [R1] 1995. Während J. Ryan dabei konforme Abbildungen benutzt, die leider nur in Form der Möbius-Transformationen im $\mathbb{R}^n$ existieren, verwendet S. Bernstein gewichtete Räume. Diese haben jedoch den Nachteil, daß bei gewissen Randwertproblemen, wie z.B. dem Navier-Stokes-Problem, nur quasibeschränkte Gebiete, d.h. Gebiete, die in mindestens einer Raumdimension beschränkt sind, betrachtet werden können. Der wichtigste Grund hierfür ist eine notwendige Raumäquivalenz zu Räumen ohne Gewicht, um die nichtlinearen Anteile des Problems behandeln zu können.

Wir sehen also, daß es recht vorteilhaft wäre, gleich mit den üblichen Räumen arbeiten zu können.

Im ersten Teil dieser Arbeit wollen wir uns der Lösung dieses Problems widmen. Nachdem wir uns zunächst den Fall des beschränkten Gebietes ansehen und die orthogonale Zerlegung für den allgemeinen Fall $\mathcal{L}_p(\Omega), 1 < p < \infty$, unter Zuhilfenahme des Dirichletproblems der Laplacegleichung als eine direkte Zerlegung beweisen, sowie deren Anwendbarkeit am Beispiel des Stokes-Systems zeigen, wenden wir uns dem Fall eines unbeschränkten Gebietes Ω zu. Mit Hilfe einer Modifikation des Cauchy-Kernes können wir eine Funktionentheorie aufbauen, deren Operatoren, insbesondere die Teodorescu-Transformation, auch im allgemeinen Fall eines unbeschränkten Gebietes zwischen den zugehörigen ungewichteten Räumen beschränkt sind. Diese Theorie wenden wir im weiteren auf Randwertprobleme der mathematischen Physik, insbesondere auf das Stokes-System und das Navier-Stokes-System, an. Das Problem der Lösung der Stokes- und der Navier-Stokes-Gleichungen gehört zu den wichtigsten Problemen in der Theorie partieller Differentialgleichungen, die jedoch selbst im einfachsten Fall des stationären inhomogenen Stokes-Systems mit homogenen Randdaten ein nicht zu unterschätzendes Problem darstellen. Eine vollständige Theorie für die Lösung dieses Problems existierte bis Anfang der 90-er Jahre nur für den Fall eines beschränkten Gebietes (L. Cattabriga [Cat] 1964 für $n = 3$, G.P. Galdi/C.G. Simader [GaSi] 1990 und H. Kozono/H. Sohr [KoSo1], [KoSo2] 1992 für $n \geq 2$). Erst seit dieser Zeit wurde auch der Fall des Außengebietes intensiv betrachtet (vgl. W. Varnhorn [Va]). Die dabei verwendete Methode der Zerlegung des Problems als ein Problem über dem ganzen Raum und ein Problem über einem beschränkten Gebiet mittels eines Lokalisierungsprinzips läßt sich leider nicht auf den allgemeinen Fall eines unbeschränkten Gebietes verallgemeinern. Dieselbe Einschränkung haben auch die darauf basierenden Arbeiten von A. Novotny/M. Padula [NoPa] und W. Borchers/M. Miyakawa [BorMiy] 1995 zur Lösung des stationären Navier-Stokes-Problems für kleine äußere Kräfte. Wir werden hier mit Hilfe unserer hyperkomplexen Operatoren den allgemeinen Fall des unbeschränkten Gebietes betrachten, wobei die einzige Einschränkung ist, daß das Komplement unseres Gebietes Ω eine offene Menge enthalten muß, die nicht in Ω liegt, und alle mit der Lösung des stationären Stokes- bzw. Navier-Stokes-Systems in Zusammenhang stehenden Fragen, wie Existenz, Eindeutigkeit und Regularität der Lösung beantworten.

Eine weitere Problematik ist die Betrachtung von elliptischen Randwertproblemen höherer Ordnung. Gerade hier zeigt sich der Vorteil unserer Methode, da wir solche Probleme geradezu nach dem Baukastenprinzip lösen können, was wir am Beispiel der biharmonischen Gleichung demonstrieren werden. Dabei stellt für uns der Fall des unbeschränkten Gebietes kein Problem dar, der sonst aufgrund des Wachsens der Fundamentallösung von Δ^2 gegen unendlich nur mit einem großen Aufwand zu behandeln ist. Dies erlaubt eine völlig neue Herangehensweise selbst an klassische Probleme. So läßt sich mit Hilfe der hyperkomplexen Analysis z.B. das Stokes-Problem als hyperkomplexe Differentialgleichung dritter Ordnung $DDDF = 0$ betrachten [KO], die entsprechend der hier vorgestellten Methode gelöst werden kann.

Im zweiten Teil der Arbeit beschäftigen wir uns mit nichtlinearen Differentialgleichungen erster Ordnung.

In der Mitte unseres Jahrhunderts führte eine neue Entwicklung der komplexen Analysis zu einem neuen Verhältnis zwischen reeller und komplexer Analysis. Diese Entwicklung zeigt sich vor allem an I.N. Vekua's Arbeiten über verallgemeinerte analytische Funktionen. Verallgemeinert analytische Funktionen sind Lösungen des Systems

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + au + bv &= f \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + cu + dv &= g, \end{aligned}$$

welches äquivalent zur partiellen komplexen Gleichung

$$\frac{\partial w}{\partial \overline{z}} + Aw + B\overline{w} = F$$

ist. Die Theory von Vekua's verallgemeinert analytischen Funktionen brachte neue Anwendungen der komplexen Analysis, die unter anderem Randwertprobleme, quasikonforme Abbildungen, Mechanik, Hydrodynamik und die Elastizitätstheorie betreffen.

Andere Verallgemeinerungen des Konzeptes der holomorphen Funktionen sind die pseudoanalytischen Funktionen im Sinne von L. Bers oder die (p, q)-analytischen Funktionen von G.N. Poloshi.

Diese Verallgemeinerungen der komplexen Funktionentheorie erlauben nicht nur die Untersuchung linearer Differentialgleichungen. Auch im Falle nichtlinearer (elliptischer) Differentialgleichungen ist es möglich, eins-eins-Abbildungen zwischen den Lösungen dieser Differentialgleichungen und den holomorphen Funktionen zu finden. Diese Abbildungen ermöglichen das Reduzieren der Konstruktion spezieller Lösungen auf die Konstruktion holomorpher Funktionen. Damit führt die komplexe Analysis zu einer neuen Methode der Linearisierung, die auf dem Konzept der Holomorphie basiert.

Dieses Konzept, wie u.a. [BDSo], [GSp2] und [KravS] zeigen, ist aber nicht auf den komplexen Fall beschränkt, so daß wir uns hier mit einer höherdimensionalen Verallgemeinerung dieser Methode beschäftigen werden.

Da der Ausgangspunkt dieser Methode oftmals die Transformation von partiellen Differentialgleichungen zu Integralgleichungen unter Benutzung des schwach singulären komplexen T-Operators

$$T_\Omega h(z) = -\frac{1}{\pi} \int\int_\Omega \frac{h(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta$$

bzw. des stark singulären komplexen Π-Operators [BeGi], [Tut2]

$$\Pi_\Omega h(z) = -\frac{1}{\pi} \int\int_\Omega \frac{h(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\xi d\eta$$

ist, benötigen wir entsprechende hyperkomplexe Verallgemeinerungen dieser Operatoren.

Wir werden uns also als erstes mit hyperkomplexen Verallgemeinerungen des komplexen Π-Operators beschäftigen. Insbesondere der hyperkomplexe Π-Operator im Sinne von W. Sprößig [Sp1] erweist sich nicht nur für die Anwendung auf nichtlineare Differentialgleichungen, sondern auch für die Theorie der singulären Integraloperatoren als äußerst interessant. Dieser Operator hat vom Standpunkt der allgemeinen Theorie singulärer Operatoren vom Michlin-Calderon-Zygmund-Typ die besten Eigenschaften, so daß wir alle Resultate, die diese Theorie für solche Operatoren liefern kann, erhalten. Trotzdem ergibt eine direkte Ausnutzung der unterliegenden algebraischen Struktur eine Reihe von neuen und überraschenden Resultaten, die wir aus der allgemeinen Theorie nicht gewinnen können. So hat dieser Π-Operator die Norm eins, besitzt nur einen trivialen Kern und ist immer invertierbar. Dies zeigt auch, daß die hyperkomplexe Funktionentheorie nicht einfach nur eine Verallgemeinerung der komplexen ist, wo der Π-Operator einen nichttrivialen Kern besitzt.

Diese und weitere Verallgemeinerungen des komplexen Π-Operators ermöglichen uns im folgenden die Untersuchung von hyperkomplexen Beltramigleichungen. Die Beltramigleichung ist eine der wichtigsten komplexen Differentialgleichungen und ihre Bedeutung im höherdimensionalen Fall ist nicht zu unterschätzen. Insbesondere durch das Fehlen des Riemannschen Abbildungssatzes ist die Bedeutung quasikonformer Abbildungen im räumlichen und höherdimensionalen Fall ungleich größer als im komplexen Fall. Außerdem spielt diese Frage durch die Probleme, die die Klassifikation vierdimensionaler Mannigfaltigkeiten mit sich bringt, eine ganz besondere Rolle im $\mathbb{R}^4$ [DoSu].

So ist es auch nicht verwunderlich, daß sich eine ganze Reihe von Arbeiten mit n-dimensionalen Verallgemeinerungen der komplexen Beltramigleichung befaßt (vgl. [IMar], [Tar] und Referenzen darin). So betrachten z.B. T. Iwaniec und G. Martin Beltramigleichungen der Form

$$D^T f(x) Df(x) = J(x,f)^{2/n} G(x),$$

wobei

$$Df(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j}$$

die Jacobi-Matrix, D^T ihre Transponierte und $J(x,f)$ die Jacobi-Determinante ist, für Funktionen mit nichtnegativer Jacobi-Determinate. Dabei sichert die Bedingung an $J(x,f)$ von vornherein die Quasiregularität der Lösung. Einen anderen Zugang untersucht R. DeCampo [DeC]. Er betrachtet für Funktionen $f : \mathbb{R}^n \mapsto \Lambda$, die in die Grassmann-Algebra Λ abbilden, die Beltamigleichung

$$\overline{\partial} f = \mu \partial f.$$

Hierbei ist $\overline{\partial} = d - d^*$ und $\partial = d + d^*$, wobei d das äußere Differential und d^* der zu d formal duale Operator ist.

Bei der Lösung aller dieser nicht hyperkomplexen Beltramigleichungen und besonders bei der Frage nach quasikonformen Lösungen dieser Gleichungen treten eine Reihe von Schwierigkeiten auf, die hauptsächlich darauf zurückzuführen sind, daß die unterliegende algebraische Struktur keine Verallgemeinerung der komplexen Struktur darstellt.

Wir besitzen aber eine solche Struktur in Form der Clifford-Algebren, so daß wir in der Lage sind, Beltramigleichungen im hyperkomplexen Sinne auf eine relativ einfache Art und Weise zu betrachten. Neben einer Lösungstheorie sind wir in der Lage, für den praktisch interessantesten Fall $n = 4$ auch die Frage der quasikonformen Lösungen zu beantworten.

Dies stellt aber nur einen Ausblick auf die Möglichkeiten dar, die unsere Theorie bei der Untersuchung quasikonformer Abbildungen und der damit im Zusammenhang stehenden Anwendungen bietet.

Im letzten Abschnitt gehen wir noch einmal intensiver auf den allgemeinen Fall nichtlinearer partieller Differentialgleichungen erster Ordnung ein. Dabei ermöglicht uns eine ähnliche Herangehensweise wie im Fall der hyperkomplexen Beltramigleichungen eine Zurückführung des Problems der Lösung unserer nichtlinearen partiellen Differentialgleichung auf die Lösung eines Fixpunktproblems.

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Cliffordalgebren

Das Erste, was jeder Schüler eingetrichtert bekommt, wenn er sich in der Schule mit Vektorrechnung beschäftigt, ist, niemals Vektoren zu dividieren. Diese Grundregel ist wahrscheinlich eine der am häufigsten von Schülern (und Studenten) „nicht beachteten“ Regeln.

Andererseits gibt es in der Mathematik algebraische Strukturen, in denen es durchaus möglich und üblich ist, Vektoren zu dividieren. Die einfachste dieser Strukturen ist der Körper der komplexen Zahlen. Wir können jeden Vektor (x, y) des $\mathbb{R}^2$ als komplexe Zahl $z = x+iy$ auffassen, wobei wir nichts weiter tun, als in dem linearen Vektoraum $\mathbb{R}^2$ eine Multiplikation derart einzuführen, daß für die Elemente der Orthonormalbasis $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1$ gilt $\mathbf{e}_0\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_0^2 = \mathbf{e}_0$ und $\mathbf{e}_1^2 = -\mathbf{e}_0$. Offensichtlich führt diese Multiplikation nicht aus dem $\mathbb{R}^2$ hinaus und bildet eine abelsche Gruppe mit dem Einselement $\mathbf{e}_0$.

Vor über 150 Jahren nahm diese Idee der irische Mathematiker Hamilton zum Anlaß, dieses Konzept auch auf den $\mathbb{R}^3$ zu übertragen. Obwohl er in diese Idee 10 Jahre seines Lebens investierte, blieb sie ein unerfüllter Traum. Andererseits gestattete ihm diese Arbeit, im Falle des $\mathbb{R}^4$ zu einem positiven Resultat zu kommen. Ihm war es zwar auch nicht möglich, in dem $\mathbb{R}^4$ einen Körper einzuführen, aber nachdem er die für die damalige Zeit überraschende Idee hatte, auf die Kommutativität der Multiplikation zu verzichten, konnte er den Schiefkörper der Quaternionen in die Mathematik 1844 einführen [H]. Ihm zu Ehren wird er heute mit $\mathbb{H}$ bezeichnet. Die Idee der Nichtkommutativität der Quaternionenmultiplikation erscheint uns heute ganz natürlich, schließlich beschreibt diese Multiplikation Drehstreckungen im $\mathbb{R}^3$. Man muß aber berücksichtigen, daß damals noch nicht einmal klar war, was eigentlich der $\mathbb{R}^n$ ist. Den Quaternionen war aber kein großer Durchbruch in der Mathematik beschieden, hauptsächlich wegen einer Entwicklung, bei der sie selbst Pate gestanden haben, der Vektorrechnung. Die Verfechter der Vektorrechnung waren in den Diskussionen mit Hamilton einfach die wortgewandteren.

Eine ganz andere Idee stellte Grassmann 1844 in seinem Buch "Die lineare Ausdehnungslehre" vor [Gra]. Er versuchte gar nicht erst, in den $\mathbb{R}^n$ eine Körperstruktur einzuführen, sondern führte eine ebenfalls nicht kommutative Multiplikation in den $\mathbb{R}^n$ ein, die ganz bewußt aus dem $\mathbb{R}^n$ hinausführte. Für das Produkt zweier Basiselemente $\mathbf{e}_i$ und $\mathbf{e}_j$ wird ein neues Basiselement $\mathbf{e}_{ij} = \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j$ definiert, oder, mit anderen Worten, es wird eine Algebra erstellt, bei der der $\mathbb{R}^n$ nur noch ein linearer Teilraum der Algebra ist. Speziell mit der Sichtweise auf geometrische Anwendungen wählte Grassmann seine Multiplikation so, daß $\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_i = 0$ ist. Diese Idee einer Algebra war damals zu revolutionär. Grassmanns Buch geriet in Vergessenheit und sein Werk wird erst in der heutigen Zeit gebührend gewürdigt, in der die Grassmann-Algebra besonders in der Differentialgeometrie Verwendung findet.

Einer der wenigen, die sich in der Vergangenheit doch intensiv mit der Arbeit von Grassmann beschäftigt haben, war William Kingdon Clifford (1845 – 1879). Er kombinierte die Ideen von Grassmann mit denen von Hamilton [Cl]. Speziell konstruierte er eine Algebra über dem $\mathbb{R}^n$, die ebenfalls aus dem linearen Vektorraum hinausführte, aber bei der im Gegensatz zur Grassmannschen $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i = -\mathbf{e}_0$ ist. Dieser kleine Unterschied ermöglicht es uns Vektoren im Rahmen der Cliffordalgebra zu dividieren.

Sei nun V ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Eine Funktion $B : V \times V \mapsto \mathbb{R}$ ist eine *nichtdegenerierte symmetrische Bilinearform*, wenn für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ and x, y, z in V gilt

$$\begin{aligned} B(x,y) &= B(y,x), \\ B(\lambda x + y, z) &= \lambda B(x,z) + B(y,z) \quad \text{und} \\ B(x,y) &= 0 \quad \forall y \Rightarrow x = 0. \end{aligned}$$

Eine solche Bilinearform wird auch *Skalarprodukt* genannt. Aus einem Skalarprodukt erhält man mittels der Beziehung

$$Q(x) = B(x,x)$$

eine *quadratische Form* Q. Andererseits kann man aus der quadratischen Form Q über die Beziehung

$$B(x,y) = \frac{1}{2}(Q(x) + Q(y) - Q(x-y))$$

die Bilinearform B zurückgewinnen.

Den mit dem Skalarprodukt B ausgestatteten Vektorraum V nennen wir auch orthogonalen Vektorraum. In einem solchen orthogonalen Vektorraum können wir immer eine Orthonormalbasis $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ finden, wobei n die Raumdimension ist. Für diese Basis gilt

$$\begin{aligned} B(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) &= 0 \text{ für } i \neq j \text{ und} \\ B(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) &= \pm 1 \end{aligned}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen

$$\begin{aligned} B(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) &= -1, \quad i = 1, \ldots, p, \\ B(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) &= 1, \quad i = p+1, \ldots, n, \end{aligned}$$

wobei p nur von der Bilinearform B, nicht aber von der speziellen Wahl der Orthonormalbasis, abhängt. Im weiteren nennen wir das Paar (p, q), mit $q = n - p$, die Signatur des orthogonalen Raumes V.

Zum Beispiel besitzt der Raum $\mathbb{R}^n$ mit der Bilinearform

$$B(x, y) = -\sum_{i=1}^{p} x_i y_i + \sum_{i=p+1}^{n} x_i y_i$$

die Signatur (p, q). Wir werden ihn mit $\mathbb{R}^{p,q}$ bezeichnen. Speziell haben wir den euklidischen Raum $\mathbb{R}^{0,n}$ mit der Signatur $(0, n)$ oder den Minkowski-Raum $\mathbb{R}^{1,n-1}$ mit der Signatur $(1, n-1)$. Für den euklidischen Raum schreiben wir kurz $\mathbb{R}^n$.

Definition 1.1.1 *Die Cliffordalgebra $C\ell_{p,q}$ ist die freie Algebra generiert durch den $\mathbb{R}^{p,q}$ modulo der Relation*

$$x^2 = -B(x, x)\mathbf{e}_0$$

für jedes $x \in \mathbb{R}^{p,q}$, wobei $\mathbf{e}_0$ das Einselement der Algebra ist.

Mit anderen Worten, die Cliffordalgebra $C\ell(V, Q)$ ist definiert als der Quotient aus der Tensoralgebra $\otimes V$ und dem zweiseitigen Ideal, das durch alle Elemente $v \otimes v + Q(v)$ mit $v \in V$ generiert wird. Für die Zusammenhänge zwischen Tensoren und Cliffordzahlen verweisen wir auf das Buch „Quaternionic and Clifford Calculus for Physicists and Engineers“ von K. Gürlebeck und W. Sprößig [GSp2].

Bei dieser Definition kann V im übrigen jede Dimension haben. Wenn wir über dem Körper der komplexen Zahlen arbeiten, dann bestimmt der Rang von Q die Cliffordalgebra bis auf Isomorphismen. Andererseits spielt im Falle der reellen Zahlen die Signatur eine ganz entscheidende Rolle.

Beispiele für Cliffordalgebren sind unter anderem

- $\mathbb{C} \simeq C\ell_{0,1}$ der Körper der komplexen Zahlen
- $\mathbb{H} \simeq C\ell_{0,2}$ der Schiefkörper der Quaternionen
- $C\ell_{1,3}$ die sogenannte Spacetime-Algebra aus der Relativitätstheorie

Von besonderer Bedeutung für diese Arbeit ist $\mathbb{H}$, der Schiefkörper der Quaternionen. Dieser Schiefkörper besitzt die Basiselemente $i = \mathbf{e}_1, j = \mathbf{e}_2, k = \mathbf{e}_3$.

Die Besonderheit bei der Multiplikation ist, daß $k = ij$ gilt, so daß wir jedes Quaternion z in der Form

$$z = z_0 + z_1 i + z_2 j + z_3 k, \quad z_0, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{R},$$

schreiben können. Für die Multiplikation der Basiselemente gilt im einzelnen $i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = -ji = k$.

Wenden wir uns im weiteren wieder der Cliffordalgebra $C\ell_{p,q}$ zu. Offensichtlich ist $C\ell_{p,q}$ eine 2^n-dimensionale Algebra mit der Basis

$$\mathbf{e}_A = \mathbf{e}_{k_1,\ldots,k_r} : A = k_1, \ldots, k_r, 1 \leq k_1 < \ldots < k_r \leq n,$$

wobei $\mathbf{e}_\emptyset = \mathbf{e}_0$ ist. Die Multiplikation auf $C\ell_{p,q}$ ist definiert durch

$$\mathbf{e}_A \mathbf{e}_B = (-1)^{\mathrm{card}((A \cap B) \setminus S)} (-1)^{c(A,B)} \mathbf{e}_{A \Delta B}$$

mit $S = \{1, ..., p\}$, $\mathrm{card}(A)$ bezeichnet die Anzahl der Elemente von A und $c(A,B) = \sum_{j \in B} p(A,j)$, $p(A,j) = \mathrm{card}(i \in A : i > j)$, $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Insbesondere gilt für die Multiplikation der Basiselemente der Orthonormalbasis:

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i = -2B(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)\mathbf{e}_0,$$

oder im einzelnen

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i^2 = \mathbf{e}_0 \quad &, \quad i = 1, \ldots, p, \\ \mathbf{e}_i^2 = -\mathbf{e}_0 \quad &, \quad i = p+1, \ldots, p+q, \\ \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = -\mathbf{e}_j \mathbf{e}_i \quad &, \quad i \neq j. \end{aligned}$$

Für das Basiselement $\mathbf{e}_A$ gilt

$$\mathbf{e}_A = \mathbf{e}_{k_1,\ldots,k_r} = \mathbf{e}_{k_1} \cdot \mathbf{e}_{k_2} \cdot \ldots \cdot \mathbf{e}_{k_r}.$$

Die Elemente der Algebra $C\ell_{p,q}$ werden wir im weiteren als *Cliffordzahlen* bezeichen. Wenn die Menge A r Elemente hat, nennen wir $\mathbf{e}_A$ einen r-*Vektor*. Genauso werden wir auch jede Linearkombination aus r-Vektoren als r-Vektor bezeichen. Den Raum aller r-Vektoren bezeichnen wir mit $\bigwedge^r C\ell_{p,q}$. Offensichtlich ist die Cliffordalgebra $C\ell_{p,q}$ die direkte Summe aller $\bigwedge^r C\ell_{p,q}$. Die Projektion einer Cliffordzahl a auf $\bigwedge^r C\ell_{p,q}$ bezeichnen wir mit $< a >_r$. Anstatt von 1-Vektoren und 2-Vektoren sprechen wir von *Vektoren* und *Bivektoren*. Es ist leicht einzusehen, daß diese Bezeichnung sinnvoll ist, da wir jeden Vektor $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ als 1-Vektor

$$a = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{e}_i a_i$$

schreiben können. Mit anderen Worten, es existiert ein Isomorphismus zwischen dem Raum $\mathbb{R}^{p,q}$ und dem Raum aller 1-Vektoren $\bigwedge^1 C\ell_{p,q}$, so daß wir im weiteren diese beiden Räume miteinander identifizieren werden. Der n-Vektor $\mathbf{e}_{1,\ldots,n}$

wird auch *Pseudoskalar* genannt.

Eine der wichtigsten Fragen beim Betrachten einer Algebra von der analytischen Seite ist die Frage nach der Invertierbarkeit der Elemente bzgl. der Multiplikation. Genauer gesagt, es interessiert uns, wann existiert zu einem gegebenen Element $a \in C\ell_{p,q}$ ein Element $b \in C\ell_{p,q}$, so daß $ab = \mathbf{e}_0$ oder $ba = \mathbf{e}_0$ gilt. Hier gibt es jedoch eine wesentliche Schwierigkeit. Im Allgemeinen ist die Cliffordalgebra $C\ell_{p,q}$ nicht nullteilerfrei, daß heißt das Elemente $a \in C\ell_{p,q}$ und $b \in C\ell_{p,q}$ mit $ab = 0$ existieren. Es gilt z.B. in der Algebra $C\ell_{0,3}$ $(1 + \mathbf{e}_{123})(1 - \mathbf{e}_{123}) = 0$. Glücklicherweise ist aber der Teilraum aller Vektoren in jeder Cliffordalgebra $C\ell_{p,q}$ nullteilerfrei. Dies bedeutet, daß alle $\mathbf{e}_i$ notwendigerweise invertierbar sind. Das zu $\mathbf{e}_i$ inverse Element hat die Form $\mathbf{e}_i^{-1} = \frac{-\mathbf{e}_i}{B(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_i)}$.

Da die Multiplikation innerhalb der Cliffordalgebra nicht notwendigerweise kommutativ ist, hat das übliche Symbol $\frac{a}{b}$ keine Bedeutung. Es wird allerdings manchmal zu ästhetischen Zwecken verwendet und bedeutet dann

$$\frac{a}{b} = a/b = ab^{-1}.$$

Der Vektorraum $C\ell_{p,q}$ kann in zwei Unterräume zerlegt werden:

$$\begin{aligned} C\ell_{p,q}^{+} &= \oplus_{r \text{ gerade}} \bigwedge\nolimits^{r} C\ell_{p,q} \\ C\ell_{p,q}^{-} &= \oplus_{r \text{ ungerade}} \bigwedge\nolimits^{r} C\ell_{p,q} \end{aligned}$$

Wir werden $C\ell_{p,q}^{+}$ die *gerade Unteralgebra* nennen. $C\ell_{p,q}^{-}$ ist offensichlich keine Algebra.

Innerhalb dieser Arbeit werden wir uns im weiteren ausschließlich mit den Cliffordalgebren $C\ell_{0,n}$ befassen. Für Vektoren $x \in \mathbb{R}^n$ gilt die Beziehung

$$x^2 = -|x|^2\mathbf{e}_0,$$

wobei $|x|^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2$ die euklidische Norm im $\mathbb{R}^n$ ist. Für die Multiplikation der Elemente der Orthonormalbasis in $\mathbb{R}^n$ gilt die Beziehung

$$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j\mathbf{e}_i = -2\delta_{ij}.$$

Dabei ist δ_{ij} das Kronecker-Symbol.

Der Vorteil dieser Cliffordalgebren liegt in der *Paravektorschreibweise* von Vektoren. Nehmen wir den $n+1$-dimensionalen euklidischen Raum mit der Orthonormalbasis $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$. Betrachten wir nun in der Cliffordalgebra $C\ell_{0,n+1}$ die Elemente $\nu_i = -\mathbf{e}_{1\ldots n}\mathbf{e}_i$, $i = 1, \ldots, n$. Diese Elemente erfüllen die Definitionsbeziehung einer Cliffordalgebra

$$\nu_i\nu_j + \nu_j\nu_i = -2B(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j).$$

Die Unteralgebra generiert durch die ν_i ist $C\ell_{0,n+1}^{+}$. Es läßt sich leicht beweisen, daß sie isomorph zu $C\ell_{0,n}$ ist. Die Elemente der Form

$$x = x_0 + x_1\nu_1 + \ldots + x_n\nu_n$$

nennen wir *Paravektoren* von $C\ell_{0,n}$. Das klassische Beispiel für die Benutzung dieser Schreibweise ist der Raum $\mathbb{R}^2$, welcher mit dem Raum der Paravektoren von $C\ell_{0,1}$ identifiziert wird, der, setzt man $\nu_1 = i$, mit dem Körper der komplexen Zahlen identifiziert werden kann.

Im folgenden werden wir Vektoren immer in ihrer Paravektorschreibweise benutzen, daß heißt jeder Vektor $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ läßt sich in der Form

$$x = x_0\mathbf{e}_0 + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{e}_i x_i$$

schreiben, wobei wir zur Vereinfachung $\mathbf{e}_0$ weglassen werden, da wir es als Einselement mit 1 identifizieren können. Dabei nennen wir $x_0\mathbf{e}_0$ den skalaren Teil $\mathrm{Sc}\, x$ von x und $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{e}_i x_i$ den vektoriellen Teil $\mathrm{Vec}\, x$ von x. Mittels

$$\bar{a} = \sum_{A} a_A \bar{\mathbf{e}}_A,$$

wobei $\bar{\mathbf{e}}_A = \bar{\mathbf{e}}_{i_k} \ldots \bar{\mathbf{e}}_{i_1}$ und $\bar{\mathbf{e}}_j = -\mathbf{e}_j$, $j \neq 0$, bzw. $\bar{\mathbf{e}}_0 = \mathbf{e}_0$ gilt, definieren wir das *konjugierte Element* zu $a \in C\ell_{0,n}$. Insbesondere gilt

$$\bar{x} = x_0\mathbf{e}_0 - \sum_{i=1}^{n} \mathbf{e}_i x_i.$$

Mit Hilfe dieses konjugierten Elementes können wir das zu x inverse Element x^{-1} auch als

$$x^{-1} = \frac{\bar{x}}{|x|^2}$$

schreiben.

1.2 Funktionenräume

Ein *linksseitiges Modul* über $C\ell_{0,n}$ ist ein Vektorraum V, so daß für jedes $a \in C\ell_{0,n}$ eine Lineartransformation $L(a)$ aus V derart existiert, daß L ein Algebramorphismus ist, d.h. daß

$$L(ab + c) = L(a)L(b) + L(c)$$

mit $a, b, c \in C\ell_{0,n}$ gilt. Dabei werden wir im weiteren nur Module mit Einselement betrachten, d.h. $L(1)$ ist der Einheitsoperator. L wird *Linksmultiplikation* genannt. Analog gilt, daß V ein *rechtsseitiges Modul* ist, wenn eine sogenannte *Rechtsmultiplikation* existiert, die ein Antimorphismus ist:

$$R(ab+c) \;=\; R(b)R(a)+R(c)$$

für alle $a, b, c \in C\ell_{0,n}$. Hier haben wir wiederum $R(1)$ als Einselement. Selbstverständlich können wir unter Nutzung irgendeines Antiautomorphismus der Algebra eine Rechtsmultiplikation aus einer Linksmultiplikation ableiten. Genauer gesagt, ist L eine Linksmultiplikation, erhalten wir über die Beziehung $R(a) = L(\bar{a})$ eine Rechtsmultiplikation.

Ein Modul V nennen wir *Bimodul*, wenn es eine Links- und eine Rechtsmultiplikation besitzt, die miteinander kommutieren, d.h. es gilt

$$L(a)R(b) \;=\; R(b)L(a) \qquad \forall\, a, b \in C\ell_{0,n}.$$

Eine Abbildung B zwischen zwei (z.B. rechtsseitigen) Modulen V und W heißt $C\ell_{0,n} - linear$, wenn für beliebige a,f und g gilt

$$B(fa+g) = B(f)\,a + B(g).$$

Sei nun V ein rechtsseitiges Modul über $C\ell_{0,n}$. Ein *Skalarprodukt* in V ist eine Abbildung

$$(.,.)_V : V \times V \mapsto C\ell_{0,n}\,,$$

für die die folgenden Axiome $\forall a, b, c \in V$ und $\forall \lambda \in C\ell_{0,n}$ erfüllt sind:

$$\begin{array}{rrcl}
\textbf{I.} & (a,a) & = & 0 \Leftrightarrow a \;=\; 0 \\
\textbf{II.} & (a,b) & = & \overline{(b,a)} \\
\textbf{III.} & (a, b\cdot\lambda) & = & (a,b)\cdot\lambda \\
\textbf{IV.} & (a, b+c) & = & (a,b)+(a,c).
\end{array}$$

Für den Fall, daß V ein linksseitiges Modul ist, gilt Axiom **III** in der Form $(\lambda\cdot a, b) \;=\; \lambda\cdot(a,b)$. Weiterhin erhalten wir für den Fall, daß V ein rechtsseitiges Modul ist, die Beziehung $(a\lambda, b) = \bar{\lambda}(a,b)$. Analoges gilt auch für den linksseitigen Fall. Aus diesem Skalarprodukt läßt sich über die Beziehung $(a,b)_{\mathbf{R}} = \langle(a,b)\rangle_0$ ein reellwertiges Skalarprodukt ableiten.

Ist ein rechtsseitiges Modul V bzgl. des Skalarproduktes vollständig, so nennen wir V ein *rechtsseitiges Hilbertmodul.*

Ein grundlegender Satz aus der Funktionalanalysis ist der Rieszsche Darstellungssatz [BDSo].

Satz 1.2.1 *Sei V ein rechtsseitiges Hilbertmodul und V' der algebraische Dualraum zu V, d.h. der Raum aller links-$C\ell_{0,n}$-linearen Funktionale über V. Sei weiter $F \in V'$. Dann ist F genau dann beschränkt, wenn ein eindeutig bestimmtes Element $h \in V$ existiert, so daß $F(f) = (f,h)\;\forall f \in V$ gilt.*

In dieser Arbeit werden wir im weiteren V als Vektorraum von Funktionen definiert über dem $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^{n+1}$ mit Werten in der Cliffordalgebra $C\ell_{0,n}$ betrachten, wobei die Links-(Rechts-) multiplikation durch die punktweise Multiplikation definiert wird:

$$(L(a)f)(x) = a\,(f(x)) \quad (R(a)f)(x) = (f(x))\,a.$$

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ ein Gebiet, $\Gamma = \partial\Omega$ der Rand von Ω. Im weiteren interessieren uns die folgenden Regularitätseigenschaften für Ω.

Definition 1.2.1 *Wir sagen, daß Ω die Segmenteigenschaft besitzt, wenn eine lokale endliche offene Überdeckung $\{U_j\}$ von $\Gamma = \partial\Omega$ und eine zugehörige Folge $\{y_i\}$ von Vektoren ($y_i \neq 0$) existiert, so daß wenn $x \in \overline{\Omega} \cap U_j$ für irgendein j gilt, dann $x + ty_i \in \Omega$ für $0 < t < 1$ ist.*

Ω besitzt die Kegeleigenschaft, wenn ein endlicher Kegel C existiert, so daß jeder Punkt $x \in \Omega$ der Scheitelpunkt eines endlichen Kegels C_x ist, der in Ω enthalten und kongruent zu C ist.

Ω besitzt die gleichmäßige Kegeleigenschaft, wenn eine lokale endliche offene Überdeckung $\{U_j\}$ von Γ und eine zugehörige Folge $\{C_j\}$ von endlichen Kegeln, von denen jeder kongruent zu einem festen endlichen Kegel C ist, existiert, so daß

- *Für irgendein festes M hat jedes U_j einen Durchmesser kleiner als M.*
- *Für irgendein $\delta > 0$ gilt $\Omega_\delta = \{x \in \Omega : dist\,(x, \Gamma) < \delta\} \subset \cup_{j=1}^{\infty} U_j$.*
- *Für jedes j $\cup_{x \in \Omega \cap U_j}(x + C_j) = \Omega_j \subset \Omega$.*
- *Für ein festes R besitzt jede Ansammlung von $R+1$ der Mengen Ω_j einen leeren Durchschnitt.*

Definition 1.2.2 *Wir sagen, daß Ω die stark lokale Lipschitzeigenschaft besitzt, vorausgesetzt es existieren positive Zahlen δ und M, eine lokale endliche offene Überdeckung $\{U_j\}$ von Γ und für jedes U_j eine reellwertige Funktion f_j von $n-1$ reellen Variablen, so daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

- *Für ein endliches R besitzen jeweils $R+1$ der U_j einen leeren Durchschnitt.*
- *Für jedes Paar von Punkten $x, y \in \Omega_\delta = \{x \in \Omega : dist\,(x, \Gamma) < \delta\}$ mit $|x - y| < \delta$ existiert ein j, so daß*

  $$x, y \in \mathcal{V}_j = \{x \in U_j : dist\,(x, \partial U_j) > \delta\}.$$

- *Jede Funktion f_j erfüllt eine Lipschitzbedingung mit der Konstanten M:*

  $$|f(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) - f(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1})| \leq M|(\xi_1 - \eta_1, \ldots, \xi_{n-1} - \eta_{n-1})|.$$

- *Für ein gewisses kartesisches Koordinatensystem* $(\xi_{j,1}, \ldots, \xi_{j,n})$ *in* U_j *kann die Menge* $\Omega \cap U_j$ *durch die Ungleichung*

$$\xi_{j,n} < f(\xi_{j,1}, \ldots, \xi_{j,n-1})$$

dargestellt werden.

Wir weisen darauf hin, daß sich, wenn Ω beschränkt ist, die obigen doch etwas komplizierteren Bedingungen zu der einfachen Bedingung reduzieren lassen, daß Ω einen lokalen Lipschitzrand besitzt, d.h. jeder Punkt x auf dem Rand von Ω besitzt eine Umgebung U_x, so daß $\Gamma \cap U_x$ der Graph einer Lipschitz-stetigen Funktion ist.

Definition 1.2.3 Ω *besitzt die gleichmäßige* $\mathcal{C}^m$*-Regularitätseigenschaft, wenn eine lokale endliche offene Überdeckung* $\{U_j\}$ *von* Ω *und eine zugehörige Folge* $\{\Phi_j\}$ *von* m*-glatten eins-zu-eins Transformationen existieren, wobei* Φ_j U_j *auf* $B = \{y \in \mathbb{R}^n : |y| < 1\}$ *abbildet, so daß*

- *Für ein* $\delta > 0$ *ist* $\Omega_\delta \subset \cup_{j=1}^{\infty} \Psi_j(\{y \in \mathbb{R}^n : |y| < \frac{1}{2}\})$*, wobei* $\Psi_j = \Phi_j^{-1}$.
- *Für irgendein endliches* R *besitzen jeweils* $R+1$ *der Mengen* U_j *einen leeren Durchschnitt.*
- *Für jedes* j *gilt* $\Phi_j(U_j \cap \Omega) = \{y \in B : y_n > 0\}$.
- *Wenn* $(\Phi_{j,1}, \ldots, \Phi_{j,n})$ *und* $(\Psi_{j,1}, \ldots, \Psi_{j,n})$ *die Komponenten von* Φ_j *und* Ψ_j *bezeichnen, dann existiert ein endliches* M*, so daß für alle* $\alpha, |\alpha| \leq m$*, für jedes* $i, 1 \leq i \leq n$*, und für jedes* j *gilt*

$$\begin{aligned} |D^\alpha \Phi_{j,i}(x)| &\leq M, \qquad x \in U_j \\ |D^\alpha \Psi_{j,i}(y)| &\leq M, \qquad y \in B. \end{aligned}$$

Wichtig für diese Arbeit ist die Tatsache, daß die gleichmäßige $\mathcal{C}^m$-Regularität $(m \geq 1)$ die starke lokale Lipschitzeigenschaft, die gleichmäßige Kegelbedingung und die Segmenteigenschaft impliziert. Interessanterweise genügt es bei den „meisten" beschränkten Gebieten, nur die Kegeleigenschaft zu fordern, falls die starke lokale Lipschitzeigenschaft gewünscht wird [A].

Im folgenden werden wir Funktionen $f : \Omega \mapsto C\ell_{0,n}$ betrachten. Solche Funktionen können wir in der Form $f(x) = \sum_A \mathbf{e}_A f_A(x)$ schreiben. Damit lassen sich die üblichen Funktionenräume $\mathcal{C}(\Omega, C\ell_{0,n})$, $\mathcal{L}_p(\Omega, C\ell_{0,n})$, $\mathcal{W}_p^k(\Omega, C\ell_{0,n})$, usw. entweder koordinatenweise oder direkt über Ω einführen, d.h. wir können zum Beispiel den Raum $\mathcal{L}_p(\Omega, C\ell_{0,n})$ sowohl über die Beziehung $\{f_i\} \subset \mathcal{L}_p(\Omega, C\ell_{0,n})$ als auch über das Integral $\int_\Omega |f(x)|^p d\Omega_x$ einführen.

In dieser Arbeit werden wir im folgenden eine vereinfachende Schreibweise für Funktionenräume benutzen, in dem wir $C\ell_{0,n}$ weglassen. So schreiben wir z.B. für $\mathcal{C}(\Omega, C\ell_{0,n})$ $\mathcal{C}(\Omega)$ bzw. für $\mathcal{L}_p(\Omega, C\ell_{0,n})$ $\mathcal{L}_p(\Omega)$. Wir weisen trotzdem noch einmal darauf hin, daß wir bei allen Funktionenräumen, soweit es nicht explizit anders angegeben ist, Räume über Funktionen mit Werten in der zugehörigen Cliffordalgebra verstehen.

Im einzelnen benutzen wir die folgenden Räume:

$\mathcal{C}^{k,\beta}(\Omega)$ Raum der k-fach, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, stetig differenzierbaren Funktionen, deren k-te Ableitungen hölderstetig vom Grade β, $0 < \beta \leq 1$, sind, mit der Norm $||f||_{\mathcal{C}^{k,\beta}(\Omega)} = \sup_{|\alpha|\leq k, x\in\Omega} |\partial^\alpha f(x)| + \sup_{|\alpha|=k,x,y\in\Omega,x\neq y} \frac{|\partial^\alpha f(x)-\partial^\alpha f(y)|}{|x-y|^\beta}$,

$\mathcal{C}^k(\Omega)$ $= \mathcal{C}^{k,0}(\Omega), k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, der Raum aller k-fach stetig differenzierbaren Funktionen mit der Norm $||f||_{\mathcal{C}^{k,\beta}(\Omega)} = \sup_{|\alpha|\leq k,x\in\Omega} |\partial^\alpha f(x)|$,

$\mathcal{C}_0^{k,\beta}(\Omega)$ Raum aller Funktionen aus $\mathcal{C}^{k,\beta}(\Omega)$ mit kompakten Träger in Ω,

$\mathcal{D}(\Omega)$ $= C_0^\infty(\Omega)$, der Raum der beliebig oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in Ω,

$\mathcal{D}_0(\Omega)$ Menge aller Funktionen aus $\mathcal{D}(\Omega)$, deren Träger den Ursprung nicht enthält,

$\mathcal{D}'(\Omega)$ Raum aller stetigen Funktionale über $\mathcal{D}(\Omega)$,

$\mathcal{W}_p^k(\Omega)$ Raum aller Funktionen, die verallgemeinerte Ableitungen der Ordnung $k, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, besitzen, mit der Norm $||f||^p_{\mathcal{W}_p^k(\Omega)} = \int_\Omega \sum_{|\alpha|\leq k} |\partial^\alpha f|^p d\Omega$ bzw. im Falle $k \in \mathbb{R}_+$ $||f||^2_{\mathcal{W}_p^k(\Omega)} = ||f||_{\mathcal{W}_p^{[k]}(\Omega)} + \int_\Omega \int_\Omega \sum_{|\alpha|=[k]} \frac{|\partial^\alpha f(x)-\partial^\alpha f(y)|^p}{|x-y|^{n+p[k]}} d\Omega_x d\Omega_y$, wobei $1 < p < \infty$,

$\overset{\circ}{\mathcal{W}}{}_p^k(\Omega)$ die Abschließung von $\mathcal{D}(\Omega)$ in $\mathcal{W}_p^k(\Omega)$,

$\mathcal{H}^k(\mathbb{R}^n)$ Raum aller Funktionen aus $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, deren Norm $||f||_{\mathcal{H}^k(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^k |\mathcal{F}f|^2 d\mathbb{R}^n_\xi$, wobei $\mathcal{F}$ die Fouriertransformierte ist, endlich ist,

$\mathcal{H}^k(\Omega)$ Raum der Funktionen über Ω, die eine stetige Fortsetzung nach $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)$ gestatten, wobei die Norm das Infimum über die $\mathcal{H}^k(\mathbb{R}^n)$-Normen aller möglichen Fortsetzungen ist,

$\mathcal{L}_p(\Omega)$ Raum aller zur p-ten Potenz, $1 < p < \infty$, integrierbaren Funktionen mit der Norm $||f||^p_{\mathcal{L}_p(\Omega)} = \int_\Omega |f|^p d\Omega$,

$\mathcal{L}_p^{loc}(\Omega)$ Raum aller Funktionen, die in jeder kompakten Teilmenge von Ω $\mathcal{L}_p$-Funktionen sind.

Damit sind die obigen Räume zweiseitige Module über Ω, während der Raum $\mathcal{L}_2(\Omega, C\ell_{0,n})$ mit dem Skalarprodukt

$$(u, v) = \int_\Omega \bar{u} v \, d\Omega \qquad \forall u, v \in \mathcal{L}_2(\Omega, C\ell_{0,n})$$

ein rechtsseitiges Hilbertmodul ist. Mit dem inneren Produkt

$$[u, v] = \int_\Omega u \bar{v} \, d\Omega \qquad \forall u, v \in \mathcal{L}_2(\Omega, C\ell_{0,n})$$

kann der Raum $\mathcal{L}_2(\Omega)$ auch zu einem linksseitigen Modul gemacht werden, den wir im weiteren mit $\mathcal{L}_2^l(\Omega)$ bezeichen werden. (Aus Symmetriegründen schreibt man oft für das rechtsseitige Hilbertmodul dann in Analogie $\mathcal{L}_p^r(\Omega)$, aber wir wollen hier bei rechtsseitigen Hilbertmodulen das r generell weg lassen.)

Betrachten wir nun den Raum $\mathcal{W}_2^k(\Omega), k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dieser Raum ist, versehen mit dem inneren Produkt

$$(u,v) = \sum_{|\alpha| \le k} \int_\Omega \partial^\alpha \bar{u} \partial^\alpha v d\Omega,$$

ein rechtsseitiges Hilbertmodul. Analog zum Raum $\mathcal{L}_2(\Omega)$ wird dieser Raum mittels des inneren Produktes

$$[u,v] = \sum_{|\alpha| \le k} \int_\Omega \partial^\alpha u \partial^\alpha \bar{v} d\Omega,$$

zum linksseitigen Hilbertmodul $W_2^{k,l}(\Omega)$. Es ist leicht einzusehen, daß zwischen den inneren Produkten die Beziehungen $[u,v] = \overline{(\bar{v},\bar{u})}$ und $(u,v) = \overline{[\bar{v},\bar{u}]}$ gelten. Nach dem Rieszschen Darstellungssatz läßt sich nun jedes beschränkte lineare Funktional über dem rechtsseitigen Hilbertmodul $\mathcal{W}_2^k(\Omega)$ bzw. dem linksseitigen Hilbertmodul $\mathcal{W}_2^{k,l}(\Omega)$ mit Hilfe des inneren Produktes darstellen:

Ist $F \in (\mathcal{W}_2^k(\Omega))'$, so existiert ein $f \in \mathcal{W}_2^k(\Omega)$ mit $F(\phi) = (f,\phi)$, bzw. ist $G \in (\mathcal{W}_2^{k,l}(\Omega))'$, so existiert ein $g \in \mathcal{W}_2^{k,l}(\Omega)$ mit $G(\phi) = [\phi, g]$.

Damit erhalten wir die folgenden Lemmata:

Lemma 1.2.1 *Sei $F \in (\mathcal{W}_2^k(\Omega))'$, dann gibt es $f_\alpha \in \mathcal{L}_2^l(\Omega), |\alpha| \le k$, so daß*

$$F(\phi) = \sum_{|\alpha| \le k} \int_\Omega f_\alpha \partial^\alpha \phi d\Omega.$$

Beweis: Nach dem Rieszschen Darstellungsatz existiert ein $f \in \mathcal{W}_2^k(\Omega)$ so, daß $F(\phi) = \sum_{|\alpha| \le k} \int_\Omega \partial^\alpha \bar{f} \partial^\alpha \phi d\Omega$ gilt. Aus $f \in \mathcal{W}_2^k(\Omega)$ folgt $\bar{f} \in \mathcal{W}_2^{k,l}(\Omega)$ und damit $f_\alpha = \partial^\alpha \bar{f} \in \mathcal{L}_2^l(\Omega)$.

Lemma 1.2.2 *Sei $G \in (\mathcal{W}_2^{k,l}(\Omega))'$, dann gibt es $g_\alpha \in \mathcal{L}_2(\Omega), |\alpha| \le k$, so daß*

$$G(\phi) = \sum_{|\alpha| \le k} \int_\Omega \partial^\alpha \bar{\phi} g_\alpha d\Omega.$$

Der Beweis ist analog zum vorherigen Lemma. Entprechend dem reellwertigen Fall (vgl. [T]) gilt der folgende Satz:

Satz 1.2.2 *Die Einbettung $(\overset{\circ}{\mathcal{W}_2^k}(\Omega))' \mapsto \mathcal{D}'(\Omega)$ ist injektiv und stetig. Die Distribution $F = \sum_{|\alpha| \le k} (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha f_\alpha \in \mathcal{D}'(\Omega)$ mit $f_\alpha \in \mathcal{L}_2^l(\Omega)$ läßt genau eine stetige Fortsetzung $\tilde{F}$ auf $(\overset{\circ}{\mathcal{W}_2^k}(\Omega))'$ zu und es gilt*

$$||F||_{(\overset{\circ}{\mathcal{W}_2^k}(\Omega))'} \le \left(\sum_{|\alpha| \le k} ||f_\alpha||^2_{\mathcal{L}_2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ein analoger Satz gilt für $(\overset{\circ}{\mathcal{W}}{}_2^{k,l}(\Omega))'$.

Damit erkennen wir, wenn wir das innere Produkt nicht berücksichtigen, daß die Räume $(\overset{\circ}{\mathcal{W}}{}_2^{k}(\Omega))'$ und $(\overset{\circ}{\mathcal{W}}{}_2^{k,l}(\Omega))'$ aus den gleichen Elementen $F = \sum_{|\alpha|\leq k}(-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha \bar{f}_\alpha$ mit $f_\alpha \in \mathcal{L}_2(\Omega)$ bestehen. Dies ermöglicht uns die folgende Definition:

Definition 1.2.4 *Das normierte zweiseitige Modul $\mathcal{W}_2^{-k}(\Omega)$ sei der Raum aller Distributionen $F \in \mathcal{D}'(\Omega)$, die die Darstellung*

$$F = \sum_{|\alpha|\leq k}(-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha \bar{f}_\alpha$$

mit $f_\alpha \in \mathcal{L}_2(\Omega)$ gestatten. Weiterhin sei

$$||F||_{\mathcal{W}_2^{-k}(\Omega)} = \inf\left(\sum_{|\alpha|\leq k}||f_\alpha||^2_{\mathcal{L}_2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}},$$

wobei das Infimum über alle möglichen Darstellungen zu nehmen ist.

Dies bedeutet $\mathcal{W}_2^{-k}(\Omega) = (\overset{\circ}{\mathcal{W}}{}_2^{k}(\Omega))'$.

Diese Überlegungen folgten ähnlichen Überlegungen in [Ber] für den Fall quaternionenwertiger Funktionen.

Wenden wir uns nun dem allgemeineren Fall $\mathcal{W}_p^k, 1 < p < \infty, k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, zu. Dazu führen wir die Räume $\mathcal{H}_p^s$ ein. Sei $1 < p < \infty$ und $-\infty < s < \infty$, dann ist

$$\mathcal{H}_p^s(\mathbb{R}^n) := \{f | f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), ||f||_{\mathcal{H}_p^s} = ||\mathcal{F}^{-1}(1+|x|^2)^{\frac{s}{2}}\mathcal{F}f||_{\mathcal{L}_p} < \infty\}.$$

Den Raum $\mathcal{H}_p^s(\Omega)$ definieren wir einfach als Einschränkung des ensprechenden $\mathcal{H}_p^s(\mathbb{R}^n)$ auf Ω mit der Norm $||f||_{\mathcal{H}_p^s(\Omega)}$ gleich dem Infimum der $\mathcal{H}_p^s(\mathbb{R}^n)$-Normen aller möglichen $g \in \mathcal{H}_p^s(\mathbb{R}^n)$, für die gilt $f = g|_\Omega$. Wenn das Gebiet Ω eine gleichmäßige Kegelbedingung erfüllt, gilt für $1 < p < \infty$ und $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ $\mathcal{H}_p^k(\Omega) = \mathcal{W}_p^k(\Omega)$. Damit können wir die negativen Räume $\mathcal{W}_p^{-k}(\Omega), k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, einführen. Wir definieren $\mathcal{W}_p^{-k}(\Omega) := \mathcal{H}_p^{-k}(\Omega)$.

Satz 1.2.3 *Sei $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ und $-\infty < s < \infty$. Dann gilt*

$$(\mathcal{H}_p^s(\mathbb{R}^n))' = \mathcal{H}_q^{-s}(\mathbb{R}^n).$$

Beweis: Da der Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dicht liegt in $\mathcal{H}_p^s(\mathbb{R}^n)$ genügt es $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ zu betrachten. Sei nun zunächst $f \in (\mathcal{H}_p^s(\mathbb{R}^n))'$. Dann haben wir

$$\begin{aligned}|\mathcal{F}^{-1}(1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}\mathcal{F}f(\mathcal{F}(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\mathcal{F}^{-1}\phi)| &= |f(\phi)| \leq ||f||_{(\mathcal{H}_p^s)'}||\phi||_{\mathcal{H}_p^s} \\ &= ||f||_{(H_p^s)'}||\mathcal{F}(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\mathcal{F}^{-1}\phi||_{\mathcal{L}_p},\end{aligned}$$

wobei $(\mathcal{F}^{-1}\phi)(\xi) = (\mathcal{F}\phi)(-\xi)$ gilt. Da $I_s\phi = \mathcal{F}^{-1}(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\mathcal{F}\phi$ eine stetige eineindeutige Abbildung nicht nur von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sondern auch von $\mathcal{H}_p^\sigma(\mathbb{R}^n)$ nach $\mathcal{H}_p^{\sigma-s}(\mathbb{R}^n)$ $(1<\sigma<\infty)$ ist und wir von [BDSo] wissen, daß $(\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n))' = \mathcal{L}_q(\mathbb{R}^n)$ mit $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, erhalten wir

$$||f||_{\mathcal{H}_q^{-s}} \leq ||f||_{(\mathcal{H}_p^s)'}.$$

Analog erhalten wir für $f \in \mathcal{H}_q^{-s}(\mathbb{R}^n)$

$$|f(\phi)| \leq ||f||_{\mathcal{H}_q^{-s}}||\phi||_{\mathcal{H}_p^s}$$

woraus

$$||f||_{(\mathcal{H}_p^s)'} \leq ||f||_{\mathcal{H}_q^{-s}}$$

folgt.

q.e.d.

Dieser Satz zeigt uns, daß die Räume $\mathcal{H}_p^s(\mathbb{R}^n)$ und damit auch die Räume $\mathcal{W}_p^k(\mathbb{R}^n)$ reflexive Banachräume sind. Weiterhin zeigt uns dieser Satz, daß die obige Definition der negativen $\mathcal{W}_p^k$-Räume sinnvoll ist. Insbesondere gilt für den Laplaceoperator [T]

$$\Delta : \mathcal{W}_p^1(\Omega) \mapsto \mathcal{W}_p^{-1}(\Omega).$$

Es stellt sich nun die Frage, wie sehen eigentlich die Elemente des Raumes $\mathcal{W}_p^{-k}(\Omega), k \in \mathbb{N}$, aus? Nach [BDSo] können wir jedes cliffordwertige Funktional $F(g)$ aus $(\mathcal{L}_p(\Omega))'$ in der Form

$$(f,g) = \int_\Omega \overline{f} g d\Omega$$

mit $f \in \mathcal{L}_q(\Omega)$ und jedes reellwertige Funktional $F(g)$ aus $(\mathcal{L}_p(\Omega))'$ in der Form

$$(f,g)_{\mathrm{Sc}} = \mathrm{Sc}\int_\Omega \overline{f} g d\Omega$$

darstellen. Analoge Überlegungen, wie im Fall der $\mathcal{W}_2^{-k}(\Omega)$-Räume, $k \in \mathbb{N}$, führen uns zu dem folgenden Satz:

Satz 1.2.4 *Jedes Element $f \in \mathcal{W}_p^{-k}(\Omega), 1<p<\infty, k \in \mathbb{N}$ gestattet die Darstellung*

$$f = \sum_{|\alpha|\leq k} (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha \bar{f}_\alpha$$

mit $f_\alpha \in \mathcal{L}_p(\Omega)$. Weiterhin gilt für die Norm von f

$$||f||_{\mathcal{W}_2^{-k}(\Omega)} = \inf\left(\sum_{|\alpha|\leq k} ||f_\alpha||^2_{\mathcal{L}_2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}},$$

wobei das Infimum über alle möglichen Darstellungen zu nehmen ist.

Im weiteren werden wir uns die Definitionen und Eigenschaften einiger für die Clifford-Analysis und diese Arbeit wichtiger Operatoren ansehen.

1.3 Hyperkomplexe Funktionentheorie

Eines der mächtigsten und schönsten Werkzeuge in der Mathematik ist die komplexe Funktionentheorie. Insbesondere die riesige Stärke der komplexen Differenzierbarkeit liefert uns solche bekannten und staunenswerten Resultate, wie die Tatsache, daß eine einmal differenzierbare Funktion beliebig oft differenzierbar ist oder daß eine solche Funktion schon durch die Angabe ihrer Randwerte eindeutig definiert ist.

Gerade diese Schönheit komplexer Funktionen brachte sofort die Frage auf, ob solche Sätze auch für cliffordwertige Funktionen gelten. Doch trotz der vielen Ansätze und Bemühungen eine hyperkomplexe Funktionentheorie zu entwickeln, wie es detailiert in [Ha] beschrieben ist, durch Mathematiker wie K. Th. Vahlen [V], A.C. Dixon [Di] und R. Fueter [Fue], wobei letzterer bereits in den dreißiger Jahren eine Funktionentheorie für quaternionenwertige Funktionen aufstellte, war gerade durch das Schattendasein, daß die Cliffordalgebren insbesondere in der ersten Hälfte unseres Jahrhunderts fristeten, der Entwicklung einer solchen Funktionentheorie kein Erfolg beschienen.

Der Durchbruch einer Funktionentheorie für cliffordwertige Funktionen kam erst Anfang der siebziger Jahre durch R. Delanghe [D] und K. Habetha [Ha]. Zum einen zwang das Interesse der Physiker an den Cliffordalgebren zur mathematischen Beschreibung von Vorgängen in der Quantenmechanik auch die Mathematiker, sich mit solchen Fragestellungen zu befassen. K. Habetha zeigte dabei, wann überhaupt eine Verallgemeinerung der komplexen Funktionentheorie in höheren Dimensionen möglich ist. Zum anderen gelang es R. Delanghe in der Folge an seiner Universität in Ghent eine Gruppe aufzubauen, die auch heute noch als eine der Zentren der mathematischen Forschung auf dem Gebiet der Cliffordanalysis gilt. Durch diese Gruppe, wie auch durch die Arbeiten von T. Sudbery [Sud] und W. Sprößig [Sp2] wurde eine Lawine ins Rollen gebracht, die bis heute so richtig in Schwung zu kommen scheint, wie sich an dem steigenden Interesse an den Konferenzen „Cliffordalgebras and it's Applications", die seit 1985 alle 4 Jahre stattfinden, leicht erkennen läßt. Bei der ersten Tagung der ISAAC, die 1997 in Newark (Delaware) stattfand, stellten die „Clifford-Leute" die zahlenmäßig stärkste Sektion („Analysis of the Dirac-operator").

Das Hauptproblem beim Aufbau einer hyperkomplexen Funktionentheorie stellt naturgemäß die Verallgemeinerung des Begriffes der holomorphen Funktion dar. Im komplexen Fall gibt es im wesentlichen drei zueinander äquivalente Ansätze zur Definition:

1. mittels der komplexen Differenzierbarkeit, d.h. der Existenz des Grenzwertes des Differenzenquotienten

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$

für h gegen 0,

2. über die Erzeugung durch konvergente Potenzreihen der Form

$$P(z,a) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k,$$

3. bzw. mittels der Tatsache, daß eine Funktion f den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen genügt (in ihrer komplexen Form $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$).

Versuchen wir nun diese Definitionen zu verallgemeinern, entstehen naturgemäß Schwierigkeiten, wie man bereits beim einfachsten Fall einer Verallgemeinerung, dem Fall der Quaternionen, sofort sieht.

Bei dem ersten Ansatz sollte man sich die Zunahme der Mächtigkeit des Begriffes Differenzierbarkeit beim Übergang von der reellen zur komplexen Analysis vor Augen halten. Während in der reellen Analysis die Differenzierbarkeit noch ein relativ schwacher Begriff ist und im wesentlichen nicht viel mehr als eine gewisse „anschauliche“ Glattheit der Funktion sichert, ist die Differenzierbarkeit in der komplexen Analysis ein von seiner Stärke schon beeindruckender Begriff, was solche Folgerungen wie die gesicherte Differenzierbarkeit der Ableitung zeigen. Diese Stärke der komplexen Differenzierbarkeit hat natürlich auch Nebeneffekte. Eine der wesentlichsten ist die „kleinere“ Zahl von differenzierbaren Funktionen.

Diese Effekte setzen sich auch beim Übergang von der komplexen in die hyperkomplexe Differenzierbarkeit fort. Wie Melihkzon [Me] 1948 und Sudbery [Sud] 1979 bewiesen haben, sind die einzigen Funktionen, deren Differenzenquotient $(f(z+h) - f(z))(h)^{-1}$ einen Grenzwert besitzen könnte, von der Gestalt $f(z) = az + b$, also lineare Funktionen. Diese Zunahme der Stärke dieses Begriffes (bzw. im eigentlichen Sinne der Stärke des Grenzwertbegriffes) führt uns zu einer Klasse von Funktionen, die als Basis einer hyperkomplexen Funktionentheorie viel zu klein ist.

Der zweite Ansatz führt aufgrund der fehlenden Kommutativität zu Potenzen der Form $a_0 q a_1 q \ldots a_{n-1} q a_n$ mit den Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$ bezüglich einer quaternionischen Veränderlichen q. Aber, da die Koordinaten t, x, y, z von q selber als Summen

$$t = \tfrac{1}{4}(q - iqi - jqj - kqk) \qquad x = \frac{1}{4i}(q - iqi + jqj + kqk)$$
$$y = \tfrac{1}{4j}(q + iqi - jqj + kqk) \qquad z = \frac{1}{4k}(q + iqi + jqj - kqk)$$

von solchen Potenzen dargestellt werden können, erhalten wir, daß jede reell analytische Funktion „quaternionisch holomorph“ sein würde, eine ebenfalls für uns untragbare Situation.

Es bleibt demnach nur der dritte Ansatz als mögliche Basis einer Verallgemeinerung des Begriffes holomorphe Funktion. Mit anderen Worten, wir benötigen einen Differentialoperator erster Ordnung, der die Funktion von $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ in Analogie zum Komplexen ausfüllt. Wenn wir uns erinnern, daß im Komplexen $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})$ gilt, haben wir schon einen Ansatz für eine formelle Verallgemeinerung eines solchen Operators gefunden.

Definition 1.3.1 *Sei Ω ein Gebiet im $\mathbb{R}^4$ und $f : \Omega \mapsto \mathbb{H}$ eine quaternionen-wertige Funktion definiert über Ω. f heißt links- respective rechts-regulär, wenn*

$$\begin{aligned} D_l f &= \frac{\partial f}{\partial x_0} + i\frac{\partial f}{\partial x_1} + j\frac{\partial f}{\partial x_2} + k\frac{\partial f}{\partial x_3} \\ D_r f &= \frac{\partial f}{\partial x_0} + \frac{\partial f}{\partial x_1}i + \frac{\partial f}{\partial x_2}j + \frac{\partial f}{\partial x_3}k \end{aligned}$$

über Ω gilt.

Diese Definition geht u.a. auf R. Fueter [Fue] zurück. An dieser Definition erkennen wir nicht nur die Ähnlichkeit zum Komplexen, sondern auch den wesentlichen Unterschied. Aufgrund der fehlenden Kommutativität haben wir zwei Differentialoperatoren, die dieselbe Rolle spielen könnten, wie der Cauchy-Riemannsche Differentialoperator in der komplexen Funktionentheorie, wenngleich auch nur in verschiedenen Räumen (vgl. Abschnitt 1.2).

Dies ist aber eine rein mechanische Verallgemeinerung. Eine andere Möglichkeit ergibt sich, wenn wir uns erinnern, was das Wesentliche an den holomorphen Funktionen in Bezug auf mögliche Anwendungen im Bereich der partiellen Differentialgleichungen ist. Die besondere Bedeutung der holomorphen Funktionen ist hier, daß sie gleichzeitig harmonisch sind, also Lösungen der Gleichung $\Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Dies liegt begründet in der Tatsache, daß $\Delta_2 = \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$. Es wäre also von großem Vorteil für uns, wenn wir den Cauchy-Riemann-Operator in einer Weise verallgemeinern könnten, so daß wir wieder eine solche Zerlegung des Laplaceoperators erhalten. Wir möchten im übrigen darauf hinweisen, daß gerade diese Tatsache der Faktorisierung des Laplaceoperators eine der Hauptschwierigkeiten der Verallgemeinerung komplexer Methoden in der Theorie mehrerer komplexer Veränderlicher ist.

Schauen wir uns nun die obige Definition nach Fueter unter diesem Gesichtspunkt an, so erhalten wir

$$\Delta_4 = D_l\overline{D}_l = D_r\overline{D}_r,$$

mit $\overline{D}_l = \frac{\partial f}{\partial x_0} - i\frac{\partial f}{\partial x_1} - j\frac{\partial f}{\partial x_2} - k\frac{\partial f}{\partial x_3}$ (analog $\overline{D}_r$).

Damit erscheint uns diese Definition gar nicht mehr so mechanisch, so daß wir sie als Grundlage für eine allgemeine Definition benutzen können.

Definition 1.3.2 *Der verallgemeinerte Cauchy-Riemann-Operator D bzgl. des orthogonalen Vektorraums $\mathbb{R}^n$ ist der Differentialoperator*

$$D = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

über $\mathcal{C}^1(\Omega, C\ell_{0,n})$.

Für diesen Operator gilt $D\overline{D}f = \overline{D}Df = \Delta f$, wenn wir den konjugierten Cauchy-Riemann-Operator

$$\overline{D}f = \sum_{k=0}^{n} \overline{\mathbf{e}}_k \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

einführen. In der Cliffordanalysis wird auch relativ häufig der sogenannte Dirac-Operator benutzt. Es handelt sich dabei um den Operator

$$\mathbf{D}f = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{e}_k \frac{\partial f}{\partial x_k}.$$

Zwischen der Definition von D und $\mathbf{D}$ scheint kein grosser Unterschied zu bestehen, wenn man von der fehlenden Differentiation nach x_0 absieht. Aber gerade dieses Fehlen bringt es mit sich, daß für den konjugierten Dirac-Operator $\overline{\mathbf{D}} = -\mathbf{D}$ gilt, was sich in der Folgezeit als wesentlicher Unterschied herausstellen wird.

Weiterhin gelten die folgenden Beziehungen

$$\overline{D}f + Df = 2\frac{\partial}{\partial x_0} f$$
$$\overline{D}f - Df = -2\mathbf{D}f$$

Definition 1.3.3 *Eine Funktion heißt links-monogen, wenn $Df = 0$ gilt.*

Normalerweise bezeichnet man eine Funktion f, für die $\mathbf{D}f = 0$ gilt, als links-monogen und benutzt für ähnliche Definitionen Begriffe wie hyperholomorph, regulär, usw. . Da aber zwischen $\mathbf{D}$ und D eine einfache algebraische Beziehung besteht, halten wir es für angebracht, diesen Begriff auch hier zu verwenden. Im weiteren werden wir auch für beide das Symbol D verwenden, wenn aus dem Kontext klar ersichtlich ist, welcher der beiden Operatoren gemeint ist.

Ein bedeutendes Beispiel einer links-monogenen Funktion ist die Funktion

$$e(x) = \frac{1}{\omega} \frac{\overline{x}}{|x|^{n+1}}.$$

Dabei ist ω die Oberfläche der Einheitskugel im $\mathbb{R}^{n+1}$. Diese Funktion ist links-monogen für $x \neq 0$.

Diese Funktion ist eine Fundamentallösung des Cauchy-Riemann-Operators. Vermöge dieser Fundamentallösung können wir die folgenden Integraloperatoren einführen.

Definition 1.3.4 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet mit einem hinreichend glatten Rand $\Gamma = \partial\Omega$. Mit $\alpha(y)$ bezeichnen wir die äußere Normale im Punkt y. Für $f \in \mathcal{C}^{0,\beta}(\Omega), 0 < \beta \leq 1$ seien die folgenden Operatoren erklärt:*

- *die Teodorescu-Transformation (oder der T-Operator)*

$$Tf(x) = \int_\Omega e(x-y)f(y)d\Omega_y,$$

- *der Randoperator F_Γ*

$$F_\Gamma f(x) = \int_\Gamma e(x-y)\alpha(y)f(y)d\Gamma_y$$

mit $x \notin \Gamma$, sowie

- *der singuläre Randoperator* S_Γ

$$Sf(x) = 2\int_\Gamma e(x-y)\alpha(y)f(y)d\Gamma_y$$

wobei $x \in \Gamma$.

Weiterhin benötigen wir noch die folgenden Operatoren:

- das Volumenpotential

$$Kf(x) = \frac{1}{\omega}\int_\Omega \frac{f(y)}{|x-y|^{n-1}}d\Omega_y,$$

und

- das Potential der Einfachschicht

$$V_\alpha f(x) = \frac{1}{\omega}\int_\Gamma \frac{\alpha(y)}{|x-y|^{n-1}}f(y)d\Gamma_y,$$

wobei wieder $x \notin \Gamma$.

Im weiteren werden wir unter dem konjugierten Operator eines hyperkomplexen Integraloperators

$$Af = af + \int_\Omega k(x,y)f(y)d\Omega_y$$

den Operator

$$\overline{A}f = af + \int_\Omega \overline{k(x,y)}f(y)d\Omega_y$$

verstehen. Als konjugierten Operator eines hyperkomplexen Randintegraloperators

$$A_\Gamma f = af + \int_\Gamma k(x,y)\alpha(y)f(y)d\Gamma_y$$

definieren wir den Operator

$$\overline{A}_\Gamma f = af + \int_\Gamma \overline{k(x,y)}\,\overline{\alpha(y)}f(y)d\Gamma_y.$$

Damit haben wir zu den obigen Operatoren auch die zugehörigen konjugierten Operatoren $\overline{T}$, $\overline{F}_\Gamma$, $\overline{S}_\Gamma$ und $V_{\overline{\alpha}}$. Der konjugierte Operator zum Volumenpotential K ist K selber.

Für unsere Integraloperatoren gelten die folgenden Abbildungseigenschaften in Sobolevräumen ($k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, 1 < p < \infty$):

- $T : \mathcal{W}_p^k(\Omega) \mapsto \mathcal{W}_p^{k+1}(\Omega)$
- $F_\Gamma : \mathcal{W}_p^{k+1-\frac{1}{p}}(\Gamma) \mapsto \mathcal{W}_p^{k+1}(\Omega)$

- $S_\Gamma : \mathcal{L}_p(\Gamma) \mapsto \mathcal{L}_p(\Gamma)$
- $K : \mathcal{W}_p^k(\Omega) \mapsto \mathcal{W}_p^{k+2}(\Omega)$
- $V_\alpha : \mathcal{W}_p^{k+1-\frac{1}{p}}(\Gamma) \mapsto \mathcal{W}_p^{k+2}(\Omega)$

Zum Beweis dieser Eigenschaften verweisen wir auf [GSp1] und [GSp2]. A. McIntosh [Mc] bewies die Abbildungseigenschaft des S_Γ-Operators für den Fall des Randes eines starken Lipschitz-Gebietes. Interessanterweise wurden die Abbildungseigenschaften des T-Operators, der eine direkte Verallgemeinerung des komplexen T-Operators darstellt, zwischen Sobolev-Räumen gefunden [GSp1], bevor sie im komplexen Fall untersucht wurden [Msh].

Innerhalb dieser Arbeit benötigen wir noch eine weitere Abbildungseigenschaft bzgl. T.

Satz 1.3.1 *Der Operator*

$$T : \mathcal{W}_p^{-1}(\Omega) \mapsto \mathcal{L}_p(\Omega), \quad 1 < p < \infty,$$

ist ein beschränkter Operator.

Beweis: Die übliche Methode zum Beweis der Beschränktheit ist die Untersuchung des Symbols, d.h. der Fouriertransformation des Kernes. Wir wollen hier jedoch einen anderen Weg beschreiten. Nach Satz 1.2.4 können wir jedes Element $f \in \mathcal{W}_p^{-1}(\Omega)$ in der Form

$$f = f_0 + \sum_{k=0}^{n} \partial_k f_{k+1}$$

mit $f_0, f_k \in \mathcal{L}_p(\Omega)$. Wählen wir nun

$$v = v_0 + \sum_{k=0}^{n} \partial_k v_{k+1}$$

mit $v_0, v_k \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, so können wir

$$Tv = \int_\Omega e(x-y)v(y)d\Omega_y$$

betrachten. Wir haben

$$\begin{aligned} Tv &= \int_\Omega e(x-y)\left(v_0(y) + \sum_{k=0}^{n} \partial_k v_{k+1}(y)\right) d\Omega_y \\ &= \int_\Omega e(x-y)v_0(y)d\Omega_y + \sum_{k=0}^{n} \int_\Omega \partial_k e(x-y)v_{k+1}(y)d\Omega_y \end{aligned}$$

Die Integrale $\int_\Omega \partial_k e(x-y)v_{k+1}(y)d\Omega_y$ sind für alle k stark singuläre Integrale vom Calderon-Zygmund-Typ [GSp2], d.h. es gilt

$$\begin{aligned} ||Tv||_{\mathcal{L}_p(\Omega)} &\leq ||\int_\Omega e(x-y)v_0(y)d\Omega_y||_{\mathcal{L}_p(\Omega)} \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n} ||\int_\Omega \partial_k e(x-y)v_{k+1}(y)d\Omega_y||_{\mathcal{L}_p(\Omega)} \\ &\leq C_0||v_0||_{\mathcal{L}_p(\Omega)} + \sum_{k=0}^{n} C_{k+1}||v_k||_{\mathcal{L}_p(\Omega)}, \end{aligned}$$

wobei die $C_k, k = 0, \ldots, n$, konstant sind.

Wir erhalten somit aufgrund der Dichtheit von $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ in $\mathcal{L}_p(\Omega)$, daß für $f \in \mathcal{W}_p^{-1}(\Omega)$

$$||Tf||_{\mathcal{L}_p(\Omega)} \leq C\left(||f_0||_{\mathcal{L}_p(\Omega)} + \sum_{k=0}^{n} ||f_{k+1}||_{\mathcal{L}_p(\Omega)}\right)$$

für jede beliebige Darstellung von f ist. Daraus folgt

$$||Tf||_{\mathcal{L}_p(\Omega)} \leq \hat{C}||f||_{\mathcal{W}_p^{-1}(\Omega)}.$$

q.e.d.

Weiterhin gelten noch die folgenden Eigenschaften (für die Beweise verweisen wir auf [GSp2]):

Satz 1.3.2 *Sei $f \in \mathcal{L}_p(\Omega), 1 < p < \infty$, dann gilt*

$$DTf = f,$$

d.h. T ist ein rechtsinverser Operator zu D. Im Falle $f \in \mathcal{C}^{0,\beta}(\overline{\Omega}), 0 < \beta \leq 1$, gilt

$$DTf(x) = \begin{cases} f(x) & \textit{in} \quad x \in \Omega \\ 0 & \textit{in} \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega} \end{cases}$$

Satz 1.3.3 *Für $f \in \mathcal{W}_p^1(\Omega), 1 < p < \infty$, besteht die folgende Beziehung zwischen dem Volumenpotential, dem Einfachschichtpotential und dem T-Operator:*

$$V_{\overline{\alpha}} f = Tf + K\overline{D}f.$$

Satz 1.3.4 *(Formel von Borel und Pompeiu)*
Für $f \in \mathcal{W}_p^1(\Omega), 1 < p < \infty$, gilt

$$F_\Gamma f + TDf = f.$$

Bemerkung 1.3.1 *Die Formel von Borel und Pompeiu zerlegt eine W_p^1-Funktion in einen monogenen und einen nichtmonogenen Anteil. Als Folgerung aus dieser Formel erhalten wir die Cauchysche Integralformel ($f \in \ker D \cap \mathcal{W}_p^1(\Omega)$):*

$$F_\Gamma f = f.$$

Satz 1.3.5 *(Satz von Liouville)*
Sei $f \in (\ker D)(\mathbb{R}^n)$. Wenn $|f(x)| \leq M$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, dann ist f konstant.

Satz 1.3.6 *(Formeln von Plemelj und Sokhotski)*
Sei $f \in \mathcal{C}^{0,\beta}(\Gamma)$ $(0 < \beta \leq 1)$. Dann gilt in jedem regulären Punkt $x_0 \in \Gamma$

$$n.t.\text{-}\lim_{\substack{x \mapsto x_0 \\ x \in \Omega^{\pm}, x_0 \in \Gamma}} F_\Gamma f(x) = \frac{1}{2}(\pm f(x_0) + S_\Gamma f(x_0)),$$

wobei $\Omega^+ := \Omega$ und $\Omega^- := \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega^+}$. Die Bezeichnung n.t.-lim bedeutet „nichttangentialer Grenzwert“. Im Falle $f \in \mathcal{W}_p^l(\Omega), l > \frac{1}{2}, 1 < p < \infty$, hat die Formel von Plemelj und Sokhotski die Form

$$\operatorname{tr} F_\Gamma f = \frac{1}{2} f + \frac{1}{2} S_\Gamma f.$$

Da für S_Γ die algebraische Eigenschaft $S_\Gamma^2 = I$ gilt, erhalten wir für die Operatoren $P_\Gamma = \frac{1}{2}I + \frac{1}{2}S_\Gamma$ und $Q_\Gamma = -\frac{1}{2}I + \frac{1}{2}S_\Gamma$ die algebraische Eigenschaften $P_\Gamma^2 = P_\Gamma$ und $Q_\Gamma^2 = Q_\Gamma$, d.h. die Operatoren P_Γ und Q_Γ sind Projektoren. Dabei ist P_Γ die Projektion auf den Raum aller $C\ell_{0,n}$-wertigen Funktionen, die sich links-monogen in das Gebiet Ω fortsetzen lassen und Q_Γ die Projektion auf den Raum aller $C\ell_{0,n}$-wertigen Funktionen, die eine links-monogene Fortsetzung in das Außengebiet $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ besitzen.

1.4 Anwendung der orthogonalen Zerlegung auf die Lösung von elliptischen Randwertproblemen über beschränkten Gebieten

In dem im Jahre 1989 erschienenen Buch „Quaternionic Analysis and Elliptic Boundary Value Problems“ ([GSp1]) trieben die Autoren die Idee der Potentialtheorie weiter bis zum Beweis der orthogonalen Zerlegung des Raumes $\mathcal{L}_2(\Omega)$ (Ω beschränkt) für quaternionenwertige Funktionen. Wir wollen diese orthogonale Zerlegung für cliffordwertige Funktionen angeben:

Satz 1.4.1 *Das rechtsseitige Hilbertmodul $\mathcal{L}_2(\Omega)$ erlaubt die orthogonalen Zerlegungen*

$$\mathcal{L}_2(\Omega) \; = \; \ker D(\Omega) \cap \mathcal{L}_2(\Omega) \oplus \overline{D}(\overset{\circ}{\mathcal{W}}{}_2^1(\Omega)) \tag{1.1}$$

$$\mathcal{L}_2(\Omega) \;=\; \ker \overline{D}(\Omega) \cap \mathcal{L}_2(\Omega) \oplus D(\overset{\circ}{\mathcal{W}}{}_2^1(\Omega)) \tag{1.2}$$

Der Beweis basiert auf demselben Grundgedanken wie der Beweis in [GSp1] für den Fall quaternionenwertiger Funktionen. Zum besseren Verständnis wollen wir ihn für die Zerlegung (1.1) angeben.

Beweis: Betrachten wir die Mengen

$$\mathcal{X}_1 = \mathcal{L}_2(\Omega) \cap \ker D(\Omega) \quad \text{und} \quad \mathcal{X}_2 = \mathcal{L}_2(\Omega) \ominus \mathcal{X}_1 .$$

Offensichtlich sind dies Unterräume von $\mathcal{L}_2(\Omega)$. Für jedes $u \in \mathcal{L}_2(\Omega)$ gilt $\overline{T}u \in \mathcal{W}_2^1(\Omega)$. Daraus folgt, daß ein $v \in \mathcal{W}_2^1(\Omega)$ existiert, so daß $u = \overline{D}v$. Sei nun $u \in \mathcal{X}_2$. Dann gilt für alle $g \in \mathcal{X}_1$

$$\int_\Omega \overline{\overline{D}v}\, g \, d\Omega \;=\; 0. \tag{1.3}$$

Betrachten wir nun für g die Funktionen

$$g_l = \frac{\overline{(x-y_l)}}{|x-y_l|^{n+1}} \qquad l \in \mathbb{N},\; y_l \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \overline{\Omega}.$$

Offensichtlich sind die $g_l \in \ker D(\Omega) \cap \mathcal{L}_2(\Omega)$. Nehmen wir weiterhin an, daß die Menge $\{y_l,\; l \in \mathbb{N}\}$ dicht ist in $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \overline{\Omega}$. Damit erhalten wir für jedes y_l

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \overline{\overline{D}v}\, g_l \, d\Omega \;&=\; \sum_{i,j=0}^{n} \int_\Omega \overline{\bar{\mathbf{e}}_i \frac{\partial}{\partial x_i} v_j \mathbf{e}_j}\; g_l \, d\Omega \\
&=\; -\sum_{i,j=0}^{n} \int_\Omega \bar{\mathbf{e}}_j \mathbf{e}_i v_j \frac{\partial}{\partial x_i} g_l \, d\Omega + \sum_{i,j=0}^{n} \int_\Gamma \bar{\mathbf{e}}_j\, \mathbf{e}_i\, v_j\, \alpha_i\, g_l \, d\Gamma \\
&=\; -\int_\Omega \bar{v}\, D g_l \, d\Omega + \int_\Gamma \bar{v}\, \alpha g_l \, d\Gamma \\
&=\; \overline{\int_\Gamma \bar{g}_l\, \bar{\alpha}\, v \, d\Gamma} \\
&=\; \overline{\int_\Gamma \frac{(x-y_l)}{|x-y_l|^{n+1}}\, \bar{\alpha}\, v \, d\Gamma} \\
&=\; -\omega \overline{(\overline{F}_\Gamma(\operatorname{tr} v))(y_l)}.
\end{aligned}$$

Aufgrund der Beziehung (1.3) erhalten wir $\overline{F}_\Gamma(\operatorname{tr} v) = 0$ in $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \overline{\Omega}$, so daß wir $\operatorname{tr} v \in \operatorname{im} \overline{P}_\Gamma \cap \mathcal{W}_2^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ haben. Folglich existiert eine Funktion $h \in \mathcal{W}_2^1(\Omega) \cap \ker \overline{D}(\Omega)$ mit der Eigenschaft, daß $\operatorname{tr} h = \operatorname{tr} v$. Betrachten wir nun die Funktion $w = v - h \in \overset{\circ}{\mathcal{W}}{}_2^1(\Omega)$. Für diese Funktion gilt $\overline{D}w \in \overline{D}(\overset{\circ}{\mathcal{W}}{}_2^1(\Omega))$. Da außerdem noch $u = \overline{D}\, v = \overline{D}\, w$ gilt, erhalten wir daraus unsere Behauptung.

q.e.d.

Das Interessante an diesem Beweis ist die Nutzung der Eigenschaften der Randprojektoren, die es ermöglicht, den Beweis ausschließlich im Rahmen dieser Theorie zu führen.

Diese orthogonale Zerlegung hat vielfältige Anwendungsmöglichkeiten [Dub]. Von den Autoren wurde sie genutzt, um elliptische Randwertprobleme der mathematischen Physik, wie z.B. für die Laplacegleichung, die Lame-Gleichungen oder die Helmholtzgleichung, zu lösen. Dies resultierte in einer Theorie, die es ermöglicht alle Fragen, die Untersuchung von Randwertproblemen betreffend, in einem einheitlichen Zugang zu lösen und zwar bis hin zur Darstellung der Lösung mit Hilfe obiger Operatoren.

Von besonderem Vorteil ist dabei, daß man beim Beweis der orthogonalen Zerlegung, wie wir oben gesehen haben, nur Elemente dieser Theorie benötigt, so daß man mit Fug und Recht von einer wunderschönen Theorie sprechen kann. (Der Kernpunkt bei der Frage nach der Schönheit einer Theorie ist für uns die Frage, ob sich alle Sätze im Rahmen dieser Theorie beweisen lassen oder man „artfremde“ Sätze, Methoden oder Resultate benötigt.)

Man kann jedoch diese Zerlegung weitaus allgemeiner betrachten, wobei wir leider die oben angesprochene Schönheit verlieren. Wie wir jedoch noch sehen werden, gewinnen wir soviele neue und interessante Resultate, daß wir mit diesem Verlust durchaus leben können. Dazu wollen wir das Dirichletproblem der Laplacegleichung mit homogenen Randbedingungen

$$\begin{aligned} -\Delta u = f &\quad \text{in } \Omega, \\ u = 0 &\quad \text{auf } \Gamma \end{aligned}$$

für $f \in \mathcal{W}_p^{-1}(\Omega), 1 < p < \infty$, als gelöst ansehen und den Lösungsoperator mit Δ_0^{-1} bezeichnen [T]. Vermöge der Eigenschaft, daß $\Delta : \mathcal{W}_p^1(\Omega) \mapsto \mathcal{W}_p^{-1}(\Omega), 1 < p < \infty$, eine beschränkte Abbildung ist, erhalten wir für den Cauchy-Riemann-Operator $D = \Delta\overline{T}$, daß $D : \mathcal{L}_p(\Omega) \mapsto \mathcal{W}_p^{-1}(\Omega)$ beschränkt ist.

Damit können wir die folgenden Zerlegungen beweisen:

Satz 1.4.2 *Der Raum $\mathcal{L}_p(\Omega), 1 < p < \infty$, erlaubt die direkte Zerlegungen*

$$\mathcal{L}_p(\Omega) \; = \; \ker D(\Omega) \cap \mathcal{L}_p(\Omega) \dot{+} \overline{D}(\overset{\circ}{\mathcal{W}}{}_p^1(\Omega)) \tag{1.4}$$

$$\mathcal{L}_p(\Omega) \; = \; \ker \overline{D}(\Omega) \cap \mathcal{L}_p(\Omega) \dot{+} D(\overset{\circ}{\mathcal{W}}{}_p^1(\Omega)) \tag{1.5}$$

Beweis: Sehen wir uns zunächst den Durchschnitt der beiden Teilräume $\ker D \cap \mathcal{L}_p(\Omega)$ und $\overline{D}(\overset{\circ}{\mathcal{W}}{}_p^1(\Omega))$ an. Betrachten wir dazu eine Funktion $f \in \ker D \cap \mathcal{L}_p(\Omega) \cap \overline{D}(\overset{\circ}{\mathcal{W}}{}_p^1(\Omega))$ und wenden den Operator D darauf an. Offensichtlich gilt $Df = 0$. Andererseits, da $f \in \overline{D}(\overset{\circ}{\mathcal{W}}{}_p^1)$ ist, existiert eine Funktion $g \in \overset{\circ}{\mathcal{W}}{}_p^1(\Omega)$ mit $\overline{D}g = f$ und $\Delta g = 0$. Aus der Eindeutigkeit des Operators Δ_0^{-1} erhalten wir $g = 0$ und damit $f = 0$, d.h. der Durchschnitt enthält nur die Nullfunktion oder mit anderen Worten unsere Summe ist eine direkte Summe. Sei $f \in \mathcal{L}_p(\Omega)$. Offensichtlich ist $f_2 = \overline{D}\Delta_0^{-1}Df \in \overline{D}(\overset{\circ}{\mathcal{W}}{}_p^1(\Omega))$. Betrachten wir nun $f_1 = f - f_2$ und wenden den Operator D an. Dann gilt

$$Df_1 = Df - Df_2 = Df - D\overline{D}\Delta_0^{-1}Df = Df - \Delta\Delta_0^{-1}Df = Df - Df = 0,$$

d.h. $f_1 \in \ker D \cap \mathcal{L}_p(\Omega)$. Da $f \in \mathcal{L}_p(\Omega)$ beliebig gewählt war, bedeutet dies, daß unsere Zerlegung eine Zerlegung des Raumes $\mathcal{L}_p(\Omega)$ ist.

q.e.d.

Ausgehend von dieser Zerlegung erhalten wir die Projektoren

$$\begin{aligned}
\mathbf{P} &: \mathcal{L}_p(\Omega) \mapsto \ker D \cap \mathcal{L}_p(\Omega) \\
\mathbf{Q} &: \mathcal{L}_p(\Omega) \mapsto \overline{D}(\overset{\circ}{\mathcal{W}}{}_p^1(\Omega)) \\
\mathbf{P}^{\overline{D}} &: \mathcal{L}_p(\Omega) \mapsto \ker \overline{D} \cap \mathcal{L}_p(\Omega) \\
\mathbf{Q}^{\overline{D}} &: \mathcal{L}_p(\Omega) \mapsto D(\overset{\circ}{\mathcal{W}}{}_p^1(\Omega))
\end{aligned}$$

Für den Fall der Zerlegungen von $\mathcal{L}_2(\Omega)$ ((1.1) und (1.2)) sind die Projektoren $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{P}^{\overline{D}}$ und $\mathbf{Q}^{\overline{D}}$ Orthoprojektoren.

Bezüglich des Laplaceoperators gilt noch die folgende Zerlegung:

Satz 1.4.3 *Das Banachmodul $\mathcal{L}_p(\Omega), 1 < p < \infty$, erlaubt die direkte Zerlegung*

$$\mathcal{L}_p(\Omega) = \ker \Delta \cap \mathcal{L}_p(\Omega) \dot{+} \Delta(\overset{\circ}{\mathcal{W}}{}_p^2(\Omega)).$$

Im Fall des rechten Hilbertmoduls $\mathcal{L}_2(\Omega)$ ist diese Zerlegung eine orthogonale Zerlegung.

Diese Zerlegung definiert uns die Projektoren

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}^{\Delta} &: \mathcal{L}_p(\Omega) \mapsto \ker \Delta \cap \mathcal{L}_p(\Omega) \\
\mathbf{Q}^{\Delta} &: \mathcal{L}_p(\Omega) \mapsto \Delta(\overset{\circ}{\mathcal{W}}{}_p^2(\Omega)),
\end{aligned}$$

die für den Fall des $\mathcal{L}_2(\Omega)$ Orthoprojektoren sind.

Ausgehend von diesen Projektoren können wir auch die dualen Räume zu den entsprechenden Teilräumen beschreiben:

Satz 1.4.4 *Sei $1 < p, q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt*

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_p(\Omega) \cap im\, \mathbf{P})' &= \mathcal{L}_q(\Omega) \cap im\, \mathbf{P}^{\overline{D}} \\
(\mathcal{L}_p(\Omega) \cap im\, \mathbf{Q})' &= \mathcal{L}_q(\Omega) \cap im\, \mathbf{Q}^{\overline{D}} \\
(\mathcal{L}_p(\Omega) \cap im\, \mathbf{P}^{\overline{D}})' &= \mathcal{L}_q(\Omega) \cap im\, \mathbf{P} \\
(\mathcal{L}_p(\Omega) \cap im\, \mathbf{Q}^{\overline{D}})' &= \mathcal{L}_q(\Omega) \cap im\, \mathbf{Q} \\
(\mathcal{L}_p(\Omega) \cap im\, \mathbf{P}^{\Delta})' &= \mathcal{L}_q(\Omega) \cap im\, \mathbf{P}^{\Delta} \\
(\mathcal{L}_p(\Omega) \cap im\, \mathbf{Q}^{\Delta})' &= \mathcal{L}_q(\Omega) \cap im\, \mathbf{Q}^{\Delta}
\end{aligned}$$

Beweis: Nach [BDSo] können wir jedes cliffordwertige Funktional $F(g)$ aus $(\mathcal{L}_p(\Omega))'$ in der Form

$$(f,g) = \int_\Omega \overline{f} g d\Omega$$

mit $f \in \mathcal{L}_q(\Omega), 1/p + 1/q = 1$, darstellen.

Sei zunächst $g \in \text{im}\, \mathbf{P} \cap \mathcal{L}_p(\Omega)$. Dann können wir jedes $f \in \mathcal{L}_q(\Omega)$ in zwei Funktionen $f_1 \in \text{im}\, \mathbf{P} \cap \mathcal{L}_q(\Omega)$ und $f_2 \in \text{im}\, \mathbf{Q} \cap \mathcal{L}_q(\Omega)$ zerlegen. Aufgrund der Eigenschaften des Teilraumes im $\mathbf{Q} \cap \mathcal{L}_q(\Omega)$ existiert ein $v \in \overset{\circ}{\mathcal{W}}{}^1_q(\Omega)$ mit $f_2 = \overline{D}v$. Dann gilt

$$(f_2, g) = (\overline{D}v, g) = (v, Dg) = 0$$

bzw.

$$(f,g) = (f_1 + f_2, g) = (f_1, g) + (f_2, g) = (f_1, g),$$

woraus folgt

$$(\mathcal{L}_p(\Omega) \cap \text{im}\, \mathbf{P})' = \mathcal{L}_q(\Omega) \cap \text{im}\, \mathbf{P}^{\overline{D}}.$$

Betrachten wir weiter den Fall $g \in \text{im}\, \mathbf{Q} \cap \mathcal{L}_p(\Omega)$, dann existiert ein $u \in \overset{\circ}{\mathcal{W}}{}^1_p(\Omega)$ mit $g = \overline{D}u$. Nun können wir wieder jedes $f \in \mathcal{L}_q(\Omega)$ in zwei Funktionen $f_1 \in \text{im}\, \mathbf{P} \cap \mathcal{L}_q(\Omega)$ und $f_2 \in \text{im}\, \mathbf{Q} \cap \mathcal{L}_q(\Omega)$ zerlegen und erhalten

$$(f_1, g) = (f_1, \overline{D}u) = (Df_1, u) = 0$$

bzw.

$$(f,g) = (f_1 + f_2, g) = (f_1, g) + (f_2, g) = (f_2, g),$$

d.h.

$$(\mathcal{L}_p(\Omega) \cap \text{im}\, \mathbf{Q})' = \mathcal{L}_q(\Omega) \cap \text{im}\, \mathbf{Q}^{\overline{D}}$$

Die weiteren Eigenschaften folgen ganz analog.

q.e.d.

Eine interessante Frage ist die Frage nach Darstellungsformeln für unsere Projektoren. Aus dem Beweis der direkten Zerlegung (1.1) erhalten wir unmittelbar für $\mathbf{Q}$ die Darstellung

$$\mathbf{Q}f = \overline{D}\Delta_0^{-1} Df.$$

Eine analoge Beziehung gilt für $\mathbf{Q}^{\overline{D}}$. Interessanterweise gilt diese Darstellung in jedem Raum $\mathcal{L}_p(\Omega), 1 < p < \infty$, d.h. die Darstellung für $\mathbf{Q}$ ist unabhängig von p. Da gleichzeitig noch $\mathcal{L}_q(\Omega) \subset \mathcal{L}_p(\Omega)$ für $q \geq p$ gilt, bedeutet das nichts anderes, als das unser Projektor $\mathbf{Q}$ und damit auch der Projektor $\mathbf{P}$ als Operator über dem Raum $\mathcal{L}_p(\Omega)$ die Teilmenge $\mathcal{L}_q(\Omega)$ in sich selbst abbildet.

Weiterhin läßt sich mit Hilfe dieser Zerlegungen eine höchst interessante Eigenschaft des T-Operators beweisen.

Satz 1.4.5 *Es gilt* $\text{tr}\, Tf = 0$ *genau dann, wenn* $f \in$ *im* $\mathbf{Q}^{\overline{D}}$. *Analog gilt*

$$\text{tr}\, \overline{T}f = 0 \Leftrightarrow f \in \textit{im}\, \mathbf{Q}$$

Beweis: Sei $f \in \operatorname{im} \mathbf{Q}^{\overline{D}}$, dann existiert ein $u \in \overset{\circ}{\mathcal{W}}{}_p^1(\Omega)$ mit $f = Du$. Nach der Borel-Pompeiu Formel gilt $u = F_\Gamma u + TDu = TDu = Tf$. Da $u \in \overset{\circ}{\mathcal{W}}{}_p^1(\Omega)$ gilt $\operatorname{tr} Tf = 0$. Sei nun $\operatorname{tr} Tf = 0$. Die Funktion f können wir nun mit Hilfe unserer Projektoren zerlegen: $f = \mathbf{P}^{\overline{D}} f + \mathbf{Q}^{\overline{D}} f$. Dies führt uns zu

$$\operatorname{tr} T\mathbf{P}^{\overline{D}} f + \operatorname{tr} T\mathbf{Q}^{\overline{D}} f = 0.$$

Wie wir bereits bewiesen haben, gilt immer $\operatorname{tr} T\mathbf{Q}^{\overline{D}} f = 0$. Vermöge dessen haben wir

$$\operatorname{tr} T\mathbf{P}^{\overline{D}} f = 0.$$

$T\mathbf{P}^{\overline{D}} f$ ist aber harmonisch und damit infolge der Eindeutigkeit des Dirichletproblems der Laplacegleichung gleich Null. Wenden wir jetzt den Operator D an, ergibt sich $0 = DT\mathbf{P}^{\overline{D}} f = \mathbf{P}^{\overline{D}} f = 0$ oder mit anderen Worten $f \in \operatorname{im} \mathbf{Q}^{\overline{D}}$.

q.e.d.

Wir werden uns im Kapitel über nichtlineare Differentialgleichungen erster Ordnung mit einigen überraschenden Folgerungen aus diesem Satz auseinandersetzen.

Wie bereits erwähnt, wurden in [GSp1] und [GSp2] die orthogonalen Zerlegungen dazu verwendet, Randwertprobleme der mathematischen Physik zu lösen. Wir wollen dies hier an einem einfachen Beispiel in Form eines Stokes-Problems illustrieren. Dazu wollen wir im weiteren zur besseren Verständlichkeit den Fall des Dirac-Operators betrachten. D möge also im weiteren den Dirac- und nicht den Cauchy-Riemann-Operator bezeichnen. Der einzige wesentliche Unterschied besteht darin, daß wir nun Funktionen $f : \mathbb{R}^n \mapsto C\ell_{0,n}$ betrachten und $DD = -\Delta$ gilt. Für die zugehörigen Operator T, F_Γ und S_Γ gelten die gleichen Resultate wir für die zum Cauchy-Riemann-Operator zugehörigen Integraloperatoren. Die Zerlegung des Raumes $\mathcal{L}_q(\Omega), 1 < q < \infty$, besitzt nun die Form

$$\mathcal{L}_q(\Omega) \;=\; \ker D(\Omega) \cap \mathcal{L}_q(\Omega) \oplus D(\overset{\circ}{\mathcal{W}}{}_q^1(\Omega)).$$

Wir müssen uns zunächst jedoch etwas intensiver das Dirichletproblem der Laplacegleichung ansehen. Wir wir bereit vorausgesetzt haben, besitzt das Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \Gamma \end{aligned}$$

eine eindeutige Lösung für $f \in \mathcal{W}_q^{-1}(\Omega)$. Diese Lösung läßt sich in der Form $u = T\mathbf{Q}Tf$ mit Hilfe unseres Projektors darstellen, d.h. wir erhalten die Identität

$$\Delta_0^{-1} f = T\mathbf{Q}Tf.$$

Damit erhalten wir (analog zum Fall $q = 2$ in [GSp2]) für das allgemeine Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= g \quad \text{auf } \Gamma, \end{aligned} \tag{1.6}$$

mit $f \in \mathcal{W}_q^k(\Omega)$ und $g \in \mathcal{W}_q^{k+3/2}(\Gamma)$, $k \geq -1, 1 < q < \infty$, die Lösungsdarstellung

$$u = F_\Gamma g + T\mathbf{P}Dh + T\mathbf{Q}Tf,$$

wobei h eine $\mathcal{W}_q^{k+2}$-Erweiterung von g in das Gebiet Ω ist.

Mit Hilfe dieser Darstellung können wir den folgenden Satz beweisen.

Satz 1.4.6 *Sei $k \in \mathbb{N}, 1 < q < \infty$. Dann ist*

$$\operatorname{tr} TF_\Gamma : \mathcal{W}_q^{k-\frac{1}{q}}(\Gamma) \cap im\ P_\Gamma \mapsto \mathcal{W}_q^{k+1-\frac{1}{q}}(\Gamma) \cap im\ Q_\Gamma$$

ein Isomorphismus.

Beweis: Offensichtlich gilt

$$(\operatorname{tr} TF_\Gamma)(\mathcal{W}_q^{k-1/q}(\Gamma)) \subset \mathcal{W}_q^{k+1-1/q}(\Gamma).$$

Zeigen wir nun, daß $\ker \operatorname{tr} TF_\Gamma = \{0\}$. Dazu sei v eine Funktion aus $\mathcal{W}_q^{k-1/q}(\Gamma) \cap$ im $\overline{P}_\Gamma$ mit $\operatorname{tr} TF_\Gamma v = 0$. Da $DDTF_\Gamma v = 0$ erhalten wir aus der Eindeutigkeit der Lösung des Dirichletproblems der Laplacegleichung $TF_\Gamma v = 0$. Da T nur einen trivialen Kern hat, folgt daraus $F_\Gamma v = 0$ und damit unter Berücksichtigung von $v \in$ im P_Γ $v = 0$.

Sei nun $w \in$ im Q_Γ, d.h. $w = Q_\Gamma v$. Aus der Lösungsdarstellung des Randwertproblems

$$\begin{aligned} DDu &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ u &= w \quad \text{auf } \Gamma, \end{aligned}$$

ergibt sich $u = F_\Gamma w + T\mathbf{P}Dh$, wobei h eine $\mathcal{W}_q^{k+2}$-Erweiterung von w in Ω ist. Da selbstverständlich im Falle von $w \in$ im Q_Γ $F_\Gamma w = 0$ und $T\mathbf{P}Dh = TF_\Gamma \mathbf{P}Dh$ gilt, erhalten wir $w \in \operatorname{tr} TF_\Gamma$. Aus der bewiesenen Injektivität und Surjektivität der Abbildung $\operatorname{tr} TF_\Gamma$ ergibt sich die Behauptung.

q.e.d.

Aus diesem Satz ergibt sich als Folgerung die folgende Darstellung für unseren Projektor $\mathbf{P}$

$$\mathbf{P}f = F_\Gamma(\operatorname{tr} TF_\Gamma)^{-1} \operatorname{tr} Tf$$

für $f \in \mathcal{W}_q^k(\Omega), k \in \mathbb{N}, 1 < q < \infty$. Für den Fall $q = 2$ ist diese Darstellung bereits in [GSp1] enthalten.

Wenden wir uns nun unserem angesprochenen Beispiel zu. Betrachten wir das System

$$-\Delta u + \frac{1}{\eta}Dp = \tfrac{\varrho}{\eta}f \qquad \text{in } \Omega, \tag{1.7}$$

$$\operatorname{Sc} Du = 0 \qquad \text{in } \Omega, \tag{1.8}$$

$$u = 0 \qquad \text{auf } \Gamma. \tag{1.9}$$

Wie wir später noch sehen werden, ist dieses System ein Spezialfall des allgemeinen Stokesschen Differentialgleichungssystems.

Bemerkung 1.4.1 *Für den Fall $q = 2$ wurde das System (1.7)–(1.9) bereits in [GSp1] untersucht.*

Lemma 1.4.1 *Sei $f \in \mathcal{W}_q^{-1}(\Omega)$, $p \in \mathcal{L}_q(\Omega)$, $1 < q < \infty$. Dann besitzt jede Lösung des Stokesschen Differentialgleichungssystems (1.7)-(1.9) die Darstellung*

$$u = \frac{\rho}{\eta} T\mathbf{Q}Tf - \frac{1}{\eta} T\mathbf{Q}p.$$

Beweis: Sei $p_n \in \mathcal{W}_q^1(\Omega)$ mit $p_n \to p$ in $\mathcal{L}_q(\Omega)$. Dann gilt unter Zuhilfenahme der Borel-Pompeiu-Formel

$$T\mathbf{Q}T(Dp_n) = T\mathbf{Q}(p_n - F_\Gamma p_n) = T\mathbf{Q}p_n$$

Aufgrund der Dichtheit von $\mathcal{W}_q^1(\Omega)$ in $\mathcal{L}_q(\Omega)$ ergibt sich für p

$$T\mathbf{Q}TDp = T\mathbf{Q}p$$

Damit gilt für $u \in \overset{\circ}{\mathcal{W}}{}_q^1(\Omega)$ und $p \in \mathcal{L}_q(\Omega)$

$$T\mathbf{Q}T(DDu + \frac{1}{\eta}Dp) = u + \frac{1}{\eta}T\mathbf{Q}p$$

woraus

$$u = \frac{\rho}{\eta} T\mathbf{Q}Tf - \frac{1}{\eta} T\mathbf{Q}p$$

folgt. Es sei dem geneigten Leser überlassen sich zu überzeugen, daß die Bedingungen (1.8) and (1.9) erfüllt sind.

q.e.d.

Dieses Resultat liefert uns, daß unser System (1.7)–(1.9) äquivalent zu folgendem System ist:

$$u + \frac{1}{\eta}T\mathbf{Q}p = \frac{\rho}{\eta}T\mathbf{Q}Tf \tag{1.10}$$

$$\frac{1}{\eta}\mathrm{Sc}\,\mathbf{Q}p = \frac{\rho}{\eta}\mathrm{Sc}\,\mathbf{Q}Tf \tag{1.11}$$

Zur Lösung unseres Problems genügt es also, daß System (1.10)–(1.11) zu betrachten.

Sei $u \in \overset{\circ}{\mathcal{W}}{}_q^1(\Omega) \cap \ker \operatorname{div}$, $f \in \mathcal{W}_q^{-1}(\Omega)$ und $p \in \mathcal{L}_q(\Omega, \mathbb{R})$ $(1 < q < \infty)$. Nun folgt aus $Du = \mathbf{Q}p$, daß $\mathrm{Sc}\,\mathbf{Q}p = 0$ gilt, da $\mathbf{Q}p = Dv$ mit $v \in \overset{\circ}{\mathcal{W}}{}_q^1(\Omega)$ und $\mathrm{Sc}\,Du = 0$. Das bedeutet aber, daß $u = 0$ und $p = 0$, d.h. $Du + \mathbf{Q}p$ ist eine direkte Summe, die eine Teilmenge von im $\mathbf{Q}$ ist.

Die Frage ist nun, existiert ein Funktional $H \in (\mathcal{L}_q(\Omega) \cap \operatorname{im} \mathbf{Q})'$, so daß $H(Du) = 0$ und $H(\mathbf{Q}p)$=0, aber $H(\mathbf{Q}Tf) \neq 0$?

Mit anderen Worten, existiert ein $h \in \mathcal{W}_r^{-1}(\Omega), 1/r + 1/q = 1$, so daß

$$\begin{aligned} (Du, \mathbf{Q}Th)_{\mathrm{Sc}} &= 0 \qquad \forall u \in \overset{\circ}{\mathcal{W}}{}_q^1(\Omega) \cap \ker \operatorname{div} \\ (\mathbf{Q}p, \mathbf{Q}Th)_{\mathrm{Sc}} &= 0 \qquad \forall p \in \mathcal{L}_q(\Omega) \end{aligned}$$

aber $(\mathbf{Q}Tf, \mathbf{Q}Th)_{\mathrm{Sc}} \neq 0$, wobei

$$(w, v)_{\mathrm{Sc}} = \mathrm{Sc} \int_\Omega \bar{w} v d\Omega$$

mit $w \in \mathcal{L}_q(\Omega), v \in \mathcal{L}_r(\Omega), 1/q + 1/r = 1$?

Hierbei haben wir benutzt, daß $(\mathcal{L}_q(\Omega) \cap \mathrm{im}\ \mathbf{Q})' = \mathcal{L}_r(\Omega) \cap \mathrm{im}\ \mathbf{Q}$, $1/q + 1/r = 1$, auch für reellwertige Funktionale gilt. Dies läßt sich analog zum Beweis von Satz 1.4.4 zeigen, da aus

$$(f, g) = 0 \quad f \in \mathcal{L}_q(\Omega) \cap \mathrm{im}\ \mathbf{Q}, g \in \mathcal{L}_r(\Omega) \cap \mathrm{im}\ \mathbf{P}$$

folgt

$$(f, g)_{\mathrm{Sc}} = 0 \quad f \in \mathcal{L}_q(\Omega) \cap \mathrm{im}\ \mathbf{Q}, g \in \mathcal{L}_r(\Omega) \cap \mathrm{im}\ \mathbf{P}.$$

Betrachten wir nun das System

$$\begin{aligned} (Du, \mathbf{Q}Th)_{\mathrm{Sc}} &= 0 \qquad \forall u \in \overset{\circ}{\mathcal{W}}{}_q^1(\Omega) \cap \ker \operatorname{div} \\ (\mathbf{Q}p, \mathbf{Q}Th)_{\mathrm{Sc}} &= 0 \qquad \forall p \in \mathcal{L}_q(\Omega, \mathbb{R}) \end{aligned}$$

wobei $h \in \mathcal{W}_r^{-1}(\Omega)$ ist.

Nun gilt

$$(Du, \mathbf{Q}Th)_{\mathrm{Sc}} = (u, D\mathbf{Q}Th)_{\mathrm{Sc}} = (u, h)_{\mathrm{Sc}} = 0.$$

Daraus folgt (vgl. [Tem]) $h = \operatorname{grad} g = Dg$, mit $g \in \mathcal{L}_r(\Omega)$.

Weiterhin gilt

$$(\mathbf{Q}p, \mathbf{Q}Th)_{\mathrm{Sc}} = (\mathbf{Q}p, \mathbf{Q}TDg)_{\mathrm{Sc}} = (\mathbf{Q}p, \mathbf{Q}(g - F_\Gamma g)) = (\mathbf{Q}p, \mathbf{Q}g) = 0$$

für alle $p \in \mathcal{L}_q(\Omega, \mathbb{R})$. Damit ist $\mathbf{Q}g = 0$ bzw. $h = D\mathbf{Q}g = 0$ und wir erhalten

$$(\mathbf{Q}Tf, \mathbf{Q}Th) = 0 \qquad \forall f \in \overset{\circ}{\mathcal{W}}{}_q^1(\Omega).$$

Wir erhalten als Resultat, daß wir jede Funktion $\frac{\rho}{\eta}\mathbf{Q}Tf$, $f \in \mathcal{W}_q^{-1}(\Omega), 1 < q < \infty$, in die Form

$$Du + \frac{1}{\eta}\mathbf{Q}p = \frac{\rho}{\eta}\mathbf{Q}Tf$$

mit $u \in \overset{\circ}{\mathcal{W}}{}_q^1(\Omega) \cap \ker \operatorname{div}$ und $p \in \mathcal{L}_q(\Omega, \mathbb{R})$ zerlegen können. Durch Anwendung des T-Operators folgt, daß

$$u + \frac{1}{\eta}T\mathbf{Q}p = \frac{\rho}{\eta}T\mathbf{Q}Tf$$

und damit der Satz:

Satz 1.4.7 *Das System der Stokesschen Gleichungen (1.7)-(1.9) besitzt eine eindeutige Lösung $\{u,p\}$ in der Form*

$$u + \frac{1}{\eta} T\mathbf{Q}p = \frac{\rho}{\eta} T\mathbf{Q}Tf.$$

Der hydrostatische Druck p ist dabei bis auf eine reelle Konstante eindeutig.

Bemerkung 1.4.2 *Die Eindeutigkeit der Lösung läßt sich auf genau dieselbe Weise wie in [GSp1] beweisen.*

Sei nun $f \in \mathcal{W}_q^k(\Omega)$, $k \geq 0, 1 < q < \infty$. Dann hat die einzige Lösung $\{u,p\}$ von (1.7)-(1.9) die Darstellung

$$\begin{aligned} u &= \frac{\rho}{\eta} T\mathrm{Vec}\, Tf - \frac{\rho}{\eta} T\mathrm{Vec}\, F_\Gamma (\mathrm{tr}\, T\mathrm{Vec}\, F_\Gamma)^{-1}\, \mathrm{tr}\, T\mathrm{Vec}\, Tf, \\ p &= \rho \mathrm{Sc}\, Tf - \rho \mathrm{Sc}\, F_\Gamma (\mathrm{tr}\, T\mathrm{Vec}\, F_\Gamma)^{-1}\, \mathrm{tr}\, T\mathrm{Vec}\, Tf. \end{aligned}$$

Konsequenterweise haben wir $u \in \mathcal{W}_q^{k+2}(\Omega) \cap \overset{\circ}{\mathcal{W}}{}_q^1(\Omega)$ und $p \in \mathcal{W}_q^{k+1}(\Omega)$. Der Beweis dieser Darstellung ist analog zum Beweis eines ähnlichen Resultates in [GSp1] im Falle $q = 2$.

Kapitel 2

Elliptische Randwertprobleme der mathematischen Physik über unbeschränkten Gebieten

Wie wir im vorherigen Abschnitt gesehen haben, resultiert die Anwendung der hyperkomplexen Funktionentheorie auf elliptische Randwertprobleme durch K. Gürlebeck und W. Sprößig [GSp1] in einer wunderschönen, in sich geschlossenen und leicht anwendbaren Theorie. Leider ist diese Theorie auf den Fall beschränkter Gebiete reduziert. Der Hauptgrund für diese Einschränkung ist der T-Operator als rechtsinverser Operator zu D. Dieser schwachsinguläre Operator hat den unerwünschten Nebeneffekt, daß er als Operator über Funktionen, die über einem unbeschränkten Gebiet definiert sind, selbst in dem einfachsten Fall, daß diese der L_2-Norm genügen, ein unbeschränkter Operator ist, wie das folgende Beispiel zeigt [Ber]:

Betrachten wir dazu den Fall $f(x) = \sum_{k=0}^{3} \mathbf{e}_k f_k(x) : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{H}$, wobei $\mathbf{e}_0, \ldots, \mathbf{e}_3$ die Basisvektoren der Quaternionen sind. In diesem Fall hat der Dirac-Operator D die Gestalt $Df = \sum_{k=1}^{3} \mathbf{e}_k \partial_k f$ und der zugehörige T-Operator ist gegeben durch

$$Tf = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{x-y}{|x-y|^3} f(y) d\mathbb{R}^3.$$

Sei weiter

$$v_a = \begin{cases} \prod_{i=1}^{3} \sin^3 \frac{\pi x_i}{a}, & -\frac{a}{2} \leq x_i \leq \frac{a}{2} \quad \forall i \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Offensichtlich ist $v_a \in \overset{\circ}{\mathcal{W}}{}_2^1 (\mathbb{R}^3)$. Wählen wir nun $u_a = Dv_a$, so gilt $Tu_a =$

$TDv_a = v_a$, und für die Norm von u_a respektive Tu_a ergibt sich

$$\begin{aligned} ||u_a||^2_{\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^3)} = ||Dv_a||^2_{\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^3)} &= (-\Delta v_a, v_a) = C_1 a, \quad && C_1 = \text{const} \\ ||Tu_a||^2_{\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^3)} = ||v_a||^2_{\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^3)} &= C_2 a^3, && C_2 = \text{const} \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\frac{||Tu_a||^2_{\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^3)}}{||u_a||^2_{\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^3)}} = \frac{C_2}{C_1} a^2 \to \infty \quad \text{für } a \to \infty.$$

Die Hauptursache für diesen Effekt ist das zu langsame Abklingen des Kernes gegen unendlich. Zwar ist der T-Operator ein beschränkter Operator von $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n) \mapsto \mathcal{L}_q(\mathbb{R}^n)$ für $q = np/(n-p)$, wie eine Abschätzung des T-Operators durch das Riesz-Potential $I_1 : \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n) \mapsto \mathcal{L}_q(\mathbb{R}^n)$ [St]

$$I_1 f(x) = \frac{1}{\omega} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x-y|^{n-1}} f(y) d\mathbb{R}^n$$

zeigt, jedoch hilft uns diese Eigenschaft und die daraus resultierende Idee der Einführung von Räumen [DeC]

$$\hat{W}^1_p(\mathbb{R}^n) = \{u : ||u||_{\mathcal{L}_q(\mathbb{R}^n)} \leq \infty, ||\partial_i u||_{\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n)} \leq \infty, q = np/(n-p)\}$$

hier nicht, da wir bei der Betrachtung von Randwertproblemen partieller Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung unbedingt Regularitätseigenschaften des T-Operators benötigen.

Wie wir bereits angemerkt haben, wollen wir im weiteren die im vorherigen Kapitel beschriebene Theorie der Anwendung hyperkomplexer Funktionentheorie auf die Lösung von Randwertproblemen elliptischer partieller Differentialgleichungen über beschränkten Gebieten auf den Fall unbeschränkter Gebiete erweitern. Aufgrund der angesprochenen Schönheit dieser Theorie gab es von Anfang an Bemühungen zur Anwendung dieser auch im Fall unbeschränkter Gebiete. Unter anderem versuchte es J. Ryan mit der Verwendung von konformen Abbildungen [R1], die aber leider durch das Fehlen des Riemannschen Abbildungssatzes nur sehr beschränkt anwendbar sind. Eine andere Idee verfolgte S. Bernstein mit der Benutzung von gewichteten Räumen [Ber]. Dabei werden Räume $w^k_{2,\mu}$ quaternionenwertiger Funktionen mit der Norm

$$||f||^2_{w^k_{2,\mu}(\mathbb{R}^3)} = \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{|\beta| \leq k} p_{\mu - 2(k-|\beta|)} |\partial^\beta f(x)|^2 d\mathbb{R}^3_x$$

und dem Gewicht $p_\mu(x) = (1+|x|^2)^{\mu/2}, \mu \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$, betrachtet, zwischen denen der T-Operator wieder beschränkt ist. Zum einen bringt dies jedoch naturgemäß Einschränkungen an die Wahl der Randbedingungen sowie der rechten Seiten, die in der Praxis nicht immer zu gewährleisten sind. Zum anderen benötigt man bei der Betrachtung der Navier-Stokes-Gleichungen eine Äquivalenz des gewichteten Raumes $\overset{\circ}{w}{}^1_{2,0}(\Omega)$ mit dem üblichen $\overset{\circ}{\mathcal{W}}{}^1_2\,(\Omega)$, die nur in Gebieten gilt, die in mindestens einer Dimension beschränkt sind.

Dies führt zu der Frage, ob es nicht trotz der angesprochenen Schwierigkeiten die Möglichkeit gibt, die obige Theorie auch in unbeschränkten Gebieten für die üblichen Funktionenräume zu entwickeln. Wie schon angesprochen, ist die Hauptursache der Probleme das schlechte Abklingverhalten des Kernes des T-Operators gegen unendlich. Dies läßt sich nur dadurch beheben, daß wir die Räume modifizieren, zwischen denen der Operator wirkt, was für uns hier indiskutabel ist, oder in dem wir den Kern selbst modifizieren.

Diese zweite Möglichkeit scheint im ersten Augenblick eine Sackgasse zu sein. Wenn wir uns jedoch erinnern, daß der Kern nichts weiter als die Fundamentallösung des verallgemeinerten Cauchy-Riemann-Operators ist und diese Fundamentallösung keineswegs eindeutig ist, erhalten wir eine gewisse Bewegungsfreiheit bezüglich einer solchen Modifikation.

In der Tat ist die Modifkation von Fundamentallösungen eine relativ alte Idee, die in ihren Anwendungen jedoch sehr jung ist. 1965 ersetzte L. Bers [Bers] den üblichen Cauchy-Kern $(\pi(z-w))^{-1}$ in der komplexen Funktionentheorie durch den Kern

$$k(z,w) = \frac{1}{\pi}\frac{(w-a)(w-b)}{(z-w)(z-a)(z-b)}.$$

Die Integrierbarkeit von $k(z,w)$ über $\mathbb{C}$ erlaubt die Definition einer verallgemeinerten Cauchytransformation [Bers]. L. Bers benutzte diese, um zu beweisen, daß die Menge der rationalen analytischen Funktionen mit Polen außerhalb von Ω eine dichte Menge in $\mathcal{L}^1_a(\Omega) = \mathcal{L}_1(\Omega) \cap \{f : \overline{\partial} f = 0\}$ ist. 1981 benutzte M. Sakai den Realteil dieses Kernes bezüglich w, um ein verallgemeinertes logarithmisches Potential zu definieren [Sa]. 1976 verwendeten W. Hayman und P. Kennedy die Technik der Modifikation von Fundamentallösungen durch das Subtrahieren endlich vieler Glieder ihrer Taylorreihe, um einen Darstellungssatz für subharmonische Funktionen zu finden [HayKe]. Unabhängig davon zeigten L. Nirenberg und H. Walker die Anwendbarkeit dieser Technik für jeden elliptischen homogenen Operator mit konstanten Koeffizienten [NiWa]. Sie bewiesen, daß die Gleichung $P(\partial)u = f, f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n)$ eine Lösung u so besitzt, daß $(1+|x|)^{-m}u \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n)$, wobei m die Ordnung von $P(\partial)$ ist und vorausgesetzt wird, daß $m - n/p$ eine nichtnegative ganze Zahl mit $1 < p < \infty$ ist. 1993 benutzte L. Karp diese Technik, um ein verallgemeinertes Volumenpotential zu definieren [Ka].

Wir wollen im weiteren mit Hilfe dieser Technik eine Funktionentheorie über unbeschränkten Gebieten des $\mathbb{R}^n$ entwickeln. Dabei werden wir uns nur dem Fall der $\mathcal{W}^k_2$-Skala zuwenden und den allgemeinen Fall $\mathcal{W}^k_p(\Omega)$ im Hinblick auf eine bessere Verständlichkeit außen vor lassen. Außerdem werden wir als zweite Konzession an die Verständlichkeit wiederum nur den Fall des Dirac-Operators und nicht des Cauchy-Riemann-Operators betrachten, dies aber ebenfalls ohne Beschränkung der Allgemeinheit. D möge also auch in diesem Abschnitt den Dirac-Operator bezeichnen.

2.1 Hyperkomplexe Funktionentheorie über unbeschränkten Gebieten

Innerhalb dieses Abschnittes soll Ω immer ein unbeschränktes Gebiet bezeichnen, dessen Komplement ein nichtleeres Gebiet enthält. Weiterhin soll Ω einen hinreichend glatten Rand $\Gamma = \partial\Omega$ haben und eine gleichmäßige Kegelbedingung erfüllen. Dies ist selbst bei glatten Rändern von Ω nicht selbstverständlich, da z.B. unbeschränkte Gebiete mit endlichem Volumen keine gleichmäßige Kegelbedingung erfüllen. Dies bedeutet, daß Ω im Zweifelsfalle ein $\mathcal{C}^2$-reguläres Gebiet sein soll.

Ausserdem wollen wir zur besseren Verständlichkeit ein beschränktes Gebiet mit einem ebenfalls hinreichend glatten Rand mit U bezeichnen.

Wie wir bereits angesprochen haben, besitzt der Kern des T-Operators die unangenehme Eigenschaft, nicht schnell genug gegen unendlich zu fallen, von der wir uns mit Hilfe eines entsprechenden Korrekturtermes befreien wollen.

Das Problem ist, einen Korrekturterm zu finden, der uns einen besseres Fallen gegen unendlich ermöglich, gleichzeitig aber im Kern von D liegt. Die generell benutzte Idee der Taylorreihenentwicklung scheitert an dem bereits im Abschnitt über hyperkomplexe Funktionentheorie gezeigten Problem der Potenzreihenentwicklung. Sehen wir uns jedoch das Abklingverhalten des Cauchy-Kerns etwas genauer an, stellen wir fest, daß er wie $\frac{1}{|x|^{n-1}}$ gegen unendlich fällt, d.h. mit der Ordnung $n-1$. Wenn wir uns nun daran erinnern, daß der Kern eines stark singulärer Operators vom Calderon-Zygmund-Typ mit der Ordnung n gegen unendlich fällt und dieser Operator von $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n)$ nach $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n)$ $(1 < p < \infty)$ beschränkt ist, erkennen wir, daß eigentlich ein Korrekturterm, der mit der gleichen Ordnung wie unser Kern gegen unendlich fällt, ausreichen sollte.

In [GKRSp] wird als Korrekturterm $G(x + y)$ benutzt, aber dieser Term funktioniert nur in unbeschränkten Gebieten, die in einem Halbraum liegen.

Wir wollen hier einer Idee von J. Ryan [GKRSp] folgen und einen beliebigen, aber festen Punkt z, der zusammen mit einer Umgebung $U_\epsilon(z)$ dieses Punktes im Komplement der Abschließung unseres Gebietes Ω liegt, wählen. Damit können wir den folgenden Operator betrachten:

$$\tilde{T}f = \int_\Omega K_z(x,y) f(x) d\Omega_x,$$

wobei $K_z(x,y) = G(x-y) - G(x-z)$.

Für das Problem des Fallens gegen unendlich ergibt sich für den neuen Kern das folgende Lemma.

Lemma 2.1.1 *Angenommen es sei* $|x| > 2\max(|y|,|z|)$, *dann gilt*

$$\left| \frac{x-y}{|x-y|^n} - \frac{x-z}{|x-z|^n} \right| \leq C(n) \frac{|y-z| + \max(|y|,|z|)}{|x|^n} \tag{2.1}$$

wobei $C(n) = 2^{n+1}(n-1)$ *eine dimensionsabhängige Konstante ist.*

Beweis: Sei nun $|x| > 2\max(|y|,|z|)$, dann gilt

$$\begin{aligned}
&|x|^2\left|\frac{1}{|x-y|}-\frac{1}{|x-z|}\right| \le |x|^2\left|\frac{|x-z|-|x-y|}{|x-y||x-z|}\right| \\
\le\ & \frac{|x|^2}{|x-y||x-z|}|y-z| \le \frac{|x|^2}{||x|-|y||||x|-|z||}|y-z| \\
\le\ & \frac{|y-z|}{\left|1-\frac{|y|}{|x|}\right|\left|1-\frac{|z|}{|x|}\right|} \\
\le\ & 4|y-z|.
\end{aligned}$$

Mittels dieses Resultates erhalten wir die folgende Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\left|x\left[\left(\frac{|x|}{|x-y|}\right)^n-\left(\frac{|x|}{|x-z|}\right)^n\right]-y\left(\frac{|x|}{|x-y|}\right)^n+z\left(\frac{|x|}{|x-z|}\right)^n\right| \\
\le\ & \left|x\left[\left(\frac{|x|}{|x-y|}\right)^n-\left(\frac{|x|}{|x-z|}\right)^n\right]\right| \\
&+\max(|y|,|z|)\left(\left(\frac{|x|}{|x-y|}\right)^n+\left(\frac{|x|}{|x-z|}\right)^n\right) \\
\le\ & |x|\left|\left(\frac{|x|}{|x-y|}\right)^n-\left(\frac{|x|}{|x-z|}\right)^n\right| \\
&+\max(|y|,|z|)\left(\left(\frac{|x|}{|x-y|}\right)^n+\left(\frac{|x|}{|x-z|}\right)^n\right) \\
\le\ & |x|\left|\left(\frac{|x|}{|x-y|}\right)-\left(\frac{|x|}{|x-z|}\right)\right|\left|\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{|x|}{|x-y|}\right)^i\left(\frac{|x|}{|x-z|}\right)^{n-1-i}\right| \\
&+\max(|y|,|z|)\left(\left(\frac{|x|}{|x-y|}\right)^n+\left(\frac{|x|}{|x-z|}\right)^n\right) \\
\le\ & 4|y-z|\left|\sum_{i=1}^{n-1}2^i2^{n-1-i}\right|+\max(|y|,|z|)(2^n+2^n) \\
\le\ & 4|y-z|(n-1)2^{n-1}+\max(|y|,|z|)2^{n+1} \\
\le\ & 4|y-z|(n-1)2^{n-1}+\max(|y|,|z|)(n-1)2^{n+1} \\
\le\ & 2^{n+1}(n-1)\left(|y-z|+\max(|y|,|z|)\right)
\end{aligned}$$

unter Benutzung der Tatsache, daß $\left(\frac{|x|}{|x-y|}\right)\le 2$ und $\left(\frac{|x|}{|x-z|}\right)\le 2$.

q.e.d.

Dieses Lemma zeigt uns, daß der Kern unseres Operators wirklich mit der Ordnung n gegen unendlich fällt. Die dadurch entstehenden Vorteile illustriert am besten der Beweis des folgenden Satzes.

Satz 2.1.1 *Nehmen wir an, daß z ein Punkt mit einer Umgebung $U_r(z)$, die für ein gewisses $r>0$ innerhalb des Komplementes der Abschließung von Ω liegt,* *ist. Nehmen wir weiterhin an, daß $f : \Omega \mapsto C\ell_{0,n}$ eine hölderstetige Funktion ist, für die gilt, daß für ein gewisses $s \in (0, \infty)$ $|f(x)| \leq C|x|^{-s}$ für jedes $x \in \Omega$ ist. Dann definiert der Operator*

$$\tilde{T}f(y) = \int_\Omega K_z(x,y)f(x)d\Omega_x$$

eine differenzierbare Funktion über Ω.

Beweis: Betrachten wir einen Punkt $y \in \Omega$. Für genügend großes r gilt $y \in U_r(0)$. Das bedeutet

$$\int_\Omega K_z(x,y)f(x)d\Omega_x = \int_{\Omega \cap U_r(0)} K_z(x,y)f(x)d\Omega_x + \int_{\Omega \setminus U_r(0)} K_z(x,y)f(x)d\Omega_x.$$

Offensichtlich definiert

$$\int_{\Omega \cap U_r(0)} K_z(x,y)f(x)d\Omega$$

eine differenzierbare Funktion auf $\Omega \cap U_r(0)$.

Ausserdem, haben wir für r größer als $2\max(|x|,|y|)$ mittels der Abschätzung (2.1)

$$\left\| \int_{\Omega \setminus U_r(0)} K_z(x,y)f(x)d\Omega_x \right\| \leq C \int_r^\infty R^{-1-s}dR,$$

für eine positive Konstante C. Es folgt sofort durch die gleichmäßige Konvergenz, daß das Integral $\int_{\Omega \setminus U_r(0)} K_z(x,y)f(x)d\Omega_x$ eine links-monogene Funktion in einer Umgebung von y definiert.

q.e.d.

Da unser Ziel die Verallgemeinerung von Hilbertraummethoden ist, interessieren uns die Abbildungseigenschaften des $\tilde{T}$-Operators zwischen Sobolevräumen. Dazu betrachten wir den folgenden Satz:

Satz 2.1.2 *Mögen z und Ω dieselben Bedingungen wie im vorherigen Satz erfüllen. Dann ist der Operator $\tilde{T}$, definiert durch*

$$\tilde{T}f = \int_\Omega K_z(x,y)f(x)d\Omega_x$$

eine beschränkte Abbildung aus dem Raum $\mathcal{W}_2^k(\Omega)$ in den Raum $\mathcal{W}_2^{k+1}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Beweis: Da wir wissen, daß der $\tilde{T}$-Operator ein schwachsingulärer Integraloperator ist, erhalten wir ([MiP] Kapitel IX,§7), daß $\tilde{T}f$ eine differenzierbare

$\mathcal{L}_2$-Funktion ist, wenn nur $f \in \mathcal{L}_2(\Omega)$. Betrachten wir nun den Operator $\frac{\partial}{\partial y_i}\tilde{T}$. Für diesen Operator gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y_i}\tilde{T}f &= \frac{1}{\omega}\int_\Omega \left(\frac{\mathbf{e}_i - n(x_i - y_i)\frac{(x-y)}{|x-y|^2}}{|x-y|^n} - \frac{\mathbf{e}_i - n(x_i - z)\frac{(x-z)}{|x-z|^2}}{|x-z|^n} \right) f(x)d\Omega \\ &\quad -\frac{\mathbf{e}_i}{n} f(y).\end{aligned}$$

Die Frage nach der Beschränktheit dieses Operators als ein Operator aus dem Raum $\mathcal{L}_2(\Omega)$ in den Raum $\mathcal{L}_2(\Omega)$ bedeutet, daß wir uns den Operator

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y_i}\tilde{T}f &= \frac{1}{\omega}\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\mathbf{e}_i - n(x_i - y_i)\frac{(x-y)}{|x-y|^2}}{|x-y|^n} - \frac{\mathbf{e}_i - n(x_i - z_i)\frac{(x-z)}{|x-z|^2}}{|x-z|^n} \right) f(x)d\mathbb{R}^n \\ &\quad -\frac{\mathbf{e}_i}{n} f(y).\end{aligned}$$

als ein Operator von $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n)$ nach $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n)$ ansehen müssen. Es ist klar, daß wir unseren Operator erhalten, wenn wir alle Funktionen aus $\mathcal{L}_2(\Omega)$ durch Null zu Funktionen über dem ganzen Raume $\mathbb{R}^n$ fortsetzen und dann nach Anwendung des Operators wieder auf das Gebiet Ω einschränken. Im Falle des Operators über dem $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n)$ brauchen wir uns nur das Symbol $\Phi_{\frac{\partial}{\partial y_i}\tilde{T}}(\Theta)$ dieses Operator anzusehen. Für dieses Symbol gilt die Formel

$$\Phi_{\frac{\partial}{\partial y_i}\tilde{T}}(\Theta) = 2\int_S (\mathbf{e}_i - n\Theta_i'\Theta') \left[\ln \frac{1}{|\cos\gamma|} + \frac{i\pi}{2}\operatorname{sign}\cos\gamma \right] dS_{\Theta'} - \frac{\mathbf{e}_i}{n}.$$

Unter Benutzung des Satzes von Calderon und Zygmund [MiP] erhalten wir $\frac{\partial}{\partial y_i}\tilde{T} : \mathcal{L}_2(\Omega) \mapsto \mathcal{L}_2(\Omega)$.

Sei nun $f \in \mathcal{W}_2^k(\Omega), k \in \mathbb{N}$. Da Ω einen hinreichend glatten Rand Γ hat, können wir f stetig in den Raum $\mathcal{W}_2^k(\mathbb{R}^n)$ mit $REf = f$ fortsetzen. Hierbei bezeichnen wir mit E den Erweiterungsoperator und mit R den zugehörigen Einschränkungsoperator [T]. Weiterhin können wir den Operator $\tilde{T}_\Omega$ in der Form

$$\tilde{T}_\Omega f = R\tilde{T}_{\mathbb{R}^n}Ef - R\tilde{T}_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega}Ef.$$

schreiben. Vermöge der Theorie von Calderon und Zygmund [MiP] erhalten wir, daß $\frac{\partial}{\partial y_i}\tilde{T}_{\mathbb{R}^n}$ ein beschränkter Operator von $\mathcal{W}_2^k(\mathbb{R}^n)$ in $\mathcal{W}_2^k(\mathbb{R}^n)$ ist. Offensichtlich gilt dieselbe Aussage für

$$\tilde{T}_{\mathbb{R}^n} : \mathcal{W}_2^k(\mathbb{R}^n) \mapsto \mathcal{W}_2^{k+1}(\mathbb{R}^n).$$

Damit bekommen wir die Beschränktheit des Operators $R\tilde{T}_{\mathbb{R}^n}E : \mathcal{W}_2^k(\Omega) \mapsto \mathcal{W}_2^{k+1}(\Omega)$.

Auf dieselbe Weise ergibt sich die Beschränktheit für den Operator $R\tilde{T}_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega}E$, einem Integraloperator mit einem unendlich glatten Kern als einer Abbildung von $\mathcal{W}_2^k(\Omega)$ in $\mathcal{W}_2^{k+1,loc}(\Omega)$. Unter Benutzung dieser Resultate wissen wir, daß der Operator $\tilde{T}_\Omega$ eine stetige Abbildung von $\mathcal{W}_2^k(\Omega)$ in $\mathcal{W}_2^{k+1,loc}(\Omega)$ ist.

Betrachten wir nun den „push-forward“-Operator $H(\xi,\tilde{T}) : \mathcal{W}_2^k(\mathbb{R}^n) \mapsto \mathcal{W}_2^k(\mathbb{R}^n)$ unseres Operators $\tilde{T}$ [LaRoW]. Dieser Operator besitzt das Symbol $H(\xi,x) = -i\frac{\bar{x}}{|x|^2}$ welches zur Klasse $\tilde{J}^{-1}$ gehört, d.h. zur Klasse aller klassischen Symbole, die homogen von der Ordnung eins und unabhängig von x für hinreichend große x sind. Wenden wir nun Korollar 7.30 in [LaRoW] an, erhalten wir, daß $H(\xi,\tilde{T}) : \mathcal{W}_2^k(\mathbb{R}^n) \mapsto \mathcal{W}_2^{k+1}(\mathbb{R}^n)$ stetig ist. Da $H(\xi,\tilde{T})$ der „push-forward“ Operator von $\tilde{T}$ ist, erhalten wir ebenfalls, daß $\tilde{T} : \mathcal{W}_2^k(\Omega) \mapsto \mathcal{W}_2^{k+1}(\Omega)$ stetig ist.

q.e.d.

Außerdem wissen wir, daß für alle Funktionen $f \in \mathcal{L}_2(\Omega)$ die Gleichung

$$D\tilde{T}f = f$$

gilt, oder mit anderen Worten der $\tilde{T}$-Operator ist ein rechtsinverser Operator zu D.

Bemerkung 2.1.1 *In derselben Weise wie beim Beweis zum Satz 1.3.1 läßt sich beweisen, daß der Operator*

$$\tilde{T} : \mathcal{W}_2^{-1}(\Omega) \mapsto \mathcal{L}_2(\Omega)$$

ein beschränkter Operator ist.

Satz 2.1.3 *Angenommen es sei $f \in \mathcal{W}_2^k(\Omega), k \in \mathbb{N}$, dann gilt die Formel von Borel und Pompeiu*

$$\tilde{F}_\Gamma f = f - \tilde{T}Df,$$

wobei $\tilde{F}_\Gamma f = \int_\Gamma K_z(x,y)\alpha(x)f(x)d\Gamma_x$ und $\alpha(x)$ ist die äußere Normale von Γ im Punkt x.

Beweis: Bezeichnen wir mit $\mathcal{D}_{\mathbb{R}^n}(\Omega)$ den Raum aller Einschränkungen der Funktionen aus $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ auf Ω. Sei weiter $\phi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}^n}(\Omega)$. Betrachten wir einen Punkt $y \in \Omega$ und die offene Kugel $B_r(0)$ um den Ursprung 0 mit dem Radius r und dem Rand $S_r(0)$. Wenn r hinreichend groß ist, liegt y im Gebiet $\Omega(r) = \Omega \cap B_r(0)$. Für dieses Gebiet gilt

$$\tilde{F}_{\partial\Omega(r)}\phi(y) = \phi(y) - \tilde{T}_{\Omega(r)}D\phi(y).$$

Dies läßt sich in der Form

$$\int_{\Gamma\cap D(0,r)} K_z(x,y)\alpha(x)\phi(x)d\Gamma_x =$$
$$\phi(y) - \tilde{T}_{\Omega(r)}D\phi(y) - \int_{S(0,r)\cap\Omega} K_z(x,y)\alpha(x)\phi(x)d\Gamma_x.$$

Daraus erhalten wir

$$\lim_{r\to\infty}\int_{\Gamma\cap D(0,r)} K_z(x,y)\alpha(x)\phi(x)d\Gamma_x = \phi(y) - \lim_{r\to\infty}\tilde{T}_{\Omega(r)}D\phi(y)$$
$$-\lim_{r\to\infty}\int_{S(0,r)\cap\Omega} K_z(x,y)\alpha(x)\phi(x)d\Gamma_x .$$

Nun gilt weiter

$$\lim_{r\to\infty}\int_{\Gamma\cap D(0,r)} K_z(x,y)\alpha(x)\phi(x)d\Gamma_x = \int_\Gamma k(x,y)\alpha(x)\phi(x)d\Gamma_x$$

und

$$\lim_{r\to\infty}\tilde{T}_{\Omega(r)}D\phi(y) = \tilde{T}_\Omega D\phi(y).$$

Analog zum Beweis von Lemma 2.1.1 läst sich zeigen, daß das Integral

$$\int_{S(0,r)\cap\Omega} K_z(x,y)\alpha(x)\phi(x)d\Gamma_x$$

für $r\mapsto\infty$ verschwindet.

Damit erhalten wir unsere Borel-Pompeiu-Formel für $\phi\in\mathcal{D}(\Omega)$. Unser Resultat ergibt sich dann aus dem Dichtheitschluß.

q.e.d.

Bemerkung 2.1.2 *Im Falle von $\mathcal{C}^1(\Omega)$-Funktionen mit einem langsamen Fallen gegen unendlich ist die Formel von Borel und Pompeiu in [GKRSp] bewiesen.*

Folgerung 2.1.1 *Für den $\tilde{F}_\Gamma$-Operator gilt* ($k\in\mathbb{N}$)

$$\tilde{F}_\Gamma : \mathcal{W}_2^{k+1/2}(\Gamma)\mapsto\mathcal{W}_2^k(\Omega)\cap\ker D.$$

Beweis: Sei $v\in\mathcal{W}_2^{k+1/2}(\Gamma), k\in\mathbb{N}$. Dann existiert eine Funktion $u\in\mathcal{W}_2^k(\Omega)$ mit $\operatorname{tr}u = v$. Unter Verwendung der Formel von Borel und Pompeiu und Satz 2.1.2 erhalten wir $F_\Gamma v = u - \tilde{T}Du\in\mathcal{W}_2^k(\Omega)$.

q.e.d.

Dies bringt uns zur Frage der Formeln von Plemelj und Sokhotzki.

Satz 2.1.4 *Sei $f\in\mathcal{C}^{0,\beta}(\Gamma)$, $0<\beta<1$. Dann gilt für alle $\tilde{y}\in\Gamma$*

$$(i)\qquad n.t.-\lim_{\substack{y\to\tilde{y}\\ y\in\Omega}}\tilde{F}_\Gamma f(y) = \frac{1}{2}f(\tilde{y})+\frac{1}{2}\tilde{S}_\Gamma f(\tilde{y}),$$
$$(ii)\qquad n.t.-\lim_{\substack{y\to\tilde{y}\\ y\in\mathbf{R}^n\setminus(\bar{\Omega}\cup U_\varepsilon(z))}}\tilde{F}_\Gamma f(y) = -\frac{1}{2}f(\tilde{y})+\frac{1}{2}\tilde{S}_\Gamma f(\tilde{y}),$$

wobei $\tilde{S}_\Gamma f(\tilde{y}) = 2\int_\Gamma K_z(x,\tilde{y})\alpha(x)f(x)d\Gamma_x$, $U_\varepsilon(z)$ eine hinreichend kleine Umgebung von z ist und $n.t.-\lim$ „nicht-tangentialer“ Grenzwert bedeutet.

Beweis: Die generelle Idee des Beweises ist eine Ausnutzung der Kenntnis der Plemelj-Sokhotzki-Formel über einem beschränkten Gebiet und der Abschätzung der Integrale außerhalb dieses Gebietes. Wir wollen ihn hier nur für die Formel (i) zeigen. Der Beweis von (ii) ist vollkommen analog.

Offensichtlich ist $\tilde{S}_\Gamma : \mathcal{C}^{0,\beta}(\Gamma) \mapsto \mathcal{C}^{0,\beta}(\Gamma)$, $0 < \beta < 1$, oder $\tilde{S}_\Gamma : \mathcal{L}_2(\Gamma) \mapsto \mathcal{L}_2(\Gamma)$, da für das Symbol des singulären Integrals von $\tilde{S}_\Gamma$ $\Phi_{\tilde{S}_\Gamma}(\Theta) = i\Theta$ gilt. Betrachten wir nun $\tilde{y} \in \Gamma$, $\varepsilon > 0$ und einen Punkt $y \in \Omega$, sowie die Kugeloberfläche $S_r(0)$, der Kugel $B_r(0)$ um den Ursprung mit dem Radius $r = r(y)$. Wenn r hinreichend groß ist, liegt y im Gebiet $\Omega(r) = \Omega \cap B_r(0)$. Sei nun $f \in \mathcal{C}^{0,\beta}(\Gamma)$. Dann existiert eine Funktion $u \in \mathcal{C}^{0,\beta}(\overline{\Omega})$ mit $\operatorname{tr} u = f$. Für diese Funktion u gilt

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_\Gamma u(y) &= \int_{\Gamma\cap B_r(0)} K_z(x,y)\alpha(x)u(x)\, d\Gamma_x + \int_{\Omega\cap S_r(0)} K_z(x,y)\alpha(y)u(y)\, d\Gamma_x \\
&\quad + \int_{\Gamma\setminus B_r(0)} K_z(x,y)\alpha(x)u(x)\, d\Gamma_x \\
&\quad + \int_{\Omega\cap S_r(0)} K_z(x,y)(-\alpha(x))u(x)\, d\Gamma_x, \\
\tilde{S}_\Gamma u(\tilde{y}) &= \int_{\Gamma\cap B_r(0)} K_z(x,\tilde{y})\alpha(x)u(x)\, d\Gamma_x + \int_{\Omega\cap S_r(0)} K_z(x,\tilde{y})\alpha(x)u(x)\, d\Gamma_x \\
&\quad + \int_{\Gamma\setminus B_r(0)} K_z(x,\tilde{y})\alpha(x)u(x)\, d\Gamma_x \\
&\quad + \int_{\Omega\cap S_r(0)} K_z(x,\tilde{y})(-\alpha(x))u(x)\, d\Gamma_x.
\end{aligned}$$

Da r hinreichend groß ist, haben wir

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\Gamma\setminus B_r(0)} K_z(x,y)\alpha(x)u(x)\, d\Gamma_x \right| &< \frac{\varepsilon}{8}, \\
\left| \int_{\Omega\cap S_r(0)} K_z(x,y)(-\alpha(x))u(x)\, d\Gamma_x \right| &< \frac{\varepsilon}{8}, \\
\left| \int_{\Gamma\setminus B_r(0)} K_z(x,\tilde{y})\alpha(x)u(x)\, d\Gamma_x \right| &< \frac{\varepsilon}{8}, \\
\left| \int_{\Omega\cap S_r(0)} K_z(x,\tilde{y})(-\alpha(x))u(x)\, d\Gamma_x \right| &< \frac{\varepsilon}{8},
\end{aligned}$$

wegen $|K_z(x,y)| < C\frac{|y-z|+\max(|y|,|z|)}{|\xi|^n}$ nach Lemma 2.1.1. Damit erhalten wir

$$\Big| \int_{\Gamma\setminus B_r(0)} K_z(x,y)\alpha(x)u(x)\ d\Gamma_x + \int_{\Omega\cap S_r(0)} K_z(x,y)(-\alpha(x))u(x)\ d\Gamma_x$$
$$- \int_{\Gamma\setminus B_r(0)} K_z(x,\tilde{y})\alpha(x)u(x)\ d\Gamma_x$$
$$- \int_{\Omega\cap S_r(0)} K_z(x,\tilde{y})(-\alpha(x))u(x)\ d\Gamma_x \Big| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (2.2)$$

Weiterhin folgt aus [GSp1], daß ein $\delta > 0$ existiert, so daß für alle y mit $|y-\tilde{y}| < \delta$

$$\Big| \int_{\Gamma\cap B_r(0)} K_z(x,y)\alpha(x)u(x)\ d\Gamma_x + \int_{\Omega\cap S_r(0)} K_z(x,y)\alpha(x)u(x)\ d\Gamma_x - \frac{1}{2}u(\tilde{y})$$
$$-\frac{1}{2}\int_{\Gamma\cap B_r(0)} K_z(x,\tilde{y})\alpha(x)u(x)\ d\Gamma_x$$
$$-\frac{1}{2}\int_{\Omega\cap S_r(0)} K_z(x,\tilde{y})\alpha(x)u(x)\ d\Gamma_x \Big| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (2.3)$$

Aus (2.2) und (2.3) folgt nun

$$\forall\varepsilon > 0\,\exists\delta : |\tilde{F}_\Gamma u(y) - \frac{1}{2}u(\tilde{y}) - \frac{1}{2}\tilde{S}_\Gamma u(\tilde{y})| < \varepsilon \quad \forall y : |y-\tilde{y}| < \delta.$$

Da $\tilde{y} \in \Gamma$ beliebig ist und $f = \operatorname{tr} u$ gilt, erhalten wir unsere Formel (i).

q.e.d.

Ein ähnlicher Beweis ist in [GKRSp] enthalten. Unter Benutzung dieses Satzes erhalten wir:

Folgerung 2.1.2 *Unter Benutzung der Stetigkeit des Spur-Operators* tr *aus dem Gebiet* Ω *zum Rand* Γ *(vgl. [W]) können wir unsere Formeln von Plemelj und Sokhotzki auf den Fall der Sobolevräume* $\mathcal{W}_2^l(\Gamma), l > 0,$ *in der Form*

$$\operatorname{tr} \tilde{F}_\Gamma f = \frac{1}{2}f + \frac{1}{2}\tilde{S}_\Gamma f$$

für $f \in \mathcal{W}_2^l(\Gamma), l > 0,$ *erweitern.*

Beweis: Sei $u \in \mathcal{W}_2^l(\Gamma), l > 0$. Dann existiert eine Folge u_n von hölderstetigen Funktionen mit $u_n \to u$ in $\mathcal{W}_2^l(\Gamma), l > 0$. Für diese Funktionen u_n gilt nach unserem vorherigen Satz

$$(\operatorname{tr} \tilde{F}_\Gamma)u_n = \frac{1}{2}(I + \tilde{S}_\Gamma)u_n.$$

Dabei ist der Operator $I + \tilde{S}_\Gamma$ eine stetige Abbildung des $\mathcal{W}_2^l(\Gamma), l > 0$, in den $\mathcal{W}_2^l(\Gamma), l > 0$ ([MiP]).

Unser Resultat ergibt sich nun aus dem Dichtheitsschluß.

q.e.d.

Diese Folgerung und Satz 2.1.4 bedeutet, daß $\tilde{S}_\Gamma f(\tilde{y}) = f(\tilde{y})$ notwendig und hinreichend dafür ist, daß $f(\tilde{y})$ Randwerte einer $C\ell_{0,n}$-wertigen Funktion sind, die linksmonogen in Ω ist.

Damit führen wir die Operatoren

$$P_\Gamma = \frac{1}{2}(I + \tilde{S}_\Gamma) \text{ und } Q_\Gamma = \frac{1}{2}(I - \tilde{S}_\Gamma)$$

ein. P_Γ und Q_Γ besitzen die algebraischen Eigenschaften $P_\Gamma^2 = P_\Gamma$, $Q_\Gamma^2 = Q_\Gamma$, und $P_\Gamma Q_\Gamma = Q_\Gamma P_\Gamma = 0$, d.h. P_Γ und Q_Γ sind Projektionsoperatoren. Für den Beweis wollen wir nur anmerken, daß $\tilde{S}_\Gamma^2 = I$ gilt. Interessanterweise ist dabei P_Γ die Projektion in den Raum aller (hölderstetigen oder $\mathcal{W}_2^l, l > 0,$) $C\ell_{0,n}$-wertigen Funktionen, die sich linksmonogen in das Gebiet Ω fortsetzen lassen. Eine ähnliche Aussage für Q_Γ, wie sie auch im Falle eines beschränkten Gebietes gilt, ist hier leider nicht möglich, da der $\tilde{F}_\Gamma$-Operator im Gebiet $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ ein singulärer Operator ist.

Diese Untersuchungen ermöglichen uns nun ebenfalls eine orthogonale Zerlegung zu beweisen, die uns in die Lage versetzten wird, elliptische Randwertprobleme analog zu der Herangehensweise von K. Gürlebeck und W. Sprößig [GSp1] zu behandeln.

Satz 2.1.5 *Das rechte Hilbertmodul $\mathcal{L}_2(\Omega)$ erlaubt die orthogonale Zerlegung*

$$\mathcal{L}_2(\Omega) \;=\; \ker D(\Omega) \cap \mathcal{L}_2(\Omega) \oplus D(\overset{\circ}{\mathcal{W}}{}_2^1(\Omega)) \tag{2.4}$$

bzgl. des inneren Produktes

$$(u, v) = \int_\Omega \overline{u} v d\Omega.$$

Beweis: Die rechtslinearen Mengen

$$\mathcal{X}_1 = \mathcal{L}_2(\Omega) \cap \ker D(\Omega) \quad \text{und} \quad \mathcal{X}_2 = \mathcal{L}_2(\Omega) \ominus \mathcal{X}_1$$

sind Unterräume von $\mathcal{L}_2(\Omega)$. Für jedes $u \in \mathcal{L}_2(\Omega)$ gilt $\tilde{T}u \in \mathcal{W}_2^1(\Omega)$. Daraus folgt es existiert eine Funktion $v \in \mathcal{W}_2^1(\Omega)$ mit $u = Dv$. Sei $u \in \mathcal{X}_2$. Dann haben wir für alle $g \in \mathcal{X}_1$

$$\int_\Omega \overline{Dv}\, g\, d\Omega \;=\; 0$$

und en detail für jedes $l \in \mathbb{N}$

$$\int_\Omega \overline{Dv}\, g_l\, d\Omega \;=\; 0 \tag{2.5}$$

mit

$$g_l(x) = \frac{(x - y_l)}{|x - y_l|^n} - \frac{(x - z)}{|x - z|^n} \qquad l \in \mathbb{N},\ y_l \in \mathbb{R}^n \setminus (\overline{\Omega} \cup U_\epsilon(z)),$$

wobei der Abstand $\operatorname{dist}(\Omega, U_\epsilon(z))$ zwischen Ω und U_ϵ größer Null ist. Offensichtlich gilt $g_l \in \ker D(\Omega) \cap \mathcal{L}_2(\Omega)$. Weiterhin können wir annehmen, daß die Menge $\{y_l,\ l \in \mathbb{N}\}$ dicht in $\mathbb{R}^n \setminus (\overline{\Omega} \cup U_\epsilon(z))$ ist. Dann erhalten wir für jedes $y_l \in \mathbb{R}^n \setminus (\overline{\Omega} \cup U_\epsilon(z))$

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \overline{Dv}\, g_l\, d\Omega_x &= \sum_{i=1,j=0}^{n} \int_\Omega \overline{\mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} v_j \mathbf{e}_j}\; g_l\, d\Omega_x \\
&= -\sum_{i=1,j=0}^{n} \int_\Omega \bar{\mathbf{e}}_j \bar{\mathbf{e}}_i v_j \frac{\partial}{\partial x_i} g_l\, d\Omega_x + \sum_{i=1,j=0}^{n} \int_\Gamma \bar{\mathbf{e}}_j\, \bar{\mathbf{e}}_i\, v_j\, \alpha_i\, g_l\, d\Gamma_x \\
&= -\int_\Omega \bar{v}\, D g_l\, d\Omega_x + \int_\Gamma \bar{v}\, \bar{\alpha} g_l\, d\Gamma_x \\
&= \overline{\int_\Gamma \bar{g}_l\, \alpha\, v\, d\Gamma_x} \\
&= \overline{\int_\Gamma \left(\frac{(y_l - x)}{|x - y_l|^n} + \frac{x - z}{|x - z|^n} \right) \alpha\, v\, d\Gamma_x} \\
&= -\omega \overline{(\tilde{F}_\Gamma(\operatorname{tr} v))(y_l)},
\end{aligned}
$$

wobei $\operatorname{tr} v$ die Spur von v bedeutet. Unter Benutzung von Gleichung (2.5) ist $\tilde{F}_\Gamma(\operatorname{tr} v) = 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus (\overline{\Omega} \cup U_\epsilon(z))$. Daraus folgt $\operatorname{tr} v \in \operatorname{im} P_\Gamma \cap \mathcal{W}_2^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Dies bedeutet, daß eine Funktion $h \in \mathcal{W}_2^1(\Omega) \cap \ker D(\Omega)$ existiert mit der Eigenschaft, daß $\operatorname{tr} h = \operatorname{tr} v$ ist. Betrachten wir nun die Funktion $w = v - h \in \overset{\circ}{\mathcal{W}}{}_2^1(\Omega)$. Es gilt $Dw \in D(\overset{\circ}{\mathcal{W}}{}_2^1(\Omega))$. Unsere Behauptung folgt nun aus $u = D\,v = D\,w$.

q.e.d.

Bemerkung 2.1.3 *Bezüglich dieser Zerlegung des Raumes $\mathcal{L}_2(\Omega)$ erhalten wir die Orthoprojektoren*

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P} &: \mathcal{L}_2(\Omega) \mapsto \mathcal{L}_2(\Omega) \cap \ker D \\
\mathbf{Q} &: \mathcal{L}_2(\Omega) \mapsto D(\overset{\circ}{\mathcal{W}}{}_2^1(\Omega)).
\end{aligned}
$$

Der Orthoprojektor $\mathbf{Q}$ besitzt die nützliche Eigenschaft, daß er den Raum $W_2^k(\Omega)$ in den Raum $W_2^{k,loc}(\Omega)$ abbildet. Um dies zu beweisen, genügt es die Gleichung $\mathbf{Q}f = f - \mathbf{P}f$ zu betrachten, wobei $\mathbf{P}f \in \ker \Delta(\Omega) \subset \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ gilt.

2.2 Lineare elliptische Randwertprobleme

Als ein erstes Beispiel eines elliptischen Randwertproblems der mathematischen Physik sehen wir uns das Dirichletproblem für die Laplacegleichung an. Dieses Problem ist das einfachste Beispiel eines solchen Randwertproblems und ist in ausgezeichneter Weise dazu geeignet, das Wesen dieser Herangehensweise zur Lösung solcher Probleme darzustellen. In den nachfolgenden Abschnitten werden wir uns dann komplizierteren Gleichungen wie dem Stokes- oder dem Navier-Stokes-System zuwenden.

Nehmen wir an es sei $f \in \mathcal{W}_2^k(\Omega), g \in \mathcal{W}_2^{k+3/2}(\Gamma), k \geq 0$, und betrachten als erstes das Problem der inhomogenen Gleichung mit homogenen Randbedingungen

$$\begin{aligned} -\Delta u_1 &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u_1 &= 0 \quad \text{auf } \Gamma. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Da der Orthoprojektor $\mathbf{Q}$ den Raum $W_2^k(\Omega)$ in den Raum $W_2^{k,loc}(\Omega)$ abbildet, sehen wir unmittelbar, daß die Funktion $\tilde{T}\mathbf{Q}\tilde{T}f$ im Raum $W_2^{k+2,loc}(\Omega)$ liegt. Weiterhin gilt für die Spur dieser Funktion $\operatorname{tr}\tilde{T}\mathbf{Q}\tilde{T}f = 0$, d.h. die Randwerte dieser Funktion sind Null. Wenden wir nun $-\Delta = DD$ auf diese Funktion an, so wird unmittelbar klar, daß $\tilde{T}\mathbf{Q}\tilde{T}f$ eine Lösung von (2.6) ist.

Benutzen wir nun dieses Resultat, um das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u_2 &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ u_2 &= g \quad \text{auf } \Gamma \end{aligned} \tag{2.7}$$

zu lösen. Da $g \in \mathcal{W}_2^{k+3/2}(\Gamma)$ ist, existiert eine $\mathcal{W}_2^{k+2}$-Erweiterung h mit $\operatorname{tr} h = g$. Setzen wir nun $u_2 = v + h$, so transformiert sich das Randwertproblem (2.7) in das Problem

$$\begin{aligned} -\Delta v &= \Delta h \quad &\text{in } \Omega, \\ v &= 0 \quad &\text{auf } \Gamma, \end{aligned}$$

daß vom selben Typ wie (2.6) ist.

Unsere Lösung des Randwertproblems (2.6) liefert uns $v = \tilde{T}\mathbf{Q}\tilde{T}\Delta h$. Die Anwendung der Formel von Borel und Pompeiu, von $\mathbf{P} = I - \mathbf{Q}$ und von $DD = -\Delta$ liefert uns $v = -\tilde{T}\mathbf{Q}Dh + \tilde{T}\mathbf{Q}\tilde{F}_\Gamma Dh = -h + \tilde{T}\mathbf{P}Dh + \tilde{F}_\Gamma h$. Damit ergibt sich $u_2 = v + h = \tilde{F}_\Gamma g + \tilde{T}\mathbf{P}Dh$.

Da wir das allgemeine Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= g \quad \text{auf } \Gamma, \end{aligned} \tag{2.8}$$

so in die Randwertprobleme (2.6) und (2.7) zerlegen können, daß $u = u_1 + u_2$ ist, wobei u_1 und u_2 die Lösungen der entsprechenden Randwertprobleme sind, ergibt sich der folgende Satz:

Satz 2.2.1 *Sei $f \in \mathcal{W}_2^k(\Omega)$ und $g \in \mathcal{W}_2^{k+3/2}(\Gamma)$, $k \geq 0$, dann besitzt das Dirichletsche Randwertproblem für die Laplacegleichung*

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \textit{in } \Omega \\ u &= g \quad \textit{auf } \Gamma \end{aligned}$$

eine Lösung $u \in \mathcal{W}_2^{k+2,loc}(\Omega)$, *gegeben durch*

$$u = \tilde{F}_\Gamma g + \tilde{T}\mathbf{P}Dh + \tilde{T}\mathbf{Q}\tilde{T}f,$$

wobei h *eine* $\mathcal{W}_2^{k+2}$*-Erweiterung von* g *in das Gebiet* Ω *ist.*

Wir weisen darauf hin, daß $u = \tilde{F}_\Gamma g + \tilde{T}\mathbf{P}Dh + \tilde{T}\mathbf{Q}\tilde{T}f$ die einzige Lösung des Randwertproblems (2.8) ist.

Lemma 2.2.1 *Im Fall* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *ist der Operator*

$$\operatorname{tr} \tilde{T}\tilde{F}_\Gamma : \mathcal{W}_2^{k+1/2}(\Gamma) \cap im\ P_\Gamma \mapsto \mathcal{W}_2^{k+3/2}(\Gamma) \cap im\ Q_\Gamma$$

ein Isomorphismus.

Beweis: Offensichtlich gilt

$$(\operatorname{tr} \tilde{T}\tilde{F}_\Gamma)(\mathcal{W}_2^{k+1/2}(\Gamma)) \subset \mathcal{W}_2^{k+3/2}(\Gamma).$$

Sei nun $u \in \mathcal{W}_2^{k+1/2}(\Gamma) \cap \operatorname{im} P_\Gamma$ und $\operatorname{tr} \tilde{T}\tilde{F}_\Gamma u = 0$. Unser obiges Randwertproblem liefert $\tilde{T}\tilde{F}_\Gamma u = 0$ und $\tilde{T}\tilde{F}_\Gamma u \in (\ker \Delta)(\Omega)$, woraus $\tilde{F}_\Gamma u = 0$ folgt. Nutzen wir nun die Tatsache, daß für jedes $u \in \operatorname{im} P_\Gamma$ $\operatorname{tr} \tilde{F}_\Gamma u = u$ gilt, erhalten wir $u = 0$. Sei weiterhin $w \in \operatorname{im} Q_\Gamma$. Das bedeutet $\tilde{F}_\Gamma w = 0$. Dann existiert nach Satz 2.2.1 eine Funktion $v \in (\ker \Delta)(\Omega)$ mit $w = \operatorname{tr} v$. Die Formel von Borel und Pompeiu liefert $v = \tilde{T}Dv$. Insbesondere gilt $u = \tilde{F}_\Gamma \operatorname{tr} u$, wenn $u = Dv \in \ker D$. Daraus folgt $v = \tilde{T}\tilde{F}_\Gamma \operatorname{tr} u$ und somit $w = \operatorname{tr} \tilde{T}\tilde{F}_\Gamma(\operatorname{tr} u) \in \operatorname{im}\ \operatorname{tr} \tilde{T}\tilde{F}_\Gamma$.

q.e.d.

Nehmen wir an $u \in \mathcal{W}_2^k(\Omega), k \geq 1$, und setzen $P_* = \tilde{F}_\Gamma(\operatorname{tr} \tilde{T}\tilde{F}_\Gamma)^{-1} \operatorname{tr} \tilde{T}$. Ausgehend von der Tatsache, daß $\operatorname{tr} \tilde{T}u \in \mathcal{W}_2^{k+1/2}(\Gamma) \cap \operatorname{im} Q_\Gamma$, erhalten wir

$$(\operatorname{tr} \tilde{T}\tilde{F}_\Gamma)^{-1} \operatorname{tr} \tilde{T}u \in \mathcal{W}_2^{k-1/2}(\Gamma) \cap \operatorname{im} P_\Gamma.$$

Die Abbildungseigenschaften von $\tilde{F}_\Gamma$ bedeuten

$$P_* u \in \mathcal{W}_2^k(\Omega) \cap \ker D.$$

Es ist leicht zu sehen, daß $P_*^2 u = P_* u$. Das bedeutet auch $(I - P_*)^2 = (I - P_*)$. Weiterhin gilt

$$(I - P_*)u = u - P_* u = D(\tilde{T}u - \tilde{T}\tilde{F}_\Gamma(\operatorname{tr} \tilde{T}\tilde{F}_\Gamma)^{-1} \operatorname{tr} \tilde{T}u).$$

Damit haben wir

$$\operatorname{tr}(\tilde{T}u - \tilde{T}\tilde{F}_\Gamma(\operatorname{tr} \tilde{T}\tilde{F}_\Gamma)^{-1} \operatorname{tr} \tilde{T}u) = 0.$$

Aufgrund der Eindeutigkeit unserer Orthoprojektoren $\mathbf{P}$ und $\mathbf{Q}$ erhalten wir:

Satz 2.2.2 *Sei* $u \in \mathcal{W}_2^k(\Omega), k \geq 1$. *Dann besitzen die Orthoprojektoren* $\mathbf{P}$ *und* $\mathbf{Q}$ *die Darstellung*

$$\begin{aligned} \mathbf{P}u &= \tilde{F}_\Gamma(\operatorname{tr} \tilde{T}\tilde{F}_\Gamma)^{-1} \operatorname{tr} \tilde{T}u, \\ \mathbf{Q}u &= (I - \tilde{F}_\Gamma(\operatorname{tr} \tilde{T}\tilde{F}_\Gamma)^{-1} \operatorname{tr} \tilde{T})u. \end{aligned}$$

2.3 Das Stokes-System

In der mathematischen Theorie und der numerischen Analysis von Strömungen viskoser inkompressibler Flüssigkeiten, die durch die nichtlinearen Navier-Stokes-Gleichungen beschrieben werden, spielt die Untersuchung des linearen Stokes-Systems eine entscheidende Rolle. Ohne Übertreibung kann gesagt werden, daß nahezu jede offene Frage im Hinblick auf die Navier-Stokes-Gleichungen (globale Existenz starker Lösungen, Eindeutigkeit und Regularität schwacher Lösungen, Stabilität und asympotisches Verhalten) eng mit den qualitativen und quantitativen Eigenschaften der Lösungen der Stokes-Gleichungen zusammenhängt.

In [GSp1] wird das Stokes-System in der Form

$$-\Delta \hat{u} + \frac{1}{\eta} \operatorname{grad} p = \tfrac{\rho}{\eta} \tilde{f} \qquad \text{in } \Omega, \tag{2.9}$$

$$\operatorname{div} \hat{u} = f_0 \qquad \text{in } \Omega, \tag{2.10}$$

$$\hat{u} = \tilde{g} \qquad \text{auf } \Gamma \tag{2.11}$$

betrachtet. Dieses System beschreibt den stationären Fluß einer homogenen viskosen Flüssigkeit für kleine Reynolds-Zahlen. $\hat{u}$ bezeichnet dabei die Geschwindigkeit und p den hydrostatischen Druck. Die skalare Funktion f_0 ist ein Maß für die Kompressibilität der Flüssigkeit. Die Randbedingung (2.11) beschreibt die Adhesion auf dem Rand des Gebietes für $\tilde{g} = 0$. Weiterhin bezeichnen wir mit ρ die Dichte, η die Viskosität und $\tilde{f}$ den Vektor der äußeren Kräfte.

Bekanntermaßen ist das System nur dann lösbar, wenn $\int_\Omega f_0 d\Omega = \int_\Gamma \alpha \tilde{g} d\Gamma$ gilt.

Eine vollständige Theorie für die Lösung der Stokes-Gleichungen in Sobolev-Räumen $\mathcal{W}_p^k(\Omega)$ existierte bis Anfang der 90-er Jahre nur für den Fall beschränkter Gebiete (L. Cattabriga [Cat] für $n = 3$, Galdi/Simader [GaSi] und Kozono/Sohr [KoSo1], [KoSo2] für $n \geq 2$). Erst seit dieser Zeit wurde auch der Fall des Außengebietes intensiv betrachtet (siehe dazu [Va] und Referenzen darin).

Außerhalb dieser Betrachtungen benutzten K. Gürlebeck und W. Sprößig erfolgreich hyperkomplexe Methoden zur Entwicklung einer anderen Lösungstheorie des Stokes-Systems in Sobolevräumen über beschränkten Gebieten. Insbesondere erhielten sie, daß für gegebene Daten $\tilde{f} \in \mathcal{L}_2(\Omega), f_0 \in \mathcal{W}_2^1(\Omega), g \in \mathcal{W}_2^{3/2}(\Gamma)$ es exakt eine Lösung (u, p) mit $u \in \mathcal{W}_2^2(\Omega)$ und $p \in \mathcal{W}_2^1(\Omega)$ des Stokes-Problems gibt. Die ist zwar auf den ersten Blick nicht so allgemein wie Cattabrigas Resultat ($f \in \mathcal{L}_p(\Omega), f_0 \in \mathcal{W}_p^1(\Omega)$ und $g \in \mathcal{W}_p^{2-1/p}(\Gamma)$), aber sie erhielten zusätzlich getrennte Lösungsdarstellungen für u und p. Außerdem läßt sich ihre Methode, wie im vorherigen Kapitel gezeigt, auch auf den allgemeinen $\mathcal{L}_p$-Fall verallgemeinern.

Dies wirft natürlich auch die Frage auf, ob sich diese Herangehensweise auch im Fall unbeschränkter Gebiete verwenden läßt, zumal hier die Frage einer Lösungtheorie in Sobolev-Räumen nicht leicht zu beantworten ist. So erhält W. Varnhorn [Va], daß für $f \in \mathcal{L}_p(\Omega), f_0 \in V^{1,p}(\Omega)$ und $g \in \mathcal{W}_p^{2-1/p}(\Gamma)$ eine Lösung $u \in V^{2,p}(\Omega), p \in V^{1,p}(\Omega, \mathbb{R})$ existiert. Dabei ist $V^{l,p}(\Omega) := \{v \in$

$\mathcal{L}_p^{loc}(\overline{\Omega})|\ ||\nabla^l v||_{\mathcal{L}_p} < \infty\}$. Diese Lösung ist im allgemeinen nicht eindeutig, da z.B. $u = (u_1, u_2, u_3)$ und p definiert in $0 \neq x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ durch

$$u(x) := (|x|^3 - 1) \begin{pmatrix} x_3 - x_2 \\ x_1 - x_3 \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix}, \quad p(x) = \text{const}$$

eine Lösung des homogenen Stokes-Problems

$$-\Delta u + \operatorname{grad} p = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad \operatorname{div} u = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \Gamma$$

in $V^{2,r}(\Omega) \times V^{1,r}(\Omega, \mathbb{R})$ für $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{B}_1(0)$ ist. Offensichtlich liegen aber weder irgendeine der u_k $(k = 1, 2, 3)$ noch der partiellen Ableitungen $\partial_i u_k$ $(i \neq k)$ oder der Druck p in irgendeinem $\mathcal{L}_p(\Omega)$ $(1 < p < \infty)$.

Mit dem Fall unbeschränkter Gebiete haben sich auch Galdi/Simader [GaSi] und Kozono/Sohr [KoSo2] beschäftigt. Die in diesen Arbeiten verwendete Methode der Zerlegung des Problems in ein Problem über dem ganzen Raum und in ein Problem über einem beschränkten Gebiet läßt sich jedoch nur auf den Fall eines Außengebietes anwenden.

Wir wollen im weiteren zeigen, wie hilfreich die Ausnutzung hyperkomplexer Methoden bei der Bearbeitung solcher Probleme sein kann.

Nach [GSp1] können die Stokesschen Gleichungen in der hyperkomplexen Schreibweise

$$-\Delta u + \frac{1}{\eta} Dp = \tfrac{\rho}{\eta} f \qquad \text{in } \Omega, \tag{2.12}$$

$$\operatorname{Sc} Du = f_0 \qquad \text{in } \Omega, \tag{2.13}$$

$$u = g \qquad \text{auf } \Gamma, \tag{2.14}$$

geschrieben werden.

Auf der einen Seite ist $\hat{u} = \operatorname{Vec} u$ eine schwache Lösung des Systems (2.9)-(2.11), falls $u \in \overset{\circ}{\mathcal{W}}{}_2^1(\Omega)$, $p \in \mathcal{L}_2(\Omega)$ eine Lösung des Systems (2.12)-(2.14) ist.

Auf der anderen Seite gilt, falls $\hat{u}$ eine schwache Lösung des Systems (2.9)-(2.11) ist, dann existiert eine Funktion $p \in \mathcal{L}_2(\Omega)$, so daß das Paar $\{u, p\}$ mit $u = \hat{u}$ das System (2.12)-(2.14) löst. Das bedeutet die beiden Systeme (2.9)-(2.11) und (2.12)-(2.14) sind äquivalent.

Betrachten wir zunächst das System

$$-\Delta u + \frac{1}{\eta} Dp = \tfrac{\rho}{\eta} f \qquad \text{in } \Omega, \tag{2.15}$$

$$\operatorname{Sc} Du = 0 \qquad \text{in } \Omega, \tag{2.16}$$

$$u = 0 \qquad \text{auf } \Gamma. \tag{2.17}$$

Dies ist ein Spezialfall des Systems (2.12)-(2.14) mit $f_0 = 0$ und $g = 0$.

Lemma 2.3.1 *Sei $f \in \mathcal{W}_2^{-1}(\Omega)$, $p \in \mathcal{L}_2(\Omega)$. Dann besitzt jede Lösung des Stokesschen Differentialgleichungssystems (2.15)-(2.17) die Darstellung*

$$u = \frac{\rho}{\eta} \tilde{T} \mathbf{Q} \tilde{T} f - \frac{1}{\eta} \tilde{T} \mathbf{Q} p.$$

Der Beweis dieses Lemmas ist volkommen analog zum Beweis von Lemma (1.4.1).

Dieses Resultat liefert uns:

Satz 2.3.1 *Das System der Stokesschen Gleichungen (2.15)-(2.17) besitzt für* $f \in \mathcal{W}_2^{-1}(\Omega)$ *eine eindeutige Lösung* $\{u, p\}$ *in der Form*

$$u + \frac{1}{\eta}\tilde{T}\mathbf{Q}p = \frac{\rho}{\eta}\tilde{T}\mathbf{Q}\tilde{T}f,$$

die die Abschätzung

$$||Du||_{\mathcal{L}_2(\Omega)} + \frac{1}{\eta}||\mathbf{Q}p||_{\mathcal{L}_2(\Omega)} \leq \sqrt{2}\frac{\rho}{\eta}||\tilde{T}f||_{\mathcal{L}_2(\Omega)}$$

erfüllt.

Beweis: Bezeichnen wir mit $\mathcal{M}_2(\Omega)$ den Raum aller $C\ell_{0,n}$-wertigen Funktionen, die verallgemeinerte D-Ableitungen besitzen, welche im Raum $\mathcal{W}_2^{-1}(\Omega)$ liegen. Der Raum $\mathbf{Q}\mathcal{M}_2(\Omega) \subset \mathcal{L}_2(\Omega)$ erlaubt die orthogonale Zerlegung

$$\mathbf{Q}\mathcal{M}_2(\Omega) = D(\overset{\circ}{\mathcal{W}_2^1}(\Omega) \cap \ker \operatorname{div}\ ) \oplus_{\mathrm{Sc}} \mathcal{L}_2(\Omega, \mathbb{R})$$

bzgl. des inneren Produktes

$$(u, v)_{\mathrm{Sc}} = \mathrm{Sc} \int_\Omega \overline{u} v d\Omega.$$

Der Beweis dieser orthogonalen Zerlegung verläuft in genau derselben Weise wie der Beweis im Falle eines beschränkten Gebietes in [GSp2]. Sei nun $z \in \mathbf{Q}M_2(\Omega)$, dann ist $z = \frac{\rho}{\eta}\mathbf{Q}\tilde{T}f$. Aufgrund unserer orthogonalen Zerlegung existieren $u \in \overset{\circ}{\mathcal{W}_2^1}(\Omega) \cap \ker \operatorname{div}$ und $p \in \mathcal{L}_2(\Omega, \mathbb{R})$, so daß

$$Du + \frac{1}{\eta}\mathbf{Q}p = \frac{\rho}{\eta}\mathbf{Q}\tilde{T}f$$

Wenden wir nun die Formel von Borel und Pompeiu an, erhalten wir

$$u + \frac{1}{\eta}\tilde{T}\mathbf{Q}p = \frac{\rho}{\eta}\tilde{T}\mathbf{Q}\tilde{T}f.$$

Nach unserem vorherigen Lemma ist dies eine Lösung unseres Stokes' Problems (2.15)-(2.17).

Da $Du \in \operatorname{im} \mathbf{Q}, \mathrm{Sc}\, Du = 0$ und $\mathrm{Vec}\, p = 0$, ergibt sich $(Du, \mathbf{Q}p)_{\mathrm{Sc}} = (Du, p)_{\mathrm{Sc}} - (Du, \mathbf{P}p)_{\mathrm{Sc}} = 0$. Damit haben wir

$$||Du||_{\mathcal{L}_2(\Omega)} + \frac{1}{\eta}||\mathbf{Q}p||_{\mathcal{L}_2(\Omega)} \leq \sqrt{2}\frac{\rho}{\eta}||\tilde{T}f||_{\mathcal{L}_2(\Omega)}.$$

Aus dieser Eigenschaft folgt auch die Eindeutigkeit unserer Lösung, wenn wir beachten, daß für unbeschränkte Gebiete aus $p_1, p_2 \in \mathcal{L}_2(\Omega)$ und $D(p_1 - p_2) = 0$ folgt $p_1 - p_2 = 0$ bzw. $p_1 = p_2$.

q.e.d.

Bemerkung 2.3.1 *Im Gegensatz zum beschränkten Gebiet ([GSp1] oder [GSp2]), wo hydrostatische Druck p bis auf eine reelle Konstante eindeutig ist, haben wir hier die volle Eindeutigkeit.*

Sei nun $f \in \mathcal{W}_2^k(\Omega)$, $k \geq 0$. Dann hat die einzige Lösung $\{u, p\}$ von (2.15)-(2.17) die Darstellung

$$\begin{aligned} u &= \frac{\rho}{\eta}\tilde{T}\mathrm{Vec}\,\tilde{T}f - \frac{\rho}{\eta}\tilde{T}\mathrm{Vec}\,\tilde{F}_\Gamma(\mathrm{tr}\,\tilde{T}\mathrm{Vec}\,\tilde{F}_\Gamma)^{-1}\,\mathrm{tr}\,\tilde{T}\mathrm{Vec}\,\tilde{T}f, \\ p &= \rho\mathrm{Sc}\,\tilde{T}f - \rho\mathrm{Sc}\,\tilde{F}_\Gamma(\mathrm{tr}\,\tilde{T}\mathrm{Vec}\,\tilde{F}_\Gamma)^{-1}\,\mathrm{tr}\,\tilde{T}\mathrm{Vec}\,\tilde{T}f. \end{aligned}$$

Konsequenterweise haben wir $u \in \mathcal{W}_2^{k+2}(\Omega) \cap \overset{\circ}{\mathcal{W}}{}_2^1(\Omega)$ und $p \in \mathcal{W}_2^{k+1}(\Omega, \mathbb{R})$. Der Beweis dieser Darstellung ist vollkommen analog zum Beweis eines ähnlichen Resultates in [GSp1] im Falle eines beschränkten Gebietes.

Wenn wir uns die allgemeine Situation (2.12)-(2.14) ansehen, haben wir zu beachten, daß es unmöglich ist, die Funktionen f_0 und g unabhängig voneinander zu wählen. Wir müssen immer die notwendige Bedingung $\int_\Omega f_0 d\Omega = \int_\Gamma \alpha g d\Gamma$ erfüllen.

Auf der einen Seite, wenn wir f und f_0 gegeben haben, erhalten wir das folgende System:

$$\begin{aligned} -\Delta u + \frac{1}{\eta}Dp &= \frac{\rho}{\eta}f && \text{in } \Omega, \\ \mathrm{Sc}\,Du &= f_0 && \text{in } \Omega, \\ u &= \mathrm{tr}\,\tilde{T}\tilde{F}_\Gamma f_0 && \text{auf } \Gamma. \end{aligned}$$

Es sei bemerkt, daß die Lösung dieses Systems konstruiert werden kann, wenn wir von der Lösung $\{u, p\}$ des Systems (2.15)-(2.17) ausgehen. Damit erhalten wir die Lösung $\{u', p'\}$ in der Form

$$\begin{aligned} u' &= u + \tilde{T}f_0, \\ p' &= p - \eta f_0. \end{aligned}$$

Auf der anderen Seite haben wir unter der Bedingung, daß f und g gegeben ist, das System

$$\begin{aligned} -\Delta u + \frac{1}{\eta}Dp &= \frac{\rho}{\eta}f && \text{in } \Omega, \\ \mathrm{Sc}\,Du &= \mathrm{Sc}\,\mathbf{P}Dh && \text{in } \Omega, \\ u &= g && \text{auf } \Gamma, \end{aligned}$$

wobei h die zugehörige glatte Erweiterung von g in das Gebiet Ω bezeichnet. Die Lösung $\{u', p'\}$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} u' &= u + \tilde{F}_\Gamma g + \tilde{T}\mathbf{P}Dh, \\ p' &= p, \end{aligned}$$

wobei $\{u, p\}$ die Lösung des Stokes-Systems (2.15)-(2.17) ist.

Bemerkung 2.3.2 *Für den Fall, daß Ω Außengebiet eines beschränkten Gebietes und $g \in \mathcal{W}_2^{3/2}(\Omega), f = 0$, $f_0 = 0$ ist, wurde in [Va] gezeigt, daß es genau eine Lösung $u \in V^{2,2}(\Omega) \cap \mathcal{C}^\infty(\Omega), p \in V^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ des Problems (2.9)–(2.11) gibt, die die Bedingung*

$$\begin{aligned} \nabla^k u(x) &= O(|x|^{2-n-k}), k = 0, 1 \\ p(x) &= O(|x|^{1-n}) \end{aligned}$$

erfüllt. Da $\mathcal{W}_2^2(\Omega) \subset V^{2,2}(\Omega)$ und $\mathcal{W}_2^1(\Omega, \mathbb{R}) \subset V^{1,2}(\Omega, \mathbb{R})$ ist, fällt diese Lösung mit unserer zusammen.

Wir wir bereits angesprochen haben, ist die Lösung des Stokes-Problems wesentlich für die Behandlung des nichtlinearen Navier-Stokes-Problems. Wir wollen nun demonstrieren, wie man ausgehend von unserer Lösung des Stokes-Problems über unbeschränkten Gebieten auch Navier-Stokes-Probleme erfolgreich untersuchen kann. Dazu wählen wir als Beispiel die stationären Navier-Stokes-Gleichungen über einem unbeschränkten Gebiet Ω.

2.4 Das stationäre Navier-Stokes-Problem

Bei Untersuchungen in der Hydrodynamik und dem damit im Zusammenhang stehenden Studium der instationären Navier-Stokes-Gleichungen spielt die Theorie des stationären Problems eine wichtige Rolle. Speziell das Studium des Verhaltens der Lösungen der instationären Navier-Stokes-Gleichungen für $t \mapsto \infty$ und das Verstehen von Turbulenzen wäre ohne die Lösung des stationären Problems undenkbar. Dieses Problem hat die folgende Form:

$$\begin{aligned} -\Delta\hat{u} + \frac{\rho}{\eta}(\hat{u} \cdot \operatorname{grad})\hat{u} + \frac{1}{\eta}\operatorname{grad} p &= \tfrac{\rho}{\eta}\hat{f} && \text{in } \Omega, && (2.18) \\ \operatorname{div}\hat{u} &= 0 && \text{in } \Omega, && (2.19) \\ \hat{u} &= 0 && \text{auf } \Gamma && (2.20) \end{aligned}$$

Dabei ist $\hat{u}$ die Geschwindigkeit des Feldes, p der hydrostatische Druck, ρ die Dichte, η die Zähigkeit und $\hat{f}$ der Vektor der äußeren Kräfte.

Dieses Problem erregte die Aufmerksamkeit der Mathematiker seit der Arbeit von Leray [Le] 1934, der die Existenz einer Lösung mit endlichem Dirichlet-Integral des Problems (2.18) – (2.20) unter der zusätzlichen Bedingung $u(x) \to 0$

für $|x| \to 0$ (die sogenannte Leray-Lösung) im Fall des $\mathbb{R}^3$ zeigte. 1965 zeigte R. Finn [Fi] (für kleine äußere Kräfte) die Existenz von Lösungen mit einem räumlichen Fallen gegen unendlich der Ordnung $|x|^{-1}$ (sogenannte physikalisch sinnvolle Lösungen) ebenfalls für den Fall $n = 3$. Er benutzte dabei ein Banachsches Kontraktionsprinzip.

In den letzten 10 Jahren beschäftigten sich eine bedeutende Zahl von Mathematikern mit der Frage nach schwachen Lösungen bzw. Lösungen in $\mathcal{L}_p$- und Sobolev-Raum-Skalen (vgl. Novotny/Padula [NoPa] und Referenzen darin).

Die Lösung des Systems (2.18) – (2.20) ist um einiges schwerer als das Stokes-Problem, da über unbeschränkten Gebieten die Einbettungen der $\mathcal{W}_2^k$-Räume nicht kompakt sind und der Operator des Problems im allg. kein Fredholm-Operator ist [Tem]. Das Hauptproblem ist dabei, daß die Lösung dieses Problems sehr stark von der Lösung des zugehörigen Stokes-Problems abhängig ist. So untersuchten Borchers/Miyakawa [BorMiy] sowie Novotny/Padula [NoPa] (2.18) – (2.20) für den Fall eines Außengebietes eines beschränkten Gebietes. Unter den Bedingung, daß $\hat{f} \in \{f \in C^1(\overline{\Omega}) : \sup |x|^{\mu-1}|f| + \sup |x|^{\mu}|\nabla f| < \infty\}$ hinreichend klein ist, erhalten sie eine eindeutige Lösung u mit $|u| \leq C/|x|^{\mu-1}$ und $|\nabla u| \leq C/|x|^{\mu}$, wobei sich Novotny/Padula auf den Fall $n = 3$ beschränken. Da diese Arbeiten auf der Lösung des zugehörigen Stokes-Problems [GaSi], [KoSo2] basieren, war die Betrachtung allgemeiner unbeschränkter Gebiete nicht möglich. S. Bernstein [Ber] löste diese Gleichung im $\mathbb{R}^3$ unter Verwendung gewichteter Räume, wobei dadurch nur Gebiete behandelt werden konnten, die in mindestens einer Raumdimension beschränkt sind.

Wir wollen uns hier dem allgemeinen Fall eines unendlichen Gebietes mit Hilfe der Lösung des Stokes-Problems widmen. Dazu können wir nach [GSp1] das System (2.18)–(2.20) in der hyperkomplexen Form

$$-\Delta u + \frac{\rho}{\eta} M(u) + \frac{1}{\rho} Dp = 0 \qquad \text{in } \Omega, \tag{2.21}$$

$$\operatorname{Sc} Du = 0 \qquad \text{in } \Omega, \tag{2.22}$$

$$u = 0 \qquad \text{auf } \Gamma, \tag{2.23}$$

mit $M(u) = [\operatorname{Sc}(uD)]u - f$ schreiben.

Betrachten wir zunächst den physikalisch interessanteren Fall $n = 3$ bzw. $n = 4$. Hier haben wir den Vorteil, daß das Produkt zweier $\mathcal{W}_2^1(\Omega)$-Funktionen in $\mathcal{L}_2(\Omega)$ liegt.

Lemma 2.4.1 *Der Operator* $M : \overset{\circ}{\mathcal{W}}{}_2^1(\Omega) \mapsto \mathcal{W}_2^{-1}(\Omega)$ *ist ein stetiger Operator.*

Beweis: Betrachten wir zunächst den Operator $M^*(u) = [\operatorname{Sc}(uD)]u$. Dann gilt

$$M^*(u) = \sum_{i,j} u_i \partial_i u_j = \sum_{i,j} \partial_i (u_i u_j) - \sum_{i,j} (\partial_i u_i) u_j.$$

Damit haben wir unseren Operator M^* in zwei Operatoren $M_1(u) = \sum_{i,j} \partial_i(u_i u_j)$ und $M_2(u) = \sum_{i,j}(\partial_i u_i)u_j$ zerlegt, von denen $M_1 : \overset{\circ}{\mathcal{W}}{}_2^1(\Omega) \mapsto$

$\mathcal{W}_2^{-1}(\Omega)$ offensichtlich ein stetiger Operator ist, da das Produkt zweier $\mathcal{W}_2^1(\Omega)$-Funktionen in $\mathcal{L}_2(\Omega)$ liegt.

Nach [MazSha] §1.5. Satz 1 ist auch $M_2 : \overset{\circ}{\mathcal{W}_2^1}(\Omega) \mapsto \mathcal{W}_2^{-1}(\Omega)$ ein stetiger Operator, d.h. $M^* : \overset{\circ}{\mathcal{W}_2^1}(\Omega) \mapsto \mathcal{W}_2^{-1}(\Omega)$ ist ein stetiger Operator. Aus $M(u) = M^*(u) - f$ folgt sofort unsere Behauptung. Außerdem erhalten wir von [MazSha] die Normabschätzung

$$||M^*(u)||_{\mathcal{W}_2^{-1}(\Omega)} \leq C||u||^2_{\mathcal{W}_2^1(\Omega)}.$$

q.e.d.

Bemerkung 2.4.1 *Die Behandlung des nichtlinearen Operators M ist ein entscheidender Vorteil des hier dargestellten Verfahrens gegenüber dem üblichen Verfahren der Verwendung gewichteter Räume [Ber] bei der Untersuchung von Randwertproblemen partieller Differentialgleichungen in unbeschränkten Gebieten. Dort benötigt man nämlich für den Beweis der Stetigkeit des Operators M eine Äquivalenz des entsprechenden gewichteten Raumes mit dem Raum $\overset{\circ}{\mathcal{W}_2^1}(\Omega)$, die sich nur mit Hilfe der Poincaréschen Ungleichung beweisen läßt. Da diese jedoch nur in quasibeschränkten Gebieten gilt [A], d.h. in Gebieten, die in mindesten einer Raumdimension beschränkt sind, ist die Behandlung der stationären Navier-Stokes-Gleichung mit diesen Methoden auch nur in solchen Gebieten möglich.*

Bemerkung 2.4.2 *Im Gegensatz zu der vorliegenden Betrachtung von M als ein Operator von $\mathcal{W}_2^1(\Omega)$ nach $\mathcal{W}_2^{-1}(\Omega)$ untersuchen die Autoren in [GSp1] und [NoPa] den nichtlinearen Anteil $M(u)$ als eine Abbildung von $\mathcal{W}_2^1(\Omega)$ nach $\mathcal{L}_q(\Omega)$. An der letzten Arbeit sieht man sehr gut die Schwierigkeiten, die eine solche Betrachtung im Fall eines unbeschränkten Gebietes mit sich bringt. So führen Novotny/Padula [NoPa] Räume der Form*

$$X_2 = \{u \in \hat{H}^{1,q}(\Omega) \cap \mathcal{W}_q^k(\Omega), |x|u \in \mathcal{L}_\infty, |x|^2|\Delta u| \in \mathcal{L}_\infty(\Omega)\}$$

mit $3/2 < q < 3, k = 0, 1, \ldots$, und $\hat{H}^{1,q}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{|\cdot|_{1,q}}$, $|\cdot|_{1,q} = ||\nabla \cdot||_{\mathcal{L}_q(\Omega)}$, ein. Sie können dann beweisen, daß

$$|M(u)|_{-1,q} + ||M(u)||_{\mathcal{W}_q^k(\Omega)} \leq C(||u||^2_{X_2} + ||f||_{W,\mathcal{W}_q^k(\Omega)})$$

wobei $||f||_{W,\mathcal{W}_q^k(\Omega)} = ||W(|x|)f||_{\mathcal{L}_\infty(\Omega)} + ||f||_{\mathcal{W}_q^k(\Omega)}$ für eine gewisse stetige, positive, wachsende Funktion W über $[1,\infty)$ und $|\cdot|_{-1,q}$ die Norm des zu $\hat{H}^{1,q}(\Omega)$ dualen Raumes ist.

Analog zum Stokeschen Problem erlaubt jede Lösung von (2.21)–(2.23) die Darstellung

$$u = -\frac{\rho}{\eta}\tilde{T}\mathbf{Q}\tilde{T}M(u) - \frac{1}{\eta}\tilde{T}\mathbf{Q}p$$

und

$$\mathrm{Sc}\,\frac{\rho}{\eta}\mathbf{Q}\tilde{T}M(u)+\frac{1}{\eta}\mathrm{Sc}\,\mathbf{Q}p=0$$

für $f\in\mathcal{W}_2^{-1}(\Omega)$ und $p\in\mathcal{L}_2(\Omega,\mathbb{R})$. Diese Lösungsdarstellung liefert uns analog zum Stokes-Problem die Normabschätzung:

Lemma 2.4.2 *Sei $u\in\overset{\circ}{\mathcal{W}_2^1}(\Omega)\cap\ker\operatorname{div}$ und $p\in\mathcal{L}_2(\Omega,\mathbb{R})$ eine Lösung des Systems (2.21)–(2.23). Dann gilt*

$$||Du||_{\mathcal{L}_2(\Omega)}+\frac{1}{\eta}||\mathbf{Q}p||_{\mathcal{L}_2(\Omega)}\le\frac{\rho}{\eta}||\tilde{T}M(u)||_{\mathcal{L}_2(\Omega)}. \tag{2.24}$$

Damit können wir unser Problem (2.21)–(2.23) mittels des folgenden Iterationsverfahrens lösen:

$$u_n = -\tilde{T}\mathbf{Q}\tilde{T}M(u_{n-1})-\frac{1}{\eta}\tilde{T}\mathbf{Q}p_n \tag{2.25}$$

$$\frac{1}{\eta}\mathrm{Sc}\,\mathbf{Q}p_n = -\mathrm{Sc}\,\mathbf{Q}\tilde{T}M(u_{n-1}) \tag{2.26}$$

Dabei haben wir in jedem Schritt ein Stokes-Problem zu lösen, dessen eindeutige Lösbarkeit wir bereits im vorherigen Abschnitt bewiesen haben. Es bleibt für uns also nur noch die Konvergenz dieses Verfahrens zu zeigen. Betrachten wir dazu die folgende Abschätzung, die auf (2.24) basiert,

$$\begin{aligned}||u_n-u_{n-1}||_{\mathcal{W}_2^1(\Omega)} &\le ||\tilde{T}\mathbf{Q}\tilde{T}(M(u_{n-1})-M(u_{n-2}))||_{\mathcal{W}_2^1(\Omega)}\\ &\quad+\frac{1}{\eta}||\tilde{T}\mathbf{Q}(p_n-p_{n-1})||_{\mathcal{W}_2^1(\Omega)}\\ &\le 2C_1||M(u_{n-1})-M(u_{n-2})||_{\mathcal{W}_2^{-1}(\Omega)},\end{aligned}$$

wobei $C_1=\frac{\rho}{\eta}||\tilde{T}||_{[\mathcal{L}_2(\Omega)\cap\mathrm{im}\ \mathbf{Q},\mathcal{W}_2^1(\Omega)]}||\tilde{T}||_{[\mathcal{W}_2^{-1}(\Omega),\mathcal{L}_2(\Omega)]}$. Weiterhin gilt aufgrund von Lemma 2.4.1

$$||[\mathrm{Sc}\,(uD)]u||_{\mathcal{W}_2^{-1}(\Omega)}\le C_2||u||^2_{\mathcal{W}_2^1(\Omega)}.$$

Damit haben wir

$$\begin{aligned}&||M(u_{n-1})-M(u_{n-2})||_{\mathcal{W}_2^{-1}(\Omega)}\\ &=||[\mathrm{Sc}\,(u_{n-1}D)]u_{n-1}-[\mathrm{Sc}\,(u_{n-2}D)]u_{n-2}||_{\mathcal{W}_2^{-1}(\Omega)}\\ &\le||((u_{n-1}-u_{n-2})\cdot\operatorname{grad})u_{n-1}||_{\mathcal{W}_2^{-1}(\Omega)}\\ &+||(u_{n-2}\cdot\operatorname{grad})(u_{n-1}-u_{n-2})||_{\mathcal{W}_2^{-1}(\Omega)}\\ &\le C_2||u_{n-1}-u_{n-2}||_{\mathcal{W}_2^1(\Omega)}(||u_{n-1}||_{\mathcal{W}_2^1(\Omega)}+||u_{n-2}||_{\mathcal{W}_2^1(\Omega)}).\end{aligned}$$

Wenn wir nun $L_n=2C_1C_2(||u_{n-1}||_{\mathcal{W}_2^1(\Omega)}+||u_{n-2}||_{\mathcal{W}_2^1(\Omega)})$ setzen, erhalten wir

$$||u_n-u_{n-1}||_{\mathcal{W}_2^1(\Omega)}\le L_n||u_{n-1}-u_{n-2}||_{\mathcal{W}_2^1(\Omega)} \tag{2.27}$$

Weiterhin gilt:

$$
\begin{aligned}
||u_n||_{\mathcal{W}_2^1(\Omega)} &\leq ||\tilde{T}\mathbf{Q}\tilde{T}M(u_{n-1})||_{\mathcal{W}_2^1(\Omega)} + \frac{1}{\eta}||\tilde{T}\mathbf{Q}p_n||_{\mathcal{W}_2^1(\Omega)} \\
&\leq 2C_1C_2||u_{n-1}||^2_{\mathcal{W}_2^1(\Omega)} + 2C_1\frac{\rho}{\eta}||f||_{\mathcal{W}_2^{-1}(\Omega)}
\end{aligned}
$$

Um zu sichern, daß $||u_n||_{\mathcal{W}_2^1(\Omega)} \leq ||u_{n-1}||_{\mathcal{W}_2^1(\Omega)}$ ist, betrachten wir

$$
\begin{aligned}
& 2C_1C_2||u_{n-1}||^2_{\mathcal{W}_2^1(\Omega)} + 2C_1\frac{\rho}{\eta}||f||_{\mathcal{W}_2^{-1}(\Omega)} \leq ||u_{n-1}||_{\mathcal{W}_2^1(\Omega)} \\
\Leftrightarrow\quad & ||u_{n-1}||^2_{\mathcal{W}_2^1(\Omega)} - \frac{1}{2C_1C_2}||u_{n-1}||_{\mathcal{W}_2^1(\Omega)} + \frac{1}{C_2}\frac{\rho}{\eta}||f||_{\mathcal{W}_2^{-1}(\Omega)} \leq 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \left(||u_{n-1}||^2_{\mathcal{W}_2^1(\Omega)} - \frac{1}{4C_1C_2}\right)^2 \leq \frac{1}{16C_1^2C_2^2} - \frac{1}{C_2}\frac{\rho}{\eta}||f||_{\mathcal{W}_2^{-1}(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Ist nun $\frac{\rho}{\eta}||f||_{\mathcal{W}_2^{-1}(\Omega)} \leq (16C_1^2C_2)^{-1}$, dann gilt

$$
\left| ||u_{n-1}||_{\mathcal{W}_2^1(\Omega)} - \frac{1}{4C_1C_2} \right| \leq W
$$

mit $W = [(4C_1C_2)^{-2} - \rho||f||_{\mathcal{W}_2^{-1}(\Omega)}/(\eta C_2)]^{1/2}$. Daraus erhalten wir für $||u_{n-1}||_{\mathcal{W}_2^1(\Omega)}$ die Bedingung:

$$
(4C_1C_2)^{-1} - W \leq ||u_{n-1}||_{\mathcal{W}_2^1(\Omega)} \leq (4C_1C_2)^{-1} + W
$$

Ist nun $||u_{n-1}||_{\mathcal{W}_2^1(\Omega)} \leq (4C_1C_2)^{-1} - W$, so gilt

$$
||u_n||_{\mathcal{W}_2^1(\Omega)} \leq 2C_1C_2\left(\frac{1}{4C_1C_2} - W\right)^2 + 2C_1\frac{\rho}{\eta}||f||_{\mathcal{W}_2^{-1}(\Omega)} \leq \frac{1}{4C_1C_2} - W.
$$

Weiter erhalten wir aus

$$
||u_{n-2}||_{\mathcal{W}_2^1(\Omega)} \leq \frac{1}{4C_1C_2} - W \tag{2.28}
$$

und (2.27) die Abschätzung

$$
\begin{aligned}
||u_n - u_{n-1}||_{\mathcal{W}_2^1(\Omega)} &\leq 4C_1C_2\left(\frac{1}{4C_1C_2} - W\right)||u_{n-1} - u_{n-2}||_{\mathcal{W}_2^1(\Omega)} \\
&\leq (1 - 4C_1C_2W)||u_{n-1} - u_{n-2}||_{\mathcal{W}_2^1(\Omega)}
\end{aligned}
$$

und damit

$$
L_n \leq (1 - 4C_1C_2W) =: L < 1
$$

Wie man leicht sieht, läßt sich die Beziehung (2.28) auf

$$
||u_{n-2}||_{\mathcal{W}_2^1(\Omega)} < R := \frac{1}{4C_1C_2}
$$

verbessern. In diesem Fall gilt

$$||u_n - u_{n-1}||_{\mathcal{W}_2^1(\Omega)} \leq L_n ||u_{n-1} - u_{n-2}||_{\mathcal{W}_2^1(\Omega)}$$

mit $L_n < 1 - \epsilon$ für ein gewisses $\epsilon > 0$. Die Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes resultiert dann in folgenden Satz:

Satz 2.4.1 *Unser System (2.21)–(2.23) besitzt eine eindeutige Lösung* $(u,p) \in \overset{\circ}{\mathcal{W}_2^1}(\Omega) \cap \ker \operatorname{div} \times \mathcal{L}_2(\Omega)$ *falls* $f \in \mathcal{W}_2^{-1}(\Omega)$ *die Bedingung*

$$\frac{\rho}{\eta} ||f||_{\mathcal{W}_2^{-1}(\Omega)} \leq (16 C_1^2 C_2)^{-1}$$

mit $C_1 = \frac{\rho}{\eta} ||\tilde{T}||_{[\mathcal{L}_2(\Omega) \cap im\ \mathbf{Q}, \mathcal{W}_2^1(\Omega)]} ||\tilde{T}||_{[\mathcal{W}_2^{-1}(\Omega), \mathcal{L}_2(\Omega)]}$ *erfüllt. Für jede Funktion* $u_0 \in \overset{\circ}{\mathcal{W}_2^1}(\Omega) \cap \ker \operatorname{div}$ *mit*

$$||u_0||_{\mathcal{W}_2^1(\Omega)} \leq \min((2C_1C_2)^{-1}, 1/(4C_1C_2) + W),$$

$W = [(4C_1C_2)^{-2} - \rho ||f||_{\mathcal{W}_2^{-1}(\Omega)} / (\eta C_2)]^{1/2}$*, konvergiert unser Iterationsverfahren (2.25).*

Bemerkung 2.4.3 *Für den Fall eines quasibeschränkten Gebietes* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *erhielt S. Bernstein [Ber] für hinreichend kleines* $f \in \mathcal{L}_{6/5}(\Omega)$ *eine Lösung* $(u,p) \in \overset{\circ}{w}{}^1_{2,0}(\Omega) \cap \ker \operatorname{div}(\Omega) \times \mathcal{L}_2(\Omega)$*. Aufgrund der Poincaréschen Ungleichung und der Einbettung* $\mathcal{L}_{6/5}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{W}_2^{-1}(\Omega)$ *ist dieser Fall in unserem enthalten.*

Betrachten wir nun den Fall $n > 4$. Das Problem ist analog zum Fall $n = 3$ bzw. $n = 4$ wieder die Untersuchung des nichtlinearen Anteils $M(u)$. Dies stellt in diesem Fall jedoch ein großes Problem dar. Eine Herangehensweise wie im vorherigen Fall unter Benutzung von [MazSha] ist in diesem Fall nicht möglich, da für $n > 4$ das Produkt zweier $\mathcal{W}_2^1(\Omega)$-Funktionen nicht in $\mathcal{L}_2(\Omega)$ liegt.

Eine direkte Herangehensweise wie in [GSp1] oder [Ber] könnte einen Ausweg darstellen und liefert uns zunächst Aussagen zur Stetigkeit von $M(u)$ bzw. $M^*(u)$. Für diese Überlegungen benötigen wir erst einmal ein Ergebnis aus dem Sobolevschen Einbettungssatz [A]:

Lemma 2.4.3 *Die Einbettung*

$$\mathcal{W}_2^1(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}_q(\Omega)$$

ist für $2 \leq q \leq 2n/(n-2)$ *stetig.*

Unter Benutzung dieses Resultates läßt sich Lemma 4.96 aus [GSp2] auf unseren Fall verallgemeinern.

Lemma 2.4.4 *Sei* $u \in \overset{\circ}{\mathcal{W}_2^1}(\Omega)$, $1 < r \leq n/(n-1)$*. Dann gilt*

$$||M^*(u)||_{\mathcal{L}_r(\Omega)} = ||[\operatorname{Sc}(uD)]u||_{\mathcal{L}_r(\Omega)} \leq C ||u||^2_{\mathcal{W}_2^1(\Omega)}$$

Beweis: Unter Benutzung der Hölder-Ungleichung erhalten wir

$$\begin{aligned}
||M^*(u)||^r_{\mathcal{L}_r(\Omega)} &\leq \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega |u_i \partial_i u_j|^r d\Omega \\
&\leq \sum_{i,j=1}^{n} ||u_i||^r_{\mathcal{L}_q(\Omega)} ||\partial_i u_j||^r_{\mathcal{L}_2(\Omega)} \\
&\leq \sum_{i,j=1}^{n} \tilde{C}^r ||u_i||^r_{\mathcal{W}_2^1(\Omega)} ||u_j||^r_{\mathcal{W}_2^1(\Omega)} \\
&\leq n^2 \tilde{C}^r ||u||^{2r}_{\mathcal{W}_2^1(\Omega)},
\end{aligned}$$

wobei $2 < q < 2n/(n-2)$, $r = 2q/(q+2)$ und $\tilde{C}$ die Einbettungskonstante von $\mathcal{W}_2^1(\Omega)$ nach $\mathcal{L}_q(\Omega)$ ist.

q.e.d.

Wir erhalten also eine Aussage für die Stetigkeit unseres nichtlinearen Operators M^* und damit auch von M von $\overset{\circ}{\mathcal{W}_2^1}(\Omega)$ nach $\mathcal{L}_r(\Omega)$, $1 < r \leq n/(n-1)$.

Leider ist eine Weiterführung dieser Ideen nicht möglich. Das Hauptproblem ist dabei der $\tilde{T}$-Operator. Für die entsprechenden Normabschätzungen nach [GSp1] würden wir den $\tilde{T}$-Operator als einen beschränkten Operator von $\mathcal{L}_r(\Omega)$, $1 < r < n/(n-1)$ nach $\mathcal{L}_2(\Omega)$ benötigen. Eine Eigenschaft, die zumindest für den üblichen T-Operator für $n > 4$ in unbeschränkten Gebieten nicht gilt [St].

Für eine ähnliche Herangehensweise wie beim vorherigen Fall benötigen wir noch eine entsprechende Einbettung $\mathcal{L}_r(\Omega) \mapsto \mathcal{W}_2^{-1}(\Omega)$.

Aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\left| \int_\Omega \overline{f} u d\Omega \right| \leq ||f||_{\mathcal{L}_r(\Omega)} ||u||_{\mathcal{L}_q(\Omega)}$$

ergibt sich sofort für $u \in \overset{\circ}{\mathcal{W}_2^1}(\Omega)$ aufgrund von Lemma 2.4.3 die Einbettung

$$\mathcal{L}_r(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{W}_2^{-1}(\Omega)$$

für $2n/(n+2) \leq r \leq 2$.

Leider gilt $n/(n-1) < 2n/(n+2)$ für $n > 4$, so daß uns diese Einbettung nicht hilft.

Einen Ausweg aus diesem Dilemma könnte die Verallgemeinerung unserer Überlegungen zur direkten Zerlegung des $\mathcal{L}_r(\Omega)$, $1 < r < \infty$, im Fall des beschränkten Gebietes auf den hier vorliegenden Fall eines unbeschränkten Gebietes sein. Eine solche Verallgemeinerung würde uns von der Notwendigkeit des Festhaltens an den $\mathcal{W}_2^k(\Omega)$-Räumen befreien.

Allerdings sind die damit verbundenen Schwierigkeiten insbesondere aufgrund des Fehlens stetiger Einbettungen für die $\mathcal{L}_r$-Raum-Skala nicht zu unterschätzen.

Kapitel 3

Elliptische Randwertprobleme höherer Ordnung

Bis jetzt haben wir die hyperkomplexe Funktionentheorie nur zur Lösung von Randwertproblemen partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung verwendet. In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, daß wir mit ihrer Hilfe auch Randwertprobleme höherer Ordnung untersuchen können und unter Benutzung unserer Idee der Modifikation von Potentialen sogar über unbeschränkten Gebieten.

Wir werden diese Möglichkeiten anhand der wichtigsten partiellen Differentialgleichung höherer Ordnung, der biharmonischen Gleichung, diskutieren. Betrachten wir zunächst den Fall des beschränkten Gebietes.

3.1 Die biharmonische Gleichung über beschränkten Gebieten

Wir werden im weiteren ein System von biharmonischen Gleichungen, die durch Randbedingungen gekoppelt sind, mit Hilfe hyperkomplexer Ideen untersuchen. Zur Vorbereitung dieser Untersuchungen benötigen wir einen Satz über spezielle Erweiterungen von Vektorfunktionen, die auf dem Rand unseres Gebietes definiert sind.

Satz 3.1.1 *Sei Ω ein beschränktes Gebiet, $\Gamma = \partial\Omega$. Für jedes Paar von Funktionen $w_1 \in \mathcal{W}_2^{\frac{3}{2}}(\Gamma), w_2 \in \mathcal{W}_2^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ existiert eine Fortsetzung $h \in \mathcal{W}_2^2(\Omega)$ mit $h|_\Gamma = w_1$ und $Dh|_\Gamma = w_2$.*

Bemerkung 3.1.1 *Die Existenz dieser Fortsetzungen ist nicht offensichtlich, da unsere Randbedingungen normale und tangentiale Komponenten enthalten.*

Beweis: Für jede Funktion $u \in \mathcal{W}_2^2(\Omega)$ gelten die folgenden Greenschen Formeln

$$u(z) + K\Delta u(z) = \overline{V}_\alpha Du(z) + F_\Gamma u(z)$$

und

$$u(z)+K\Delta u(z)=V\frac{\partial u}{\partial\alpha}(z)-\frac{1}{(n-1)\omega}\int_\Gamma\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{1}{|\xi-z|^{n-1}}u(\xi)\,d\Gamma_\xi,$$

mit $Vf(x)=\frac{1}{(n-1)\omega}\int_\Gamma\frac{1}{|x-y|^{n-1}}f(y)\,d\Gamma_y$. Wenn wir diese beiden Gleichungen gleichsetzen, erhalten wir

$$\overline{V}_\alpha Du(z)+F_\Gamma u(z)=V\frac{\partial u}{\partial\alpha}(z)-\frac{1}{(n-1)\omega}\int_\Gamma\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{1}{|\xi-z|^{n-1}}u(\xi)\,d\Gamma_\xi.$$

Betrachten wir nun $z\mapsto z_0\in\Gamma$. Unter Ausnutzung der Formeln von Plemelj und Sokhotzki, der Sprungformel für das Doppelschichtpotential und der Stetigkeit des Einfachschichtpotentials beim Durchgang durch den Rand erhalten wir die Randintegralgleichung

$$\begin{aligned}\overline{V}_\alpha Du(z_0)+\frac{1}{2}u(z_0)+\frac{1}{2}S_\Gamma u(z_0) &= V\frac{\partial u}{\partial\alpha}(z_0)+\frac{1}{2}u(z_0)\\ &\quad -\frac{1}{(n-1)\omega}\int_\Gamma\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{1}{|\xi-z_0|^{n-1}}u(\xi)\,d\Gamma_\xi.\end{aligned}$$

Mit anderen Worten wir haben

$$V\frac{\partial u}{\partial\alpha}=g,$$

wenn wir $u=w_1$ und $Du=w_2$ auf dem Rand Γ setzen. Weiterhin bekommen wir mittels der bekannten Abbildungseigenschaften der obigen Randoperatoren $g\in\mathcal{W}_2^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$.

Für das weitere benötigen wir die Invertierbarkeit von V als einer Abbildung von $\mathcal{W}_2^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ nach $\mathcal{W}_2^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$. In [Cos] wurde bewiesen, daß

$$V:\mathcal{W}_2^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\mapsto\mathcal{W}_2^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

ein invertierbarer Operator ist. Außerdem haben wir das bekannte Ergebnis von Nečas [N], daß der Operator

$$N:u|_\Gamma\mapsto\frac{\partial u}{\partial\alpha}|_\Gamma$$

stetig zwischen $\mathcal{W}_2^s(\Gamma)\mapsto\mathcal{W}_2^{s-1}(\Gamma), s\geq\frac{1}{2}$, ist.

Betrachten wir nun das Problem $\Delta u=0, u|_\Gamma=g, g\in\mathcal{W}_2^s(\Gamma), s\geq\frac{1}{2}$. Mit Hilfe der üblichen Argumente der Potentialtheorie ist es leicht einzusehen, daß $u=Vv$ mit $v=\left[\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right]$ ($\left[\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right]$ bedeutet dabei der Sprung von $\frac{\partial u}{\partial\alpha}$). Das Resultat von Nečas liefert uns $v\in\mathcal{W}_2^{s-1}(\Gamma), s\geq\frac{1}{2}$, so daß wir die Invertierbarkeit von V als einer Abbildung zwischen $\mathcal{W}_2^{s-1}(\Gamma)\mapsto\mathcal{W}_2^s(\Gamma), s\geq\frac{1}{2}$, erhalten.

Benutzen wir nun obige Resultate, können wir $\frac{\partial u}{\partial\alpha}|_\Gamma$ berechnen. Wir weisen darauf hin, daß eine $\mathcal{W}_2^2(\Omega)$-Fortsetzung h mit $h|_\Gamma=u|_\Gamma=w_1$ existiert und $\frac{\partial h}{\partial\alpha}|_\Gamma=\frac{\partial u}{\partial\alpha}|_\Gamma$. Außerdem hat diese Fortsetzung h

$$h(z)+K\Delta h(z)=V\frac{\partial u}{\partial\alpha}(z)-\frac{1}{(n-1)\omega}\int_\Gamma\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{1}{|\xi-z|^{n-1}}u(\xi)\,d\Gamma_\xi$$

und

$$h(z) + K\Delta h(z) = \overline{V}_\alpha Dh(z) + F_\Gamma u(z).$$

zu erfüllen.

Unter Benutzung derselben Ideen wie oben haben wir

$$\begin{aligned}
\overline{V}_\alpha Dh(z_0) + \frac{1}{2}u(z_0) + \frac{1}{2}S_\Gamma u(z_0) &= V\frac{\partial u}{\partial \alpha}(z_0) + \frac{1}{2}u(z_0) \\
&\quad -\frac{1}{(n-1)\omega}\int_\Gamma \frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{1}{|\xi - z_0|^{n-1}}u(\xi)\, d\Gamma_\xi.
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\overline{V}_\alpha Dh = \overline{V}_\alpha Du.$$

Analog zum Beweis der Invertierbarkeit von V können wir beweisen, daß $\overline{V}_\alpha$ auch invertierbar ist. Hieraus erhalten wir leicht unsere Behauptung, da

$$Dh = Du = w_2 \quad \text{auf } \Gamma$$

gilt.

q.e.d.

Jede biharmonische Funktion besitzt die Integraldarstellung

$$\begin{aligned}
u(z) &= \frac{1}{(n-2)\omega}\int_\Gamma \frac{1}{|\xi - z|^{n-2}}\overline{\alpha}D(\Delta u)\, d\Gamma - \frac{1}{(n-2)\omega}\int_\Gamma \frac{\overline{(\xi - z)}}{|\xi - z|^{n-1}}\alpha\Delta u\, d\Gamma \\
&\quad -\overline{V}_\alpha Du(z) + F_\Gamma u(z).
\end{aligned}$$

Wenn wir die Spuren von u und Du betrachten, erhalten wir die folgenden Randintegralgleichungen ($z_0 \in \Gamma$)

$$\begin{aligned}
u(z_0) &= \frac{1}{(n-2)\omega}\int_\Gamma \frac{1}{|\xi - z_0|^{n-2}}\overline{\alpha}D(\Delta u)\, d\Gamma \\
&\quad -\frac{1}{(n-2)\omega}\int_\Gamma \frac{\overline{(\xi - z_0)}}{|\xi - z_0|^{n-1}}\alpha\Delta u\, d\Gamma - \overline{V}_\alpha Du(z_0) \\
&\quad +\frac{1}{2}u(z_0) + \frac{1}{2}S_\Gamma u(z_0), \qquad (3.1) \\
Du(z_0) &= -\frac{1}{(n-2)\omega}\int_\Gamma \frac{(\xi - z_0)}{|\xi - z_0|^{n-1}}\overline{\alpha}D(\Delta u)\, d\Gamma - V_\alpha \Delta u(z_0) \\
&\quad -\frac{1}{2}Du(z_0) - \frac{1}{2}\overline{S}_\Gamma Du(z_0).
\end{aligned}$$

Betrachten wir nun alle biharmonischen Funktionen u, die auch harmonisch sind. Ausgehend von (3.1) bedeutet das

$$\begin{aligned}
u(z_0) &= \overline{V}_\alpha Du(z_0) + \frac{1}{2}u(z_0) + \frac{1}{2}S_\Gamma u(z_0), \\
Du(z_0) &= \frac{1}{2}Du(z_0) + \frac{1}{2}\overline{S}_\Gamma Du(z_0).
\end{aligned}$$

oder mit anderen Worten

$$\begin{pmatrix} u \\ Du \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_\Gamma & \overline{V}_\alpha \\ 0 & \overline{P}_\Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ Du \end{pmatrix}.$$

Damit können wir die Projektionen

$$\begin{aligned} P_\Gamma^\Delta &= \begin{pmatrix} P_\Gamma & \overline{V}_\alpha \\ 0 & \overline{P}_\Gamma \end{pmatrix} \quad \text{und} \\ Q_\Gamma^\Delta &= \begin{pmatrix} Q_\Gamma & -\overline{V}_\alpha \\ 0 & \overline{Q}_\Gamma \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ableiten.

Führen wir nun den Randoperator

$$F_\Gamma^\Delta u = \begin{pmatrix} F_\Gamma u & \overline{V}_\alpha u \end{pmatrix}$$

ein, haben wir eine Borel-Pompeiu-ähnliche Formel für den Laplaceoperator in der Form

$$F_\Gamma^\Delta \mathrm{Tr}\, u = u - K\Delta u \tag{3.2}$$

mit der verallgemeinerten Spur $\mathrm{Tr}\, u = \begin{pmatrix} \mathrm{tr}\, u \\ \mathrm{tr}\, Du \end{pmatrix}$.

Schauen wir uns nun alle Lösungen des Problems

$$\begin{aligned} \Delta^2 u = 0 &\quad \text{in } \Omega \\ \mathrm{Tr}\, u = g &\quad \text{auf } \Gamma \end{aligned} \tag{3.3}$$

an.

Satz 3.1.2 *Sei $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, g \in \mathcal{W}_2^{k+7/2}(\Gamma) \times \mathcal{W}_2^{k+5/2}(\Gamma)$, dann hat das Problem (3.3) die Lösung $u \in \mathcal{W}_2^{k+4}(\Omega)$*

$$u = F_\Gamma^\Delta g + K\mathbf{P}^\Delta \Delta h,$$

wobei h eine beliebige $\mathcal{W}_2^{k+4}$-Fortsetzung von g ist.

Beweis: Da $g \in \mathcal{W}_2^{k+7/2}(\Gamma) \times \mathcal{W}_2^{k+5/2}(\Gamma)$ existiert ein $h \in \mathcal{W}_2^{k+4}(\Omega)$ mit $\mathrm{Tr}\, h = g$.

Sei nun $u = v + h$, dann hat unser Problem (3.3) die Form

$$\begin{aligned} \Delta^2 v = \Delta^2 h &\quad \text{in } \Omega \\ \mathrm{Tr}\, v = 0 &\quad \text{auf } \Gamma \end{aligned} \tag{3.4}$$

Offensichtlich hat (3.4) eine Lösung $v \in \mathcal{W}_2^{k+4}(\Omega)$ in der Form

$$v = -K\mathbf{Q}^\Delta K \Delta^2 h.$$

Unter Benutzung von (3.2) erhalten wir

$$\begin{aligned} v &= -K\mathbf{Q}^{\Delta}\Delta h + K\mathbf{Q}^{\Delta}F_{\Gamma}^{\Delta}\Delta h \\ &= -K\Delta h + K\mathbf{P}^{\Delta}\Delta h = -h + F_{\Gamma}^{\Delta}h + K\mathbf{P}^{\Delta}\Delta h. \end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$v + h = F_{\Gamma}^{\Delta}g + K\mathbf{P}^{\Delta}\Delta h$$

und damit

$$u = F_{\Gamma}^{\Delta}g + K\mathbf{P}^{\Delta}\Delta h.$$

q.e.d.

Folgerung 3.1.1 *Das Problem*

$$\begin{aligned} \Delta^2 u &= f \quad \mathit{in}\,\Omega \\ \mathit{Tr}\,u &= g \quad \mathit{auf}\,\Gamma \end{aligned} \tag{3.5}$$

mit $f \in \mathcal{W}_2^k(\Omega)$ *und* $g \in \mathcal{W}_2^{k+7/2}(\Gamma) \times \mathcal{W}_2^{k+5/2}(\Gamma), k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, *besitzt eine Lösung mit der Darstellung*

$$u = F_{\Gamma}^{\Delta}g + K\mathbf{P}^{\Delta}\Delta h + K\mathbf{Q}^{\Delta}Kf,$$

wobei h *eine* $\mathcal{W}_2^{k+4}$*-Fortsetzung von* g *ist.*

Folgerung 3.1.2 *Angenommen es gelte* $f \in \mathcal{W}_2^k(\Omega)$ *und* $g \in \mathcal{W}_2^{k+7/2}(\Gamma) \times \mathcal{W}_2^{k+5/2}(\Gamma), k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, *dann ist das Randwertproblem (3.5) eindeutig lösbar.*

Beweis: Betrachten wir das Randwertproblem $\{\Delta^2 u = 0, \mathrm{Tr}\ u = 0\}$. Ausgehend von unserer Borel-Pompeiu-ähnlichen Formel für den Laplace-Operator und der Tatsache, daß $\Delta u \in \mathrm{im}\ \mathbf{Q}^{\Delta}$, erhalten wir $u = K\Delta u = K\mathbf{Q}^{\Delta}\Delta u$. Unter Benutzung, daß Δu harmonisch ist, folgt $u = K\Delta u = K\mathbf{P}^{\Delta}\Delta u$. Wir haben nun $\mathbf{P}^{\Delta}\Delta u = \mathbf{Q}^{\Delta}\Delta u$, woraus $\Delta u = 0$ und damit konsequenterweise $u = 0$ folgt.

q.e.d.

Satz 3.1.3 *Nehmen wir an* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. *Dann ist der Operator*

$$\mathit{Tr}\,KF_{\Gamma}^{\Delta} : \mathcal{W}_2^{k+3/2}(\Gamma) \times \mathcal{W}_2^{k+1/2}(\Gamma) \cap \mathit{im}\,P_{\Gamma}^{\Delta} \mapsto \mathcal{W}_2^{k+7/2}(\Gamma) \times \mathcal{W}_2^{k+5/2}(\Gamma) \cap \mathit{im}\,Q_{\Gamma}^{\Delta}$$

ein Isomorphismus.

Der Beweis dieses Satzes nutzt die gleichen Ideen wie der Beweis von Lemma 2.2.1. Konsequenterweise erhalten wir analog zu diesem Fall eine algebraische Darstellung des Projektors $\mathbf{P}^{\Delta}$.

Folgerung 3.1.3 *Der Orthoprojektor* $\mathbf{P}^{\Delta}$ *besitzt die algebraische Darstellung*

$$\mathbf{P}^{\Delta}f = F_{\Gamma}^{\Delta}(\mathit{Tr}\,KF_{\Gamma}^{\Delta})^{-1}\,\mathit{Tr}Kf$$

für jede Funktion $f \in \mathcal{W}_2^k(\Omega), k \in \mathbb{N}$.

3.2 Die biharmonische Gleichung über unbeschränkten Gebieten

Werfen wir noch einen speziellen Blick auf den Fall des unbeschränkten Gebietes. Wie beim Fall partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung ist auch hier wieder das Problem der Unbeschränktheit der Rechtsinverse, in diesem Fall des Volumenpotentials. Nur das hier das Problem etwas schwieriger ist als beim T-Operator. Das Fallen des Kernes gegen unendlich ist von der Ordnung $n-2$. Wenn wir dieselbe allgemeine Idee der Nutzung von Korrekturtermen wie im Fall des T-Operators anwenden wollen, brauchen wir einen Korrekturterm, der harmonisch ist und der uns ein um zwei Ordnungen besseres Fallen des korrigierten Kernes gegenüber dem üblichen Kern liefert. Eine Möglichkeit ist das Subtrahieren endlich vieler Terme der Taylorentwicklung der Fundamentallösung [Ka]. Die damit verbundenen Schwierigkeiten sind allerdings nicht zu unterschätzen.

Eine andere Möglichkeit besteht darin, die Probleme mit dem Volumenpotential komplett zu vergessen. Wir können nämlich die Faktorisierung des Laplace-Operators durch den Dirac-Operator benutzen. Das bedeutet, daß wir den Operator $\tilde{T}\tilde{T}$ als Rechtsinverse von Δ benutzen können.

Auf den ersten Blick klingt das etwas paradox. Wir nutzen zwei Integraloperatoren anstatt von einem?

Aber wir sollten uns erinnern, daß wir nahezu alles über $\tilde{T}$ wissen, z.B. Abbildungseigenschaften und Randverhalten, und das ist alles, was wir benötigen, zumindest für den analytischen Teil.

Wir wollen dies an zwei Beispielen illustrieren, die in vorzüglicher Weise zeigen, daß wir mit unserer Methode die Lösungen solcher Probleme geradezu nach dem Baukastenprinzip analog zur Lösung der Laplacegleichung (2.8) gewinnen können.

Satz 3.2.1 *Sei $f \in \mathcal{W}_2^k(\Omega)$, $w_1 \in \mathcal{W}_2^{k+7/2}(\Gamma)$ und $w_2 \in \mathcal{W}_2^{k+3/2}(\Gamma)$, $k \geq 0$, dann hat das Problem*

$$\begin{aligned} \Delta^2 u &= f \quad \textit{in } \Omega \\ u &= w_1 \quad \textit{auf } \Gamma \\ \Delta u &= w_2 \quad \textit{auf } \Gamma \end{aligned} \tag{3.6}$$

eine eindeutige Lösung in der Form

$$\begin{aligned} u \quad = \quad & \tilde{F}_\Gamma w_1 + \tilde{T}\mathbf{P}Dh + \tilde{T}\mathbf{Q}\tilde{T}\tilde{F}_\Gamma w_2 \\ & -\tilde{T}\mathbf{Q}\tilde{T}\tilde{T}\mathbf{P}D\Delta h - \tilde{T}\mathbf{Q}\tilde{T}\tilde{T}\mathbf{Q}\tilde{T}f, \end{aligned}$$

wobei h eine $\mathcal{W}_2^{k+4}$-Erweiterung von w_1 und w_2 ist.

Beweis: Betrachten wir zunächst das Problem

$$\begin{aligned} \Delta^2 u &= f \quad \text{in } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{auf } \Gamma \\ \Delta u &= 0 \quad \text{auf } \Gamma \end{aligned} \tag{3.7}$$

Wie wir leicht sehen, ist

$$u = \tilde{T}\mathbf{Q}\tilde{T}\tilde{T}\mathbf{Q}\tilde{T}f$$

eine Lösung dieses Randwertproblems, denn $\Delta^2 u = DDDDu = f$. Speziell für die Randwerte gilt, da $\mathbf{Q}g$ für jedes $g \in \mathcal{L}_2(\Omega)$ immer die Darstellung Dv mit $v \in \overset{\circ}{\mathcal{W}}{}_2^1(\Omega)$ gestattet,

$$\operatorname{tr} u = \operatorname{tr} \tilde{T}Dv = \operatorname{tr} v - \operatorname{tr} \tilde{F}_\Gamma v = 0$$

bzw.

$$\operatorname{tr} \Delta u = \operatorname{tr} \Delta\tilde{T}\mathbf{Q}\tilde{T}\tilde{T}Dv = -\operatorname{tr} DD\tilde{T}\mathbf{Q}\tilde{T}\tilde{T}Dv = \operatorname{tr} \tilde{T}Dv = \operatorname{tr} v - \operatorname{tr} \tilde{F}_\Gamma v = 0,$$

da jedesmal $\operatorname{tr} v = 0$ gilt.

Dieses Resultat können wir nun zur Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned} \Delta^2 u &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ u &= w_1 \quad \text{auf } \Gamma \\ \Delta u &= w_2 \quad \text{auf } \Gamma \end{aligned} \tag{3.8}$$

benutzen, wobei sich dann die allgemeine Lösung aus den Lösungen beider Randwertprobleme zusammensetzt. Dazu benötigen wir jedoch die Existenz einer Fortsetzung h unserer Randdaten w_1 und w_2. Der Beweis dieser ist jedoch ganz einfach. Wir setzen w_2 nach innen als $\mathcal{W}_2^2$-Funktion fort und haben damit das Problem unserer Fortsetzung auf das Problem der Lösung der Laplacegleichung mit Dirichlet-Daten (2.8) zurückgeführt, woraus die Existenz (und sogar eine Darstellung) von h folgt.

Setzen wir nun $u = v + h$, erhalten wir das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \Delta^2 v &= -\Delta^2 h \quad \text{in } \Omega \\ v &= 0 \quad \text{auf } \Gamma \\ \Delta v &= 0 \quad \text{auf } \Gamma, \end{aligned}$$

das die Lösung

$$v = -\tilde{T}\mathbf{Q}\tilde{T}\tilde{T}\mathbf{Q}\tilde{T}\Delta^2 h$$

besitzt. Nun gilt

$$v = -\tilde{T}\mathbf{Q}\tilde{T}\tilde{T}\mathbf{Q}\tilde{T}\Delta^2 h = -\tilde{T}\mathbf{Q}\tilde{T}\tilde{T}\mathbf{Q}\tilde{T}DDDDh$$

Die Anwendung der Borel-Pompeiu-Fomel $\tilde{T}D = I - \tilde{F}_\Gamma$ liefert

$$v = -\tilde{T}\mathbf{Q}\tilde{T}\tilde{T}\mathbf{Q}DDDh + \tilde{T}\mathbf{Q}\tilde{T}\tilde{T}\mathbf{Q}\tilde{F}_\Gamma DDDh.$$

Da $\mathbf{Q}\tilde{F}_\Gamma f = 0$ ($\tilde{F}_\Gamma f \subset \ker D$) für alle $f \in \mathcal{W}_2^{1/2}(\Gamma)$ und $\mathbf{Q} = I - \mathbf{P}$ erhalten wir

$$v = -\tilde{T}\mathbf{Q}\tilde{T}\tilde{T}DDDh + \tilde{T}\mathbf{Q}\tilde{T}\tilde{T}\mathbf{P}DDDh$$

bzw.

$$v = -\tilde{T}\mathbf{Q}\tilde{T}\tilde{T}DDDh - \tilde{T}\mathbf{Q}\tilde{T}\tilde{T}\mathbf{P}D\Delta h.$$

Eine erneute Anwendung der Borel-Pompeiu-Formel liefert

$$v = -\tilde{T}\mathbf{Q}\tilde{T}DDh - \tilde{T}\mathbf{Q}\tilde{T}\tilde{F}_\Gamma\Delta h - \tilde{T}\mathbf{Q}\tilde{T}\tilde{T}\mathbf{P}D\Delta h.$$

Im ersten Term können wir wieder die Borel-Pompeiu-Formel anwenden:

$$v = -\tilde{T}\mathbf{Q}Dh + \tilde{T}\mathbf{Q}\tilde{F}_\Gamma Dh - \tilde{T}\mathbf{Q}\tilde{T}\tilde{F}_\Gamma\Delta h - \tilde{T}\mathbf{Q}\tilde{T}\tilde{T}\mathbf{P}D\Delta h$$

und erhalten mit derselben Argumentation wie am Anfang unserer Rechnung

$$v = -h + \tilde{F}_\Gamma h + \tilde{T}\mathbf{P}Dh - \tilde{T}\mathbf{Q}\tilde{T}\tilde{F}_\Gamma\Delta h - \tilde{T}\mathbf{Q}\tilde{T}\tilde{T}\mathbf{P}D\Delta h.$$

Unter Verwendung, daß $\operatorname{tr} h = w_1$ und $\operatorname{tr}\Delta h = w_2$, bekommen wir

$$v + h = \tilde{F}_\Gamma w_1 + \tilde{T}\mathbf{P}Dh - \tilde{T}\mathbf{Q}\tilde{T}\tilde{F}_\Gamma w_2 - \tilde{T}\mathbf{Q}\tilde{T}\tilde{T}\mathbf{P}D\Delta h.$$

Damit erhalten wir für die Lösung unseres Randwertproblems (3.8) bezüglich u

$$u = v + h = \tilde{F}_\Gamma w_1 + \tilde{T}\mathbf{P}Dh - \tilde{T}\mathbf{Q}\tilde{T}\tilde{F}_\Gamma w_2 - \tilde{T}\mathbf{Q}\tilde{T}\tilde{T}\mathbf{P}D\Delta h.$$

Die Lösung unseres allgemeinen Randwertproblems (3.6) ergibt sich nun aus den Lösungen unserer Randwertprobleme (3.7) und (3.8).

q.e.d.

Wir haben diese Rechnung so ausführlich gemacht, um zu zeigen, daß in dieser Theorie die Lösung solcher Probleme fast wie ein Algorithmus abläuft. Wir gehen vom inhomogenen Randwertproblem mit homogenen Randdaten aus und basteln uns eine Lösung unter Verwendung von $\tilde{T}$ und unserer Projektoren $\mathbf{Q}$ bzw. $\mathbf{Q}^\Delta$, wobei wir die Darstellung der entsprechenden Teilräume im $\mathbf{Q}$ und im $\mathbf{Q}^\Delta$ als $D(\overset{\circ}{\mathcal{W}}{}_2^1(\Omega))$ bzw. $\Delta(\overset{\circ}{\mathcal{W}}{}_2^2(\Omega))$ zur Erfüllung der Randbedingungen verwenden. Dies passiert im allgemeinen auf eine geradlinige Art und Weise. Wir nehmen unsere Differentialgleichung, z.B. $\Delta^2 u = f$, stellen sie mit Hilfe unseres Operators D dar ($DDDDu = f$) und konstruieren eine Lösung unter Verwendung von $\tilde{T}$ ($u = \tilde{T}\tilde{T}\tilde{T}\tilde{T}f$). Danach fügen wir an den Stellen die Projektoren $\mathbf{Q}$ bzw. $\mathbf{Q}^\Delta$ ein, an denen wir die homogenen Randbedingungen erfüllt haben wollen (unter Berücksichtigung der Borel-Pompeiu-Formel), so z.B. bei $\operatorname{tr} u = 0$, $\operatorname{tr}\Delta u = -DDu$ in der Form $u = \tilde{T}\mathbf{Q}\tilde{T}\tilde{T}\mathbf{Q}\tilde{T}f$.

Dann führen wir das homogene Randwertproblem mit inhomogenen Randbedingungen unter Verwendung einer Fortsetzung h der Randdaten auf das inhomogene Randwertproblem mit homogenen Randdaten zurück. Dies ist zugleich die eigentliche Schwierigkeit in diesem „Algorithmus“ (die andere, daß Basteln der Lösung des inhomogenen Problems erfordert eigentlich nur etwas Kreativität). Wir müssen uns den entsprechenden Fortsetzungssatz entweder besorgen oder beweisen, was im Einzelfall extrem schwierig sein kann. Der Rest ist dann nichts weiter als eine wiederholte Anwendung der Borel-Pompeiu-Formel und der entsprechenden Eigenschaften der Projektoren, wobei wir die Lösung des allgemeinen Randwertproblems am Ende aus der Lösung des homogenen und des inhomogenen Randwertproblems zusammensetzen.

Wir wollen dies noch einmal an folgendem Beispiel illustrieren, wobei wir Ω als Außengebiet eines beschränkten Gebietes wählen, um zu zeigen, daß auch dieser in der Praxis so wichtige Fall mit dieser Methode leicht zu behandeln ist. Weiter wählen wir als Randdaten $\operatorname{tr} u$ und $\operatorname{tr} Du$. Dadurch läßt sich sehr schön die Wirkung des Projektors $\mathbf{Q}^\Delta$ zeigen.

Satz 3.2.2 *Sei Ω das Außengebiet eines beschränkten Gebietes G.*
Wenn $f \in \mathcal{W}_2^k(\Omega)$, $w_1 \in \mathcal{W}_2^{k+7/2}(\Gamma)$ und $w_2 \in \mathcal{W}_2^{k+5/2}(\Gamma)$, $k \geq 0$, dann hat das Problem

$$\begin{aligned} \Delta^2 u &= f \quad &&\textit{in } \Omega \\ u &= w_1 \quad &&\textit{auf } \Gamma \\ Du &= w_2 \quad &&\textit{auf } \Gamma \end{aligned}$$

eine eindeutige Lösung

$$u = \tilde{F}_\Gamma w_1 + \tilde{T}\tilde{F}_\Gamma w_2 - \tilde{T}\tilde{T}\mathbf{P}^\Delta \Delta h + \tilde{T}\tilde{T}\mathbf{Q}^\Delta \tilde{T}\tilde{T} f,$$

wobei h eine $\mathcal{W}_2^{k+4}$-Erweiterung von w_1 und w_2 ist.

Beweis: Wie bereits oben beschrieben, betrachten wir zunächst das inhomogene Problem mit homogenen Randdaten

$$\begin{aligned} \Delta^2 u &= f \quad &&\text{in } \Omega \\ u &= 0 \quad &&\text{auf } \Gamma \\ Du &= 0 \quad &&\text{auf } \Gamma. \end{aligned}$$

Dann erhalten wir eine Lösung in der Form

$$u = \tilde{T}\tilde{T}\mathbf{Q}^\Delta \tilde{T}\tilde{T} f.$$

Wir gehen dabei wieder von der Gleichung $u = \tilde{T}\tilde{T}\tilde{T}\tilde{T} f$ aus und fügen zur Erfüllung der Randbedingungen den Projektor $\mathbf{Q}^\Delta$ ein. Da für jede Funktion $g \in \mathcal{L}_2(\Omega)$ $\mathbf{Q}^\Delta g$ eine Darstellung $\Delta v = -DDv$ mit $v \in \overset{\circ}{\mathcal{W}_2^2}(\Omega)$ besitzt, gilt

$$\operatorname{tr} u = \operatorname{tr} \tilde{T}\tilde{T}\Delta v = -\operatorname{tr} \tilde{T}\tilde{T} DDv.$$

Eine zweimalige Anwendung der Borel-Pompeiu-Formel liefert

$$\operatorname{tr} u = -\operatorname{tr} v + \operatorname{tr} \tilde{F}_\Gamma v + \operatorname{tr} \tilde{T}\tilde{F}_\Gamma Dv = 0,$$

da $\operatorname{tr} v = 0$ und $\operatorname{tr} Dv = 0$. Damit können wir wieder das homogene Randwertproblem mit inhomogenen Randwerten

$$\begin{aligned} \Delta^2 u &= 0 \quad &&\text{in } \Omega \\ u &= w_1 \quad &&\text{auf } \Gamma \\ Du &= w_2 \quad &&\text{auf } \Gamma \end{aligned}$$

betrachten. Nach Satz 3.1.1 existiert eine Fortsetzung $\hat{h}$ der Randdaten w_1 und w_2 ins beschränkte Gebiet, die wir nach [T] als $\mathcal{W}_2^2$-Funktion stetig auf den ganzen Raum fortsetzen können. Setzen wir nun $h = \hat{h}|_\Omega$ haben wir eine Funktion in $\mathcal{W}_2^2(\Omega)$, für die gilt $\operatorname{tr} h = w_1$ und $\operatorname{tr} Dh = w_2$, d.h. eine Fortsetzung.

Wir setzen nun wieder $u = v + h$ und erhalten das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \Delta^2 v &= -\Delta^2 h \quad \text{in } \Omega \\ v &= 0 \quad \text{auf } \Gamma \\ Dv &= 0 \quad \text{auf } \Gamma \end{aligned}$$

mit der Lösung

$$v = -\tilde{T}\tilde{T}\mathbf{Q}^\Delta \tilde{T}\tilde{T}\Delta^2 h$$

Eine zweimalige Anwendung der Borel-Pompeiu-Formel liefert nun

$$v = -\tilde{T}\tilde{T}\mathbf{Q}^\Delta DDh + \tilde{T}\tilde{T}\mathbf{Q}^\Delta \tilde{F}_\Gamma DDh + \tilde{T}\tilde{T}\mathbf{Q}^\Delta \tilde{T}\tilde{F}_\Gamma DDDh$$

Da $\mathbf{Q}^\Delta \tilde{F}_\Gamma = 0$, $\mathbf{Q}^\Delta \tilde{T}\tilde{F}_\Gamma = 0$ ($\tilde{T}\tilde{F}_\Gamma f \subset \ker \Delta \quad \forall f \in \mathcal{W}_2^{1/2}(\Gamma)$) und $\mathbf{Q}^\Delta = I - \mathbf{P}^\Delta$, folgt

$$v = -\tilde{T}\tilde{T}DDh + \tilde{T}\tilde{T}\mathbf{P}^\Delta DDh$$

und damit

$$v = -h + \tilde{F}_\Gamma w_1 + \tilde{T}\tilde{F}_\Gamma w_2 - \tilde{T}\tilde{T}\mathbf{P}^\Delta \Delta h.$$

Wir erhalten als Lösung für u

$$u = v + h = \tilde{F}_\Gamma w_1 + \tilde{T}\tilde{F}_\Gamma w_2 - \tilde{T}\tilde{T}\mathbf{P}^\Delta \Delta h.$$

Die Lösung unseres allgemeinen Randwertproblems läßt sich nun wieder aus den Lösungen des inhomogenen und des homogenen Randwertproblems zusammensetzen.

q.e.d.

Wie wir sehen, erfolgt die Lösung solcher Randwertprobleme wirklich nach dem „Baukastenprinzip“.

Wie schon angesprochen, läßt sich diese Methode ganz analog auch auf andere Randwertaufgaben partieller Differentialgleichungen höherer Ordnung anwenden. Das ermöglicht uns sogar eine eine Behandlung klassischer Probleme der mathematischen Physik auf eine völlig neue Art und Weise. So läßt sich z.B. das Stokes-System nach B. Klein Obbink [KO] in der Form $DDDu = 0$ schreiben, die wir mit unserer Methode in derselben Weise wie die biharmonische Gleichung behandeln können.

Kapitel 4

Nichtlineare partielle Differentialgleichungen erster Ordnung

In den sechziger Jahren gewann die komplexe Funktionentheorie vor allem durch die Arbeiten von I.N. Vekua [Vek] eine große Bedeutung für die Lösung partieller Differentialgleichungen, insbesondere für die Lösung von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Mit Hilfe funktionalanalytischer Methoden ist es möglich, viele Resultate der klassischen Funktionentheorie auf Funktionenklassen zu verallgemeinern, die wesentlich mehr als nur die holomorphen Funktionen enthalten. Der Ausgangspunkt für solche Methoden ist oftmals die Transformation von partiellen Differentialgleichungen zu Integralgleichungen unter Benutzung von singulären Integraloperatoren (vgl. [Vek], [Tut1], [Tut2], [BeGi], [KraKre]). Besondere Bedeutung haben dabei der komplexe T-Operator

$$T_\Omega h(z) = -\frac{1}{\pi}\int\int_\Omega \frac{h(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta$$

und der stark singuläre komplexe Π-Operator

$$\Pi_\Omega h(z) \;=\; \frac{\partial}{\partial z} T_\Omega h(z) \;=\; -\frac{1}{\pi}\iint_\Omega \frac{h(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\xi d\eta.$$

In der mehrdimensionalen komplexen Analysis gehen jedoch viele dieser Methoden und Konzepte, wie z.B. die Nutzung der Theorie verallgemeinert analytischer Funktionen zur Lösung linearer partieller Differentialgleichungssysteme erster Ordnung oder die von W. Tutschke entwickelten Methoden zur Lösung nichtlinearer partieller Differentialgleichungen, verloren. Hauptursache hierfür ist die Tatsache, daß es in der Theorie mehrerer komplexer Variablen keine „sinnvollen" Analoga der partiellen komplexen Differentialoperatoren $\frac{\partial}{\partial z}$ und $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ gibt. Mit „sinnvoll" meinen wir, daß sie die Eigenschaft der partiellen komplexen

Differentialoperatoren widerspiegeln, den Laplaceoperator Δ in der Form

$$\frac{\partial}{\partial z} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{4}\Delta$$

faktorisieren zu können. Aber wie wir bereits gesehen haben, existieren diese Analoga in der hyperkomplexen Analysis, so daß durchaus die Möglichkeit besteht, diese Methoden unter Berücksichtigung der uns bereits bekannten Probleme zu verallgemeinern. Einen ersten Schritt zur Verbindung der hyperkomplexen Funktionentheorie mit den funktionalanalytischen Methoden in Vekua's Theorie der verallgemeinert analytischen Funktionen tat B. Goldschmidt 1978 [Gold]. Er ging dabei nicht über den Fall linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten im Hauptteil hinaus. Der Hauptgrund dafür war, daß ihm nur einer der beiden von Vekua benutzten Integraloperatoren, der T-Operator, zur Verfügung stand [Sp2]. Zwar hatte sich schon W.I. Schevtschenko [Sh1] Anfang der sechziger Jahre mit Verallgemeinerungen des komplexen Π-Operators und ihrer Anwendung auf die Lösung von verallgemeinerten Beltramigleichungen im Falle der Quaternionenanalysis beschäftigt, aber diese Arbeiten gerieten weitestgehend in Vergessenheit. W. Sprößig fand dann 1979 eine Verallgemeinerung des Π-Operators im allgemeinen Fall cliffordwertiger Funktionen, da er aber keine Anwendungen für diesen Operator angab und die Methoden zur Lösung von partiellen Differentialgleichungen unter alleiniger Nutzung des T-Operators ebenfalls für den hyperkomplexen Fall in den Kinderschuhen steckten, geriet dieser Zugang ebenfalls in Vergessenheit. Erst zu Beginn der neunziger Jahre begann sich das Interesse an einer Verallgemeinerung des komplexen Π-Operators hauptsächlich durch die Arbeiten von H. Malonek, M.V. Shapiro und N.L. Vasilevski zu regen. Zum einen ergab sich durch das Konzept der hyperkomplexen Differenzierbarkeit von H. Malonek [Mal] die Möglichkeit, auch nichtlineare partielle Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten zu betrachten. Zum anderen führten die Arbeiten von M.V. Shapiro/N.L. Vasilevski zum Interesse an der Darstellung des hyperkomplexen Bergman-Operators durch Verallgemeinerungen des komplexen Π-Operators. Diese Darstellung ist vor allem wichtig für das Studium verschiedener Algebren, die den Bergman-Operator bzw. den Toeplitz-Bergman-Operator enthalten. In diesem Abschnitt wollen wir uns im weiteren mit der Lösung von nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung beschäftigen, wobei wir uns dabei an den Arbeiten von I.N. Vekua und W. Tutschke zum komplexen Fall orientieren wollen. Wie wir bereits angesprochen haben, ist dafür die hyperkomplexe Verallgemeinerung des komplexen Π-Operators eine Grundvoraussetzung.

4.1 Hyperkomplexe Verallgemeinerungen des komplexen Π-Operators

Unsere erste Aufgabe bei der Entwicklung von Methoden zur Lösung nichtlinearer partieller Differentialgleichungen ist also die hyperkomplexe Verallgemeinerung des komplexen Π-Operators. Obwohl dies auf den ersten Blick keine große Sache zu sein scheint, zeigt sich doch gerade hier mit aller Macht, daß der hyperkomplexe Fall nicht nur eine einfache Verallgemeinerung des komplexen Falles ist. Wir werden im weiteren sehen, daß die hyperkomplexe Funktionentheorie nicht nur völlig neue Effekte und Resultate hervorbringt, sondern sogar bekannte Effekte der komplexen Funktionentheorie negiert.

Das erste Problem ergibt sich bereits bei einem ersten Versuch der Übertragung der Definition aus dem Komplexen. Dort ist der Π-Operator bekanntermassen als die Ableitung des T-Operators definiert. Die Definition eines hyperkomplexen Ableitungsbegriffes ist aber neben der Verallgemeinerung des Begriffes der konformen Abbildung eines der schwierigsten Probleme der hyperkomplexen Funktionentheorie. Lange Zeit existierten nur die negativen Resultate zur Definition des Ableitungsbegriffes über den Grenzwert des Differenzenquotienten im Quaternionenfall von A. S. Mehlikzon [Me] und A. Sudbery [Sud]. Erst H. Malonek [Mal] konnte 1986 einen sinnvollen Ableitungsbegriff einführen.

Er führte dazu im $\mathbb{R}^{n+1}$ eine neue Basis $z_i, i = 0, \dots, n$ mit $z_0 = x_0$ und $z_i = x_i \mathbf{e}_0 - x_0 \mathbf{e}_i, i = 1, \dots, n$, ein. Ausgehend von dieser neuen hyperkomplexen Struktur des $\mathbb{R}^{n+1}$ läßt sich das totale Differential

$$df = dx_0 \frac{\partial f}{\partial x_0} + dx_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + dx_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

einer Funktion f in der Form

$$df = dz_0 Df + dz_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + dz_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

schreiben. Wenn wir uns daran erinnern, daß im Komplexen die Formel

$$df = dz \frac{\partial f}{\partial z} + d\bar{z} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \tag{4.1}$$

gilt, wobei dann $\frac{df}{dz} = \frac{\partial f}{\partial z}$ für $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ gilt, können wir obige Formel zur Definition einer hyperkomplexen Ableitung verwenden. Wir erhalten als Ergebnis, daß eine Funktion genau dann differenzierbar ist, wenn sie monogen ist. Die Ableitung von f ist dann

$$f'(z) = \nabla_{\vec{x}} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

Einen anderen Weg beschritten A. Sudbery [Sud] bzw. I.M. Mitelman und M.V. Shapiro [MitS].

Durch die Einführung von Differentialformen dritter Stufe als quaternionische Analoga der komplexen partiellen Differentiale dz und $d\bar{z}$ gelang es ihnen, die Beziehung (4.1) auf den Fall der Quaternionenanalysis zu verallgemeinern. Dadurch können sie als Ableitung einer monogenen Funktion f die Funktion $\overline{D}f$ auffassen.

Diesen Zugang bauten K. Gürlebeck und H. Malonek zu einem Ableitungsbegriff im Falle der Cliffordanalysis aus [GMal].

Wie wir gesehen haben, gibt es in der hyperkomplexen Analysis keinen einheitlichen Ableitungsbegriff. Demzufolge gibt es zunächst auch nicht den Π-Operator, sondern eine Vielzahl von Operatoren, die man alle mehr oder weniger als Π-Operatoren bezeichnen könnte. Der Ableitungsbegriff von H. Malonek führt uns z.B. zu der folgenden Definition [MalMü]. Dabei soll im folgenden Ω immer ein beschränktes Gebiet bezeichen, dessen Rand hinreichend glatt ist.

Definition 4.1.1 *Sei $f \in \mathcal{C}^{0,\beta}(\Omega), 0 < \beta \leq 1$, dann heißt der Operator $\vec{\Pi}$, definiert durch*

$$\vec{\Pi} f = \nabla_{\vec{x}} T f,$$

verallgemeinerter Π-Operator im Sinne von H. Malonek.

In dieser Definition wenden wir den Operator $\nabla_{\vec{y}}$ komponentenweise auf unseren T-Operator an, so daß wir einen Vektor von cliffordwertigen Funktionen erhalten. Das bedeutet, daß der $\vec{\Pi}$-Operator eigentlich ein Vektor $\vec{\Pi} = (\Pi_1, \ldots, \Pi_n)$ von Operatoren $\Pi_k : \mathcal{C}^{0,\beta}(\Omega) \mapsto \mathcal{C}^{0,\beta}(\Omega), 0 < \beta \leq 1$, ist.

Als Integraldarstellung erhalten wir

$$\vec{\Pi} f = (\Pi_1 f, \ldots, \Pi_n f) = \frac{1}{\omega} \int_{\Omega} \vec{K}(x,y) f(y)\, d\Omega + \frac{\vec{i}}{n+1} f$$

mit

$$\begin{aligned} \vec{K}(x,y) &= \nabla_{\vec{x}} \left(\frac{\overline{(x-y)}}{|x-y|^{n+1}} \right) \\ &= \frac{1}{2|x-y|^{n+3}} ((1-n)\vec{i}(x-y) + (1+n)\overline{(x-y)}\,\vec{i}\,)\overline{(x-y)} \end{aligned}$$

und $\vec{i} = (\bar{\mathbf{e}}_1, \ldots, \bar{\mathbf{e}}_n)$.

Wie wir aus dieser Integraldarstellung erkennen, handelt es sich bei den Π_k und damit auch bei $\vec{\Pi}$ um stark singuläre Operatoren vom Michlin-Calderon-Zygmund-Typ. Das bedeutet aufgrund des berühmten Satzes von Calderon und Zygmund [MiP], daß

$$\vec{\Pi} : \mathcal{W}_p^k(\Omega) \mapsto (\mathcal{W}_p^k(\Omega))^n$$

für $1 < p < \infty$ und $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ein beschränkter Operator ist.

Als Folgerung aus diesem Satz erhalten wir auch die folgende Normabschätzung [K1].

Satz 4.1.1 *Für den Operator $\vec{\Pi} : \mathcal{W}_2^k(\Omega) \mapsto \mathcal{W}_2^k(\Omega)$ gilt*

$$||\vec{\Pi}||_{[\mathcal{W}_2^k(\Omega), \mathcal{W}_2^k(\Omega)]} \leq C \frac{(n+2)\sqrt{n c_4}}{\sqrt[4]{\omega}},$$

wobei

$$c_4 = \left(\int_S |\ln \frac{1}{|\cos\gamma|} + \frac{i\pi}{2} sign \cos\gamma\,|^4 dS_{\theta'} \right)^{\frac{1}{2}}$$

ist (vgl [MiP]).

Eine andere Möglichkeit der Verallgemeinerung gab W. Sprößig an [Sp1]. Seine Definition nutzt die Möglichkeit, den $\overline{D}$-Operator als Ableitungsoperator auffassen zu können.

Definition 4.1.2 *Der Operator* Π, *definiert durch*

$$\Pi f = \overline{D}Tf$$

heißt verallgemeinerter Π-*Operator im Sinne von W. Sprößig.*

Der wichtigste Vorteil dieser Definition ist, daß wir einen Operator haben, der den Raum $\mathcal{C}^{0,\beta}(\Omega), 0 < \beta \leq 1$, in den Raum $\mathcal{C}^{0,\beta}(\Omega), 0 < \beta \leq 1$, abbildet [Sp1].

Die erste Frage, die sich auch hier bei der Betrachtung des Operators ergibt, ist die Frage nach der Integraldarstellung dieses Operators. Unter Anwendung von [MiP] Kap.IX §7 erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z_k} \int_\Omega \frac{\overline{(\xi - z)}}{|\xi - z|^{n+1}} f(\xi)\, d\Omega_\xi \\
&= \int_\Omega \frac{-\bar{\mathbf{e}}_k + (n+1)(\xi_k - z_k)\frac{\overline{(\xi-z)}}{|\xi-z|^2}}{|\xi - z|^{n+1}} f(\xi)\, d\Omega_\xi + \omega \frac{\bar{\mathbf{e}}_k}{n+1} f(z),
\end{aligned}$$

wobei

$$\frac{\partial}{\partial z_k}\left[\frac{\overline{(\xi - z)}}{|\xi - z|^{n+1}}\right] = \frac{-\bar{\mathbf{e}}_k + (n+1)(\xi_k - z_k)\frac{\overline{(\xi-z)}}{|\xi-z|^2}}{|\xi - z|^{n+1}}$$

und

$$\int_S \frac{\overline{(\xi - z)}}{|\xi - z|} \cos(r, z_k)\, dS = \omega \frac{\bar{\mathbf{e}}_k}{n+1}$$

ist. Damit gewinnen wir unter Anwendung der Definitionsgleichung für unseren Operator D die Integraldarstellung

$$\begin{aligned}
\Pi f &= \sum_{k=0}^{n} \bar{\mathbf{e}}_k \left(-\frac{1}{\omega}\right)\left[\int_\Omega \frac{-\bar{\mathbf{e}}_k + (n+1)(\xi_k - z_k)\frac{\overline{(\xi-z)}}{|\xi-z|^2}}{|\xi - z|^{n+1}} f(\xi)\, d\Omega_\xi \right.\\
&\quad \left. + \omega \frac{\bar{\mathbf{e}}_k}{n+1} f(z)\right] \\
&= -\frac{1}{\omega}\int_\Omega \frac{(n-1) + (n+1)\frac{\overline{(\xi-z)}^2}{|\xi-z|^2}}{|\xi - z|^{n+1}} f(\xi)\, d\Omega_\xi + \frac{1-n}{1+n} f(z).
\end{aligned}$$

Diese Darstellung liefert uns zwei interessante Fakten. Zum einen ist auch dieser Π-Operator ein Operator vom Michlin-Calderon-Zygmund-Typ und damit ein beschränkter Operator von $\mathcal{W}_p^k(\Omega)$ nach $\mathcal{W}_p^k(\Omega)$ $(1 < p < \infty, k \in \mathbb{N} \cup \{0\})$. Zum anderen ist hier im Gegensatz zum komplexen Fall der integralfreie Term der Darstellung nicht Null. Dies ist, wie wir noch sehen werden, der Grund für einige völlig neue Effekte, die in der hyperkomplexen Analysis auftreten.

Doch zunächst noch einige Beziehungen zwischen dem Π-Operator und partiellen Ableitungen des T-Operators, die uns später zum Beweis einiger interessanter Eigenschaften des Π-Operators dienlich sein werden:

Lemma 4.1.1 *Es gelten für* $f \in \mathcal{W}_p^k(\Omega), 1 < p < \infty, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, *folgende Beziehungen*

$$\Pi f = -f + 2\frac{\partial}{\partial z_0} T f, \tag{4.2}$$

$$\Pi f = f + 2\sum_{k=1}^{n} \bar{\mathbf{e}}_k \frac{\partial}{\partial z_k} T f. \tag{4.3}$$

Beweis: zu (4.2): $\Pi f = \overline{D} T f = (-D + 2\frac{\partial}{\partial z_0}) T f = -f + 2\frac{\partial}{\partial z_0} T f$

zu (4.3): $\Pi f = \overline{D} T f = (D + 2\sum\limits_{k=1}^{n} \bar{\mathbf{e}}_k \frac{\partial}{\partial z_k}) T f = f + 2\sum\limits_{k=1}^{n} \bar{\mathbf{e}}_k \frac{\partial}{\partial z_k} T f$

q.e.d.

Weiterhin erhalten wir für den konjugierten Operator $\overline{\Pi}$ die Beziehung:

Satz 4.1.2 *Für* $\overline{\Pi}$ *gilt die Formel*

$$\overline{\Pi} f = D\overline{T} f \qquad f \in \mathcal{C}^{0,\beta}(\overline{\Omega}), 0 < \beta < 1.$$

Beweis: Aus der Darstellungsformel für den Π-Operator ersehen wir, daß im Falle $f \in \mathcal{C}^{0,\beta}(\overline{\Omega}), 0 < \beta < 1$, für den konjugierten Operator gilt

$$\overline{\Pi} f = -\frac{1}{\omega} \int_\Omega \frac{(n-1) + (n+1)\frac{(\xi - z)^2}{|\xi - z|^2}}{|\xi - z|^{n+1}} f(\xi)\, d\Omega_\xi + \frac{1-n}{1+n} f(z).$$

Wenden wir nun den Cauchy-Riemann-Operator auf $\overline{T}$ an, so erhalten wir

$$\begin{aligned} D\overline{T} f &= \sum_{k=0}^{n} \mathbf{e}_k \left(-\frac{1}{\omega}\right) \int_\Omega \frac{-\mathbf{e}_k + (n+1)(\xi_k - z_k)\frac{(\xi - z)}{|\xi - z|^2}}{|\xi - z|^{n+1}} f(\xi)\, d\Omega_\xi \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathbf{e}_k^2}{n+1} f(z) \\ &= -\frac{1}{\omega} \int_\Omega \frac{(n-1) + (n+1)\frac{(\xi - z)^2}{|\xi - z|^2}}{|\xi - z|^{n+1}} f(\xi)\, d\Omega_\xi + \frac{1-n}{1+n} f(z), \end{aligned}$$

woraus folgt

$$\overline{\Pi} f = D\overline{T} f.$$

q.e.d.

Betrachten wir nun zunächst den Fall des $\Pi_{\mathbb{R}^{n+1}}$-Operators, d.h. des Π-Operators für $\Omega = \mathbb{R}^{n+1}$. Seien dazu $u', v' \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$. Offensichtlich gilt $(Du', v') = -(u', \overline{D}v')$ und $(Tu', v') = -(u', \overline{T}v')$, wenn wir uns erinnern, daß

$$(u', v') = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \overline{u}' v' d\mathbb{R}^{n+1}.$$

Sehen wir uns nun das innere Produkt

$$(\Pi u', \Pi v')$$

an, das gleichbedeutend mit

$$(\overline{D}Tu', \overline{D}Tv') = (u', \overline{T}D\overline{D}Tv')$$

ist. Aufgrund der Beziehung $D\overline{D} = \Delta = \overline{D}D$ und der Tatsache, daß T ein rechtsinverser Operator zu D ist, erhalten wir

$$(\Pi u', \Pi v') = (u', v').$$

Seien jetzt $u, v \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^{n+1})$. Da der Raum $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ dicht in $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^{n+1})$ liegt, existieren Folgen u'_n und v'_n mit $u'_n, v'_n \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ und $u'_n \to u, v'_n \to v$ für $n \to \infty$. Da der Π-Operator ein beschränkter Operator ist, gilt damit auch $\Pi u'_n \to \Pi u$ und $\Pi v'_n \to \Pi v$. Nutzen wir jetzt noch die Stetigkeit des inneren Produktes aus, erhalten wir

$$(\Pi u, \Pi v) = (u, v).$$

Wir hatten u und v beliebig gewählt, d.h. wir können auch $v = u$ setzen und erhalten

$$(\Pi u, \Pi u) = (u, u)$$

bzw.

$$||\Pi u||_{\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n)} = ||u||_{\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n)}$$

oder mit anderen Worten der Π-Operator ist eine Isometrie über $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^{n+1})$.

Kehren wir jetzt wieder zum Fall des Π-Operators über $\mathcal{W}_p^k(\Omega), 1 < p < \infty$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, zurück. Eine interessante Beziehung erhalten wir, wenn wir den Operator D auf Πf anwenden, natürlich vorausgesetzt unsere Funktion f liegt in $\mathcal{W}_p^1(\Omega), 1 < p < \infty$. Es ist leicht zu sehen, daß

$$D\Pi f = D\overline{D}Tf = \overline{D}DTf = \overline{D}f.$$

Was bedeutet diese Beziehung? Nun, nehmen wir zunächst mal an, daß f im Kern von $\overline{D}$ liegt. Dann gilt

$$D\Pi f = 0,$$

d.h. Πf liegt im Kern von D (ist links-monogen). Nehmen wir weiterhin an $g \in \overset{\circ}{\mathcal{W}}{}_p^1(\Omega), 1 < p < \infty$, dann gilt

$$\Pi D g = \overline{D} T D g = \overline{D}(g - F_\Gamma g) = \overline{D} g,$$

da die Randwerte von g Null sind. Unter Benutzung unserer direkten Zerlegungen

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_p(\Omega) &= \ker D(\Omega) \cap \mathcal{L}_p(\Omega) \dot{+} \overline{D}(\overset{\circ}{\mathcal{W}}{}_p^1(\Omega)), \\
\mathcal{L}_p(\Omega) &= \ker \overline{D}(\Omega) \cap \mathcal{L}_p(\Omega) \dot{+} D(\overset{\circ}{\mathcal{W}}{}_p^1(\Omega))
\end{aligned}$$

und der daraus resultierenden Projektoren $\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{P}^{\overline{D}}$ und $\mathbf{Q}^{\overline{D}}$ können wir aus den obigen Beziehungen den folgenden Satz gewinnen:

Satz 4.1.3 *Sei $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, 1 < p < \infty$. Dann besitzen die Operatoren Π und $\overline{\Pi}$ die folgenden Abbildungseigenschaften*

$$\begin{aligned}
\Pi &: \ im\ \mathbf{P}^{\overline{D}} \mapsto im\ \mathbf{P}, \\
\Pi &: \ im\ \mathbf{Q}^{\overline{D}} \mapsto im\ \mathbf{Q}, \\
\overline{\Pi} &: \ im\ \mathbf{P} \mapsto im\ \mathbf{P}^{\overline{D}}, \\
\overline{\Pi} &: \ im\ \mathbf{Q} \mapsto im\ \mathbf{Q}^{\overline{D}}.
\end{aligned}$$

Dieser Satz bedeutet nichts anderes, als daß der Π- und der $\overline{\Pi}$-Operator unsere Zerlegungen in einem gewissen Sinne bewahren, oder genauer gesagt, die Zerlegung bzgl. D wird transformiert in die Zerlegung bzgl. $\overline{D}$ und umgekehrt. Außerdem wirft dieser Satz die Frage nach der Invertierbarkeit des Π-Operators auf. Wie wir gesehen haben, bilden der Π-Operator und der $\overline{\Pi}$-Operator die entsprechenden Teilräume genau entgegengesetzt ab.

Könnte es nun nicht sein, daß der zu Π konjugierte Operator $\overline{\Pi}$ gleichzeitig der inverse Operator ist? Zumal W. Sprößig gezeigt hat, daß der Π-Operator über dem ganzen Raum $\mathbb{R}^{n+1}$ ein unitärer Operator ist [Sp1] und dort natürlich $\overline{\Pi} = \Pi^*$ (Π^* ist der zu Π adjungierte Operator) gilt [GK1]. Betrachten wir dazu die Ausdrücke $\overline{\Pi}\Pi f$ bzw. $\Pi\overline{\Pi} f$ für $f \in \mathcal{L}_p(\Omega), 1 < p < \infty$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\overline{\Pi}\Pi f &= D\overline{T}\,\overline{D} T f = D(I - \overline{F}_\Gamma) T f = I - D\overline{F}_\Gamma T f, \\
\Pi\overline{\Pi} f &= \overline{D} T D \overline{T} f = \overline{D}(I - F_\Gamma)\overline{T} f = I - \overline{D} F_\Gamma \overline{T} f.
\end{aligned}$$

Es gilt also $\overline{\Pi}\Pi f = f$ ($\Pi\overline{\Pi} f = f$) genau dann, wenn $D\overline{F}_\Gamma T f = 0$ ($\overline{D} F_\Gamma \overline{T} f = 0$) ist. $Tf = 0$ würde gleichzeitig $f = 0$ bedeuten, da T nur einen trivialen Kern besitzt. Nach Satz 1.4.5 wissen wir, daß $\mathrm{tr}\, T f = 0$ genau dann gilt, wenn $f \in \mathrm{im}\ \mathbf{Q}^{\overline{D}}$ gilt. In diesem Fall erhalten wir also $D\overline{F}_\Gamma T f = 0$ oder mit anderen Worten

$$\overline{\Pi}\Pi f = f \qquad f \in \mathrm{im}\ \mathbf{Q}^{\overline{D}}.$$

Analog läßt sich ebenso beweisen

$$\Pi\overline{\Pi}f = f \qquad f \in \text{im }\mathbf{Q}.$$

Im weiteren wollen wir zeigen, daß diese Bedingungen sowohl notwendig als auch hinreichend für die einseitige Invertierbarkeit von Π sind.

Den ersten Ansatzpunkt hierfür bildet der folgende Satz:

Satz 4.1.4 *Sei $f \in \mathcal{L}_p(\Omega), 1 < p < \infty$, dann gilt*

$$\overline{\Pi}f = 0 \textit{ in co } \Omega \Longleftrightarrow f \in \textit{im } \mathbf{Q}.$$

Dieser Satz hat interessante Konsequenzen auch für numerische Anwendungen. Er besagt nämlich, daß der $\overline{\Pi}$-Operator auf im $\mathbf{Q}$ bzw. analog der Π-Operator auf im $\mathbf{Q}^{\overline{D}}$ Funktionen mit beschränktem Träger wieder in Funktionen mit beschränktem Träger abbildet, eine für einen Integraloperator doch etwas überraschende Eigenschaft.

Beweis: Sei $\overline{\Pi}f = 0$ in co $\overline{\Omega}$. Dann haben wir $D\overline{T}f = 0$ in co $\overline{\Omega}$. Unter Benutzung unserer Beziehungen zwischen $\overline{\Pi}$ und den partiellen Ableitungen von $\overline{T}$ bedeutet dies $2\frac{\partial}{\partial x_0}\overline{T}f - \overline{D}\,\overline{T}f = 0$ in co $\overline{\Omega}$. Daraus folgt sofort $\frac{\partial}{\partial x_0}\overline{T}f = 0$ in co $\overline{\Omega}$, da $\overline{D}\,\overline{T}f = 0$ in co $\overline{\Omega}$, d.h. $\overline{T}f$ liegt im Kern von $\overline{D}$ im Außengebiet. Das bedeutet aber nichts weiter, als daß $\overline{T}f = (\overline{T}f)(x_1, ..., x_n)$ nur von den Variablen x_1 bis x_n abhängt. Nun gilt auch $\lim\limits_{|x|\to\infty}(\overline{T}f)(x) = 0$. Wählen wir uns nun einen beliebigen Punkt $z \in \overline{\Omega}$ und gehen ausgehend von z auf der Geraden $x_1 = z_1, x_2 = z_2, \ldots, x_n = z_n$ gegen unendlich, d.h. wir halten x_1 bis x_n fest und lassen x_0 gegen unendlich laufen. Dann muß $\overline{T}f(x)$ auf der gesamten Geraden konstant sein, da $\overline{T}f(x)$ nicht von x_0 abhängt. Gleichzeitig ist aber der Grenzwert von $\overline{T}f$ Null. Damit ist $\overline{T}f(x) = 0$ auf der gesamten Geraden, insbesondere aber in unserem beliebig gewählten Punkt z. Aufgrund des Identitätssatzes für monogene Funktionen folgt

$$\overline{T}f = 0 \text{ in co } \overline{\Omega}$$

Betrachten wir nun die Spur, erhalten wir

$$\operatorname{tr}\overline{T}f = 0$$

und dies ist nach Satz 1.4.5 äquivalent zu

$$f \in \text{ im }\mathbf{Q}.$$

Auf der anderen Seite können wir für $f \in$ im $\mathbf{Q}$ wie folgt schlußfolgern:

$$f \in \text{ im }\mathbf{Q} \Rightarrow \operatorname{tr}\overline{T}f = 0 \Rightarrow \overline{T}f = 0 \text{ in co } \overline{\Omega}$$

da $\overline{T}f$ im Kern von $\overline{D}$ in co $\overline{\Omega}$ liegt und somit dort auch eine harmonische Funktion ist. Damit gilt auch

$$D\overline{T}f = 0 \text{ in co } \overline{\Omega}.$$

q.e.d.

Dieselbe Idee können wir auch für den Π-Operator selbst benutzen und erhalten

Folgerung 4.1.1

$$\Pi f = 0 \textit{ in co } \overline{\Omega} \iff f \in \textit{ im } \mathbf{Q}^{\overline{D}}$$

Nun können wir das gleiche auch für $\Pi\overline{\Pi}$ und $\overline{\Pi}\Pi$ tun.

Folgerung 4.1.2 *Unter den obigen Bedingungen haben wir*

$$\Pi\overline{\Pi}f = 0 \textit{ in co } \overline{\Omega} \iff f \in \textit{ im } \mathbf{Q} \dot{+} \ker \overline{\Pi}$$

Beweis: Aus der vorhergehenden Folgerung erhalten wir

$$\Pi\overline{\Pi}f = 0 \text{ in co } \overline{\Omega} \iff \overline{\Pi}f \in \text{ im } \mathbf{Q}^{\overline{D}}. \tag{4.4}$$

Zerlegen wir nun $f = \mathbf{P}f + \mathbf{Q}f$ und wenden $\overline{\Pi}$ auf $\mathbf{P}f + \mathbf{Q}f$, dann gilt nach unseren Abbildungseigenschaften des $\overline{\Pi}$-Operators $\overline{\Pi}f \in \text{im } \mathbf{Q}^{\overline{D}}$ genau dann, wenn $\mathbf{P}f \in \ker \overline{\Pi}$.

q.e.d.

Es stellt sich hier nun die Frage, ob der Π-Operator einen nichttrivialen Kern hat. Interessanterweise liefert dazu die allgemeinen Theorie singulärer Integraloperatoren keine Aussage und selbst im Komplexen ist diese Frage eine lange Zeit unbeantwortet geblieben. Das ist umso erstaunlicher, als daß der Π-Operator, nachdem er von I.N. Vekua in die komplexe Analysis eingeführt wurde, auf breitester Ebene benutzt wurde. Andererseits muß natürlich gesagt werden, daß das Problem auch nicht so leicht in den Griff zu kriegen ist. Wie schon erwähnt, helfen einem allgemeine Sätze und Überlegungen aus der Theorie der Integraloperatoren nicht weiter. Das ist auch der Grund, warum erst K. Gürlebeck und H. Malonek 1998 das Problem entgültig [GMal] lösen konnten und zwar im allgemeinen Fall der hyperkomplexen Analysis für die $n+1$-dimensionale Kugel. Das Resultat ist überraschenderweise so, daß der komplexe Π-Operator ganz im $\mathbf{P}$ als Kern besitzt, während seine hyperkomplexe Verallgemeinerung nur einen trivialen Kern hat. Dies zeigt eigentlich gleich zwei Dinge auf. Zum einen liefert die Untersuchung der hyperkomplexen Funktionentheorie durchaus auch neue Resultate im komplexen Fall, und zum anderen ist die hyperkomplexe Funktionentheorie in all ihren Spielarten und Betrachtungsweisen doch mehr als nur eine (auf die eine oder andere Weise) „räumlich verallgemeinerte“ komplexe Funktionentheorie. Nebenbei gesagt, liefert das Ergebnis über den Kern des Π-Operators eine ganze Reihe von überraschenden Nebenresultaten. Eines davon ist eine Aussage über die von S. Bergman gefundene Beziehung zwischen dem komplexen Π-Operator und dem Bergman-Operator $\mathbf{P}$ [Berg]. Für den Raum $\mathcal{L}_2(G)$, $G \subset \mathbb{C}$, gilt

$$\mathbf{P} = I - \overline{\Pi}\Pi + C,$$

wobei C ein kompakter Operator ist. Diese Beziehung findet breiteste Verwendung in der komplexen Analysis, so z.B. beim Studium verschiedener Algebren, die durch den Bergman- bzw. den Bergman-Töplitz-Operator erzeugt werden. Wie wir noch sehen werden, läßt sich ausgehend vom obigen Resultat über den Kern des komplexen Π-Operators für den Fall der Einheitskugel im $\mathbb{R}^2$ zeigen, daß C der Nulloperator ist.

Zunächst bedeutet dieses Resultat aber, daß

$$\Pi\overline{\Pi}f = 0 \text{ in co } \overline{\Omega} \iff f \in \text{ im } \mathbf{Q}$$

gilt.

In Analogie dazu haben wir:

Folgerung 4.1.3

$$\overline{\Pi}\Pi f = 0 \textit{ in co } \overline{\Omega} \iff f \in \textit{ im } \mathbf{Q}^{\overline{D}} \tag{4.5}$$

Dies versetzt uns in die Lage, ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Existenz eines rechtsinversen Operators zum Π-Operator zu beweisen.

Satz 4.1.5 *Es gilt*

$$\Pi\overline{\Pi}f = f \textit{ in } \Omega \iff f \in \textit{ im } \mathbf{Q} \tag{4.6}$$

Beweis: Wie wir bereits wissen, gilt $\Pi\overline{\Pi}f = f$ für $f \in \text{im } \mathbf{Q}$. Nehmen wir nun an, daß $\Pi\overline{\Pi}f = f$ in Ω. Jede Funktion aus f können wir in $f = f_1 + f_2$ mit $f_1 \in \text{ im } \mathbf{Q}$ und $f_2 \in \text{ im } \mathbf{P}$ zerlegen. Da $\Pi\overline{\Pi}f_1 = f_1$ in Ω ist, müssen wir nur den Fall $f_2 \in \text{im } \mathbf{P}$ untersuchen. Nach (4.4) gilt $\Pi\overline{\Pi}f_2 \neq 0$ in co $\overline{\Omega}$. Daraus folgt

$$||\Pi_\Omega\overline{\Pi}_\Omega f_2||_{L_2(\Omega)} < ||\Pi_\Omega\overline{\Pi}_\Omega f_2||_{L_2(\mathbf{R}^{n+1})} = ||\Pi_\Omega \text{proj}_\Omega \overline{\Pi}_\Omega f_2||_{L_2(\mathbf{R}^{n+1})} =$$

$$= ||\Pi_{\mathbf{R}^{n+1}} \text{proj}_\Omega \overline{\Pi}_\Omega f_2||_{L_2(\mathbf{R}^{n+1})} = ||\overline{\Pi}_\Omega f_2||_{L_2(\Omega)} \leq ||\overline{\Pi}_\Omega f_2||_{L_2(\mathbf{R}^{n+1})} = ||f_2||_{L_2(\Omega)}$$

$$\Longrightarrow ||\Pi\overline{\Pi}f_2||_{L_2(\Omega)} < ||f_2||_{L_2(\Omega)},$$

dabei ist $\text{proj}_\Omega \overline{\Pi}_\Omega f_2$ die Einschränkung von $\overline{\Pi}_\Omega f_2$ auf das Gebiet Ω. Damit ist $\Pi\overline{\Pi}f_2 = f_2$ in Ω unmöglich, womit wir unsere Behauptung bewiesen haben.

q.e.d.

Auf dieselbe Weise können wir zeigen:

Satz 4.1.6

$$\overline{\Pi}\Pi f = f \textit{ in } \Omega \iff f \in \textit{ im } \mathbf{Q}^{\overline{D}}$$

Beide Sätze zusammen ergeben die zweiseitige Invertierbarkeit von Π.

Satz 4.1.7 *Der Operator*

$$\Pi \ : \ im\ \mathbf{Q}^D \cap \ im\ \mathbf{Q}^{\overline{D}} \longrightarrow \ im\ \mathbf{Q}^D \cap \ im\ \mathbf{Q}^{\overline{D}}$$

ist invertierbar.

Unsere Untersuchungen zur Invertierbarkeit des Π-Operators liefern auch ein verblüffendes Ergebnis zur $\mathcal{L}_2$-Norm des Π-Operators. Da der Π-Operator über dem ganzen Raum eine Isometrie ist, gilt

$$||\Pi u||_{\mathcal{L}_2(\Omega)} \leq ||u||_{\mathcal{L}_2(\Omega)}.$$

Ansonsten hätten wir die Funktion mit 0 auf den ganzen $\mathbb{R}^{n+1}$ fortsetzen können. Wählen wir nun speziell $u \in$ im $\mathbf{Q}$, und bezeichnen wir mit $\tilde{u}$ die Funktion, die über Ω gleich u und ansonsten identisch 0 ist. Dann haben wir

$$||\Pi u||_{\mathcal{L}_2(\Omega)} = ||\Pi_{\mathbb{R}^{n+1}} \tilde{u}||_{\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^{n+1})} = ||\tilde{u}||_{\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^{n+1})} = ||u||_{\mathcal{L}_2(\Omega)}.$$

Dies resultiert im folgenden Satz:

Satz 4.1.8 *Für den* Π*-Operator gilt:*

$$||\Pi||_{\mathcal{L}_2(\Omega)} = 1.$$

Folgerung 4.1.4 *Der* T*-Operator erfüllt die folgende Normabschätzung*

$$||T||_{[\mathcal{L}_2(\Omega), \mathcal{W}_2^1(\Omega)]} > 1.$$

Beweis: Es gilt die Ungleichung

$$\begin{aligned} ||\Pi||_{\mathcal{L}_2(\Omega)} &= \left\| \sum_{i=0}^{n} \overline{\mathbf{e}}_i \partial_i T \right\|_{\mathcal{L}_2(\Omega)} \leq \sum_{i=0}^{n} ||\partial_i T||_{\mathcal{L}_2(\Omega)} \\ &\leq \sum_{i=0}^{n} ||\partial_i T||_{\mathcal{L}_2(\Omega)} + ||T||_{\mathcal{L}_2(\Omega)} \\ &\leq ||T||_{[\mathcal{L}_2(\Omega), \mathcal{W}_2^1(\Omega)]}. \end{aligned}$$

Aus unserem vorherigen Satz folgt nun die Behauptung.

q.e.d.

Wie wir gesehen haben, ist der Π-Operator nicht nur einfach ein singulärer Operator, sondern besitzt einige überaus interessante Eigenschaften, die nicht einfach aus der üblichen Theorie singulärer Integraloperatoren folgen. Bevor wir uns jedoch den Vorteilen, die diese Eigenschaften bei den Anwendungen des Π-Operators bringen, zuwenden, wollen (und können) wir nicht verschweigen, daß sich diese Eigenschaften für eine ganze Klasse von Operatoren beweisen lassen.

Der Π-Operator läßt sich nämlich auch in der folgenden Weise verallgemeinern. Wir bezeichnen mit $\bigwedge^k \mathbb{R}^n$ die Menge aller k-Vektoren von $C\ell_{0,n}$. Sei

$$\psi := \{\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n\} \subset \bigwedge^0 \mathbb{R}^n \oplus \bigwedge^1 \mathbb{R}^n.$$

Weiterhin sei die Bedingung

$$\psi_i \cdot \overline{\psi_j} + \psi_j \cdot \overline{\psi_i} = 2\delta_{ij}$$

für alle $i, j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ erfüllt, wobei δ_{ij} das Kroneckersymbol ist. Natürlich bedeutet das, daß ψ damit ein Orthonormalsystem in $\mathbb{R}^{n+1} = \bigwedge^0 \mathbb{R}^n \oplus \bigwedge^1 \mathbb{R}^n$ ist. ψ bezeichnen wir im folgenden als Strukturmenge. Damit können wir für hinreichend glatte Funktionen den Operator ${}^{\psi}D$, gegeben durch

$${}^{\psi}Df = \sum_{k=0}^{n} \psi_k \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

einführen. In diesem Falle hat der Laplace-Operator Δ die folgende Faktorisierung

$$\Delta = {}^{\psi}D \cdot {}^{\bar{\psi}}D = {}^{\bar{\psi}}D \cdot {}^{\psi}D.$$

Damit stellt der Operator ${}^{\psi}D$ eine Verallgemeinerung unseres bis jetzt betrachteten Cauchy-Riemann-Operators dar. (Unseren Cauchy-Riemann-Operator erhalten wir für $\psi_k = \mathbf{e}_k$.) Die Menge aller Funktionen f, für die $f \in \ker\ {}^{\psi}D$ gilt, nennen wir links-ψ-hyperholomorph. Diesen Namen werden wir in den Fällen, wo keine Mißverständnisse auftauchen können, abkürzen.

Mit K_ψ bezeichnen wir die ψ- Verallgemeinerung unseres Cauchy-Kerns, d.h.

$$K_\psi(x) \;=\; \frac{1}{\omega \cdot |x|^{n+1}} \cdot \sum_{k=0}^{n} \overline{\psi_k} \cdot x_k.$$

Hiermit können wir den ${}^{\psi}T$-Operator in der Form

$${}^{\psi}Tf(x) \;=\; -\int_\Omega K_\psi(y-x)\, f(y)\, d\Omega$$

einführen. Analog zu unserem bis dato betrachteten Fall des D-Operators können wir eine hyperkomplexe Funktionentheorie für ${}^{\psi}D$ aufbauen, wobei wir diesen Fall immer auf D mit Hilfe einer orthogonalen Transformation der Strukturmenge ψ_k auf unsere übliche Basis $\mathbf{e}_k$ zurückführen können. Wir erhalten also dasselbe Kalkül.

Diese Betrachtungen gehen auf Betrachtungen aus [SV1] zurück.

Nun könnte hier die Frage aufkommen, wozu wir eigentlich eine Verallgemeinerung des Cauchy-Riemann-Operators einführen, wenn wir im Endeffekt dieselbe Funktionentheorie erhalten. Der Unterschied liegt beim Betrachten zweier Strukturmengen $\psi = (\psi_0, \ldots, \psi_n)$ und $\varphi = (\varphi_0, \ldots, \varphi_n)$. Damit können wir den komplexen Π-Operator in der folgenden Weise verallgemeinern:

Definition 4.1.3 *Für ein Paar φ, ψ von Strukturmengen definieren wir den Operator ${}^{\varphi,\psi}\Pi$ durch*

$$ {}^{\varphi,\psi}\Pi := {}^{\varphi}D\, {}^{\psi}T. \tag{4.7} $$

Dieser Operator wurde für den Fall $f : \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{H}$ von M.V. Shapiro und N.L. Vasilevski [SV1] betrachtet.

Für die Integraldarstellung dieses Operators erhalten wir:

Satz 4.1.9 *Sei f eine Funktion aus $\mathcal{C}^{0,\beta}(\Omega, C\ell_{0,n})$, $0 < \beta \leq 1$. Dann ist*

$$\begin{aligned} {}^{\varphi,\psi}\Pi f(x) &= \int_\Omega \left(\frac{n+1}{\omega} \frac{(\tau - x)_\varphi \cdot (\tau - x)_{\overline{\psi}}}{|\tau - x|^{n+3}} - \frac{1}{\omega} \frac{\sum_{k=0}^n \varphi_k \cdot \overline{\psi_k}}{|\tau - x|^{n+1}} \right) f(\tau) d\tau \\ &\quad + \frac{\sum_{k=0}^n \varphi_k \cdot \overline{\psi_k}}{n+1} f(x) \\ &=: \int_\Omega \pi_{\varphi,\psi}(\tau - x) f(\tau) d\tau + \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^n \varphi_k \overline{\psi_k} \right) f(x). \end{aligned}$$

Es ist leicht zu sehen, daß

$$ \pi_{\varphi,\psi}(\tau - x) = {}^{\varphi}D_x \cdot {}^{\overline{\psi}}D_\tau \Theta_{n+1}(\tau - x), $$

wobei $\Theta_{n+1}(\tau - x) = -\frac{1}{(n-1)\omega} \frac{1}{|x|^{n-1}}$ die Fundamentallösung des Laplace-Operators und ω die Oberfläche der Einheitskugel im $\mathbb{R}^{n+1}$ ist.

Beweis: Sei $f \in \mathcal{C}^{0,\beta}(\Omega, C\ell_{0,n})$, $0 < \beta \leq 1$. Betrachten wir $\frac{\partial}{\partial x_k}\, {}^{\psi}T f$. Nach [MiP] haben wir für $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k}\, {}^{\psi}T f(x) &= \frac{\partial}{\partial x_k} \int_\Omega \frac{1}{\omega} \frac{(\tau - x)_{\overline{\psi}}}{|\tau - x|^{n+1}} f(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\omega} \int_\Omega \frac{-\overline{\psi_k} + (n+1) \cdot (\tau_k - x_k) \frac{(\tau - x)_{\overline{\psi}}}{|\tau - x|^2}}{|\tau - x|^{n+1}} f(\tau) d\tau + \frac{\overline{\psi_k}}{n+1} f(x) \end{aligned}$$

da

$$ \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{(\tau - x)_{\overline{\psi}}}{|\tau - x|^{n+1}} \right) = \frac{-\overline{\psi_k} + (n+1)(\tau_k - x_k) \frac{(\tau - x)_{\overline{\psi}}}{|\tau - x|^2}}{|\tau - x|^{n+1}} $$

und

$$ \int_S \frac{(\tau - x)_{\overline{\psi}}}{|\tau - x|} \cos(r, x_k) dS = -\omega \frac{\overline{\psi_k}}{n+1}. $$

q.e.d.

Wir weisen darauf hin, daß wir auf diese Weise eine Klasse von Operatoren $\{{}^{\varphi,\psi}\Pi\}$ so definiert haben, daß alle diese Operatoren stark singuläre Operatoren vom Michlin-Calderon-Zygmund-Typ sind.

Insbesondere gilt für $\varphi = \overline{\psi}$:

$$\begin{aligned} {}^{\varphi,\psi}\Pi f(x) &= \int_\Omega \left(\frac{n+1}{\omega} \frac{(\tau - x)^2_{\overline{\psi}}}{|\tau - x|^{n+3}} - \frac{1}{\omega} \frac{\sum_{k=0}^n (\overline{\psi_k})^2}{|\tau - x|^{n+1}} \right) f(\tau) d\tau \\ &+ \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (\overline{\psi_k})^2 f(x). \end{aligned}$$

Im Falle der Standardbasis $\psi = \{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}, \varphi = \overline{\psi}$ erhalten wir unseren bisher betrachteten Π-Operator:

$$\Pi f(x) = \int_\Omega \left(\frac{n+1}{\omega} \frac{\overline{(\tau - x)}^2}{|\tau - x|^{n+3}} + \frac{1}{\omega} \frac{n-1}{|\tau - x|^{n+1}} \right) f(\tau) d\tau - \frac{n-1}{n+1} f(x).$$

Weiterhin haben wir im Falle $\varphi = \psi$ offensichtlich

$${}^{\varphi,\psi}\Pi f(x) = \int_\Omega \left(\frac{n+1}{\omega} \frac{1}{|\tau - x|^{n+1}} - \frac{1}{\omega} \frac{n+1}{|\tau - x|^{n+1}} \right) f(\tau) d\tau + f(x) = f(x),$$

d.h. eine Übereinstimmung mit dem bekannten Resultat, daß ${}^{\psi}T$ ein rechtsinverser Operator zu ${}^{\psi}D$ ist. In [SV1] wurde eine Situation untersucht, wo φ und ψ die Bedingung

$$\sum_{k=0}^n \overline{\varphi_k} \cdot \psi_k = 0, \tag{4.8}$$

erfüllten, d.h.

$${}^{\varphi,\psi}\Pi f(x) = \frac{n+1}{\omega} \int_\Omega \frac{(\tau - x)_\varphi (\tau - x)_{\overline{\psi}}}{|\tau - x|^{n+3}} f(\tau) d\tau. \tag{4.9}$$

Gerade dieser Operator erweist sich als sehr nützlich beim Betrachten wichtiger Eigenschaften des Bergman-Projektors ([SV1]). In [SV1] wurde (4.9) für die Definition von ${}^{\varphi,\psi}\Pi$ unter der zusätzlichen Bedingung (4.8) benutzt, und unsere Definitionsgleichung (4.7) wurde als Satz bewiesen. Hier sehen wir auch, daß eine mögliche Definition einer Verallgemeinerung des komplexen Π-Operators mittels des singulären Integrales, d.h. durch formales Differenzierens des Cauchy-Kernes, nur im Falle des Erfülltseins der Bedingung (4.8) äquivalent zu der obigen Herangehensweise ist.

Außerdem wollen wir noch anmerken, daß M.V. Shapiro und N.L. Vasilevski den ${}^{\varphi,\psi}\Pi$-Operator eigentlich für Funktionen $f : \Omega \subset \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{H}$, also für Fall der Quaternionenanalysis definiert haben, was aber an den obigen Betrachtungen nichts ändert. Wichtig für uns ist, daß sie unter Benutzung der Bedingung (4.8) in der Lage waren, die Beziehung

$${}^{\psi}\mathbf{P} = I - {}^{\overline{\psi},\overline{\varphi}}\Pi \, {}^{\varphi,\psi}\Pi + C, \tag{4.10}$$

wobei C ein kompakter Operator ist, zu beweisen. Dies stellt eine Verallgemeinerung der berühmten Beziehung

$$B = I - \Pi\Pi^* + C$$

aus der komplexen Analysis dar. Beim Beweis nutzen M.V. Shapiro und N.L. Vasilevski Integraldarstellungen des Bergman-Kerns und ganz wesentlich das durch Bedingung (4.8) sichergestellte Verschwinden des integralfreien Terms. Für uns hier stellt sich nun die Frage, inwieweit sich die Beweise zu den Eigenschaften des vorher betrachteten Π-Operators, insbesondere die Invertierbarkeit, auf den Fall des ${}^{\varphi,\psi}\Pi$-Operators übertragen lassen. Dabei wollen wir zur besseren Verständlichkeit ebenfalls auf die Quaternionenanalysis beschränken, wobei wir anmerken, daß sich dies analog zu [RaSV] auch allgemeiner betrachten läßt.

Gehen wir die Beweise zur Invertierbarkeit von Π der Reihe nach durch, stellen wir fest, daß eigentlich nur an einer Stelle die Übertragung auf ${}^{\varphi,\psi}\Pi$ diffizil bzw. als direkte Übertragung (d.h. einfaches Hinschreiben) unmöglich wird. Das passiert beim Beweis, daß

$$\Pi f = 0 \text{ in co } \overline{\Omega} \iff f \in \text{ im } \mathbf{Q}^{\overline{D}}$$

Hier benutzen wir, daß $D + \overline{D} = 2\frac{\partial}{\partial x_0}$. Dies gilt natürlich nicht für ${}^{\psi}D + {}^{\varphi}D$ beim beliebigem ψ und φ. Verlangen wir die Erfüllung dieser Bedingung, landen wir wieder beim üblichen Fall $\psi = (\mathbf{e}_0, \dots, \mathbf{e}_n)$, $\varphi = (\bar{\mathbf{e}}_0, \dots, \bar{\mathbf{e}}_n)$ [GKS], was durchaus nicht im Sinne des Erfinders ist. Wir müssen uns also nach einer weniger restriktiven Bedingung umsehen.

Satz 4.1.10 *Mögen $\psi = (\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3)$ und $\varphi = (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ die folgenden Bedingungen erfüllen:*

$$\begin{aligned}
\varphi_0 &:= -\psi_0 + \alpha, \\
\varphi_1 &:= -\psi_1 + \alpha\gamma, \\
\varphi_2 &:= -\psi_2, \\
\varphi_3 &:= -\psi_3,
\end{aligned}$$

wobei $\gamma := \overline{\psi_0}\psi_1$ ein rein imaginäres Quaternion und $\alpha := a_0\psi_0 + a_1\psi_1 \neq 0$ mit $\{a_0, a_1\} \subset \mathbb{R}$, so daß $(a_0 - 1)^2 + a_1^2 = 1$, ist. Dies sichert, daß φ eine Strukturmenge ist. Dann gilt

$$f \in \text{im}\, {}^{\overline{\psi}}\mathbf{Q} \iff {}^{\varphi,\psi}\Pi f = 0 \textit{ in co } \overline{\Omega}.$$

Beweis:
($\Rightarrow$) Die Bedingung $f \in \text{im}\, {}^{\overline{\psi}}\mathbf{Q}$ ist äquivalent zu $\text{tr}\, {}^{\psi}Tf = 0$. Das bedeutet ${}^{\psi}Tf = 0$ in co $\overline{\Omega}$ und damit ${}^{\varphi}D\, {}^{\psi}Tf = 0$ in co $\overline{\Omega}$.
($\Leftarrow$) Betrachten wir nun ${}^{\psi}D$ und ${}^{\varphi}D$. Wir haben

$${}^{\varphi}D + {}^{\psi}D = \alpha\left(\frac{\partial}{\partial x_0} + \gamma\frac{\partial}{\partial x_1}\right).$$

Wir weisen darauf hin, daß γ die Eigenschaften einer imaginären Einheit besitzt: $|\gamma| = 1$, $\gamma^2 = -1$. Aus ${}^{\varphi,\psi}\Pi f = 0$ in co $\overline{\Omega}$ folgt ${}^{\varphi}D\,{}^{\psi}Tf = 0$ in co $\overline{\Omega}$. Offensichtlich gilt auch ${}^{\psi}D\,{}^{\psi}Tf = 0$ in co $\overline{\Omega}$ und damit

$$\begin{aligned} \left({}^{\varphi}D + {}^{\psi}D\right)\,{}^{\psi}Tf &= 0 \text{ in co } \overline{\Omega}, \\ \alpha\left(\frac{\partial}{\partial x_0} + \gamma\frac{\partial}{\partial x_1}\right)\,{}^{\psi}Tf &= 0 \text{ in co } \overline{\Omega}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Fixieren wir $x_2 = x_2^*$, $x_3 = x_3^*$ so, daß (x_0, x_1, x_2^*, x_3^*) in co $\overline{\Omega}$ für jedes (x_0, x_1) liegt, und bezeichnen wir die zugehörige Menge mit $\Gamma_{x_2^*,x_3^*} = \{(x_0, x_1, x_2^*, x_3^*)\}$. Dann

$${}^{\psi}Tf(x_0, x_1, x_2^*, x_3^*) \to 0$$

wenn nur $(x_0, x_1) \in \Gamma_{x_2^*,x_3^*} \to \infty$. Führen wir nun in die 2-dimensionale Ebene $\Gamma_{x_2^*,x_3^*}$ eine komplexe Struktur ein, in dem wir $z := x_0 + \gamma x_1$ setzen und betrachten

$$\Phi_{x_2^*,x_3^*}(z) := {}^{\psi}Tf(x_0, x_1, x_2^*, x_3^*).$$

Die Beziehung (4.11) bedeutet, daß Φ holomorph ist, d.h.

$$\frac{\partial \Phi_{x_2^*,x_3^*}}{\partial \overline{z}} = 0 \qquad \forall x_2^*, x_3^*$$

Außerdem ist Φ eine ganze Funktion auf $\Gamma_{x_2^*,x_3^*}$, die im Unendlichen verschwindet, d.h.

$$\Phi_{x_2^*,x_3^*} = 0$$

auf $\Gamma_{x_2^*,x_3^*}$. Sei $\mathrm{pr}_{x_2,x_3}(\Omega)$ die Projektion von Ω auf die Ebene (x_2, x_3) und sei weiter W ein gerader Zylinder mit der Basis $\mathrm{pr}_{x_2,x_3}(\Omega)$. Wählen wir $\tilde{y}$ als einen Punkt außerhalb von W, dann ist $\Phi_{\tilde{y}_2,\tilde{y}_3}(z) = 0$ für alle $\tilde{y}_2, \tilde{y}_3$. Damit haben wir, daß ${}^{\psi}Tf$ identisch Null außerhalb von W ist. Aber ${}^{\psi}Tf$ ist hyperholomorph in ganz co $\overline{\Omega}$. Somit ist ${}^{\psi}Tf$ identisch Null in ganz co $\overline{\Omega}$ und tr ${}^{\psi}Tf = 0$. tr ${}^{\psi}Tf = 0$ bedeutet $f \in \mathrm{im}\,{}^{\overline{\psi}}\mathbf{Q}$.

q.e.d.

Mit Hilfe dieses Satzes lassen sich nun alle Eigenschaften des Π-Operators auch für den ${}^{\varphi,\psi}\Pi$-Operator beweisen. Interessant ist, daß das Paar aus Standardbasis und konjugierter Standardbasis nicht die Bedingungen des obigen Satzes erfüllt, so daß wir eigentlich eine völlig neue Klasse von Operatoren erhalten haben, die zusätzlich noch die Beziehung (4.10) zum Bergman-Operator erfüllt.

Wenden wir uns nach diesen interessanten Betrachtungen zur hyperkomplexen Verallgemeinerung des Π-Operators seinen Anwendungen bei der Lösung nichtlinearer partieller Differentialgleichungen erster Ordnung zu. Eines der wichtigsten Beispiele einer solchen Gleichung ist die Beltramigleichung.

4.2 Die Beltramigleichung und die Frage nach globalen und lokalen Homöomorphismen

Eine der wichtigsten partiellen Differentialgleichungen in der komplexen Funktionentheorie ist die Beltramigleichung

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = q(z)\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Die Bedeutung dieser Gleichung unterstreicht am Besten die folgende Liste der Gebiete, in denen die Beltramigleichung benutzt wird. Sie erhebt dabei keinen Anspruch auf Vollständigkeit.

- Die allgemeine Theorie linearer und quasilinearer elliptischer Systeme, z.B. in Beziehung zur nichtlinearen zweidimensionalen Hydrodynamik
- Probleme konformer Abbildungen von Riemannschen Mannigfaltigkeiten
- Die Einführung sogenannter isothermaler Koordinaten auf allgemeinen Riemannschen Flächen
- Die Theorie der Teichmüller-Räume
- Durch die letzte Theorie tritt die Beltramigleichung in verschiedenen Problemen der Deformation von komplexen Strukturen auf zweidimensionalen Oberflächen auf
- Die Theorie komplexer dynamischer Systeme oder das Studium von Iterationen eindimensionaler komplexer rationaler Abbildungen
- Die Theorie quasikonformer Abbildungen

Mehr noch als alle anderen Anwendungen brachte die Theorie der verallgemeinert analytischen Funktionen von I.N. Vekua die Beltramigleichung in den Blickpunkt. Die Möglichkeit, jede zweidimensionale lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung mittels einer Koordinatentransformation, die eine zugehörige Beltramigleichung erfüllen muß, auf eine verallgemeinerte Cauchy-Riemannsche Differentialgleichung zurückzuführen, weckte schon von Anfang an das Interesse an einer hyperkomplexen Verallgemeinerung der Beltramigleichung und der dazugehörigen Anwendungen. W. I. Schevtschenko wendete sich als erster 1962 [Sh1] einer höherdimensionalen Verallgemeinerung von Vekua's Theorie zu und betrachtete Beltramigleichungen im Quaternionenfall. Dann waren es jedoch erst wieder H. Malonek und B. Müller 1992, die sich ausgehend von den Arbeiten von B. Goldschmidt [Gold], mit der Lösung von Beltramigleichungen im Hyperkomplexen beschäftigt haben [MalMü]. Dies lag nicht zuletzt daran, daß die Lösung einer Beltramigleichung eng mit der Untersuchung des zugehörigen Π-Operators verknüpft ist.

Eine ganz andere Herangehensweise an höherdimensionalen Verallgemeinerungen der komplexen Beltramigleichung wurde durch die Arbeit von S.K. Donaldson und D.P. Sullivan über quasikonforme 4-dimensionale Mannigfaltigkeiten [DoSu] von 1989 initiiert.

Eine homöomorphe Abbildung $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$ heißt *ε-quasikonform*, wenn

$$H_f(x) = \limsup_{r\to 0} \frac{\max\{|f(y)-f(x)| : |y-x|=r\}}{\min\{|f(y)-f(x)| : |y-x|=r\}} \leq \varepsilon.$$

Wir nennen sie *quasikonform*, wenn sie ε-quasikonform für irgendein $\varepsilon \geq 1$ ist.

Die mit diesen quasikonformen Abbildungen in Zusammenhang stehenden Fragestellungen brachten auch außerhalb der hyperkomplexen Analysis die Problematik der n-dimensionalen Verallgemeinerung der komplexen Beltramigleichung in den Blickpunkt [IMar], [Tar]. So betrachten z.B. T. Iwaniec und G. Martin Beltramigleichungen der Form

$$D^T f(x) Df(x) = J(x,f)^{2/n} G(x),$$

wobei

$$Df(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j}$$

die Jacobi-Matrix, D^T ihre Transponierte und $J(x,f)$ die Jacobi-Determinante ist, für Funktionen mit nichtnegativer Jacobi-Determinate. G ist hier eine meßbare Funktion. Dabei sichert die Bedingung an $J(x,f)$ von vornherein die Quasiregularität der Lösung. Einen anderen Zugang untersucht R. DeCampo [DeC]. Er betrachtet für Funktionen $f : \mathbb{R}^n \mapsto \Lambda$, die in die Grassmann-Algebra Λ abbilden, die Beltamigleichung

$$\overline{\partial} f = \mu \partial f.$$

Hierbei ist $\overline{\partial} = d - d^*$ und $\partial = d + d^*$, wobei d das äußere Differential und d^* der zu d formal duale Operator ist.

Bei der Lösung dieser Beltramigleichungen und besonders bei der Frage nach quasikonformen Lösungen treten eine Reihe von Schwierigkeiten auf, die hauptsächlich darauf zurückzuführen sind, daß die unterliegende algebraische Struktur keine Verallgemeinerung der komplexen Struktur darstellt.

In letzter Zeit begann sich das Interesse an der Lösung von hyperkomplexen Beltramigleichungen weiter zu regen, so z.B. in [K4] unter Benutzung des Π-Operators im Sinne von W. Sprößig.

Wir wollen hier im weiteren zwei verschiedene Möglichkeiten der hyperkomplexen Verallgemeinerung der komplexen Beltramigleichung untersuchen.

Die erste basiert auf [MalMü]:

Dazu führen wir die linearen Abbildungen $J_j : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, $j = 1, \ldots, 3$, gegeben durch

$$J_j(\mathbf{e}_j) = \bar{\mathbf{e}}_j, \quad J_j(\mathbf{e}_k) = \mathbf{e}_k, \qquad k, j = 1, \ldots, 3,\ k \neq j,$$

ein. Insbesondere sei die Abbildung

$$J_0 : \sum_{k=0}^{3} a_k \mathbf{e}_k \mapsto \sum_{k=0}^{3} a_k \bar{\mathbf{e}}_k,$$

gegeben. Weiterhin sei $A = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_i\}$, $0 \leq \alpha_1 < \ldots < \alpha_i \leq 3$, und $J_A = J_{\alpha_1} \ldots J_{\alpha_i}$ eine Komposition von Abbildungen J_j und $J_\emptyset$ die identische Abbildung. Unter Nutzung dieser Abbildungen J_A können wir jede reell-lineare Abbildung $\mathcal{L} : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ in der Form

$$\mathcal{L}(x) = \sum_A c_A J_A(x)$$

mit entsprechend gewählten Koeffizienten $c_A \in \mathbb{H}$, $A \subseteq \{0, \ldots, 3\}$, darstellen. Mit Hilfe dieser Abbildungen haben wir das folgenden Verfahren:

Satz 4.2.1 *Sei $\Omega \subset \mathbb{H}$ ein beschränktes, einfach zusammenhängendes Gebiet, $\Gamma = \partial\Omega$ ein Ljapunov-Rand. Weiterhin seien Vektorfunktionen*

$$\vec{Q}_A = (Q_{1A}, Q_{2A}, Q_{3A}) : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}^3$$

mit $\vec{Q}_A \in \mathcal{L}_p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, $A \subseteq \{0, \ldots, 3\}$ gegeben. Wenn gilt

$$\sum_{i,A} ||Q_{iA}||_p < \frac{4}{4\,||\vec{\Pi}|| + 1}, \tag{4.12}$$

wobei $||\vec{\Pi}||$ die Norm des Operators $\vec{\Pi} : \mathcal{L}_p(\Omega) \mapsto (\mathcal{L}_p(\Omega))^3$, $1 < p < \infty$, ist, dann hat die Gleichung

$$Dw = \sum_A \prec \vec{Q}_A \,; \nabla_{\vec{x}} J_A w \succ \tag{4.13}$$

eine Lösung in der Form

$$w = \phi + Th \tag{4.14}$$

mit $w \in \mathcal{W}_p^1(\Omega)$, $1 < p < \infty$ und $D\phi = 0$. Dabei bedeutet $\prec u; v \succ = \sum_{i=1}^{3} \overline{u}_i v_i$, $u, v \in \mathbb{H}^3$ und $\vec{\Pi}$ ist der verallgemeinerte Π-Operator im Sinne von H. Malonek. h ist eine Lösung der Gleichung

$$h = \sum_A \prec \vec{Q}_A \,;\, J_A(\vec{\Pi}h + \frac{\vec{i}}{4}h + \nabla_{\vec{x}}\phi) \succ \tag{4.15}$$

Beweis: Aus (4.14) folgt

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \qquad\qquad Dw &= h \\
\nabla_{\vec{x}} w &= \vec{\Pi}h + \frac{\vec{i}}{4}h + \nabla_{\vec{x}}\phi \\
\Rightarrow \sum_A \prec \vec{Q}_A \,; \nabla_{\vec{x}} J_A w \succ &= \sum_A \prec \vec{Q}_A \,;\, J_A(\vec{\Pi}h + \frac{\vec{i}}{4}h + \nabla_{\vec{x}}\phi) \succ
\end{aligned}$$

Wenn h eine Lösung von (4.15) ist, dann ist w eine Lösung von (4.13). Die Gleichung (4.15) ist aufgrund unserer Bedingung (4.12) lösbar mittels des Banachschen Fixpunktsatzes, da gilt

$$||\sum_A \prec \vec{Q}_A\,;\nabla_{\vec{x}} J_A w \succ ||_p \;\leq\; \sum_{i,A} ||Q_{iA}||_p \cdot \left(||\vec{\Pi}|| \;+\; \frac{1}{4}\right) ||h||_p \;<\; ||h||_p.$$

q.e.d.

Diese Gleichung bildet die notwendige Basis für die Transformation eines räumlichen partiellen Differentialgleichungsystems erster Ordnung in die hyperkomplexe Form $Dw = \sum_A J_A w$ von B. Goldschmidt [Gold].

Die zweite Möglichkeit einer hyperkomplexen Verallgemeinerung basiert auf den Arbeiten von W.I. Schevtschenko [Sh1], [Sh2], der, wie schon angesprochen, eine mögliche Verallgemeinerung der komplexen Beltramigleichung für den Fall der Quaternionenanalysis untersucht hat.

Definition 4.2.1 *Seien ψ, φ Strukturmengen, $q : \Omega \mapsto C\ell_{0,n}$ eine meßbare Funktion und $w \in \mathcal{W}_p^1(\Omega), 1 < p < \infty$. Dann heißt die Gleichung*

$$^{\psi}Dw = q\,^{\varphi}Dw \tag{4.16}$$

verallgemeinerte Beltramigleichung.

Eine spezielle Form dieser Beltramigleichung ergibt sich für $\psi = (\mathbf{e}_0, \ldots, \mathbf{e}_n)$ und $\varphi = \overline{\psi}$ [K1], [K4]:

$$Dw = q\overline{D}w \tag{4.17}$$

W.I. Schevtschenko [Sh2] selbst benutzte im Quaternionenfall Kombinationen der Strukturmengen

$$\begin{aligned}
\psi^1 &= (\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \\
\psi^2 &= (\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_3) \\
\psi^3 &= (\mathbf{e}_0, -\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_3) \\
\psi^4 &= (\mathbf{e}_0, -\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)
\end{aligned}$$

Interessanterweise erfüllt jede Kombination dieser Strukturmengen unsere Bedingung (4.8).

Analog zum obigen Fall der verallgemeinerten Beltramigleichung läßt sich auch diese mit Hilfe des Ansatzes

$$w = \Phi + \,^{\psi}Th,$$

wobei $\Phi \in \ker\,^{\psi}D$ ist, in die iterierfähige Form einer singulären Integralgleichung

$$h = q\,^{\varphi}D\Phi + q\,^{\varphi,\psi}\Pi h$$

bringen. Für $||q|| < 1/||{}^{\varphi,\psi}\Pi||$ können wir auch diese Gleichung mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes lösen, da der Operator $q\,{}^{\varphi,\psi}\Pi$ kontraktiv ist. Insbesondere gilt, falls ψ und φ die Bedingungen des Satzes (4.1.10) erfüllen oder $\varphi = \overline{\psi}$ ist, die Bedingung

$$||q|| < 1.$$

Bemerkung 4.2.1 *Für den Fall, daß unsere Beltramigleichung die spezielle Form (4.17) hat, können wir für n ungerade*

$$\Phi(x) = x_0 + \mathbf{e}_1 x_1 - \mathbf{e}_2 x_2 + \mathbf{e}_3 x_3 - \ldots + \mathbf{e}_n x_n$$

bzw. für n gerade

$$\Phi(x) = 2x_0 + \mathbf{e}_1 x_1 - \mathbf{e}_2 x_2 + \mathbf{e}_3 x_3 - \ldots + \mathbf{e}_{n-1} x_{n-1} + \mathbf{e}_n x_n$$

setzen und erhalten unsere singuläre Integralgleichung in der Form

$$h = q(2 + \Pi h).$$

Korollar 4.2.1 *Falls $\Omega \subset \mathbb{R}^4$ ein beschränktes Gebiet ist, ergibt sich für den Fall der Beltramigleichung (4.17) mit $w : \Omega \mapsto \mathbb{H}$ und $q : \Omega \mapsto \mathbb{H}$, $||q|| \le q_c < 1$, die Normabschätzung*

$$\begin{aligned} ||w||_{\mathcal{W}_2^1(\Omega)} \quad \le \quad & |\Omega|^{\frac{1}{2}} \left(\max_{x\in\Omega} |x| + 4 \right) + |\Omega|^{\frac{1}{2}} \frac{2}{1-q_c} \\ & \left(\left(\frac{1}{2\pi^2} \right)^{\frac{1}{4}} |\Omega|^{\frac{1}{4}} + 1 + 2\sqrt[4]{104} \sqrt{\frac{c_4}{\pi}} \right), \end{aligned}$$

wobei

$$c_4 = \left(\int_S | \ln \frac{1}{|\cos\gamma|} + \frac{i\pi}{2} sign\ \cos\gamma\, |^4 dS_{\theta'} \right)^{\frac{1}{2}}$$

eine Konstante ist.

Beweis: Offensichtlich gilt

$$||w||_{\mathcal{W}_2^1(\Omega)} \le ||\Phi||_{\mathcal{W}_2^1(\Omega)} + ||Th||_{\mathcal{W}_2^1(\Omega)}$$

mit $\Phi(x) = x_0 + \mathbf{e}_1 x_1 - \mathbf{e}_2 x_2 + \mathbf{e}_3 x_3$. Für $||\Phi||_{\mathcal{W}_2^1(\Omega)}$ haben wir

$$||\Phi||_{\mathcal{W}_2^1(\Omega)} \le \max_{x\in\Omega} |x| |\Omega|^{\frac{1}{2}} + 4|\Omega|^{\frac{1}{2}}.$$

Es bleibt nur noch, $||Th||_{\mathcal{W}_2^1(\Omega)} = ||T||_{[\mathcal{L}_2(\Omega), \mathcal{W}_2^1(\Omega)]} ||h||_{\mathcal{L}_2(\Omega)}$ abzuschätzen. Dabei gilt

$$\begin{aligned} ||Th||_{\mathcal{W}_2^1(\Omega)} &= ||Th||_{\mathcal{L}_2(\Omega)} + \sum_{i=0}^{3} ||\partial_i Th||_{\mathcal{L}_2(\Omega)} \\ &= \left(||T||_{\mathcal{L}_2(\Omega)} + \sum_{i=0}^{3} ||\partial_i T||_{\mathcal{L}_2(\Omega)} \right) ||h||_{\mathcal{L}_2(\Omega)} \end{aligned}$$

Analog zu [Kip] gilt

$$||T||_{\mathcal{L}_2(\Omega),} \leq \left(\frac{1}{2\pi^2}\right)^{\frac{1}{4}} |\Omega|^{\frac{1}{4}}.$$

Weiterhin haben wir für $i = 0, \ldots, 3$ nach [MiP]:

$$||\partial_i T||_{\mathcal{L}_2(\Omega)} = \text{ supess}|\Psi_i(\theta)|,$$

wobei $\Psi_i(\theta)$ das Symbol des singulären Operators $\partial_i T$ ist und θ die Oberfläche der 4-dimensionalen Einheitskugel durchläuft. Nutzen wir nun die Darstellung des Symbols $\Psi_i(\theta) = \frac{1}{4} + \tilde{\Psi}_i(\theta)$ durch die Charakteristik $\kappa_i(\theta)$, erhalten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned}
|\tilde{\Psi}_i(\theta)|^2 &= \left| \int_S \kappa_i(\theta) \left[\ln \frac{1}{|\cos\gamma|} + \frac{i\pi}{2}\text{sign } \cos\gamma \right] dS \right|^2 \\
&\leq \int_S |\kappa_i(\theta)|^2 \left| \ln \frac{1}{|\cos\gamma|} + \frac{i\pi}{2}\text{sign } \cos\gamma \right|^2 dS \cdot \omega \\
&\leq \left(\int_S |\kappa_i(\theta)|^4 dS \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_S \left| \ln \frac{1}{|\cos\gamma|} + \frac{i\pi}{2}\text{sign } \cos\gamma \right|^4 dS \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \omega \\
&\leq \left(\int_S |\kappa_i(\theta)|^4 dS \right)^{\frac{1}{2}} \cdot c_4 \cdot \omega,
\end{aligned}$$

wobei c_4 eine Konstante ist. Der Term $\left(\int_S |\kappa_i(\theta)|^4 dS\right)^{\frac{1}{2}}$ läßt sich exakt berechnen (vgl. [K1]). Im einzelnen erhalten wir für $i = 0, \ldots, 3$:

$$|\tilde{\Psi}_i(\theta)|^2 \leq \sqrt{\frac{13}{2\pi^2}} c_4.$$

Dies liefert uns

$$||\partial_i T||_{\mathcal{L}_2(\Omega)} \leq \frac{1}{4} + \sqrt{\sqrt{\frac{13}{2\pi^2}} c_4}.$$

Alles zusammen ergibt die Normabschätzung

$$||T||_{[\mathcal{L}_2(\Omega), \mathcal{W}_2^1(\Omega)]} \leq \left(\frac{1}{2\pi^2}\right)^{\frac{1}{4}} |\Omega|^{\frac{1}{4}} + 1 + 2\sqrt[4]{104}\sqrt{\frac{c_4}{\pi}}.$$

Aus $h = (I - q\Pi)^{-1}\overline{D}\Phi$ folgt

$$||h||_{\mathcal{L}_2(\Omega)} \leq ||(I - q\Pi)^{-1}||_{\mathcal{L}_2(\Omega)} ||\overline{D}\Phi||_{\mathcal{L}_2(\Omega)}$$

bzw.

$$||h||_{\mathcal{L}_2(\Omega)} \leq ||(I - q\Pi)^{-1}||_{\mathcal{L}_2(\Omega)} 2|\Omega|^{\frac{1}{2}}.$$

Da $||(I - q\Pi)^{-1}||_{\mathcal{L}_2(\Omega)} \leq \frac{1}{1-q_c}$ ist, folgt

$$||h||_{\mathcal{L}_2(\Omega)} \leq \frac{1}{1-q_c} 2|\Omega|^{\frac{1}{2}}$$

und damit unsere Normabschätzung für w.

q.e.d.

Bemerkung 4.2.2 *Ähnliche Normabschätzungen lassen sich auch im allgemeinen Fall des $\mathbb{R}^n$ gewinnen, wobei das Hauptproblem das Finden geeigneter Abschätzungen von $||T||_{[\mathcal{L}_2(\Omega),\mathcal{W}_2^1(\Omega)]}$ darstellt.*

Bemerkung 4.2.3 *Die im Beweis des obigen Korollars angegebene Möglichkeit der Normabschätzung des T-Operators, die über die in [Kip] angegebene Methode hinausgeht, verbessert für den Fall des $\mathbb{R}^3$ auch die [GSp1] angegebene Abschätzung des ersten Eigenwertes des Dirichletproblems der Laplacegleichung.*

Bemerkung 4.2.4 *Die explizite Angabe von a-priori-Normabschätzungen ist ein großer Vorteil der hier gezeigten Methode. So ist z.B. in [DeC] für die Lösung der Beltramigleichung f nur angegeben werden, daß $f - g \in \hat{W}_2^1(\mathbb{R}^n, \Lambda)$ mit einer unbekannten harmonischen Funktion g, so daß in diesem Fall Normabschätzungen der Lösung unmöglich sind.*

Die für Anwendungen interessante Frage ist nun, wann die Lösung einer solchen Beltramigleichung einen globalen oder lokalen Homöomorphismus darstellt, insbesondere im Hinblick auf eine Verwendung als Koordinatentransformation.

Dazu wäre zunächst einmal festzustellen, daß man einen globalen Homöomorphismus nur im Falle der Quaternionen (bzw. allgemein nur im $\mathbb{R}^m$ mit $m = 2^n$) erwarten kann, da ansonsten die Dimension unserer Lösung $w(x)$ nicht mit der Dimension unserer Ausgangsvariablen x übereinstimmt.

Für den Quaternionenfall selbst gilt der folgende Satz [Sh2]:

Satz 4.2.2 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^4$ ein beschränktes Gebiet. Es möge $q \in \mathcal{W}_p^1(\overline{\Omega}, \mathbb{H}), 4 < p < \infty$, die Bedingung*

$$||q(x)||_{\mathcal{W}_p^1} \leq q_c < 1$$

erfüllen. Dann existiert eine Lösung w der Beltramigleichung (4.16), die einen globalen Homöomorphismus von Ω auf ein Gebiet $\Omega_w \subset \mathbb{R}^4$ definiert, wenn nur unsere Strukturmengen ψ, φ die Bedingungen des Satzes (4.1.10) oder die Bedingung $\varphi = \overline{\psi}$ erfüllen. Diese Abbildung ist ε-quasikonform und gehört zur Klasse $C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ mit $\beta = \frac{p-4}{p}$. Falls $q \in \mathcal{W}_p^1(\mathbb{R}^4), 4 < p < \infty$, $||q(x)||_{\mathcal{W}_p^1} \leq q_c < 1$ ist und außerhalb irgendeiner hinreichend großen Kugel verschwindet, ist die Lösung w ein vollständiger ε-quasikonformer Homöomorphismus von $\mathbb{R}^4$ nach $\mathbb{R}^4$ und gehört der Klasse $C^{1,\beta}(\mathbb{R}^4)$ mit $\beta = \frac{p-4}{p}$ an.

Die Bedeutung dieses Satzes illustieren am besten die folgenden Sätze aus [DoSu]:

Satz 4.2.3 *Falls $n \neq 4$ ist, erlaubt jede topologische n-Mannigfaltigkeit eine quasikonforme Struktur. Außerdem sind zwei beliebige quasikonforme Strukturen äquivalent bzgl. eines Homöomorphismus isotopisch zur Identität.*

Satz 4.2.4 *Es gibt topologische 4-Mannigfaltigkeiten, die keine quasikonforme Struktur erlauben.*

Satz 4.2.5 *Es existieren quasikonforme 4-Mannigfaltigkeiten, die homöomorph aber nicht quasikonform äquivalent sind.*

Diese drei Sätze zeigen, daß gerade der Fall $n = 4$ eine Sonderrolle in der Theorie der Mannigfaltigkeiten spielt. Während im allgemeinen Fall $n \neq 4$ die quasikonformen Mannigfaltigkeiten keine besondere Rolle spielen, stellen sie im Fall $n = 4$ eine eigene Klasse von Mannigfaltigkeiten dar. Zum Beweis der obigen Sätze und zur Untersuchung dieser quasikonformen Mannigfaltigkeiten entwickelten die Autoren eine quasikonforme Yang-Mills Theorie mittels elliptischer Index-Theorie mit meßbaren Koeffizienten in vier Dimensionen. Unser obiger Satz gibt Anlaß zur Hoffnung, daß sich diese Untersuchungen viel einfacher mit Hilfe der Quaternionenanalysis durchführen lassen.

Generell ist die Frage nach quasikonformen Lösungen von allergrößter Bedeutung im Fall des $\mathbb{R}^n, n \geq 3$. Denn hier gilt der folgende Satz von Liouville:

Satz 4.2.6 *Jede konforme Abbildung eines Gebietes $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n \geq 3$, ist entweder konstant oder die Einschränkung einer Möbius-Transformation des $\mathbb{R}^n$ auf Ω.*

Aufgrund dieses Satzes ist eine Verallgemeinerung der komplexen Methoden zur Lösung von Randwertaufgaben partieller Differentialgleichungen, die auf konformen Koordinatentransformationen basieren [DeG] und [KO], mit höherdimensionalen konformen Abbildungen im allgemeinen nicht möglich. Einen Ausweg könnte die Verwendung quasikonformer Abbildungen sein.

Damit stellt sich das Problem der Gewinnung dieser quasikonformen Abbildungen über die Lösung entsprechender Beltramigleichungen. Hier sind jedoch die Schwierigkeiten, die bei der notwendigen Auswertung der entsprechenden Jacobi-Determinante entstehen, nicht zu unterschätzen. Von den oben erwähnten Arbeiten hat nur W. I. Schewtschenko [Sh1], [Sh2] solche Auswertungen im Falle des $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^4$ treffen können. Bei [IMar] ist die Bedingung an die Jacobi-Determinante in die Definition der entsprechenden Beltramigleichung aufgenommen worden. Leider sind die Autoren trotzdem nicht in der Lage, Aussagen über homöomorphe Lösungen zu treffen.

Wie wir sehen, sind diese Untersuchungen von größter Wichtigkeit für die Untersuchungen der Beltramigleichungen und sollten insbesondere mit Hinblick auf den Fakt, daß im $\mathbb{R}^3$ die Lösungen unserer Beltramigleichung (4.16) lokale Homöomorphismen sind [Sh1], für den n-dimensionalen Fall durchgeführt werden.

Nichtsdestotrotz lassen sich die hier verwendeten Ansatzmethoden zur Lösung der entsprechenden Beltramigleichung auch auf allgemeinere Klassen nichtlinearer partieller Differentialgleichungen anwenden.

4.3 Nichtlineare Beltrami-ähnliche Differentialgleichungen erster Ordnung

Wie wir schon erwähnt haben, lassen sich die im vorherigen Abschnitt verwendeten Methoden zur Lösung von Beltramigleichungen auch auf allgemeinere nichtlineare Differentialgleichungssysteme anwenden.

Sei $w : \Omega \subset \mathbb{R}^n \mapsto C\ell_{0,n}$. Betrachten wir nun das nichtlineare System von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$Dw = F(z, w, \frac{\partial w}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial w}{\partial z_n}). \tag{4.18}$$

Sei weiterhin $w = w(z)$ eine Lösung von (4.18), dann können wir die Funktion

$$\Phi := w - TF(z, w, \frac{\partial w}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial w}{\partial z_n})$$

definieren.

Offensichtlich ist Φ links-monogen und wir erhalten die Gleichung

$$w = \Phi + TF(z, w, \frac{\partial w}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial w}{\partial z_n}) \tag{4.19}$$

Aus dieser Gleichung ersehen wir, daß zu jeder Lösung w eine links-monogene Funktion Φ existiert, so daß (4.19) erfüllt ist.

Außerdem gilt auch die Umkehrung:

Falls Φ beliebig (natürlich links-monogen) gewählt wurde und (4.19) lösbar mit diesem Φ ist, dann ist w eine Lösung von (4.18).

Das bedeutet, daß wir die Möglichkeit besitzen, Randwertprobleme für (4.18) in Randwertprobleme für links-monogene Funktionen zu transformieren.

Führen wir nun den Operator

$$Ww = \Phi + TF(z, w, \frac{\partial w}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial w}{\partial z_n})$$

in $\mathcal{W}_2^1(\Omega)$ ein. Φ hängt dabei natürlich von w ab. Lösungen von (4.19) sind Fixpunkte dieses Operators. Unter Benutzung der Bedingung, daß der Raum $\mathcal{W}_2^1(\Omega)$ in sich selbst abgebildet werden muß, erhalten wir:

$$\begin{aligned} DWw &= 0 + F(z, w, \frac{\partial w}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial w}{\partial z_n}), \\ \nabla_{\vec{x}} Ww &= \nabla_{\vec{x}} \Phi + \vec{\Pi} F(z, w, \frac{\partial w}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial w}{\partial z_n}), \end{aligned}$$

wobei $\vec{\Pi}$ der verallgemeinerte Π-Operator im Sinne von H. Malonek ist.

Weiterhin, falls F nur von z, w und $\overline{D}$ abhängt, haben wir die Gleichung:

$$Dw = F(z, w, \overline{D}w). \tag{4.20}$$

Unter Benutzung des Operators

$$Ww = \Phi + TF(z, w, \overline{D}w)$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} DWw &= 0 + F(z, w, \overline{D}w), \\ \overline{D}Ww &= \overline{D}\Phi + \Pi F(z, w, \overline{D}w), \end{aligned}$$

wobei Π der Π-Operator im Sinne von W. Sprößig ist.

In beiden Fällen haben wir die Lösung der entsprechenden nichtlinearen partiellen Differentialgleichung auf die Lösung eines Fixpunktproblems zurückgeführt, womit uns die gesamte Breite der Fixpunktsätze zur Verfügung steht.

Betrachten wir z.B. die obigen Fixpunktgleichungen unter dem Gesichtspunkt der Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes, erhalten wir, wenn wir $h_j = \frac{\partial w}{\partial z_j}$ setzen, für die Lösung unserer ersten Fixpunktgleichung das Iterationsverfahren

$$\begin{aligned} w_m &= \Phi + TF(z, w_{m-1}, h_{1,m-1}, \ldots, h_{n,m-1}) \\ (h_{1,m}, \ldots, h_{n,m}) &= \nabla_{\vec{x}}\Phi + \vec{\Pi}F(z, w_{m-1}, h_{1,m-1}, \ldots, h_{n,m-1}) \end{aligned} \tag{4.21}$$

bzw. für die Lösung unserer zweiten Fixpunktgleichung das Verfahren

$$\begin{aligned} w_m &= \Phi + TF(z, w_{m-1}, h_{m-1}) \\ h_m &= \overline{D}\Phi + \Pi F(z, w_{m-1}, h_{m-1}), \end{aligned} \tag{4.22}$$

wobei $h = \overline{D}w$ ist.

Bei diesen Verfahren interessiert uns zunächst nur die allgemeine Lösung ohne Berücksichtigung der Randwerte, d.h. wir können Φ beliebig wählen.

Eine entsprechende Normuntersuchung wie im Fall des Iterationsverfahrens zur Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen führt uns zu folgenden Resultaten.

Satz 4.3.1 *Möge der Operator*

$$F : \mathcal{W}_2^1(\Omega) \times \mathcal{L}_2(\Omega) \times \ldots \times \mathcal{L}_2(\Omega) \mapsto \mathcal{L}_2(\Omega)$$

lipschitzstetig mit der Lipschitzkonstanten

$$L < \frac{1}{||T||_{[\mathcal{L}_2(\Omega), \mathcal{W}_2^1(\Omega)]}}$$

bzgl. $w, h_1, \ldots, h_n$ sein. Dann ist der Operator

$$U : \mathcal{W}_2^1(\Omega) \times \mathcal{L}_2(\Omega) \times \ldots \times \mathcal{L}_2(\Omega) \mapsto \mathcal{W}_2^1(\Omega) \times \mathcal{L}_2(\Omega) \times \ldots \times \mathcal{L}_2(\Omega)$$

mit

$$U(w, h_1, \ldots, h_n) = \Big(\Phi + TF(z, w, h_1, \ldots, h_n), \nabla_{\vec{x}}\Phi + \vec{\Pi}F(z, w, h_1, \ldots, h_n)\Big)$$

eine kontrahierende Selbstabbildung. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz konvergiert unser Iterationsverfahren (4.21) gegen eine eindeutige Lösung $(w, h_1, \ldots, h_n)$ *im Raum* $\mathcal{W}_2^1(\Omega) \times \mathcal{L}_2(\Omega) \times \ldots \times \mathcal{L}_2(\Omega)$*, bei der* w *eine eindeutige Lösung der Gleichung (4.18) darstellt.*

Satz 4.3.2 *Falls der Operator*

$$F : \mathcal{W}_2^1(\Omega) \times \mathcal{L}_2(\Omega) \mapsto \mathcal{L}_2(\Omega)$$

lipschitzstetig bzgl. w, h *mit der Konstanten*

$$L < \frac{1}{||T||_{[\mathcal{L}_2(\Omega), \mathcal{W}_2^1(\Omega)]}}$$

ist, so konvergiert unser Iterationsverfahren (4.22) zur zweiten Fixpunktgleichung gegen eine eindeutige Lösung (w, h) *im Raum* $\mathcal{W}_2^1(\Omega) \times \mathcal{L}_2(\Omega)$*. Hier ist natürlich* w *eine eindeutige Lösung unserer Gleichung (4.20).*

Bemerkung 4.3.1 *In beiden Fällen reicht für die Bedingung an die jeweilige Lipschitzkonstante* L *die Bedingung*

$$L < \frac{1}{||T||_{[\mathcal{L}_2(\Omega), \mathcal{W}_2^1(\Omega)]}},$$

da sowohl

$$\frac{1}{||T||_{[\mathcal{L}_2(\Omega), \mathcal{W}_2^1(\Omega)]}} < \frac{1}{||\partial_i T||_{[\mathcal{L}_2(\Omega), \mathcal{L}_2(\Omega)]}}$$

für $i = 0, \ldots, n$ *als auch*

$$\frac{1}{||T||_{[\mathcal{L}_2(\Omega), \mathcal{W}_2^1(\Omega)]}} < \frac{1}{||\Pi||_{[\mathcal{L}_2(\Omega), \mathcal{L}_2(\Omega)]}} = 1$$

gilt.

Bemerkung 4.3.2 *Bei beiden Iterationsverfahren können wir unseren Startpunkt beliebig wählen, insbesondere auch* $w = 0$.

Bemerkung 4.3.3 *Da wir dieselben Überlegungen auch für den Fall* $w : \Omega \subset \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{H}$ *durchführen können, sind unsere verallgemeinerten Beltramigleichungen (4.13) und (4.17) sind Spezialfälle der nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen*

$$w = \Phi + TF(z, w, \frac{\partial w}{\partial z_1}, \frac{\partial w}{\partial z_2}, \frac{\partial w}{\partial z_3})$$

und

$$Dw = F(z, w, \overline{D}w),$$

bei denen die Gleichungen der zugehörigen Iterationsverfahren entkoppelt sind.

Bemerkung 4.3.4 *An den obigen Sätzen zur Lösung unserer Probleme* (4.18) *und* (4.19) *mittels der Iterationsverfahren (4.21) und (4.22) sehen wir auch die Notwendigkeit genauer Normabschätzungen für T bzw. $\partial_i T$.*

So erhalten wir für den Fall $w : \Omega \subset \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{H}$, der sich ganz genauso behandeln läßt, die hinreichenden Bedingung

$$L < \frac{1}{\left(\frac{1}{2\pi^2}\right)^{\frac{1}{4}} |\Omega|^{\frac{1}{4}} + 1 + 2\sqrt[4]{104}\sqrt{\frac{c_4}{\pi}}}$$

für die jeweilige Lipschitzkonstante.

In [Rü] untersucht W. Rüprich das allgemeine nichtlineare partielle Differentialgleichungssystem

$$D_0(w) = f\left(\cdot, w, \frac{\partial}{\partial x_1}w, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}w\right)$$

für Funktionen w, die auf einem beschränkten Gebiet des $\mathbb{R}^n$ definiert sind, mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes. Dabei ist D_0 ein auf einem Banachraum $B(G)$ definierter linearer Differentialoperator, der einen stetigen rechtsseitigen inversen Operator besitzt. Für diese allgemeinen Untersuchungen benötigt er im Gegensatz zu dem hier vorliegenden Fall neben den Bedingungen für die Lipschitzstetigkeit auch noch Einschränkungen an die Räume, zwischen denen der nichtlineare Operator f abbildet. So muß eine Menge

$$M_r = \{(w, h_1, \ldots, h_n) \in B(G) : ||w - w_0|| \leq r_0, ||h_i - h_{i,0}|| \leq r_i, i = 1, \ldots, n\}$$

mit einem $n+1$-dimensionalen Vektor mit positiven reellen Komponenten r_i existieren, auf der f zusätzliche Bedingungen erfüllt. Außerdem ist hier die Wahl eines beliebigen Startpunktes für das Iterationsverfahren nicht möglich, da dieser Startpunkt hinreichend nahe an der Lösung liegen muß.

Ein noch ungelöstes Problem ist die Frage nach zulässigen Randbedingungen, d.h. bei welcher Angabe von Randbedingungen das nichtlineare Differentialgleichungssystem (4.18) bzw. (4.20) lösbar ist. So ist dieses System z.B. bei der vollständigen Angabe einer Randfunktion nicht unbedingt lösbar. Auch eine Untersuchung dieses Problems mit Hilfe unserer Randprojektoren P_Γ und Q_Γ führt nicht zum Ziel.

Andererseits können wir die monogene Funktion Φ im Fall des Differentialgleichungssystems ohne die Betrachtung von Randbedingungen völlig frei wählen, so daß durchaus Anlaß zur Hoffnung besteht.

Literaturverzeichnis

[A] R.A. Adams, *Sobolev spaces*, Pure and Applied Mathematics-Series, Academic Press, Boston-New York-London, 1978.

[BeGi] H. Begehr und R.P. Gilbert, *Transformations, transmutations and reproducing kernels*, Vol. I und Vol. II, Pitman-Longman, 1993 und 1994.

[Berg] S. Bergman, 'The Kernel function and Conformal Mapping', Math. Surveys, Amer. Math. Soc., 1970.

[Ber] S. Bernstein, *Analytische Untersuchungen in unbeschränkten Gebieten mit Anwendungen auf quaternionische Operatortheorie und elliptische Randwertprobleme*, Dissertation, BA Freiberg, 1993.

[Bers] L. Bers, 'An approximation theorem', J. Analyse Math. 14 (1965), 1 – 4.

[Bo] B. Bojarski, 'Old and New on Beltrami equations', in *Functional Analytic Methods in Complex Analysis and Applications to Partial Differential Equations*, Proc. of the ICTP, held at Trieste, Italy, 8.-19.2.1988, edited by A.S.A. Mshimba and W. Tutschke, World Scientific London, 1988, 173 – 188.

[BorMiy] W. Borchers und T. Miyakawa, 'On stability of exterior stationary Navier-Stokes flows', Acta Math., 174 (1995), 311 – 382.

[BDSo] F. Brackx, R. Delanghe und F. Sommen, *Clifford Analysis*, Research Notes in Mathematics No. 76, Pitman, London, 1982.

[Cat] L. Cattabriga, 'Su un problema al contorno relativo al sistema di equazioni di Stokes', Sem. Mat. Univ. Padova 31 (1964), 308 – 340.

[Cl] W.K. Clifford, 'Applications of Grassmann's extensive algebra', Amer. J. of Math. 1 (1878), 350 – 358.

[CMal] J. Cnops und H. Malonek, *Introduction to Clifford Analysis*, Textos de Matematica, Serie B, No. 7, Coimbra: Universidade de Coimbra, Departamento de Matematica, 1995.

[Cos] M. Costabel, *Starke Elliptizität von Randintegraloperatoren erster Art*, Habilitation, TH Darmstadt, 1984.

[D] R. Delanghe, 'On regular-analytic functions with values in a Clifford algebra', Math. Ann. 185 (1970), 91 – 71.

[Di] A.C. Dixon, 'On the Newtonian potential', Quaterly J. of Math. 35 (1904), 283 – 296.

[DeC] R. DeCampo, 'Note on the Dirac-Beltrami equation', erscheint in *Dirac operators in analysis*, bearb. von J. Ryan und D. Struppa, Pitman Research Notes in Mathematics, Pitman-Longman.

[DeG] J. de Graaf, 'Mathematical addenda to Hopper's model of plane Stokes flow driven by capillarity on a free surface', in *Geometric and Quantum Aspects of Integrable Systems*, bearb. von G.F. Helminck, Springer Lecture Notes in Physics 424, Springer, Berlin, 1993, 167 – 185.

[DoSu] S.K. Donaldson und D.P. Sullivan, 'Quasiconformal 4-manifolds', Acta Math., 163 (1989), 181 – 252.

[Dub] J.A. Dubinski, 'On a nonlinear analytic problem', Russian Acad. Sci. Dokl. Math. 48 (1994), No. 2, 370 – 375.

[Fi] R. Finn, ' On the exterior stationary problem for the Navier-Stokes equations and associated pertubation problems', Arch. Rat. Mech. Anal., 19 (1965), 363 – 406.

[FR] E. Franks und J. Ryan, 'Bounded Monogenic Functions on Unbounded Domains', in *Operator Theory for Complex and Hypercomplex Analysis*, bearb. von E. Ramirez de Arellano, N. Salinas, M.V. Shapiro und N.L. Vasilevski, Contemp. Math. 212 (1998), 71 – 79.

[Fue] R. Fueter, 'Analytische Theorie einer Quaternionenvariablen', Comment. Math. Helv. 4 (1932), 9 – 20.

[GaSi] G.P. Galdi und C.G. Simader, 'Existence, Uniqueness and $\mathcal{L}_q$-Estimates for the Stokes-Problem in an Exterior Domain', Arch. Rat. Mech. Anal. 112 (1990), 291 – 318.

[Gra] H. Grassmann, *Lineare Ausdehnungslehre*, 1844.

[Gold] B. Goldschmidt, *A theorem about the representation of linear combinations in Clifford Algebras*, Beiträge zur Algebra und Geometrie, **13**(1982), 21 – 24.

[G1] K. Gürlebeck, *Quaternionic Analysis and Transmission Problems*, in *Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics*, edited by F. Brackx, H. Serras, and R. Delanghe, Kluwer, Dordrecht 1993, 45 – 53.

[G2] K. Gürlebeck, 'On some operators in Clifford analysis', in *Operator Theory for Complex and Hypercomplex Analysis*, bearb. von E. Ramirez de Arellano, N. Salinas, M.V. Shapiro und N.L. Vasilevski, Contemp. Math. 212 (1998), 95 – 107.

[GK1] K. Gürlebeck und U. Kähler, 'On a spatial generalization of the complex Π-operator', ZAA 15 (1996), 283 – 297.

[GK2] K. Gürlebeck und U. Kähler, 'On a boundary value problem of the biharmonic equation', Math. Meth. in the Applied Sciences 20 (1997), 867 – 883.

[GKRSp] K. Gürlebeck, U. Kähler, J. Ryan und W. Sprößig, 'Clifford Analysis over unbounded domains', Adv. in Appl. Math. 19 (1997), 216 – 239.

[GKS] K. Gürlebeck, U. Kähler und M.V. Shapiro, 'On the Π-operator in hyperholomorphic function theory', Adv. in Appl. Math., eingereicht.

[GKSTo] K. Gürlebeck, U. Kähler, M.V. Shapiro und L.M. Tovar, 'On Q_p-spaces of quaternion-valued functions', Complex Variables, angenommen.

[GMal] K. Gürlebeck und H. Malonek, 'A Hypercomplex Derivative of Monogenic Functions in $\mathbb{R}^{n+1}$ and its Applications', Complex Variables, angenommen.

[GSp1] K Gürlebeck und W. Sprößig, *Quaternionic Analysis and Elliptic Boundary Value Problems*, ISNM 89, Birkhäuser Verlag Basel, 1990.

[GSp2] K. Gürlebeck und W. Sprößig, *Quaternionic and Clifford calculus for Engineers and Physicists*, John Wiley &. Sons, Cinchester, 1997.

[Ha] K. Habetha, 'Function theory in algebras', in *Complex Analysis – Methods, Trends, and Applications*, ed. by E. Lanckau and W. Tutschke, Akademie-Verlag, Berlin, 1983.

[H] W.R. Hamilton, *Elements of quaternions*, Chelsea (reprint), 1866 und 1969.

[HayKe] W.K. Hayman und P.B. Kennedy, *Subharmonic Functions*, Academic Press, London, 1976.

[Ho] A. Hommel, *Fundamentallösungen partieller Differenzenoperatoren und die Lösung diskreter Randwertprobleme mit Hilfe von Differenzenpotentialen*, Dissertation, Bauhaus-Universität Weimar, 1998.

[IMar] T. Iwaniec und G. Martin, 'Quasiregular mappings in even dimensions', Acta Math., 170 (1993), 29 – 81.

[K1] U. Kähler, *Über einige räumliche Verallgemeinerungen eines komplexen singulären Integraloperators*, Diplomarbeit, TU Chemnitz-Zwickau, 1995.

[K2] U. Kähler, 'Clifford analysis and elliptic boundary value problems in unbounded domains', in *Clifford Algebras and Their Applications in Mathematical Physics*, bearb. von V. Dietrich, K. Habetha und G. Jank, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1998, 145 – 160.

[K3] U. Kähler, 'Elliptic boundary value problems in bounded and unbounded domains', erscheint in *Dirac operators in analysis*, bearb. von J. Ryan und D. Struppa, Pitman Research Notes in Mathematics, Pitman-Longman.

[K4] U. Kähler, 'Application of hypercomplex Π-operators to the solution of Beltrami systems', in *Analytical and Numerical Methods in Quaternionic and Clifford Analysis*, ed. by W. Sprößig and K. Gürlebeck, Freiberger Forschungshefte, Freiberg, 1997, 69 – 75.

[Ka] L. Karp, 'Generalized Newton potential and its Applications', Journal of Mathematical Analysis and its Applications, 174, 1993, 480 – 497.

[Kip] F. Kippig, *Untersuchungen zu Randwert- und Anfangswertaufgaben für partielle Differentialgleichungen mit Methoden der Clifford Analysis*, Dissertation, TU Bergakademie Freiberg, 1997.

[KO] B. Klein Obbink, *Moving Boundary Value Problems in Relation with Equations of Löwner-Kufareev Type*, Dissertation, TU Eindhoven, 1995.

[KoSo1] H. Kozono und H. Sohr, 'On a New Class of Generalized Solutions of the Stokes Equations in Exterior Domains', Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 19 (1992), 155 – 181.

[KoSo2] H. Kozono und H. Sohr, 'New A-priori-Estimates for the Stokes Equations in Exterior Domains', Indiana Univ. Math. J. 40 (1991), 1 – 27.

[KraKre] M. Kracht und E. Kreyszig, *Methods of Complex Analysis in partial differential equations and applications*, John Wiley & Sons, 1988.

[KravMalSa] V.V. Kravchenko, H. Malonek und G. Santana, *Biquaternionic integral representations for massive Dirac spinors in a magnetic field and generalized biquaternionic differentiability*, Math. Meth. in the Applied Sciences, 19 (1996), 1415 – 1431.

[KravS] V.V. Kravchenko und M.V. Shapiro, *Integral representations for spatial models of mathematical physics*, Pitman Research Notes in Mathematics Series 351, Pitman-Longman, 1996.

[LaRoW] B. Lawruk, B. Rowley und J. Wloka, *Boundary value problems for elliptic systems*, Cambridge University Press, Cambridge, New York, Melbourne, 1995.

[Le] J. Leray, 'Sur le mouvement d'une liquide visqueux remplissant l'espace', Acta Math., 63 (1934), 193 – 248.

[LM] J.-L. Lions und E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Vol.1, Dunod, Paris 1968.

[LiMcSe] C. Li, A. McIntosh und S. Semmes, 'Convolution singular integrals on Lipschitz surfaces', Journal of the American Mathematical Society, 5, 1992, 455 – 481.

[Mal] H. Malonek, *A new hypercomplex structure of the Euclidean space* $\mathbb{R}^{m+1}$, Complex Variables Theory Appl., **14** (1990), 25 – 33.

[MalMü] H. Malonek und B. Müller, 'Definition and properties of a hypercomplex singular integral operator', Results in Mathematics 22 (1992), 713 – 724.

[MazSha] В. Г. Мазья и Т. О. Шапошникова, *Мултипликаторы в пространствах дифференцируемых функций*, Изд-во Ленингр. ун-та, 1986.

[Mc] A. McIntosh, 'Clifford algebras, Fourier theory, singular integral operators, and partial differential equations on Lipschitz domains', in *Clifford Algebras in Analysis and Related Topics*, bearb. von J.Ryan, CRC Press, Boca Raton, 1996.

[Me] А. С. Мейлихзон, 'По Поводу Моногенности Кватернионов', Доклады Академии Наук СССР 3 (1948), 431 – 434.

[MiP] S.G. Michlin und S. Prößdorf, *Singuläre Integraloperatoren*, Akademie-Verlag, Berlin, 1980.

[MitS] I.M. Mitelman und M.V. Shapiro, 'Differentiation of the Martinelli-Bochner Integrals and the Notion of Hyperderivability', Math. Nachr. 172 (1995), 211 – 238.

[Msh] A.S. Mshimba, 'On a mapping property of the singular integral operators T_G and Π_G in Sobolev spaces', Math. Nachr. 147 (1990), 153-159.

[NiWa] L. Nirenberg und H.F. Walker, 'The null space of elliptic partial differential operators in $\mathbb{R}^n$', J. Math. Anal. Appl. 42 (1973), 271 – 301.

[N] J. Nečas, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson, Paris, 1967.

[NoPa] A. Novotny und M. Padula, 'Note on decay of solutions of steady Navier-Stokes equations in 3-D exterior domains', Differential and Integral Equations 8 (1995), No. 7, 1833 – 1842.

[PSV] R.M. Porter, M.V. Shapiro und N.L. Vasilevski, 'Quaternionic Differential and Integral Operators and the $\bar{\partial}$-problem', Journal of Natural Geometry 6 (1994), 101 – 124.

[RaSV] E. Ramirez de Arellano, M.V. Shapiro und N.L. Vasilevski, 'The hyperholomorphic Bergman projector and its properties', in *Clifford Analysis and Related Topics*, bearb. von J. Ryan, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, 1996, 333 – 344.

[Rü] W. Rüprich, 'Operator-theoretic functional-analytic methods in the theory of partial differential equations in $\mathbb{R}^n$', in *Boundary value and initial value problems in complex analysis: studies in complex analysis and its applications to partial differential equations 1*, bearb. von R. Kühnau und W. Tutschke, Pitman Research Notes in Mathematics Series 256, Pitman-Longman, 1991, 142 – 159.

[R1] J. Ryan, 'Conformally covariant operators in Clifford analysis', J. Anal. Appl. 14 (1995), 667 – 704.

[Sa] M. Sakai, 'Null quadrature domains', J. Analyse Math. 40 (1981), 144 – 151.

[S] M.V. Shapiro, 'On some boundary value problems for functions with values in Clifford algebra', Matematicheski vesnik, Beograd, 1988, v.40, #3-4, 321-326.

[SV1] M.V. Shapiro und N.L. Vasilevski, 'On the Bergman kernel function in the Clifford analysis', *Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics*, edited by F. Brackx, R. Delanghe, and H. Serras, Kluwer, Dordrecht 1993, 183 – 192.

[SV2] M.V. Shapiro und N.L. Vasilevski, 'On the Bergman kernel function in hypercomplex analysis', Acta Appl. Math. v. 46 (1997), #1, 1 – 27.

[Sh1] В. И. Шевченко, 'О локальном гомеоморфизме трехмерного пространства, осуществляемом решением некоторой эллиптической системы', Доклады Академии Наук СССР 146 (1962), Но. 5, 1035 – 1038.

[Sh2] В. И. Шевченко, 'Построение локального и глобального гомеоморфизмов для одного класса уравнений в кватернионах', Доклады Академии Наук СССР 153 (1962), Но. 2, 300 – 302.

[Sp1] W. Sprößig, *Über eine mehrdimensionale Operatorrechnung über beschränkten Gebieten des* $\mathbb{R}^n$, Thesis, TH Karl-Marx-Stadt, 1979.

[Sp2] W. Sprößig, 'Räumliches Analogon zum komplexen T-Operator', Beiträge zur Analysis **12** (1978), Verlag der Wiss., Berlin, 127 – 138.

[St] E.M. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton University Press, 1970.

[Sud] A. Sudbery, 'Quaternionic Analysis', Math. Proc. Cambr. Phil. Soc. 85 (1979), 199 – 225.

[Tar] N.N. Tarkhanov, *The Analysis of Solutions of Elliptic Equations*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1997.

[Tem] R. Temam, *Navier-Stokes Equations and Nonlinear Functional Analysis*, Second Edition, SIAM, 1995.

[T] H. Triebel, *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1978.

[Tut1] W. Tutschke, *Partielle komplexe Differentialgleichungen in einer und in mehreren komplexen Variablen*, Berlin, 1977.

[Tut2] W. Tutschke, 'Classical and modern methods of complex analysis', in *Complex Analysis–methods, trends and applications*, ed. by W. Tutschke and E. Lanckau, Akademie-Verlag Berlin, 1983.

[V] K.Th. Vahlen, 'Über Bewegungen und komplexe Zahlen', Math. Ann. 55 (1902), 585 – 593.

[Va] W. Varnhorn, *The Stokes Equations*, Akademie-Verlag, Berlin, 1994.

[Vek] I.N. Vekua, *Verallgemeinert analytische Funktionen*, Akademieverlag, Berlin, 1962.

[W] J. Wloka, *Partielle Differentialgleichungen*, Verlag B.G. Teubner, Stuttgart, 1982.

[XZ] Z. Xu und C. Zhou, 'On boundary value problems of Riemann-Hilbert type for monogenic functions in a half space of $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$', Complex Variables, 3-4(1993), 181 – 193.

[Z] C. Zhou, 'On boundary value problems of Neumann type for the Dirac operator in a half space of $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$', Complex Variables, 1-2(1993), 1 – 16.