ANAIS

EICTI 2017

6° Encontro de Iniciação Científica

2° Encontro de Iniciação ao Desenvolvimento Tecnológico e Inovação

4 a **6** de outubro de **2017**

Universidade Federal da Integração Latino-Americana (UNILA)
Av. Tarquínio Joslin dos Santos, n° 1000
Foz do Iguaçu, Paraná – Brasil

Realização: UNILA | PRPPG

Apoio: CNPq · Fundação Araucária · PTI Parque Tecnológico Itaipu · SANEPAR

PROBLEMA PLATEAU: SUPERFÍCIES MÍNIMAS CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

FERREIRA, Micaelli Teodoro
Estudante do Curso de Matemática, bolsista (IC-FA) - ILACVN - UNILA;
E-mail: mt.ferreira.2016@aluno.unila.edu.br;

CHAVEZ, Newton Mayer Solorzano
Docente/pesquisador do curso de Matemática - ILACVN - UNILA.
E-mail: newton.chavez@unila.edu.br.

1 INTRODUÇÃO

O presente resumo é uma descrição do projeto que teve como foco estudar a geometria, enquanto construção geométrica ao estilo clássico com uso apenas de compasso e régua não metrada e por conseguinte os teoremas e proposições advindos da álgebra que determinam o "comportamento" e o potencial de construções com apenas estas duas ferramentas. Avançando concomitantemente nas construções práticas quanto nos teoremas que estudam a construtividade de números e polígonos regulares.

Dentro deste estudo sobre a construção geométrica ao estilo grego, analisamos os três problemas clássicos da construção grega que levaram 2200 anos para serem provados, três construções impossíveis de serem feitas apenas com régua e compasso. Seriam estas a trissecção de um ângulo qualquer, a quadratura de um círculo e a duplicação de um cubo. Cada qual, tendo sua impossibilidade justificada pelos teoremas de álgebra que delimitam o que é construtível e o que não é.

Os temas aqui abordados trazem ao aluno a grandeza da geometria euclidiana e disseminam o interesse pela geometria em geral, partindo da geometria clássica e posteriormente desenvolvendo estudo sobre outras geometrias, já não euclidianas.

2 METODOLOGIA

O estudo se desenvolveu por meio da análise e leitura de livros, dissertações e teses que abordavam o tema da construtividade na prática e na álgebra moderna.

Os temas estudados eram posteriormente debatidos entre orientador e orientando, levando em conta sua validade e a qualidade da apresentação e se necessário até mesmo questionando o caminho escolhido pelo autor e elaborando outras possibilidades.

Os encontros de estudo e debate se desenvolveram no ambiente da unila-PTI nas salas de estudo e aula.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Para o filósofo Platão os entes geométricos ideais eram a reta e a circunferência. Pelo anterior, a geometria teria que ser limitada às construções com régua e compasso. Temos que lembrar que a régua somente é utilizado para fazer traços de retas e por tanto não está graduada.

Um número real positivo a é chamado de construtível se conseguirmos usando apenas um compasso e uma régua não graduada construir com um número finito de passos um segmento de reta cujo comprimento seja a.

A partir da construção de números, podemos construir a soma, produto, subtração, razão e raiz, Segundo [2] e [3] se a e b são números reais e positivos construtíveis, então $a+b$, $a-b$ ($a>b$), a/b, e $\sqrt{a}$ são construtíveis. Um ponto P = ($a;b$) será construtível se e somente se, os números a e b forem construtíveis. Por exemplo as coordenadas e os números complexos.

Nas explorações de objetos geométricos construtíveis os gregos se deparam com três problemas insolúveis. Estes são: A trissecção de um ângulo, a quadratura do círculo e a duplicação do cubo.

A partir de [3] temos: Seja A e B dois corpos, e B subcorpo de A. E seja α algébrico, ou seja, α é raiz de um polinômio b(x) não nulo em B(x). Caso α não seja algébrico ele será dito transcendente.

Podemos então definir a construtibilidade pelo Teorema 2. Se um número real α é construtível, então α é algébrico e o grau do polinômio mínimo de α sobre Q é uma potência de 2, ou ainda seja α um número construtível, então o grau da extensão [Q(α):Q] é potência de 2.

Em [1] e [3], podemos encontrar três áreas de estudo dentro da álgebra e geometria euclidiana que foram explorados. Porém para o melhor entendimento destes temas, vários subtemas de teoria dos números foram estudados, como aritmética modular, números especiais, números primos e congruência em [4].

O primeiro tema foi a geometria e os métodos para construção (ver [2] e [3]), partindo de construções básicas como retas paralelas e ortogonais, a transferência de segmentos e ângulos, a secção de segmentos, a construção de um número a partir de um segmento que representa a unidade, até a construção de polígonos.

Em [1] e [3] temos temas como a teoria de Galois, parte da álgebra abstrata e essencial para o estudo dos teoremas sobre construtibilidade. Ela estuda extensões de corpos e a relação entre as raízes de uma equação polinomial. Os três problemas básicos da construção geométrica grega, tem suas impossibilidades justificadas e garantidas por teoremas que partem da teoria de galois.

O terceiro tema pode ser reduzido ao Teorema 1 de Gauss-Wantzel (ver [1], [3]) e aos lemas, proposições e teoremas necessários para sua compreensão. Eles garantem a construtibilidade de inúmeros polígonos como o de 17, 51 ou 256 lados por exemplo (atualmente o polígono de mais lados que foi construído foi o de 272).

4 RESULTADOS

A trissecção de um ângulo qualquer para a grande maioria dos casos é impossível. Para mostrar esta impossibilidade basta fazer o estudo por exemplo da trissecção do ângulo 60°, sua construção é equivalente a construção do eneagono (polígono de 9 lados), que pelo teorema 1. (Gauss-Wantzel) é impossível de construir, portanto a trissecção não é viável.

A quadratura do círculo, que consiste na construção de um quadrado com a mesma área de um círculo dado, ao desenvolver essa relação temos que construir o valor π, porém π é transcende (demonstração feita em 1882 por Lindemann), logo não é construtível.

A duplicação do cubo, consiste em a partir do volume de um dado cubo inicial, construir um novo cubo com o dobro do volume do anterior, isto consiste em construir o valor $\sqrt[3]{2}$ (raiz cúbica de dois). O polinômio mínimo associado a este valor é de grau 3, então sua construtibilidade é impossível por Teorema 2.

Teorema 1. (Gauss-Wantzel) (ver [1], [3]), "O polígono regular de n lados é construtível se, e somente se $n = 2^r p_1 p_2 \dots p_n$ para $p_i = 2^{2^s} + 1$ com $r, s \in N$ (naturais) e $1 \leq i \leq k$." Lopes, 2014, página 46.

Este projeto permite ao orientando adquirir novos conhecimentos no âmbito da álgebra e teoria dos números entre outros temas..

Algumas construções foram reproduzidas no software GeoGebra para verificar visualmente os resultados estudados, além das construções no papel com régua e compasso.

5 CONCLUSÕES

1. Embora o objetivo do projeto foi responder os problemas clássicos da geometria grega, neste trabalho foram abordados problemas distintos, como a construtividade de polígonos regulares.

2. Após o estudo e análise da geometria clássica e de teoremas mais sofisticados como o de Gauss-Watzel para desenvolver o interesse do aluno para com o estudo e a geometria o orientando deve desenvolver interesse pelo tema e levar seus estudos a geometrias mais recentes.

3. Além disto o projeto visa desenvolver o interesse pelo estudo mais avançado, familiarizando o orientando a escrita e rigor acadêmico, a pesquisa e ao processo de pensamento pertinente as demonstrações matemáticas.

6 PRINCIPAIS REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] JACOBSON, Nathan. **BASIC ALGEBRA 1.** 2° Edição, Estados Unidos da América: Editora Dover publications, 2014.

[2] JÚNIOR, Luis Pereira da Silva. **Construções Geométricas Por Régua e Compasso e Números Construtíveis.** Trabalho de conclusão de curso (Mestrado) - Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal de Campina Grande, 2013.

[3] LOPES, Aislan Sirino. **CRITÉRIO PARA A CONSTRUTIBILIDADE DE POLÍGONOS REGULARES POR RÉGUA E COMPASSO E NÚMEROS CONSTRUTÍVEIS.** Dissertação (Mestrado) - Departamento de Matemática, Universidade Federal do Ceará, 2014.

[4] SHOKRANIAN, Salahoddin. **UMA INTRODUÇÃO À TEORIA DOS NÚMEROS.** Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2008.