2016 年度修士論文要旨

有限群の線形表現について

関西学院大学大学院 理工学研究科
数理科学専攻 増田研究室 山本 一貴

本研究の目的は, 種々の有限群の既約指標を求めることにより, 有限群の表現論についての理解を深めることである.

1　有限群の線形表現

有限群の線形表現の基礎的事項を述べる.
K を標数が $p\,(p \geq 0)$ の体, G を有限群,V を K 上の有限次元ベクトル空間でとする.
V 上の K 同型写像全体を V 上の一般線形群といい,$GL(V)$ と表す.$GL(V)$ は写像の合成を演算として群となる.

定義 1. G 加群 V が,$\{0\}$ と,V 以外に部分 G 加群を持たないとき,V は既約であるという.
また,V が既約である時, その表現 $\pi : G \to GL(V)$ を G の V における既約表現という.

定義 2. G の表現 $\pi : G \to GL(V)$ について,V の任意の部分 G 加群 W に対して,W の補空間 W' で部分 G 加群になるものが存在する時,π は完全可約であるという.

定理 1 (マシュケの定理)**.** K の標数が 0 または,G の位数と互いに素であるとき,G の V 上の表現 π は完全可約である.

系 1. マシュケの定理の条件のもとで, 任意の G 加群 V は既約 G 加群の直和になる.

補題 1 (シューアの補題)**.** K 上の既約な G 加群 V, W について次が成り立つ.

1. $Hom_G(V, W) \neq \{0\} \iff V \cong W$　(G 加群としての同型)
2. K が代数的閉体である時、$End_G V \cong K$

定理 2. アーベル群 G の代数的閉体 K 上の既約表現 π は 1 次である.

2　指標

体を $\mathbb{C}$ とする.

定義 3. 表現 π:$G \to GL(V)$ に対して,$\chi_\pi : G \to \mathbb{C}$　$(\chi_\pi(g) = \mathrm{Tr}\pi(g)\ (g \in G))$ を π の指標という. また, 既約表現の指標を既約指標という.

有限群 G の位数を $|G|$ とする.G 上の $\mathbb{C}$ 値関数 χ, χ' に対して, 内積を

$$(\chi, \chi') = \frac{1}{|G|} \sum_{a \in G} \chi(g)\chi'(g^{-1})$$

と定義する.

定理 3 (指標の第一直交関係)**.** 既約表現 π, π' の既約指標 χ, χ' について,

$$(\chi, \chi') = \begin{cases} 1 & (\chi = \chi') \\ 0 & (\chi \neq \chi') \end{cases} \tag{1}$$

定理 4. G の二つの線形表現が同値である.$\Leftrightarrow$ それらの指標が一致する.

系 2. 群 G の既約表現を $\pi_1, \ldots \pi_n$ とし, その各次数を $f_1, \ldots f_n$, 指標を $\chi_1, \ldots \chi_n$ とする. このと次が成り立つ.

1. $|G| = \sum_{i=1}^{n} f_i \chi_i(e)$
2. $G \ni g \neq e$ ならば,$f_1\chi_1(g) + \cdots + f_n\chi_n(g) = 0$

定理 5 (指標の第二直交関係)**.** $\chi_1, \ldots \chi_l$ を群 G の相異なる既約指標の全体とする. また,$a_\alpha, a_\beta, a_\gamma$ をそれぞれ, 共役類 $K_\alpha, K_\beta, K_\gamma$ の代表元とする. このとき

$$\sum_{i=1}^{l} \chi_i(a_\alpha)\chi_i(a_\beta^{-1}) = \delta_{\alpha\beta}\frac{|G|}{h_\alpha} \tag{2}$$

が成り立つ.

定理 6. 群 G の相異なる既約指標の個数は G の共役類の個数に等しい

3　有限群の既約指標の例

体を $\mathbb{C}$ とする.

3.1　有限巡回群の既約指標

G を位数が n の巡回群とし, その生成元を a とする. G の既約表現は n 個あり,1 次である.n 個の既約指標を χ_i $(i = 0 \ldots n-1)$ とする. 既約指標は, $\chi_i(a^k) = \omega^{ik}$ (ω は 1 の原始 n 乗根) で与えられる.

3.2　3 次対称群の既約指標

3 次対称群 $S_3 = \{e, (12), (13), (23), (123), (132)\}$ の共役類は $K_1 = \{e\}, K_2 = \{(12), (13), (23)\}, K_3 = \{(123), (132)\}$ の 3 個であるので,3 個の既約表現 (1 次の既約表現が 2 個, 2 次の既約表現が 1 個) を持つ.1 次の既約表現の既約指標を χ_1, χ_2 とし,2 次の既約表現の指標を χ_3 とする.S_3 の指標表は,

	K_1	K_2	K_3
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	2	0	-1

となる.

参考文献

[1] 堀田 良之, 加群十話, 朝倉書店,1988

[2] 宮西 正宜, 代数学 2 -発展編-, 裳華房,2011

[3] 桂 利行, 代数学 II 環上の加群, 東京大学出版会,2007

[4] 近藤 武, 群論, 岩波基礎数学選書,1991

[5] J.-P. セール（岩堀 長慶, 横沼 健雄 訳）, 有限群の線形表現, 岩波書店,1974