



Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Azcapotzalco

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

POSGRADO EN INGENIERÍA ESTRUCTURAL

FORMULACIÓN E IMPLANTACIÓN DE MODELOS DE
DAÑO PARA LA SIMULACIÓN DE LA EVOLUCIÓN AL
COLAPSO EN SÓLIDOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

**MAESTRO EN INGENIERÍA
ESTRUCTURAL**

P R E S E N T A:

DANIEL A HERNÁNDEZ GARCÍA

Tutor

DR. GELACIO JUÁREZ LUNA

México, D.F. 2012

Agradecimientos

Doy gracias infinitas a mi madre por todo lo encaminado y por enseñarme que la mejor manera de ser feliz es darlo todo sin esperar la vuelta; a mis dos motivos, Ángel y Sebastián, por contagiarme y llenarme con su alegría; a mi hermana Diana y a su esposo Antonio, por todos los años de apoyo y por seguir en mi camino; a mi hermana Daniela, por el sendero que recorrimos juntos y por estar siempre en mí; a mi padre, por enseñarme a decidir la mejor forma de llevar mi vida. A la familia García Vargas, por su gran confianza y sus palabras llenas de impulso, principalmente a Isabel Vargas Eurosa, por su siempre vital alegría.

A mi asesor, el Dr. Gelacio Juárez Luna, por darme la oportunidad de trabajar con él, y también por la confianza, el respeto y sobre todo por la amistad que se desarrolló en este trayecto.

A mis profesores de licenciatura y posgrado del área de estructuras de la Universidad Autónoma Metropolitana: Dr. Gelacio Juárez Luna, Dr. Manuel Ruiz Sandoval-Hernández, Dra. Consuelo Gómez Soberón, Dr. Arturo Tena Colunga, Dr. Luciano Fernández Sola, Dr. Amador Terán Gilmore, Dr. Hugón Juárez García, por compartir sus conocimientos y ofrecerme una educación de calidad, pero sobre todo por compartir sus experiencias marcando detalles en mi formación como profesional.

A mis sinodales: Dr. Ernesto Pineda León y Dr. Hugón Juárez García, por calificar con su buen criterio y experiencia este proyecto.

El curso del Posgrado en Ingeniería Estructural en la Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Azcapotzalco, fue patrocinado con una beca económica correspondiente como estudiante de tiempo completo por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) agradeciendo sinceramente por el apoyo brindado en este proceso.

*A la guerrera más grande que el mundo pudiera describir,
sabiendo que es difícil entender a alguien tan obstinado
y complicado como yo. Eres el mayor orgullo que cualquier hombre
podría sentir por una mujer....
a mi hermosa madre Angelina García Vargas*

*A la alegría hecha mujer...la ternura más pura
que un nieto podría recibir...y mi mejor regalo de
cumpleaños, Isabel Vargas Eurosa Q.E.P.D.*

*A un angelito perdido...que al final encontró la luz....
a mi hermanita bella
América Daniela Hernández García Q.E.P.D.*

Índice

1	Introducción	1
1.1	INTRODUCCIÓN	1
1.2	ANTECEDENTES	1
1.2.1	Naturaleza física del daño	4
1.2.2	Diferentes manifestaciones de daño	6
1.2.3	Interpretación mecánica del daño.....	7
1.2.3.1	Variable de daño unidimensional	7
1.2.3.2	Concepto de esfuerzo efectivo	8
1.2.4	Medición de daño	9
1.3	OBJETIVOS.....	10
1.4	ORGANIZACIÓN DE LA TESIS	10
2	Modelos de daño	12
2.1	MODELO DE DAÑO ISOTRÓPICO IGUAL TENSIÓN COMPRESIÓN (MDITC)	12
2.1.1	Ecuación constitutiva.....	14
2.1.2	Criterio de daño	15
2.1.3	Regla de endurecimiento/ablandamiento.....	17
2.1.4	Condiciones de carga y descarga	19
2.1.5	Módulo tangente.....	19
2.2	MODELO DE DAÑO ISOTRÓPICO SÓLO TENSIÓN (MDST).....	22
2.2.1	Módulo tangente.....	23
2.3	MODELO DE DAÑO SÓLO CORTANTE (MDSC).....	25
2.3.1	Módulo tangente.....	27
2.4	MODELO DE DAÑO DIFERENTE TENSIÓN COMPRESIÓN (MDSTC) (MÉNDEZ, 2012).....	29
3	Ejemplos de Aplicación	32
3.1	VIGA SIMPLEMENTE APOYADA CON MUESCA EN LA PARTE MEDIA	32
3.2	ESPÉCIMEN DE CONCRETO DE SECCIÓN VARIABLE CON DOS RANURAS	35
3.3	CILINDRO DE CONCRETO SIMPLE EN TENSIÓN PURA	38
3.4	PIEZA DE CONCRETO CON MUESCA SOMETIDA A DESGARRE POR TENSIÓN.....	41
3.5	CORTANTE PURO EN ESPÉCIMEN	45
3.6	BLOQUE DE CONCRETO SOMETIDO A COMPRESIÓN (CORTANTE INDIRECTO).....	47
3.7	CILINDRO DE CONCRETO EN COMPRESIÓN SIMPLE (CORTANTE INDIRECTO)	51
3.8	ZAPATA EN ESPACIO FINITO CON CARGA SIMÉTRICA.....	54
3.8.1	Zapata en espacio finito con carga asimétrica.....	56
3.9	PRUEBA BRASILEÑA (TENSIÓN INDIRECTA)	58
	Conclusiones y Recomendaciones	62
	Conclusiones.....	62
	Recomendaciones	63
	Trabajos futuros.....	63
	Referencias	65
	Anexo A. Implantación numérica	69

A.1. Diagrama de flujo	69
A.2. Modelo de daño isotrópico igual tensión compresión (MDITC).....	70
A.3. Modelo de daño isotrópico sólo tensión (MDST)	71
A.4. Modelo de daño sólo cortante (MDSC).....	72
A.5. Modelo de daño diferente tensión compresión (MDDTC).....	73
Anexo B. Subrutinas desarrolladas para el programa FEAP	74
B.1. Subrutina modelo de daño isotrópico igual tensión compresión.....	74
B.2. Subrutina modelo de daño isotrópico sólo tensión.....	77
B.3. Subrutina modelo de daño isotrópico sólo cortante.....	80

Lista de figuras

Figura 1.1. Modelo de agrietamiento distribuido	2
Figura 1.2. Modos de fractura: a) apertura (cortante en el plano), b) deslizamiento y c) cortante fuera del plano	2
Figura 1.3. Modelo de discontinuidad de interiores: a) discontinuidades débiles, b) fuertes y c) discretas	3
Figura 1.4. Interpretación del daño.....	7
Figura 1.5. Daño en un elemento unidimensional.....	8
Figura 1.6. Medición del daño dúctil	9
Figura 2.1. Gráfica esfuerzo-deformación en material con ablandamiento	13
Figura 2.2. Normas en el espacio de: a) esfuerzos y b) deformaciones	16
Figura 2.3. Regla de ablandamiento/endurecimiento: a) lineal y b) exponencial	18
Figura 2.4. Modelo de daño isotrópico igual tensión compresión: a) superficie de daño y b) curva esfuerzo-deformación	21
Figura 2.5. Modelo de daño solo tensión: a) superficie de daño y b) curva esfuerzo-deformación..	23
Figura 2.6. Círculo de Mohr: orden de los esfuerzos principales	24
Figura 2.7. Modelo de daño solo cortante: a) superficie de daño y b) curva esfuerzo-deformación	28
Figura 2.8. Prueba de compresión en cilindro de concreto: cilindro antes de prueba	28
Figura 2.9. Prueba de compresión en cilindro de concreto: inicio de aplicación de carga.....	29
Figura 2.10. Prueba de compresión en cilindro de concreto: inicio de falla a cortante	29
Figura 2.11. Modelo de daño diferente tensión compresión: a) superficie de daño y b) curva esfuerzo-deformación	30
Figura 3.1. Viga de concreto simple con muesca en la parte inferior media	33
Figura 3.2. Malla de elementos finitos utilizada en el análisis 2D: a) no deformada, b) daño con MDITC y c) daño con MDST	33
Figura 3.3. Malla de elementos finitos utilizada en el análisis 3D: a) no deformada, b) daño con MDITC, c) daño con MDST.....	34
Figura 3.4. Carga contra Desplazamiento de viga con muesca en la parte media	35
Figura 3.5. Viga de sección variable con dos ranuras en el centro	36
Figura 3.6. Malla de elementos finitos utilizada en el análisis 2D en el MDST: antes y después del daño	36
Figura 3.7. Malla de elementos finitos utilizada en el análisis 3D en el MDST: antes y después del daño	37

Figura 3.8. Carga contra Desplazamiento de espécimen de sección variable	37
Figura 3.9. Cilindro de concreto simple con carga de tensión pura, Blanco (2006)	38
Figura 3.10. Malla de elementos finitos utilizada en el análisis 2D en el MDST: antes y después del daño	39
Figura 3.11. Malla de elementos finitos utilizada en el análisis 3D en el MDST: antes y después del daño	39
Figura 3.12. Carga contra Desplazamiento de cilindro de concreto	40
Figura 3.13. Esfuerzo contra Desplazamiento de cilindro de concreto	41
Figura 3.14. Pieza simétrica sometida a tensión	42
Figura 3.15. Malla de elementos finitos en 2D: antes y después del daño	42
Figura 3.16. Malla de elementos finitos en 3D: antes y después del daño	43
Figura 3.17. Carga contra Desplazamiento de pieza prismática	43
Figura 3.18. Resultados de modelo propuesto y prueba original: Carga contra Desplazamiento	45
Figura 3.19. Especimen embebido sometido a cortante puro	46
Figura 3.20. Malla en 2D: antes y después del daño	46
Figura 3.21. Malla en 3D: antes y después del daño	46
Figura 3.22. Curva carga contra desplazamiento de espécimen embebido	47
Figura 3.23. Bloque de concreto en compresión	48
Figura 3.24. Malla en 2D: antes y después del daño	48
Figura 3.25. Malla en 3D: antes y después del daño	49
Figura 3.26. Ubicación de elementos finitos con esfuerzo ultimo menor	49
Figura 3.27. Bloque de concreto. Comparación con el MDSC	50
Figura 3.28. Carga contra Desplazamiento de bloque de concreto	50
Figura 3.29. Cilindro de concreto sometido a compresión simple	51
Figura 3.30. Malla en 2D: antes y después del daño	52
Figura 3.31. Malla en 3D: antes y después del daño	52
Figura 3.32. Elementos finitos con esfuerzo último reducido, en 2D y 3D	53
Figura 3.33. Curva carga contra desplazamiento comparada con el MDSC	53
Figura 3.34. Curva carga contra desplazamiento utilizando el MDITC	54
Figura 3.35. Zapata en espacio finito con carga simétrica	55
Figura 3.36. Malla: antes y después del daño	55
Figura 3.37. Curva carga contra desplazamiento de zapata con carga simétrica	56
Figura 3.38. Zapata en espacio finito con carga asimétrica	57
Figura 3.39. Malla: después del daño	57
Figura 3.40. Zapata con carga asimétrica	58
Figura 3.41. Cilindro de concreto sometido a tensión indirecta	59
Figura 3.42. Malla: a) antes y b) después del daño	59
Figura 3.43. Malla: a) antes y b) después del daño	60
Figura 3.44. Resultados con modelos de daño	60
Figura 3.45. Comparación de resultado, cosientes entre maximos Craga/Carga _{max} Desplazamiento/Desplazamiento _{max}	61
Figura A. 1. Diagrama de flujo general	69
Figura A. 2. Diagrama de flujo para el MDITC	70
Figura A. 3. Diagrama de flujo para el MDST	71
Figura A. 4. Diagrama de flujo para el MDSC	72
Figura A. 5. Diagrama de flujo para el MDDTC	73

Lista de Tablas

<i>Tabla 1.1. Materiales típicos y tipo de falla que inicia el daño, Luccioni (2003)</i>	5
<i>Tabla 1.2. Materiales típicos y su magnitud en la mesomecánica, Luccioni (2003)</i>	5
<i>Tabla 2.1. Ecuaciones para el Modelo de Daño Igual Tensión Compresión (MDITC)</i>	21
<i>Tabla 2.2. Ecuaciones para el Modelo de Daño Sólo Tensión (MDST)</i>	24
<i>Tabla 2.3. Ecuaciones para el Modelo de Daño Sólo Cortante (MDSC)</i>	27
<i>Tabla 2.4. Ecuaciones para el MDDTC</i>	31

Resumen

La mecánica de daño es una herramienta atractiva para describir el deterioro progresivo de las propiedades mecánicas de los materiales. Estudia a nivel microscópico la degradación de un material cuando se somete a distintas cargas y efectos en el tiempo. Existen cuatro aproximaciones para describir la degradación en materiales como son: agrietamiento distribuido, mecánica de fractura, discontinuidad de interiores y la mecánica de daño.

En esta investigación se realizaron dos tipos de algoritmos matemáticos basados en la mecánica de daño para la simulación numérica de sólidos que fallan en esfuerzos de sólo tensión y de sólo cortante, respectivamente. La formulación de estos dos se fundamenta en el modelo de daño isotrópico con umbral de falla de igual tensión-compresión y considerando algunas propuestas realizadas por otros autores. Se realizan, para un entendimiento sencillo del daño, formulaciones uniaxiales las cuales se extienden, por medio de algebra y cálculo tensorial, en modelos de daño bidimensionales y tridimensionales.

Finalmente se hace la validación de estos dos modelos de daño propuestos mediante ejemplos de aplicación que constan de resultados experimentales y numéricos reportados en la literatura.

*...si no lo puedes explicar con simplicidad,
es que no lo entiendes bien....Albert Einstein*

Abstract

Damage mechanics is a useful tool to model the progressive deterioration of the mechanical properties of materials. At microscopic level, it is used to study the material degradation when the load and time conditions are alternating. Mainly, there are four approximations for modeling that degradation: smear cracking, fracture mechanics, embedded discontinuities and damage mechanics

There were developed two different types of algorithms based in damage mechanics for the numerical simulation of solids that fail by tension and shear stresses. The formulation for these algorithms was achieved by an adequacy of an isotropic damage model with a threshold of fail of equal tension and compression, beside of some hypothesis of others authors. For a better understanding of damage, there was implemented an uniaxial formulation which was extended, through of algebra and calculus tensor, in damage models two-dimensional and three-dimensional.

Finally, these algorithms were validated through application examples by numerical and experimental results reported by literature.

*...if you can't explain it simply,
you don't understand well enough....Albert Einstein*

Lista de Variables y Símbolos

C	Tensor constitutivo elástico (propiedades elásticas del material)
C^d	Tensor constitutivo tangente (propiedades elásticas degradadas del material)
d	Variable de daño
\dot{d}	Variación del daño con respecto al incremento de carga (respecto al tiempo)
E_o	Módulo de elasticidad inicial
E	Módulo de elasticidad del material dañado
ε	Deformación
$\dot{\varepsilon}$	Variación de las deformaciones con respecto al incremento de carga (respecto al tiempo)
F	Fuerza
G	Módulo de rigidez
H^d	Módulo de ablandamiento/endurecimiento
M	Diferencial de volumen
n	Normal al área
r_o	Variable interna que define el límite elástico
r	Variable de estado (elástico o en degradación)
S	Área
ΔS	Diferencial de área
S_d	Área con daño
ΔS_d	Diferencial de área con daño
σ	Esfuerzo
$\bar{\sigma}$	Esfuerzo efectivo
σ^+	Esfuerzo principales sólo positivos
$\dot{\sigma}$	Variación del esfuerzo con respecto al incremento de carga (respecto al tiempo)
ν	Coefficiente de Poisson
ψ_o	Energía libre de Helmholtz: magnitud que no depende del incremento de daño, sino del estado inicial y final del material
ψ	Energía libre de Helmholtz del material dañado
τ	Norma
q	Función que define el ablandamiento/endurecimiento
γ	Multiplicador de daño
Ξ	Desigualdad de Clasius-Plank: define si el proceso es reversible o irreversible (si se ha rebasado el límite elástico)
\otimes	Producto diádico tensorial (producto matricial o vectorial)

CAPÍTULO 1

Introducción

1.1 Introducción

La mecánica de daño es la disciplina que describe el deterioro progresivo de las propiedades mecánicas de los materiales. El daño es el proceso progresivo por el cual los materiales se rompen; en sólidos, se refiere a la degradación de sus propiedades mecánicas, es decir, el módulo elástico y el esfuerzo último del material decrecen con el incremento de daño. Además de estos factores, puede ocurrir plasticidad que se caracteriza por la deformación permanente después de que se descarga completamente el espécimen.

La mecánica de daño estudia a nivel microscópico la degradación de un material cuando se somete a distintas cargas y efectos en el tiempo. En la microescala, el daño se presenta como la acumulación de microgrietas en la vecindad de defectos y la rotura de ligaduras que representan un crecimiento en fisuras que dañan al material. En la mesoescala (escala mayor a la microescala pero mucho más pequeña al espécimen sólido) el daño se presenta como el crecimiento e interconexión de microfisuras y microporos que, en conjunto, inician una fisura. Los dos primeros niveles pueden estudiarse a través de las variables de daño de la mecánica del medio continuo definidas a nivel de mesoescala. El tercer nivel se estudia normalmente utilizando la mecánica de fractura con variables definidas a nivel macroscópico.

1.2 Antecedentes

Para simular la degradación en materiales, existen cuatro metodologías que se han usado tales como:

- 1) Agrietamiento distribuido: representa la pérdida de rigidez del material con un conjunto de grietas paralelas entre sí, distribuidas sobre un volumen o elemento finito. Lo anterior se puede simular al reducir la rigidez y resistencia del material, en la dirección normal a las grietas después de alcanzar la resistencia última del material. La evolución del proceso de falla de una estructura involucra el ablandamiento, este es el decrecimiento de los esfuerzos y un incremento de las deformaciones en forma gradual, *Figura 1.1*. El agrietamiento distribuido tiene la desventaja de presentar problemas de atoramiento de esfuerzos, modos cinemáticos falsos y, principalmente, que los resultados son afectados por el

tamaño y orientación de los elementos (malla de elementos finitos) lo cual puede reducirse usando mallas finas.

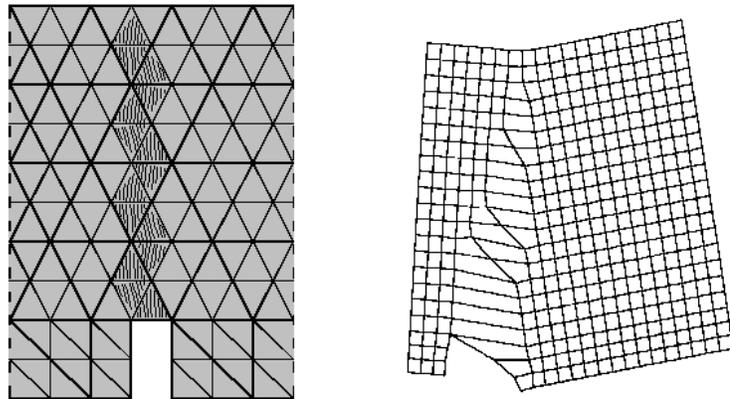


Figura 1.1. Modelo de agrietamiento distribuido

- 2) La mecánica de fractura: se encarga del estudio de sólidos agrietados, principalmente en materiales frágiles, que busca determinar la distribución de esfuerzos y deformaciones. En la punta de las grietas las deformaciones son no acotadas; en la *Figura 1.2* se muestran los tres modos de falla. Las principales desventajas de la mecánica de fractura: requiere de grietas iniciales y, de algoritmos de propagación.

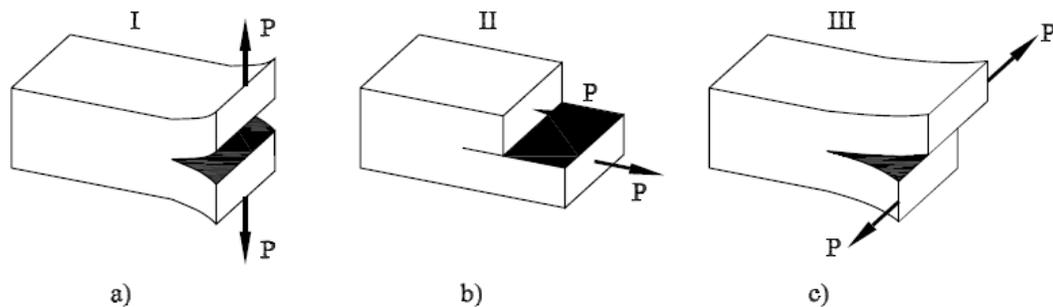


Figura 1.2. Modos de fractura: a) apertura (cortante en el plano), b) deslizamiento y c) cortante fuera del plano

- 3) Discontinuidad de interiores: Este procedimiento permite introducir discontinuidades en los elementos finitos durante el análisis, sin necesidad de modificar la malla. Además, no existe la necesidad de definir, *a priori*, zonas potenciales de falla, puesto que las discontinuidades se pueden introducir en cualquier momento durante el análisis. El modelo de discontinuidades interiores utiliza un criterio de falla para determinar el momento en que ocurre una discontinuidad, y de un criterio de propagación para determinar su posición geométrica en el sólido durante el análisis. En la *Figura 1.3* se muestran las tres

variantes del modelo de discontinuidades interiores, las discontinuidades débiles consideran una zona de localización de ancho finito, las discontinuidades fuertes consideran una zona de localización de ancho cero. Estas dos aproximaciones utilizan una relación constitutiva esfuerzo-deformación. La aproximación de discontinuidades discretas tienen ancho cero en su zona de localización, pero utilizan una relación constitutiva esfuerzo-salto.

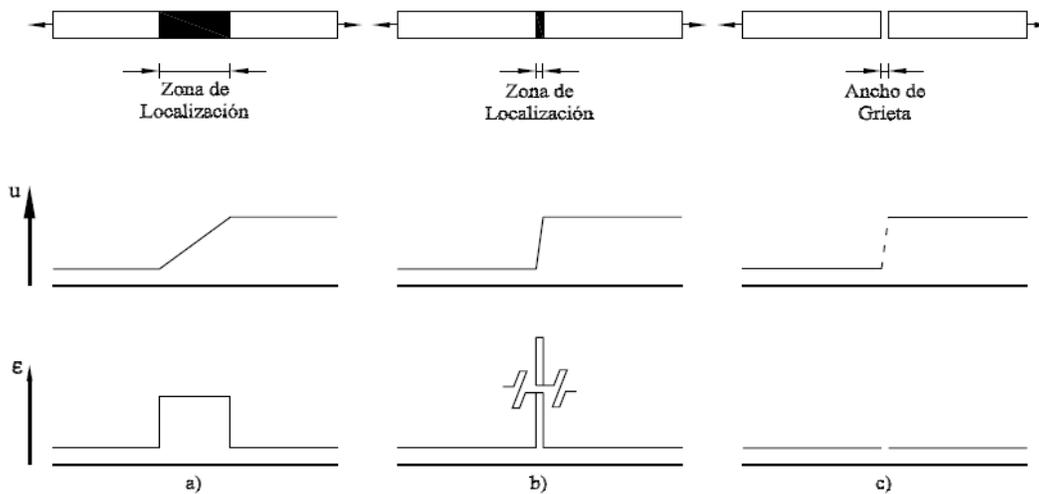


Figura 1.3. Modelo de discontinuidad de interiores: a) discontinuidades débiles, b) fuertes y c) discretas

La cuarta metodología es la mecánica de daño. En este trabajo se utilizará la mecánica de daño para simular la degradación del material, ya que maneja el deterioro del material sin definir zonas potenciales de falla ni el uso de algoritmos para propagar el daño. El deterioro lo propaga en el comportamiento evolutivo del material, que se aplica durante el incremento de carga que lo llevara al colapso.

La introducción del concepto de daño fue realizada por Kachanov (1958) donde incluía una nueva variable llamada “continuidad”; sin embargo, Rabotnov (1968) introduce el concepto de “esfuerzo efectivo” e ignora el trabajo de Kachanov. Lemaitre en 1972, desarrolló la teoría basada en la continuidad dándole el sentido de daño con el enfoque clásico de la mecánica de fractura. Lemaitre utilizó bases rigurosas de termodinámica y micromecánica.

Los efectos de la plasticidad también se consideran en trabajos de investigación más recientes, utilizan modelos acoplados de daño-plasticidad, Simo y Ju (1987 a,b), Ju (1989), Lubliner *et al.* (1989) y Luccione *et al.* (1996), entre muchos otros.

Las extensiones de esta idea a casos anisotrópicos, requieren considerar de un tensor de cuarto orden, definido como un tensor de daño que relaciona el esfuerzo total y el

efectivo. Cordobois y Sidoroff (1982) y Murakami (1983) utilizan tensores de daño de segundo orden, la formulación matemática de dicho tensor es compleja y difícil de demostrar físicamente.

Existen en la literatura varios modelos con tensores secantes de cuarto orden del material como una variable fundamental, ésta se obtiene de una formulación termodinámicamente consistente para la caracterización de daño como la degradación del módulo elástico. Ejemplos de estos modelos de daño se encuentran en Ortiz (1985), Simo y Ju (1987 a,b) , Ju (1989), Hansen y Schreyer (1994) y Govindgee *et al.* (1995), entre otros.

Para incorporar mecanismos físicos para propiciar el daño en el material, como el agrietamiento en el concreto, existen modelos que consideran solamente las relaciones de esfuerzo-deformación reducidas. El ejemplo clásico es el llamado modelo de agrietamiento distribuido como los desarrollados por Rashid (1968), Bazant y Cedolin (1979), Bazant y Oh (1983) y Rots *et al.* (1985). Al relacionar estas ideas, se pueden mencionar las aproximaciones de microplanos formuladas por Bazant y Oh (1985), quienes introducen el daño a través de una colección de planos predefinidos y no de una dirección particular de agrietamiento.

Se han presentado formulaciones completamente termodinámicas de modelos de agrietamiento distribuido en los trabajos de Armero (1997 a,b), Armero y Li (1998) para resultados preliminares de sus extensiones en el rango de deformaciones finitas . Armero y Oller (1999) formulan modelos de daño plástico a través de métodos de integración numérica.

Vieira (2003) realiza formulaciones matemáticas para análisis en mecánica de daño, se basa en modelos de igual tensión compresión, y principios para modelos de sólo tensión y diferente tensión compresión. Sin embargo, como se mostrará en este estudio los modelos de sólo tensión sólo son válidos cuando el daño se propaga en dirección vertical, pues al tener otra dirección, el sólido permanece elástico o requiere de cargas grandes para iniciar el daño.

Juárez y Ayala (2010) presentan simulaciones con elementos mixtos en los que utilizan un modelo de daño igual tensión compresión. Sin embargo, existen elementos donde los esfuerzos actuantes son principalmente de tensión o a cortante, por lo que existe la necesidad de formular e implantar modelos para estos problemas.

1.2.1 Naturaleza física del daño

La elasticidad de un material está directamente relacionada con el movimiento relativo de los átomos que lo constituyen, entonces, el estudio físico de las propiedades de una red de átomos conduce a la teoría de la plasticidad. La manera más fácil de escribir estas ecuaciones es mediante la mesoescala, a partir de las propiedades de la reversibilidad de

la deformación, que implica incorporar las propiedades de linealidad e isotropía. El número de uniones atómicas responsables de la elasticidad decrecen con el daño.

Cuando se producen roturas de uniones comienza el proceso de daño; por ejemplo, los metales están constituidos por cristales que al aplicarse esfuerzos tangenciales se producen desplazamientos en las ligaduras y por lo tanto generan deformaciones plásticas. Los mecanismos de daño tienen distintos orígenes en diferentes materiales, en la *Tabla 1.1* se presentan algunos materiales y el tipo de falla que presentan en su estructura básica.

Tabla 1.1. Materiales típicos y tipo de falla que inicia el daño, Luccioni (2003)

Materiales	Tipo de Falla
<i>Polímeros</i>	<i>Rotura de ligaduras en largas cadenas de moléculas</i>
<i>Compuestos</i>	<i>Desunión de fibras y matriz polimérica</i>
<i>Cerámicos</i>	<i>Decoherión entre inclusiones y matriz</i>
<i>Concreto</i>	<i>Decoherión entre agregados y cemento con una compleja influencia del agua</i>
<i>Madera</i>	<i>Punto débil en la unión de las células de celulosa</i>

La mecánica de daño continuo trabaja con cantidades definidas en puntos matemáticos, estas cantidades representan promedios en un cierto volumen suficientemente pequeño para evitar suavizar altos gradientes, adecuados para representar el microproceso. Todos estos mecanismos crean a su vez microdeformaciones plásticas, esto ocurre debido a que el área elemental de resistencia decrece a medida que decrece el número de ligaduras.

Para fines experimentales es útil considerar los siguientes órdenes de magnitud para los elementos representativos de volumen que definen la escala de la mesomecánica, se presentan algunas en la *Tabla 1.2*:

Tabla 1.2. Materiales típicos y su magnitud en la mesomecánica, Luccioni (2003)

Materiales	Magnitudes
<i>Metales y cerámicos</i>	<i>0.1 mm³</i>
<i>Polímeros y la mayoría de los compuestos</i>	<i>1 mm³</i>
<i>Madera</i>	<i>10 mm³</i>
<i>Concreto</i>	<i>100 mm³</i>

1.2.2 Diferentes manifestaciones de daño

En la microescala el daño está gobernado por un sólo mecanismo general de separación, en la mesoescala se manifiesta de diferentes maneras dependiendo del tipo de material, tipo de carga y temperatura:

- a) Daño frágil: cuando una fisura comienza sin una apreciable deformación plástica, las cargas no son suficientemente grandes para producir grandes desplazamientos, pero la separación entre bordes de grieta son visibles.
- b) Daño dúctil: ocurre simultáneamente con deformaciones plásticas mayores a un cierto umbral, es el resultado del desarrollo de cavidades debido a desuniones, seguida de un crecimiento y coalescencia a través del fenómeno de inestabilidad plástica.
- c) Daño por endurecimiento plástico: si un material se carga a temperaturas elevadas ($1/3$ de la de fusión) las deformaciones plásticas involucran viscosidad, puede deformarse en esfuerzos constantes, si la deformación es muy grande se presentan decohesiones intergranulares; se conocen como deformaciones viscoplásticas.
- d) Daño por fatiga de bajos ciclos: el material se somete a cargas cíclicas en valores altos de deformación o esfuerzo, después de un periodo de origen y propagación de microfisuras, se desarrolla el daño junto con deformaciones plásticas.
- e) Fatiga de altos ciclos: cuando se carga el material con valores bajos de esfuerzo, las deformaciones plásticas en la mesoescala son prácticamente imperceptibles, la microfisuración transgranular ocurre en la superficie del espécimen por el mecanismo de intrusión-extrusión (el número de ciclos puede ser mayor a 100,000).
- f) Anisotropía: debido a la historia de esfuerzos el material inicialmente isotrópico se transforma gradualmente en anisotrópico, en consecuencia hay degradación de la rigidez elástica.
- g) Unilateralidad: la degradación de la rigidez se debe al desarrollo de microfisuras, se ha confirmado experimentalmente que la reversión de la carga puede cerrar dichas fisuras con cierta recuperación de rigidez, a esto se le denomina daño activo/pasivo que describe la desaparición de daño al pasar de tensión a compresión.

1.2.3 Interpretación mecánica del daño

1.2.3.1 Variable de daño unidimensional

Para utilizar medidas adimensionales, un área puede escalarse a la medida del elemento representativo de un volumen, esta medida es fundamental en la definición de una variable continua en el sentido de la mecánica del medio continuo. En un punto de la mesoescala debe ser representativo un elemento de volumen del efecto de los microdefectos de la falla. Si se considera un caso unidimensional de daño homogéneo se llega a la definición más simple de daño como la densidad superficial de microdefectos.

ΔS es el área de la intersección del plano en el elemento representativo de volumen y ΔS_{dx} el área efectiva de la intersección de todas las microfisuras o microcavidades que caen en ΔS , como se muestra en la *Figura 1.4*. El valor del daño en el punto M en la dirección \mathbf{n} y en la abscisa x estaría dado por:

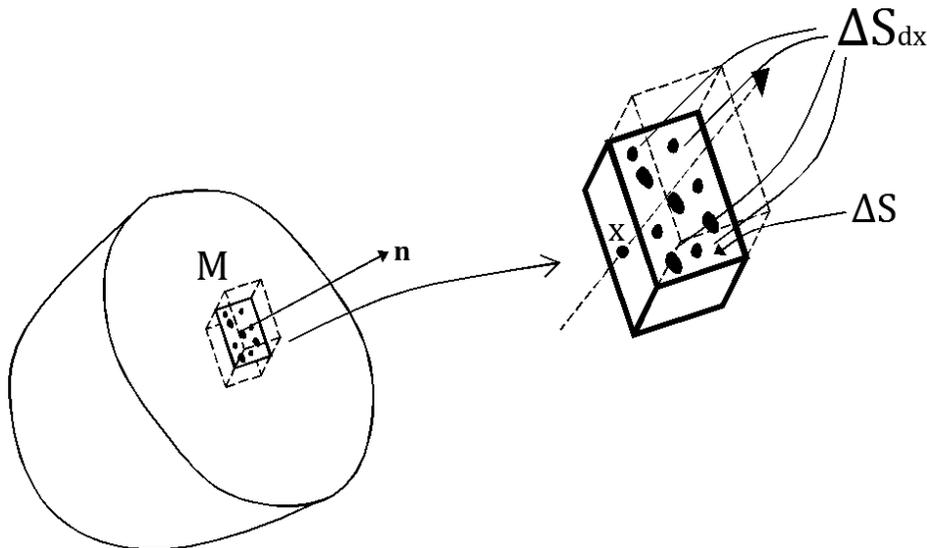


Figura 1.4. Interpretación del daño

$$d(M, n, x) = \frac{\Delta S_{dx}}{\Delta S} \quad (1)$$

Para definir una variable continua sobre el volumen representativo se analizan todos los planos que varían con x , considerando el más dañado:

$$d(M, n) = \text{Max}_x [d(M, n, x)] = \frac{\Delta S_d}{\Delta S} \quad (2)$$

donde d es una variable escalar varía entre 0 y 1 lo cual proporciona una expectativa del índice de daño, de tal forma que:

$$0 \leq d \leq 1 \left\{ \begin{array}{l} d = 0; \text{ material sin daño} \\ d = 1; \text{ material completamente dañado} \end{array} \right\} \quad (3)$$

En un caso unidimensional de daño homogéneo se llega a la definición más simple del daño como densidad superficial de microdefectos, esto se muestra en la *Figura 1.5*:

$$d = \frac{S_d}{S} \quad (4)$$

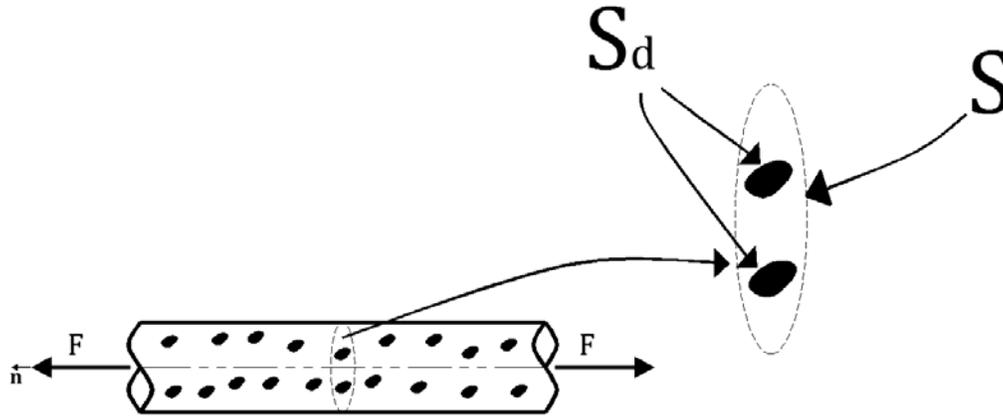


Figura 1.5. Daño en un elemento unidimensional

1.2.3.2 Concepto de esfuerzo efectivo

Recordando la ecuación de esfuerzo nominal:

$$\sigma = \frac{F}{S} \quad (5)$$

Si los defectos están abiertos de modo que no hay fuerzas actuando en la superficie de las microfisuras, se define el esfuerzo efectivo a la superficie $(S - S_d)$ que realmente resiste el esfuerzo en tensión, e introduciendo la variable daño:

$$\bar{\sigma} = \frac{F}{S - S_d} \quad (6)$$

$$d = \frac{S_d}{S} \quad (7)$$

$$\bar{\sigma} = \frac{F}{S(1 - \frac{S_d}{S})} = \frac{F}{S(1 - S_d)} = \frac{\sigma}{1 - d} \quad (8)$$

En el caso de compresión si algunos de los defectos se cierran (aunque el daño permanece inalterado), la superficie que realmente resiste la carga es mayor que la de tensión. En particular, si los defectos están completamente cerrados el esfuerzo nominal es igual al efectivo.

1.2.4 Medición de daño

Esto puede realizarse por medición directa, evaluando el área total de fisuras que está en la superficie en la mesoescala observando microfotografías, pero este método es destructivo y bastante complejo. Conforme aumenta el daño el módulo de elasticidad varía, esto es una medición indirecta basada en la influencia del daño en la elasticidad a través del acoplamiento de estado:

$$\varepsilon_e = \frac{\sigma}{E_o(1-d)} \quad (9)$$

Suponiendo una distribución homogénea de daño en la sección de medición, $E=E_o(1-d)$ se considera como el módulo de elasticidad efectivo del material dañado, dado esto, los valores de daño pueden derivarse de la medición de E si se conoce E_o , donde E_o es el modulo de elasticidad inicial:

$$d = 1 - \frac{E}{E_o} \quad (10)$$

Es un método muy exacto pero requiere de una buena precisión en la medición de las deformaciones, para esto se usan extensómetros y E se mide en la descarga como se muestra en la *Figura 1.6*:

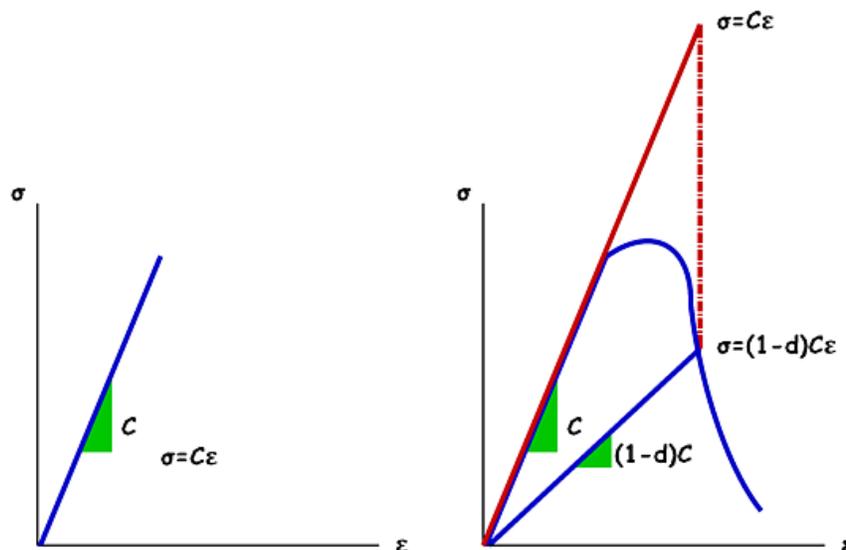


Figura 1.6. Medición del daño dúctil

Este método sólo se puede utilizar si el daño está uniformemente distribuido en el volumen, en el cual se mide la deformación, de manera similar se deben tomar precauciones relacionadas con la no linealidad de las ramas de descargas (debido a efectos viscosos y de endurecimiento), es preferible ignorarlas y medir E en el rango intermedio. En el caso de fatigas de bajos ciclos el procedimiento puede complicarse si se presenta un endurecimiento temprano de E , en este caso, se puede considerar que $d=0$ hasta no alcanzar el umbral de daño. En polímeros o compuestos se debe usar la misma velocidad de deformación durante la descarga para la medición de E y E_0 . En concreto se debe revisar que se tenga una distribución uniforme de fisuras, ya que el método no es válido si se desarrolla una sola fisura grande.

Generalmente se han solucionado problemas donde los sólidos tienen fallas tipo I (de apertura, tipo tensión), esto lo podemos ver en estudios e investigaciones realizadas por Blanco y Oliver (2006), Vieira (2003), Juárez y Ayala (2010), entre otros; que han realizado análisis numéricos o simulaciones numéricas donde resuelven este tipo de problemas. Sin embargo, hay elementos que dentro de una estructura están sometidos a esfuerzos que generan fallas tipo II (cortante con planos de deslizamiento), tema donde se carece de investigación y lo que permite incursionar en propuestas para la solución a este tipo de problemas.

1.3 Objetivos

El objetivo general de esta tesis es formular e implantar modelos de daño para el estudio de elementos estructurales sólidos en su evolución al colapso, los cuales están dominadas por los modos de falla I y II. Para lograr este objetivo general, se establecen los siguientes objetivos particulares:

1. Desarrollo de una formulación matemática para los modelos de daño con superficies de fluencia: sólo tensión y gobernados por cortante.
2. Implantación de algoritmos para la solución de problemas de dichos modelos de daño en el programa de elementos finitos FEAP (Finite Element Analysis Program)
3. Simulación de sólidos sujetos a cargas de colapso gobernados por sólo tensión y sólo cortante.
4. Comparación con resultados experimentales, analíticos y teóricos.

1.4 Organización de la tesis

La organización de esta tesis se presenta en tres capítulos, conclusiones y recomendaciones, y dos anexos:

- *Capítulo 1*; presenta una introducción a la Mecánica de Daño Continuo. Se muestran algunos antecedentes de modelos constitutivos que incluyen daño y la explicación de algunos principios teóricos para el desarrollo de este trabajo.
- *Capítulo 2*; presenta los modelos de daño desarrollados en este proyecto, tomando como referencia el modelo de daño isotrópico con umbral de daño igual tensión compresión; siguiendo la misma metodología se desarrollan los modelos de daño con umbral de daño sólo tensión y sólo cortante, se explican las diferencias que existen con el modelo de referencia y las limitantes en cada uno de ellos.
- *Capítulo 3*; presenta ejemplos de aplicación donde se valida el uso de los modelos de daño desarrollados en esta investigación. Se realizan comparaciones entre dichos modelos, mostrando gráficamente las ventajas y limitaciones de algunos de ellos. Estos ejemplos se comparan con resultados experimentales o análisis numéricos reportados por otros autores.
- Se presentan las conclusiones obtenidas en este trabajo, algunas recomendaciones para el uso de modelos de daño y trabajos futuros que siguen esta línea de investigación.
- *Anexo A*; presenta los diagramas de flujo para la implantación de modelos de elementos finitos tanto general como para cada modelo de daño presentado en este proyecto.
- *Anexo B*; presenta los algoritmos desarrollados como subrutinas en el programa Fortran para su implantación en el programa de elementos finitos FEAP, que utiliza los modelos constitutivos para simulaciones numéricas.

CAPÍTULO 2

Modelos de daño

La mecánica de daño se emplea para describir la degradación progresiva de un material antes, y durante la aparición de microgrietas. Los modelos basados en la mecánica de daño estudian este problema desde un punto de vista macroscópico, típico en la mecánica de medios continuos (llamando continuo a un sólido sin aparición de fisuras). En el caso de materiales isotrópicos el daño se representa como la densidad de grietas o cavidades en un punto, y en los anisotrópicos se representa en un punto asociado a un número determinado de planos.

Se le llama modelo constitutivo de daño a una función matemática capaz de describir el comportamiento físico de un sólido en una escala macroscópica, que se idealiza como resultado de una aplicación de hipótesis sobre un sólido real. El uso de estas hipótesis permite representar una realidad condicionada en la formulación de dichos modelos constitutivos, y por tanto, se deben emplear consecuentemente con ellas (Oller 2001).

El proceso físico de falla se hace mediante los modelos constitutivos de daño que permiten representar el comportamiento no lineal de los materiales en los que ocurre una degradación de rigidez, una vez que se alcanza el valor umbral del material (Juárez 2006). La simulación de daño en materiales mediante modelos constitutivos de daño, permite estudiar sólidos con geometrías complicadas y cargas no lineales antes de ensayarse en laboratorio. Muchas estructuras contienen concentración de esfuerzos y deformaciones que la simulación permite conocer, los que por demandar un análisis más detallado, muchas veces no se consideran en la práctica.

2.1 Modelo de daño isotrópico igual tensión compresión (MDITC)

El comportamiento de un material que presenta una degradación en sus propiedades mecánicas debido a la presencia de pequeñas fisuras que aparecen durante un proceso de carga, se puede simular con modelos de daño isotrópicos. Este proceso se puede simular en el contexto de medios continuos con la variable de daño representada con un escalar, un vector o un tensor. Esta variable de daño caracteriza el deterioro del material relacionando el esfuerzo σ con el esfuerzo efectivo $\bar{\sigma}$, como se muestra en la *Figura 2.1*, mediante la siguiente ecuación (ver *Capítulo 1*):

$$\sigma = (1-d)\bar{\sigma} \quad (11)$$

Relacionando el esfuerzo efectivo y la deformación del material mediante la ley de Hooke se obtiene:

$$\bar{\sigma} = E\varepsilon \quad (12)$$

donde E es el módulo de elasticidad del material. Sustituyendo la ec. (12) en la ec. (11), se tiene:

$$\sigma = (1-d)E\varepsilon \quad (13)$$

Problemas en tres dimensiones (3D), se pueden aplicar como una generalización del caso unidimensional trabajando con tensores y no con magnitudes escalares. De esta manera, el esfuerzo en función del esfuerzo efectivo es:

$$\boldsymbol{\sigma} = (1-d)\bar{\boldsymbol{\sigma}} = (1-d)\mathbf{C}:\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}^d:\boldsymbol{\varepsilon} \quad (14)$$

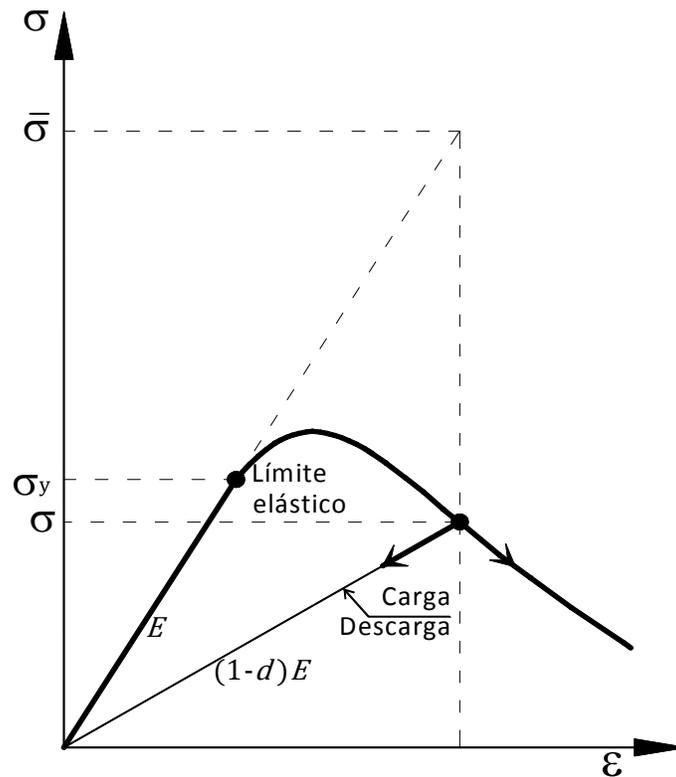


Figura 2.1. Gráfica esfuerzo-deformación en material con ablandamiento

En la ecuación anterior \mathbf{C} es el tensor constitutivo elástico de cuarto orden y \mathbf{C}^d es el tensor constitutivo elástico degradado. Este tensor \mathbf{C} queda en función de μ y λ , que son llamadas constantes de Lamé, como:

$$\mathbf{C} = 2\mu\mathbf{I} + \lambda(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \quad (15)$$

$$\mathbf{I}_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (16)$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (17)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (18)$$

En la ec. (15) el $\mathbf{1}$ representa un tensor unitario de segundo orden, \mathbf{I} un tensor unitario de cuarto orden. En las ec. (17) y (18), ν es la relación de Poisson.

2.1.1 Ecuación constitutiva

Matemáticamente el propósito de las ecuaciones constitutivas, es establecer relaciones entre los campos cinemáticos, térmicos y mecánicos; existen varias ecuaciones derivadas de las leyes fundamentales de la mecánica del medio continuo (Vieira, 2009).

La función de trabajo que ayuda a describir el estado inicial y final del proceso de daño es la llamada energía libre de Helmholtz; la que por unidad de volumen para el caso de un modelo de daño isotrópico se puede definir como:

$$\Psi = \Psi(d, \varepsilon) = (1-d)\Psi_0(\varepsilon) \quad (19)$$

donde $\Psi_0(\varepsilon)$ es la energía libre de Helmholtz de un material elástico no dañado en función del campo de las deformaciones ε . Esta energía puede escribirse como:

$$\Psi_0(\varepsilon) = \frac{1}{2}\varepsilon : \mathbf{C} : \varepsilon = \frac{1}{2}\bar{\sigma} : \varepsilon \quad (20)$$

Sustituyendo la ec. (20) en la ec. (19) se obtiene:

$$\Psi = \frac{1}{2}(1-d)\bar{\sigma} : \varepsilon \quad (21)$$

En problemas estables es válida la siguiente forma de desigualdad de Clausius-Plank, desigualdad que presenta si el proceso se encuentra en estado reversible ($=$; intervalo elástico) o irreversible (\geq ; intervalo elástico):

$$\Xi = \left(\sigma - \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} \right) : \dot{\varepsilon} - \frac{\partial \Psi}{\partial d} \dot{d} \geq 0 \quad (22)$$

Esta desigualdad se debe cumplir para cualquier variación temporal de las deformaciones ε , por lo que debe ser nula. Esta condición proporciona la ley constitutiva para el problema de daño escalar:

$$\sigma = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial d} = \Psi_0 \Rightarrow -\Psi_0 \text{ conjugada de } d \quad (23)$$

Considerando la ley constitutiva, el valor de la disipación del modelo de degradación resulta:

$$\begin{aligned} \Xi &= -\frac{\partial \Psi}{\partial d} \dot{d} \geq 0 \\ \Xi &= \Psi_0 \dot{d} \geq 0 \end{aligned} \quad (24)$$

Considerando la ec. (23) se obtiene la siguiente forma de la ecuación constitutiva:

$$\sigma = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} = (1-d) \frac{\Psi_0}{\partial \varepsilon} = (1-d) \mathbf{C} : \varepsilon = (1-d) \bar{\sigma} \quad (25)$$

Esta ecuación corresponde a la ecuación constitutiva secante del modelo de daño.

2.1.2 Criterio de daño

Para determinar entre un estado de comportamiento elástico que presenta un material estando delimitado por una función de daño, y otro estado donde se verifica el proceso de degradación que sufren las propiedades del material, se utiliza el criterio de daño; este criterio depende, básicamente, del tipo de material del sólido estudiado.

Para poder definir una función de daño, es necesario definir una norma en el espacio de los esfuerzos:

$$\tau_\sigma = \|\sigma\|_{\mathbf{C}^{-1}} = \sqrt{\sigma : \mathbf{C}^{-1} : \sigma} \quad \mathbf{C}^{-1} : \sigma = \varepsilon \quad (26)$$

donde los esfuerzos y deformaciones son:

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}; \quad \varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (27)$$

Análogo a esto, en el espacio de deformaciones:

$$\tau_\varepsilon = \|\boldsymbol{\varepsilon}\|_C = \sqrt{\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}} = \sqrt{2\Psi_0}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C} = \boldsymbol{\sigma}$$
(28)

Se pueden relacionar ambas normas, definidas en las ecs. (26) y (28), mediante:

$$\tau_\sigma = (1-d)\tau_\varepsilon$$
(29)

Con lo anterior se puede definir un dominio elástico en el espacio de esfuerzos y el espacio de deformaciones, mediante las siguientes expresiones, respectivamente:

$$E_\sigma = \{\boldsymbol{\sigma} \mid f(\tau_\sigma, q) < 0\}$$
(30)

$$E_\varepsilon = \{\boldsymbol{\varepsilon} \mid f(\tau_\varepsilon, r) < 0\}$$
(31)

donde q es una función que define el ablandamiento/endurecimiento de material, y r es la variable interna cuyo valor define el límite elástico. Se tienen las siguientes funciones de daño, en el espacio de esfuerzos y deformaciones correspondiente, que definen el límite elástico del comportamiento del material:

$$f(\tau_\sigma, q) = \tau_\sigma - q$$
(32)

$$f(\tau_\varepsilon, r) = \tau_\varepsilon - r$$
(33)

En la *Figura 2.2*, se muestra la representación gráfica de las ecuaciones anteriores, en ambos estados:

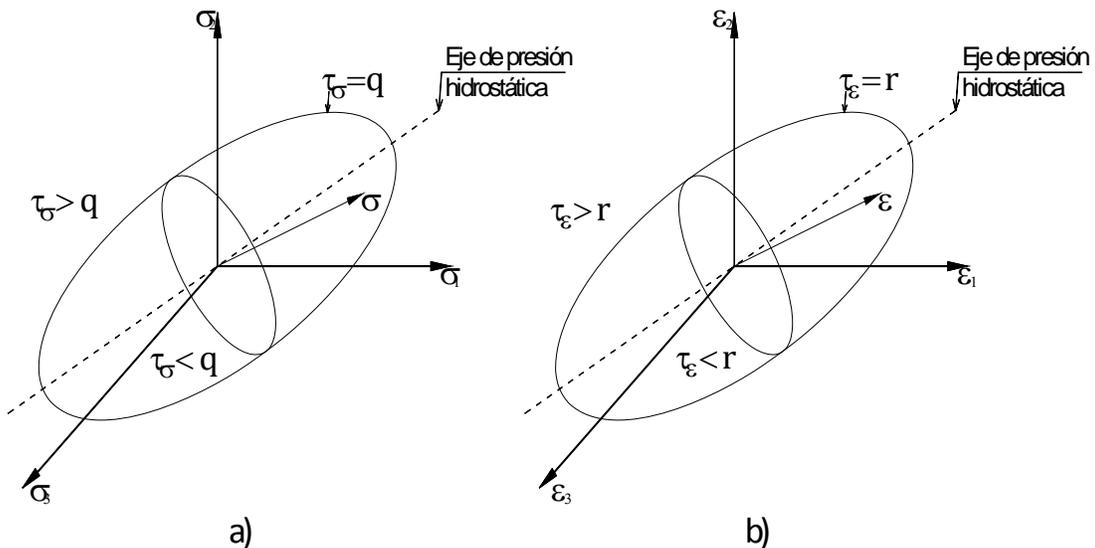


Figura 2.2. Normas en el espacio de: a) esfuerzos y b) deformaciones

Para el caso unidimensional, de la ec. (28), se puede obtener el valor r_0 que representa el valor umbral inicial (delimitante del intervalo elástico):

$$\tau_\varepsilon = \sqrt{\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}} \Rightarrow r_0 = \frac{\sigma_u}{\sqrt{E}} \quad (34)$$

donde σ_u es el valor de resistencia elástica. La variable de ablandamiento/endurecimiento q se define como:

$$q(r) = (1 - d)r \quad (35)$$

De la ec. (35), se puede obtener la siguiente relación de esfuerzos:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{q(r) - \sigma}{r} \boldsymbol{\sigma} \quad (36)$$

2.1.3 Regla de endurecimiento/ablandamiento

La regla de endurecimiento se define por la siguiente ecuación:

$$\dot{q} = H^d(r)\dot{r}; \quad H^d(r) = q'(r) \quad q \in [0, \sigma_y] \quad q_0 = r_0 \quad (37)$$

donde H^d es el módulo de endurecimiento/ablandamiento continuo. En la *Figura 2.3a*, se muestra gráficamente la regla de endurecimiento lineal, la cual se define como:

$$q = \begin{cases} r_0 & r \leq r_0 \\ r_0 + H^d(r - r_0) & r > r_0 \end{cases} \quad (38)$$

y en la *Figura 2.3b*, para la regla exponencial:

$$q = \begin{cases} r_0 & r \leq r_0 \\ r_0 \exp\left(-H^d\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)\right) & r > r_0 \end{cases} \quad (39)$$

Para el caso lineal, la variable de daño se expresa de la siguiente forma:

$$d = \begin{cases} 0 & r \leq r_0 \\ 1 - \frac{r_0}{r} - H^d\left(1 - \frac{r_0}{r}\right) \neq 1 & r > r_0 \end{cases} \quad (40)$$

y en el caso exponencial:

$$d = \begin{cases} 0 & r \leq r_0 \\ 1 - \frac{r_0}{r} \exp\left(-H^d \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)\right) & r > r_0 \end{cases} \quad (41)$$

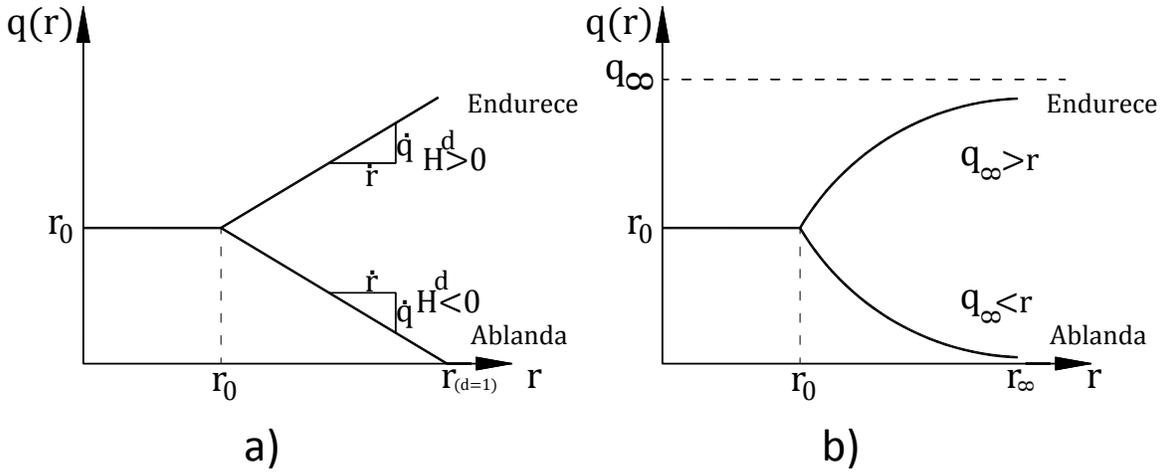


Figura 2.3. Regla de ablandamiento/endurecimiento: a) lineal y b) exponencial

Algunas observaciones importantes se pueden hacer a partir de la Figura 2.3:

- 1) Cuando $H^d > 0$ existe endurecimiento del material, por tanto, la variable q crece; esto significa que entre mayor deformación ocurra en el material, su esfuerzo es mayor;
- 2) Cuando $H^d < 0$ existe ablandamiento y q decrece, esto físicamente significa que entre mayor deformación ocurra en el material, su esfuerzo será menor; así, para que se presente el ablandamiento, primero debe presentarse la falla; y
- 3) En el caso de que $H^d = 0$ la variable q se mantiene constante, a este efecto se le conoce como daño perfecto.

Las leyes de evolución de la variable interna y de la variable de daño son:

$$\dot{r} = \gamma \quad (42)$$

$$\dot{d} = \gamma \frac{\partial f(\tau_\sigma, q)}{\partial r} \quad (43)$$

donde γ es un valor escalar no negativo denominado parámetro de consistencia de daño. El intervalo de la variable interna es $[0, \infty)$. Si la variable de daño es cero, la variable interna r tiene el valor de r_0 , y cuando el daño es igual a uno, la variable es $r = r_\infty$.

2.1.4 Condiciones de carga y descarga

Para obtener el multiplicador de daño γ , se utilizan las condiciones de carga y descarga, conocidas como las condiciones de Kuhn-Tucker (condiciones necesarias para que un sistema no lineal sea óptimo):

$$\gamma \geq 0; f(\tau_\sigma, q) \leq 0; \gamma f(\tau_\sigma, q) = 0 \quad (44)$$

y la condición de consistencia:

$$\gamma \dot{f}(\tau_\sigma, q) = 0 \quad (45)$$

Las ecuaciones expresadas anteriormente determinan la condición de carga o descarga que presente el material, de tal forma que:

- Si se cumple que $f(\tau_\sigma, q) < 0$ el material se encuentra en la condición elástica, por lo tanto $\tau_\sigma - q < 0$ en un tiempo t , de lo que se sabe que $\tau_\sigma < q$, con lo cual se determina que $\gamma = \dot{r} = 0$ y que $\gamma f(\tau_\sigma, q) = 0$
- Si por el contrario, se cumple que $f(\tau_\sigma, q) = 0$ el material se encuentra en su rango inelástico, por lo tanto $\tau_\sigma - q = 0$ en un tiempo t , de lo anterior se puede saber que $\tau_\sigma = q$ lo que determina que $\gamma = \dot{r} \geq 0$ requiriendo que $\gamma \dot{f}(\tau_\sigma, q) = 0$.

2.1.5 Módulo tangente

El operador que relaciona la evolución de los esfuerzos y deformaciones se denomina módulo tangente, la ecuación constitutiva necesaria para su cálculo es:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^d : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (46)$$

donde \mathbf{C}^d es el módulo constitutivo tangente. Se considera la siguiente ecuación para su obtención:

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - d)\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (47)$$

Derivando con respecto al tiempo la ecuación anterior, se obtiene:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (1-d)\mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{d}\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (48)$$

Considerando que en el material no se presenta un incremento de carga, entonces la variable $\dot{d} = 0$, por lo que la ec. (47) se reduce a:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (1-d)\mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \Rightarrow \mathbf{C}^d = (1-d)\mathbf{C} \quad (49)$$

Diferenciando τ_ε , definido en la ec. (26), con respecto al tiempo y considerando la ec.(33), se obtiene:

$$\tau_\varepsilon = \sqrt{\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}} \Rightarrow \dot{\tau}_\varepsilon = \dot{r} = \frac{1}{\tau_\varepsilon} \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (50)$$

De la ec. (35) se obtiene la derivada en el tiempo de la variable de daño:

$$\dot{d} = \left(\frac{q(r) - q'(r)r}{r^3} \right) \dot{r} \quad (51)$$

Sustituyendo ec. (37) en la ec. (51), se tiene:

$$\dot{d} = \left(\frac{q(r) - H^d r}{r^3} \right) \dot{r} \quad (52)$$

Por último, se obtiene el tensor constitutivo tangente sustituyendo la ec. (51) en la ec. (48):

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}} &= (1-d)\mathbf{C} - \left(\frac{q(r) - q'(r)r}{r^3} \right) (\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C}) \\ &\quad \Downarrow \\ \mathbf{C}^d &= (1-d)\mathbf{C} - \left(\frac{q(r) - q'(r)r}{r^3} \right) (\bar{\boldsymbol{\sigma}} \otimes \bar{\boldsymbol{\sigma}}) \end{aligned} \quad (53)$$

En la *Figura 2.4* se muestra la superficie de daño que contiene el estado de esfuerzos elásticos que define al MDITC, el cual se resume mediante las ecuaciones en la *Tabla 2.1*.

Tabla 2.1. Ecuaciones para el Modelo de Daño Igual Tensión Compresión (MDITC)

a) $\psi(\varepsilon, r) = (1-d(r))\psi_0$	Energía libre de Helmholtz
b) $d(r) = 1 - \frac{q}{r}; q \in [r_0, 0] \quad d \in [0, 1]$	Variable de daño
c) $\sigma = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} = (1-d)\mathbf{C} : \varepsilon$	Ecuación constitutiva
d) $\dot{r} = \gamma \left\{ \begin{array}{l} r \in [r_0, \infty] \\ r_0 = r _{t=0} = \frac{\sigma_y}{\sqrt{E}} \end{array} \right\}$	Ley de evolución de daño
e) $f(\tau_\sigma, q) = \tau_\sigma - q = \sqrt{\sigma : \mathbf{C}^{e-1} : \sigma} - q; \left\{ \begin{array}{l} q \in [0, r_0] \\ q _{t=0} = r_0 \end{array} \right\}$	Criterio de daño
f) $\dot{q} = H^d(r)\dot{r}; H^d(r) = q'(r) \leq 0$	Regla de endurecimiento
g) $f < 0; \quad \gamma \geq 0; \quad \gamma f = 0$	Condiciones de carga y descarga
h) $\gamma \dot{f} = 0 \Leftrightarrow f = 0$	Condición de consistencia

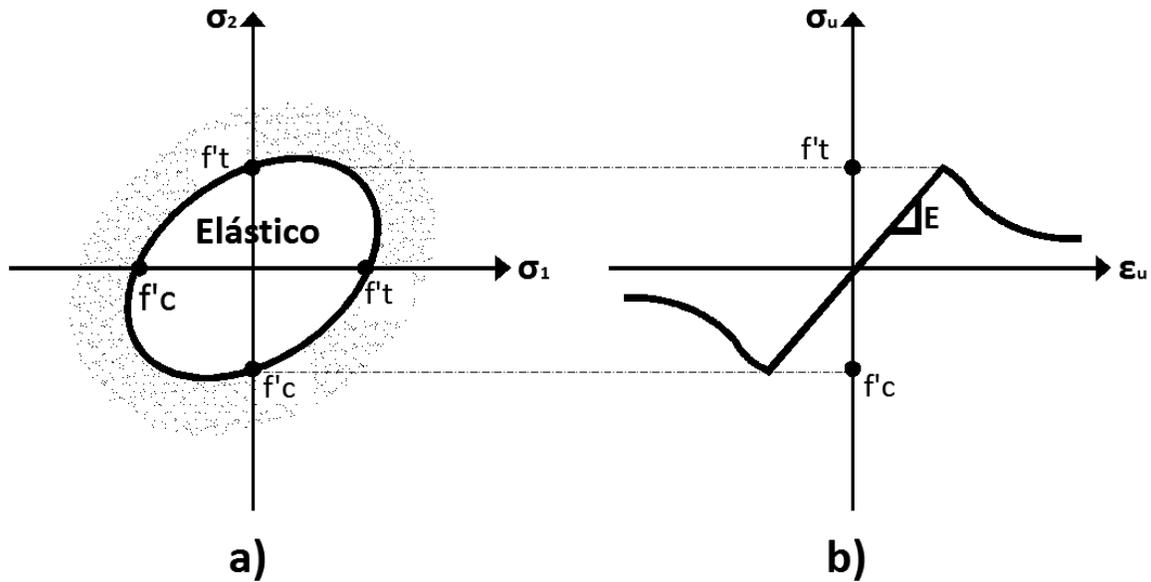


Figura 2.4. Modelo de daño isotrópico igual tensión compresión: a) superficie de daño y b) curva esfuerzo-deformación

2.2 Modelo de daño isotrópico sólo tensión (MDST)

Para la construcción del algoritmo de daño sólo tensión (MDST) se parte del MDITC, la diferencia principal entre ambos modelos de daño es la definición de la norma en el espacio de deformaciones o de esfuerzos. Para valorar esto, se hizo una investigación de propuestas realizadas por otros autores:

- Oliver (1990) propone que para un modelo en sólo tensión la norma se calcule con base en el tensor de esfuerzos principales:

$$\tau_{\sigma} = \sqrt{\boldsymbol{\sigma}^+ : \mathbf{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma}^+} \quad (54)$$

donde $\boldsymbol{\sigma}^+$ es el tensor de esfuerzos principales solo positivos ($\sigma_n \geq 0$); sin embargo, al utilizar esta norma en ejemplos de aplicación, se observó que existe atoramiento de esfuerzos y no se observa apropiadamente la degradación del material por lo que se concluyó que no es adecuada para definir el MDST.

- Vieira (2003) propone una formulación diferente para el cálculo de la norma, respetando el uso del tensor de esfuerzos principales pero en combinación con tensores de esfuerzos y deformaciones normales:

$$\begin{aligned} \tau_{\sigma} &= \sqrt{\boldsymbol{\sigma}^+ : \mathbf{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma}} & \mathbf{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\varepsilon} \\ \tau_{\varepsilon} &= \sqrt{\boldsymbol{\varepsilon}^+ : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}} & \boldsymbol{\varepsilon}^+ : \mathbf{C} &= \boldsymbol{\sigma}^+ \end{aligned} \quad (55)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^+ = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \boldsymbol{\varepsilon}^+ = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}; \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (56)$$

donde $\boldsymbol{\sigma}^+$ sigue siendo el tensor de esfuerzos principales sólo positivos ($\sigma_n \geq 0$), $\boldsymbol{\varepsilon}^+$ es el tensor de deformaciones principales solo positivas ($\varepsilon_n \geq 0$), y los tensores $\boldsymbol{\sigma}$ y $\boldsymbol{\varepsilon}$ son los tensores de esfuerzos y deformaciones normales respectivamente, como se muestra en las ecs. (55) y (56). Aplicar esta propuesta en algunos ejemplos, se observó un buen desarrollo del problema con el cálculo de la degradación del material de forma congruente, por lo que se concluyó que es adecuado para el modelo de daño.

2.2.1 Módulo tangente

La norma τ_ε , definida en la ec. (55), con respecto al tiempo y considerando la ec. (33) se obtiene:

$$\tau_\varepsilon = \sqrt{\boldsymbol{\varepsilon}^+ : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}} \Rightarrow \dot{\tau}_\varepsilon = \dot{r} = \frac{1}{2\tau_\varepsilon} \boldsymbol{\sigma}^+ : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (57)$$

Al sustituir la ec. (57) en las ecs. (51) y (48) se obtiene el módulo tensor tangente:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}} &= (1-d)\mathbf{C} - \left(\frac{q(r) - q'(r)r}{2r^3} \right) (\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^+ \otimes \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C}) \\ &\quad \Downarrow \\ \mathbf{C}^d &= (1-d)\mathbf{C} - \left(\frac{q(r) - q'(r)r}{2r^3} \right) (\boldsymbol{\sigma}^+ \otimes \boldsymbol{\sigma}^-) \end{aligned} \quad (58)$$

En la *Figura 2.5* se muestra el umbral de daño del MDST. Este modelo se resume en las ecuaciones mostradas en la *Tabla 2.2*:

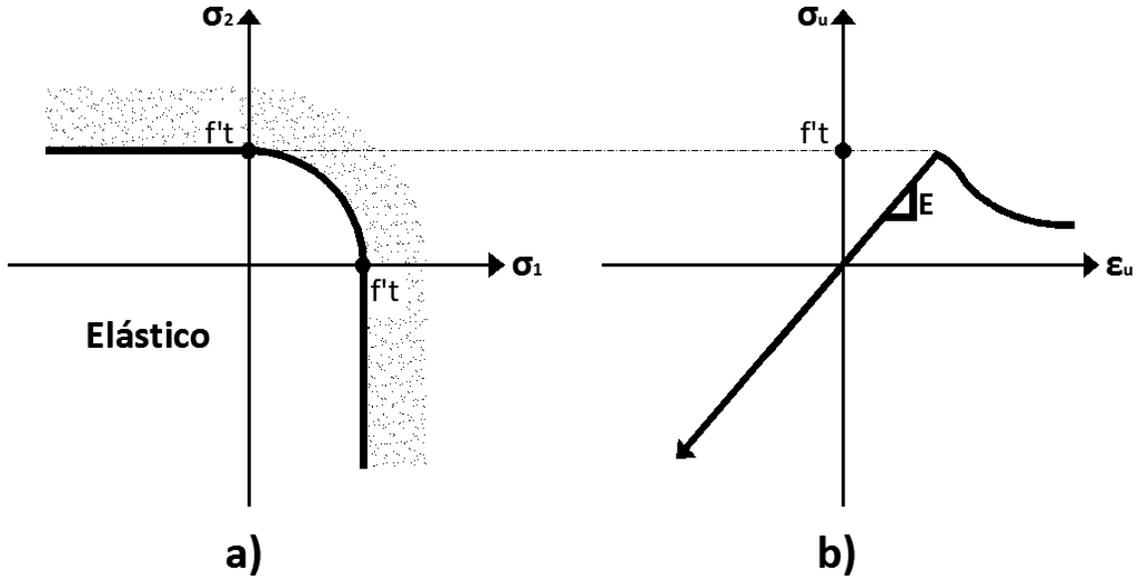


Figura 2.5. Modelo de daño solo tensión: a) superficie de daño y b) curva esfuerzo-deformación

Tabla 2.2. Ecuaciones para el Modelo de Daño Sólo Tensión (MDST)

a) $\psi(\varepsilon, r) = (1 - d(r))\psi_0$	Energía libre de Helmholtz
b) $d(r) = 1 - \frac{q}{r}; q \in [r_0, 0] \quad d \in [0, 1]$	Variable de daño
c) $\sigma = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} = (1 - d)\mathbf{C} : \varepsilon$	Ecuación constitutiva
d) $\dot{r} = \gamma \left\{ \begin{array}{l} r \in [r_0, \infty] \\ r_0 = r _{t=0} = \frac{\sigma_u}{\sqrt{E}} \end{array} \right\}$	Ley de evolución de daño
e) $f(\tau_\sigma, q) = \tau_\sigma - q = \sqrt{\sigma^+ : \mathbf{C}^{e-1} : \sigma} - q; \left\{ \begin{array}{l} q \in [0, r_0] \\ q _{t=0} = r_0 \end{array} \right\}$	Criterio de daño
f) $\dot{q} = H^d(r)\dot{r}; \quad H^d(r) = q'(r) \leq 0$	Regla de endurecimiento
g) $f < 0; \quad \gamma \geq 0; \quad \gamma f = 0$	Condiciones de carga y descarga
h) $\gamma \dot{f} = 0 \Leftrightarrow f = 0$	Condición de consistencia

Los problemas de aplicación con el MDST, mostraron las siguientes observaciones: sólo es válido para ciertos estados de deformación, pues el modelo sólo converge cuando las deformaciones máximas ocurren en dirección horizontal X ($\varepsilon_x > \varepsilon_y, \varepsilon_x > \varepsilon_z$), lo cual se valida revisando la norma propuesta para este modelo, $\tau_\sigma = \sqrt{\sigma^+ \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \sigma} = \sqrt{\sigma^+ \cdot \varepsilon}$, donde en σ^+ los esfuerzos principales se acomodan de 1 a 3 de mayor a menor en magnitudes, esto se ejemplifica en la Figura 2.6.

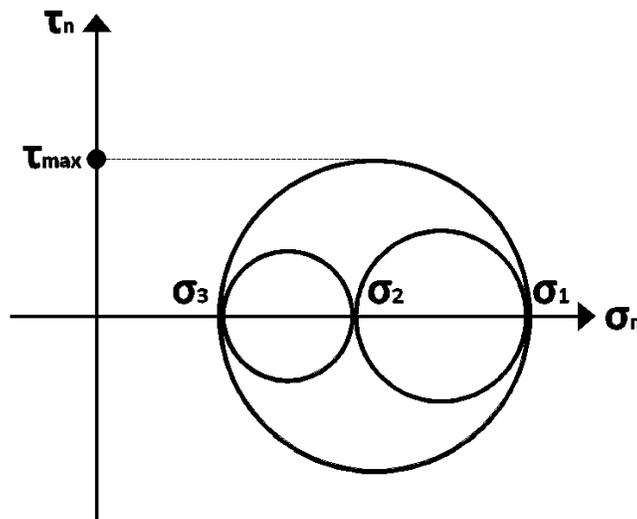


Figura 2.6. Círculo de Mohr: orden de los esfuerzos principales

Puesto que el esfuerzo principal uno siempre es el mayor ($\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$), cuando se considera un problema donde la deformación máxima es ε_x , los resultados son consistentes:

$$\sqrt{\boldsymbol{\sigma}^+ : \boldsymbol{\varepsilon}} \Rightarrow \sqrt{\begin{pmatrix} \sigma_1 \neq 0 \\ \sigma_2 \approx 0 \\ \sigma_3 \approx 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \varepsilon_x \neq 0 \\ \varepsilon_y \approx 0 \\ \varepsilon_z \approx 0 \end{pmatrix}} \therefore \sqrt{\sigma_1 : \varepsilon_x} \neq 0$$

contrario a esto, si la deformación máxima es ε_y ó ε_z los resultados ya no son válidos, en este caso, al realizar el cálculo de la norma los valores serían demasiado pequeños por lo que no se alcanza la superficie de daño.

$$\sqrt{\boldsymbol{\sigma}^+ : \boldsymbol{\varepsilon}} \Rightarrow \sqrt{\begin{pmatrix} \sigma_1 \neq 0 \\ \sigma_2 \approx 0 \\ \sigma_3 \approx 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \varepsilon_x \approx 0 \\ \varepsilon_y \neq 0 \\ \varepsilon_z \approx 0 \end{pmatrix}} \therefore \sqrt{\boldsymbol{\sigma}^+ : \boldsymbol{\varepsilon}} \approx 0$$

En consecuencia se requiere de una carga mayor para colapsar un sólido, obteniendo resultados no reales. Lo anterior se demuestra en los ejemplos de la *sección 4.3*. Por lo tanto, se concluye que este modelo de daño sólo es válido cuando las deformaciones que ocurren en el material son mayores en la dirección horizontal X . En la ec. (59) se muestran los productos tensoriales de a) convergencia y b) no convergencia.

$$\boldsymbol{\sigma}^+ : \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \sigma_1^+ \\ \sigma_2^+ \\ \sigma_3^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \text{ max} \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_y \end{pmatrix} \quad \text{a) } \quad \boldsymbol{\sigma}^+ : \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \sigma_1^+ \\ \sigma_2^+ \\ \sigma_3^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \text{ max} \\ \varepsilon_y \end{pmatrix} \quad \text{ó } \quad \boldsymbol{\sigma}^+ : \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \sigma_1^+ \\ \sigma_2^+ \\ \sigma_3^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_y \text{ max} \end{pmatrix} \quad \text{b) } \quad (59)$$

2.3 Modelo de daño sólo cortante (MDSC)

Para la formulación del modelo de daño sólo cortante (MDSC) también se partió del MDITC, en el que se propone una norma que considere problemas que fallan principalmente bajo esfuerzos a cortante, considerando el criterio de Tresca, la norma propuesta para este modelo de daño es:

$$\begin{aligned} \tau_\sigma &= \sqrt{\boldsymbol{\sigma}_c : \mathbf{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma}} & \mathbf{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\varepsilon} \\ \tau_\varepsilon &= \sqrt{\boldsymbol{\varepsilon}_c : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}} & \boldsymbol{\varepsilon}_c : \mathbf{C} &= \boldsymbol{\sigma}_c \end{aligned} \quad (60)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_c = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tau_c \max_1 \\ \tau_c \max_2 \\ \tau_c \max_3 \end{Bmatrix}; \quad \boldsymbol{\varepsilon}_c = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \gamma_c \max_1 \\ \gamma_c \max_2 \\ \gamma_c \max_3 \end{Bmatrix}; \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}; \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (61)$$

donde $\tau_c \max_n$ y $\gamma_c \max_n$ son los esfuerzos y deformaciones angulares máximos respectivamente, calculados como:

$$\begin{aligned} \tau_c \max_1 &= \sqrt{\frac{(\sigma_x + \sigma_y)^2}{4} + \tau_{xy}^2} \quad \text{ó} \quad \tau_c \max_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (\text{primer círculo}) \\ \tau_c \max_2 &= \sqrt{\frac{(\sigma_y + \sigma_z)^2}{4} + \tau_{yz}^2} \quad \text{ó} \quad \tau_c \max_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (\text{segundo círculo}) \\ \tau_c \max_3 &= \sqrt{\frac{(\sigma_z + \sigma_x)^2}{4} + \tau_{zx}^2} \quad \text{ó} \quad \tau_c \max_3 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \quad (\text{tercer círculo}) \end{aligned} \quad (62)$$

$$\begin{aligned} \gamma_c \max_1 &= \sqrt{\frac{(\varepsilon_x + \varepsilon_y)^2}{4} + \gamma_{xy}^2} \quad \text{ó} \quad \gamma_c \max_1 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{2} \quad (\text{primer círculo}) \\ \gamma_c \max_2 &= \sqrt{\frac{(\varepsilon_y + \varepsilon_z)^2}{4} + \gamma_{yz}^2} \quad \text{ó} \quad \gamma_c \max_2 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \quad (\text{segundo círculo}) \\ \gamma_c \max_3 &= \sqrt{\frac{(\varepsilon_z + \varepsilon_x)^2}{4} + \gamma_{zx}^2} \quad \text{ó} \quad \gamma_c \max_3 = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{2} \quad (\text{tercer círculo}) \end{aligned} \quad (63)$$

El valor de r_0 se obtiene como en la ec. (34) pero en función del esfuerzo cortante de fluencia y el modulo de corte:

$$\tau_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_c : C : \varepsilon} \Rightarrow r_0 = \frac{\tau_u}{\sqrt{G}} \quad (64)$$

$$\tau_u = \frac{\sigma_u}{2} \Rightarrow r_0 = \frac{\sigma_u}{2\sqrt{G}}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (65)$$

donde ν es la relación de Poisson.

2.3.1 Módulo tangente

Diferenciando la norma τ_ε , definida en la ec. (60), con respecto al tiempo y considerando la ec. (33):

$$\tau_\varepsilon = \sqrt{\boldsymbol{\varepsilon}_c : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}} \Rightarrow \dot{\tau}_\varepsilon = \dot{r} = \frac{1}{2\tau_\varepsilon} \boldsymbol{\sigma}_c : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (66)$$

El módulo tensor tangente se obtiene sustituyendo la ec. (66) en las ec. (51) y (48):

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}} &= (1-d)\mathbf{C} - \left(\frac{q(r) - q'(r)r}{2r^3} \right) (\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}_c \otimes \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C}) \\ &\quad \Downarrow \\ \mathbf{C}^d &= (1-d)\mathbf{C} - \left(\frac{q(r) - q'(r)r}{2r^3} \right) (\bar{\boldsymbol{\sigma}}_c \otimes \bar{\boldsymbol{\sigma}}) \end{aligned} \quad (67)$$

Este modelo de daño MDSC se resume con ecuaciones dadas en la *Tabla 2.3*, con el umbral de daño mostrado en la *Figura 2.7*.

Tabla 2.3. Ecuaciones para el Modelo de Daño Sólo Cortante (MDSC)

a) $\psi(\varepsilon, r) = (1-d(r))\psi_0$	<i>Energía libre de Helmholtz</i>
b) $d(r) = 1 - \frac{q}{r}; q \in [r_0, 0] \quad d \in [0, 1]$	<i>Variable de daño</i>
c) $\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = (1-d)\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}$	<i>Ecuación constitutiva</i>
d) $\dot{r} = \gamma \left\{ \begin{array}{l} r \in [r_0, \infty] \\ r_0 = r _{t=0} = \frac{\sigma_u}{2\sqrt{G}} \end{array} \right\}$	<i>Ley de evolución de daño</i>
e) $f(\tau_\sigma, q) = \tau_\sigma - q = \sqrt{\boldsymbol{\sigma}_c : \mathbf{C}^{e-1} : \boldsymbol{\sigma}} - q; \left\{ \begin{array}{l} q \in [0, r_0] \\ q _{t=0} = r_0 \end{array} \right\}$	<i>Criterio de daño</i>
f) $\dot{q} = H^d(r)\dot{r}; \quad H^d(r) = q'(r) \leq 0$	<i>Regla de endurecimiento</i>
g) $f < 0; \quad \gamma \geq 0; \quad \gamma f = 0$	<i>Condiciones de carga y descarga</i>
h) $\gamma \dot{f} = 0 \Leftrightarrow f = 0$	<i>Condición de consistencia</i>

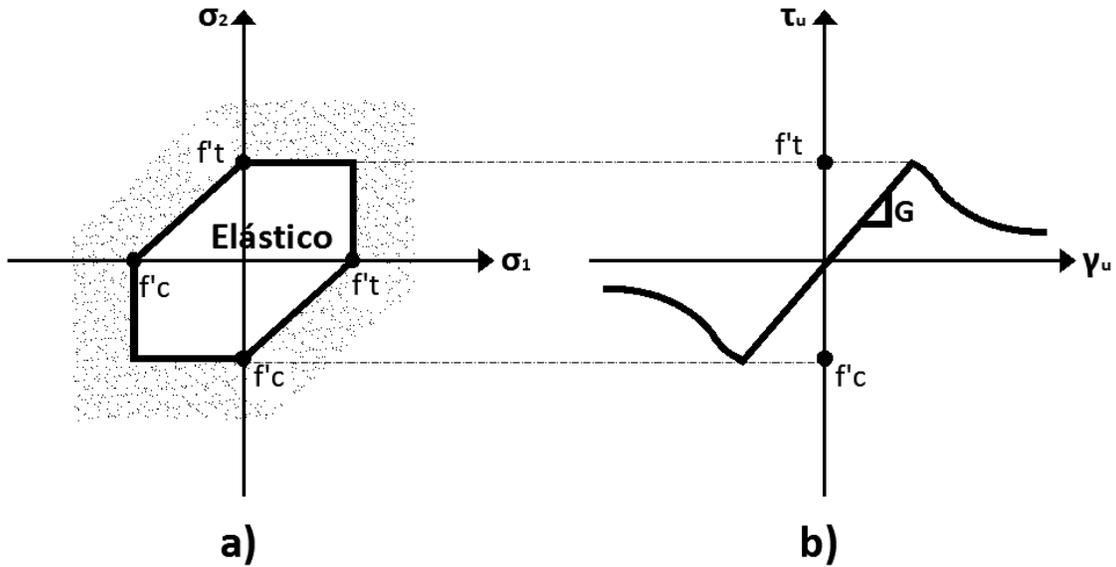
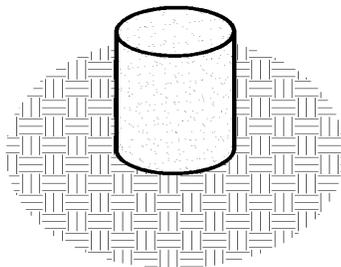


Figura 2.7. Modelo de daño solo cortante: a) superficie de daño y b) curva esfuerzo-deformación

Cabe mencionar que este modelo de daño sólo es válido para elementos sujetos a cortante puro donde las deformaciones angulares y esfuerzos cortantes son mayores una vez que se inicia el incremento de carga, esto quiere decir:

$$\begin{aligned} \tau_{\max_1} &> \sigma_1 \wedge \gamma_{\max_1} > \varepsilon_1 \\ \tau_{\max_2} &> \sigma_2 \wedge \gamma_{\max_2} > \varepsilon_2 \\ \tau_{\max_3} &> \sigma_3 \wedge \gamma_{\max_3} > \varepsilon_3 \end{aligned}$$

Por ejemplo, un cilindro de concreto ensayado a compresión se espera que alcance un esfuerzo a compresión igual a su $f'c$ con el que fue dosificado; sin embargo, la falla que se presenta no es precisamente en compresión sino, que la falla ocurre en cortante. Aunque el MDSC simula elementos donde la concentración de esfuerzos es de cortante, no puede emplearse para sólidos en los que el esfuerzo inicial es a compresión y las deformaciones angulares son casi nulas, impidiendo al modelo de daño alcanzar la superficie de falla, esto se ejemplifica en las Figuras 2.8 a 2.10.



$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 = 0 \\ \sigma_2 = 0 \\ \tau_{\max} = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 = 0 \\ \varepsilon_2 = 0 \\ \gamma_{\max} = 0 \end{array} \right\}$$

Figura 2.8. Prueba de compresión en cilindro de concreto: cilindro antes de prueba

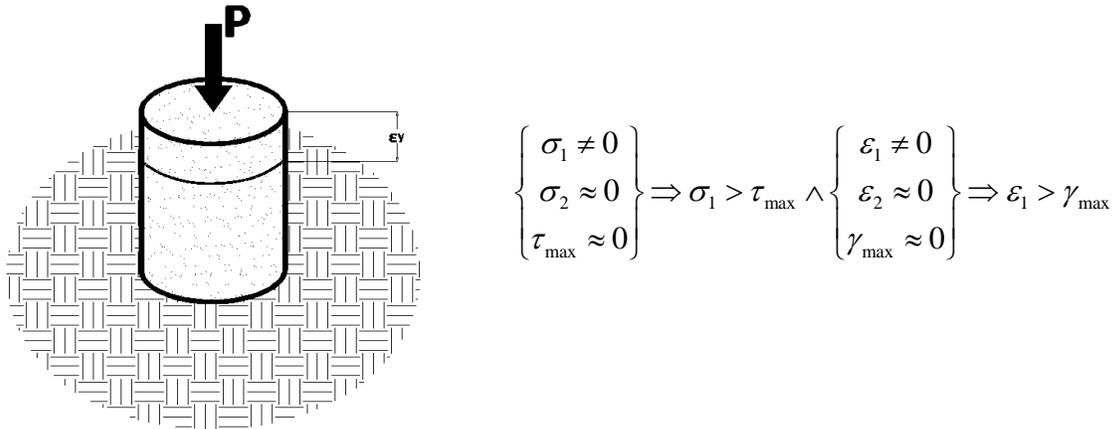


Figura 2.9. Prueba de compresión en cilindro de concreto: inicio de aplicación de carga

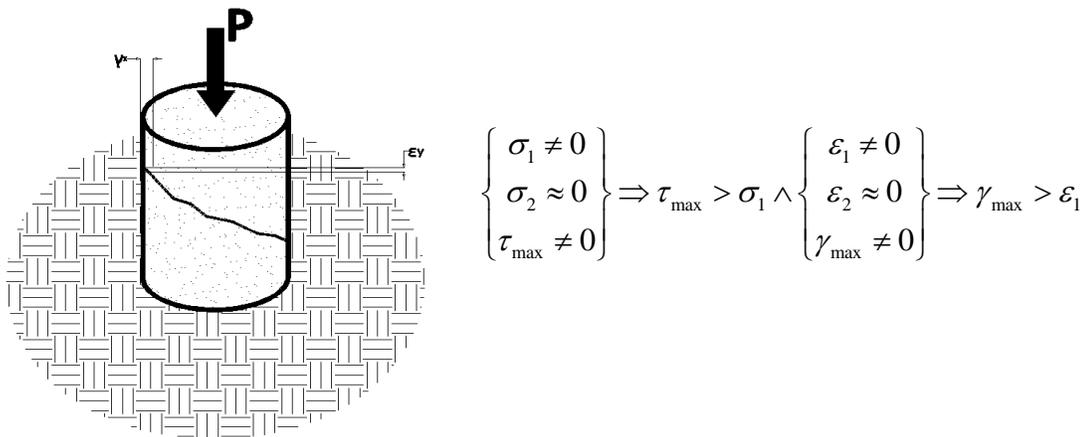


Figura 2.10. Prueba de compresión en cilindro de concreto: inicio de falla a cortante

Por lo tanto, en sólidos que presentan este tipo de comportamiento, se puede usar un modelo de daño igual tensión compresión, o un modelo de daño diferente tensión compresión (Méndez 2012).

2.4 Modelo de daño diferente tensión compresión (MDSTC) (Méndez, 2012)

La diferencia principal de este modelo de daño diferente tensión compresión (MDDTC) consiste en la definición de la norma de deformaciones y esfuerzos, la cual es afectada por un parámetro como el propuesto por Lubliner *et. al.* (1989).

En la mayoría de los materiales existe una diferencia entre el umbral de daño a tensión y a compresión, $n=f' / f'_t$, como se muestra en la *Figura 2.11*; para definir esta diferencia en el material, la norma se modifica con el parámetro M como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}\tau_{\sigma} &= M\sqrt{\boldsymbol{\sigma}:\mathbf{C}^{e^{-1}}:\boldsymbol{\sigma}} \\ \tau_{\varepsilon} &= M\sqrt{\boldsymbol{\varepsilon}:\mathbf{C}^{e^{-1}}:\boldsymbol{\varepsilon}}\end{aligned}\tag{68}$$

donde el parámetro M se define como:

$$M = \theta + \left(\frac{1-\theta}{n}\right)\tag{69}$$

donde θ es un factor de peso que depende del estado de esfuerzos principales que se expresa como:

$$\theta = \frac{\sum_{i=1}^3 \langle \sigma_i \rangle}{\sum_{i=1}^3 |\sigma_i|}\tag{70}$$

siendo $\langle \sigma_i \rangle$ los esfuerzos principales solo positivos, y $|\sigma_i|$ el valor absoluto de los mismos. El factor de peso tiene un rango de valores de $0 \leq \theta \leq 1$, donde vale 0 para el caso de compresión triaxial $0 \geq \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ y 1 para el caso de tensión triaxial $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq 0$. En el caso del parámetro M se maneja en un rango de valores $1 \geq M \geq 1/n$, donde vale 1 para el caso de tensión triaxial y $1/n$ para el caso de compresión triaxial. El parámetro M escala los esfuerzos a compresión $1/n$ veces para compararlos contra el valor del umbral de daño que se encuentra en función de esfuerzo último a tensión (σ_{u_t}) del material, obteniendo de esta manera la certidumbre si el material sufre daño a compresión.

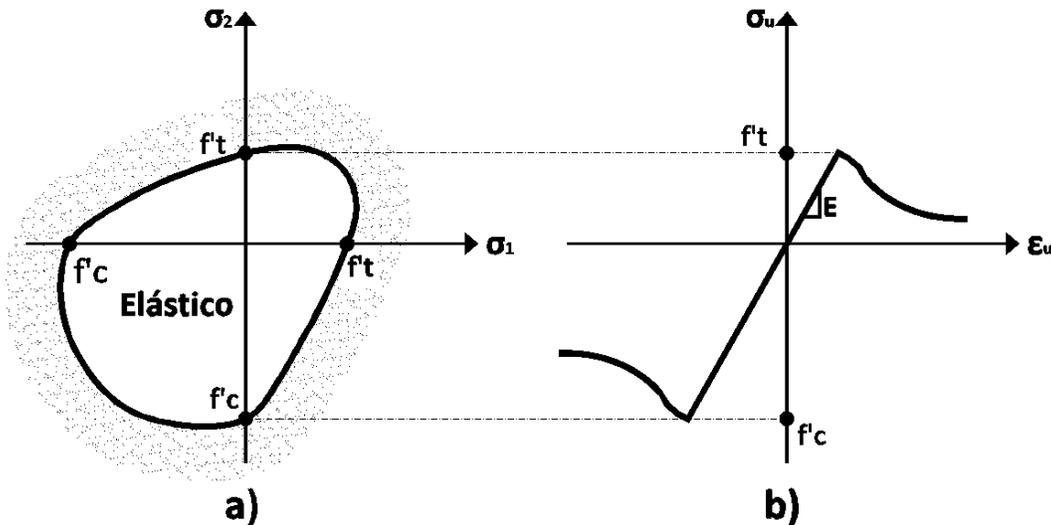


Figura 2.11. Modelo de daño diferente tensión compresión: a) superficie de daño y b) curva esfuerzo-deformación

Realizando el mismo procedimiento algebraico de los modelos anteriores, se obtiene el modulo tensor tangente:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}} &= (1-d)\mathbf{C} - M^2 \left(\frac{q(r) - q'(r)r}{r^3} \right) (\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C}) \\ &\quad \Downarrow \\ \mathbf{C}^d &= (1-d)\mathbf{C} - M^2 \left(\frac{q(r) - q'(r)r}{r^3} \right) (\bar{\boldsymbol{\sigma}} \otimes \bar{\boldsymbol{\sigma}}) \end{aligned} \quad (71)$$

El MDDTC se resume con las ecuaciones de la *Tabla 2.4*, donde se observa que la diferencia principal con el MDITC consiste en que el criterio de daño en el inciso e) está multiplicado por M y el modulo tensor tangente definido en la ec. (71) está multiplicado por M^2 .

Tabla 2.4. Ecuaciones para el MDDTC

a) $\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, r) = (1-d(r))\psi_0$	<i>Energía libre de Helmholtz</i>
b) $d(r) = 1 - \frac{q}{r}; q \in [r_0, 0] \quad d \in [0, 1]$	<i>Variable de daño</i>
c) $\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = (1-d)\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}$	<i>Ecuación constitutiva</i>
d) $\dot{r} = \gamma \left\{ \begin{array}{l} r \in [r_0, \infty] \\ r_0 = r _{t=0} = \frac{\sigma_u}{2\sqrt{G}} \end{array} \right\}$	<i>Ley de evolución de daño</i>
e) $f(\tau_\sigma, q) = \tau_\sigma - q = M\sqrt{\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{C}^{e-1} : \boldsymbol{\sigma}} - q; \left\{ \begin{array}{l} q \in [0, r_0] \\ q _{t=0} = r_0 \end{array} \right\}$	<i>Criterio de daño</i>
f) $\dot{q} = H^d(r)\dot{r}; \quad H^d(r) = q'(r) \leq 0$	<i>Regla de endurecimiento</i>
g) $f < 0; \quad \gamma \geq 0; \quad \gamma f = 0$	<i>Condiciones de carga y descarga</i>
h) $\gamma \dot{f} = 0 \Leftrightarrow f = 0$	<i>Condición de consistencia</i>

CAPÍTULO 3

Ejemplos de Aplicación

Los modelos de daño mostrados en este trabajo: superficie de daño sólo tensión (MDST) y superficie de daño sólo cortante (MDSC); fueron desarrollados para su empleo tanto en problemas en dos dimensiones (2D) como en tres dimensiones (3D). En este capítulo se muestran algunos ejemplos de aplicación que validan el uso de estos modelos de daño, los cuales se comparan con otras formulaciones numéricas, y ejemplos experimentales reportados en la literatura.

Para la realización de estos ejemplos se siguió el esquema de trabajo mostrado a continuación:

- 1) Mallado del sólido, generando mallas estructuradas de elementos finitos con relación no mayor de 1 a 5;
- 2) Elaboración del archivo de entrada para su ejecución y simulación en el programa FEAP (Finite Elements Analysis Program) (Taylor, 2008); e
- 3) Interpretación y comparación de los resultados.

La programación de los modelos de daño se realizó en subrutinas de usuario escritas en el lenguaje Fortran, las cuales fueron compiladas al programa FEAP. Para simular el ablandamiento se utilizó un decaimiento lineal o exponencial, según el problema. Todos los ejemplos realizados se someten a cargas de falla las cuales se inducen mediante desplazamientos prescritos, debido a los problemas numéricos asociados al ablandamiento.

3.1 Viga simplemente apoyada con muesca en la parte media

Una viga de concreto simple se somete a una carga en el centro del claro en dirección vertical negativa. Las propiedades del material son: *modulo de Young* $E=20,000$ MPa ($203,943.3$ kgf/cm²), *relación de Poisson* $\nu=0.2$, *esfuerzo máximo de tensión* $\sigma_u=2.4$ MPa (24.5 kgf/cm²) y *energía de fractura* $G_f=113$ J/m² (0.115 kgf-cm/cm²).

Este ejemplo fue tomado del libro de J. G. Roots (1985) *Computational Modeling of Concrete Fracture*, donde muestra los resultados reportados por Kormeling y Reinharnt (1993) que obtuvieron de una base de pruebas en especímenes con las dimensiones y condiciones de frontera mostradas en la *Figura 3.1*.

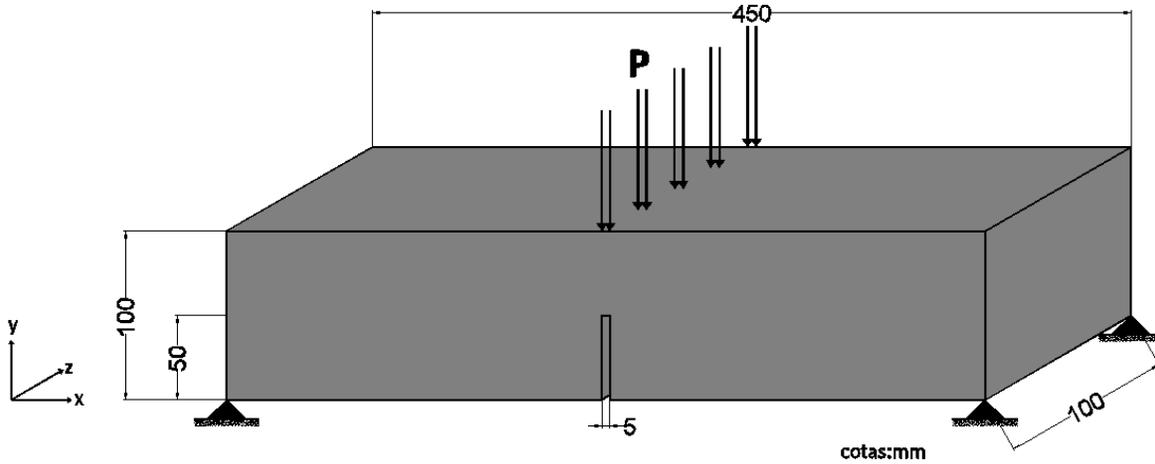


Figura 3.1. Viga de concreto simple con muesca en la parte inferior media

Se realizó una simulación en el MDST para lo cual se estructuró una malla de cuadriláteros como la mostrada en la *Figura 3.2a* que consta de 405 elementos finitos para el caso de 2D, en la *Figura 3.2b* se muestra la deformación de la viga después de ocurrir el daño, en la *Figura 3.2c* se presenta una comparación con el resultado obtenido en una simulación con el MDITC, donde se observa una incrustación del material en la parte superior de la viga; en este sólido se presenta una falla en modo I por esfuerzos de tensión.

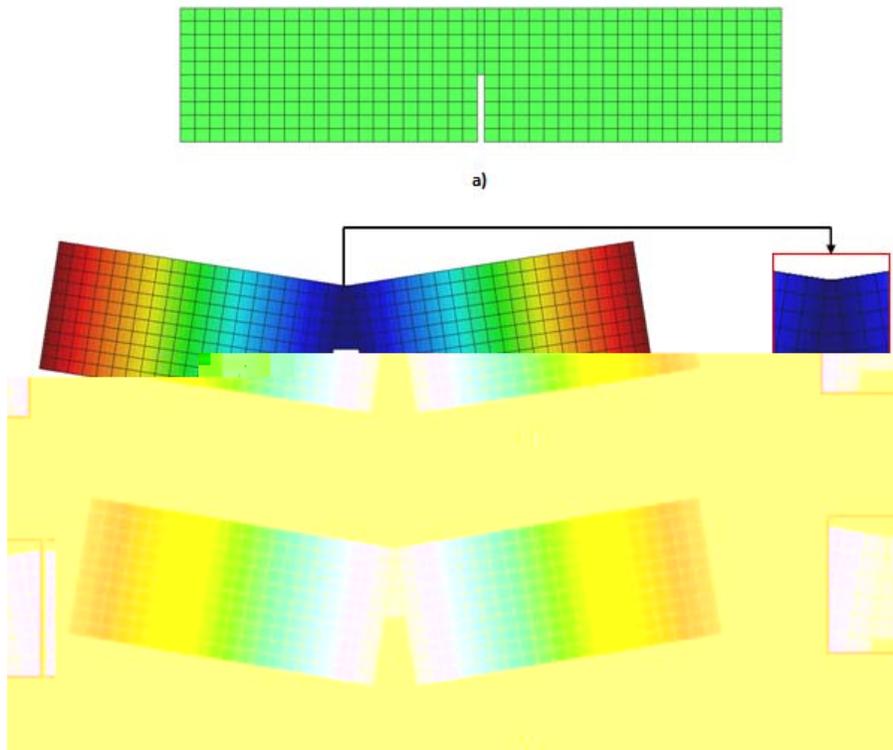


Figura 3.2. Malla de elementos finitos utilizada en el análisis 2D: a) no deformada, b) daño con MDITC y c) daño con MDST

En la *Figura 3.3* se muestra una malla estructurada de hexaedros que consta de 2592 elementos finitos utilizada para la simulación en 3D usando el mismo modelo de daño. Al igual que el de 2D, se hace una comparación con la deformación obtenida con el MDITC donde se observa también una incrustación del material en la parte superior de la ranura.

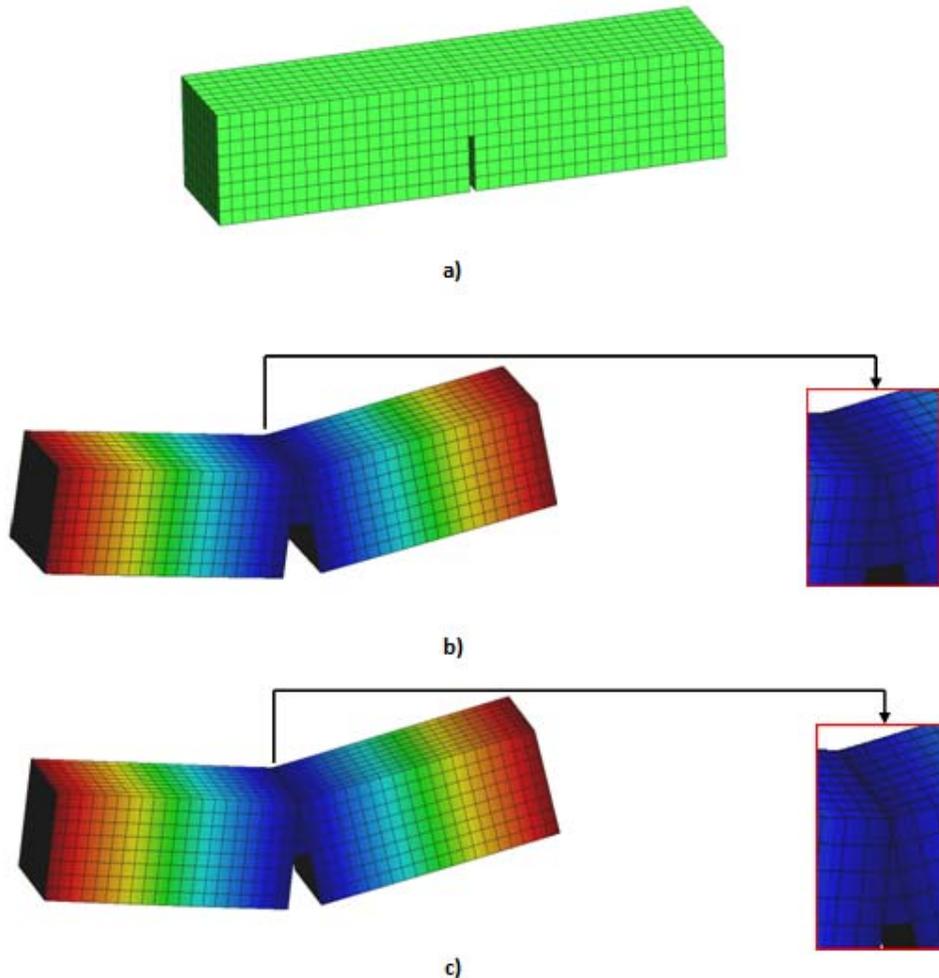


Figura 3.3. Malla de elementos finitos utilizada en el análisis 3D: a) no deformada, b) daño con MDITC, c) daño con MDST

En la *Figura 3.4* se muestra una comparación de los resultados obtenidos en 2D y 3D con los experimentales reportados por Kormeling y Reinhardt (1993); como estos autores consideraron distinto esfuerzo máximo a tensión o energía de fractura del material en cada prueba, obteniendo resultados variables, se hace una grafica solida en forma de rango tomando el valor mínimo y máximo reportados de estas pruebas. Comparando con las graficas derivadas de los resultados obtenidos con el MDST, se encuentra una consistencia en los valores consiguientes.

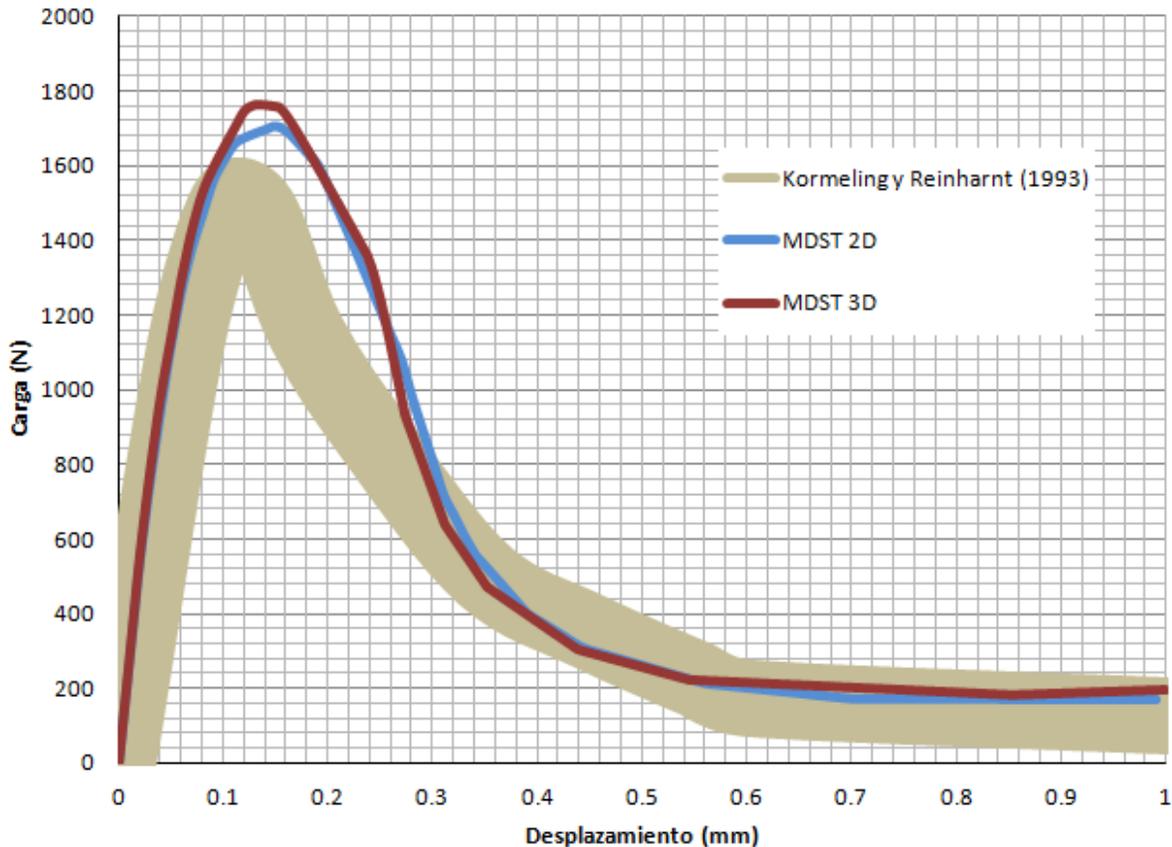


Figura 3.4. Carga contra Desplazamiento de viga con muesca en la parte media

3.2 Espécimen de concreto de sección variable con dos ranuras

Un espécimen con sección variable en su eje transversal y dos ranuras en la parte media del eje longitudinal (superior e inferior), se somete a un estado de esfuerzos de tensión pura uniaxial, las propiedades del material son: *modulo de Young* $E=16,900 \text{ MPa}$ ($172,332 \text{ kgf/cm}^2$), *relación de Poisson* $\nu=0.2$, *esfuerzo máximo de tensión* $\sigma_v=2.4 \text{ MPa}$ (24.5 kgf/cm^2) y *energía de fractura* $G_f=0.3 \text{ J/m}^2$ (0.03 kgf-cm/cm^2).

Este ejemplo se eligió para comparar con un trabajo realizado por Contraffatto *et al.* (2007) quienes desarrollaron un modelo matemático basado en la metodología de discontinuidad de interiores con el cual calcularon la evolución durante un incremento de carga de un espécimen igual al mencionado anteriormente; la geometría y condiciones de frontera de la sección variable se muestran en la *Figura 3.5* donde se observa que mientras se mantiene con apoyos de empotre su área transversal más pequeña, en la opuesta se ejerce una fuerza unidireccional que provoca esfuerzos de tensión en el sólido con la cual se espera que se presente una falla de tipo I por apertura concentrando los esfuerzos en el parte más estrecha del espécimen que es donde se encuentran las dos ranuras.

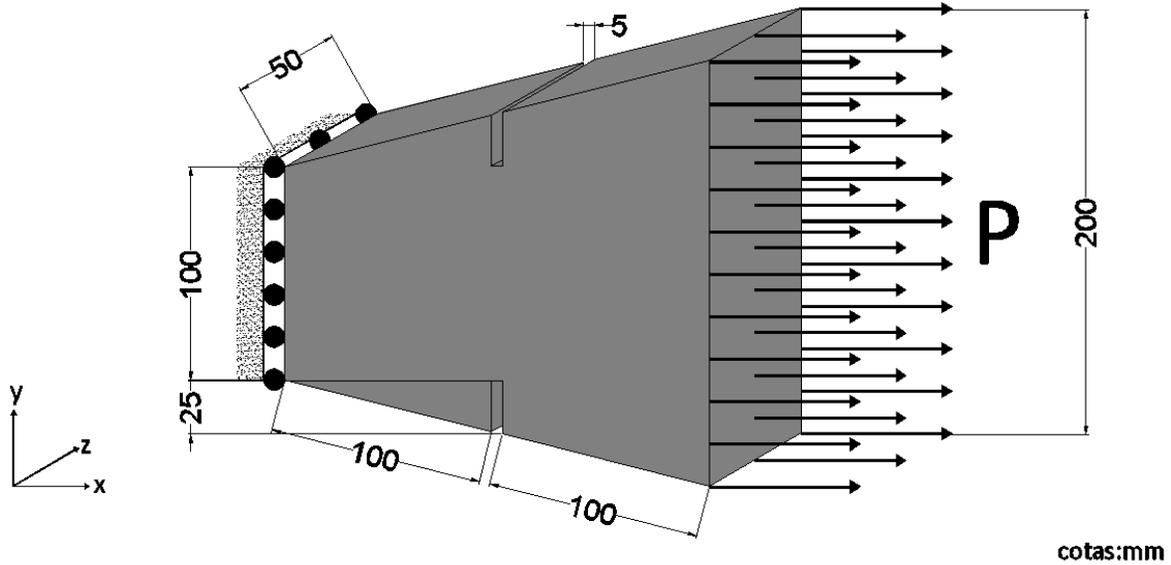


Figura 3.5. Viga de sección variable con dos ranuras en el centro

Para la simulación de este ejemplo se utilizó el MDST; en la *Figura 3.6* se muestra la malla estructurada para 2D que consta de una malla de cuadriláteros de 248 elementos finitos igualando la utilizada por *Contraffatto et al.* (2007).

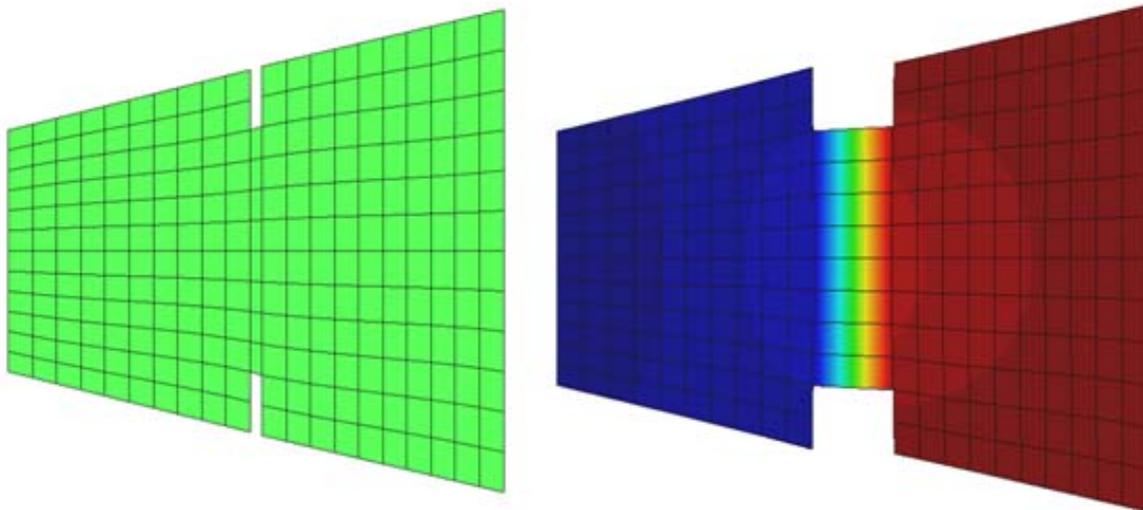


Figura 3.6. Malla de elementos finitos utilizada en el análisis 2D en el MDST: antes y después del daño

En la *Figura 3.7* se muestra una malla estructurada de hexaedros para la simulación en 3D que consta de 1240 elementos finitos. Al igual que en 2D, se muestra la malla antes y después de ocurrido el daño donde se observa, como se esperaba, que la concentración de esfuerzos se presenta en la parte ranurada de la sección y se presenta la falla tipo I.

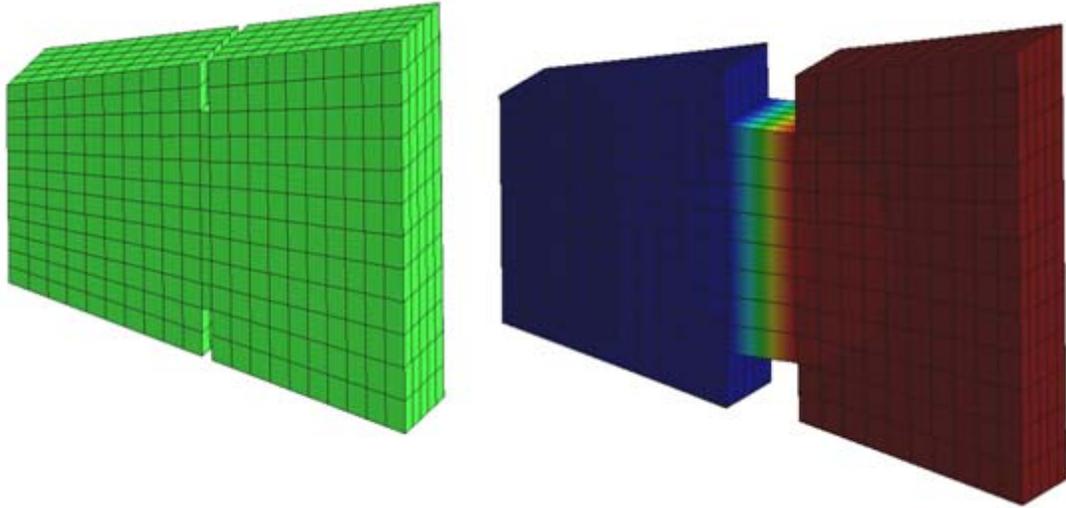


Figura 3.7. Malla de elementos finitos utilizada en el análisis 3D en el MDST: antes y después del daño

Se hace una comparación de los resultados obtenidos con el MDST y los reportados por Contraffatto *et al.* (2007) en la Figura 3.8, observando una consistencia en los resultados.

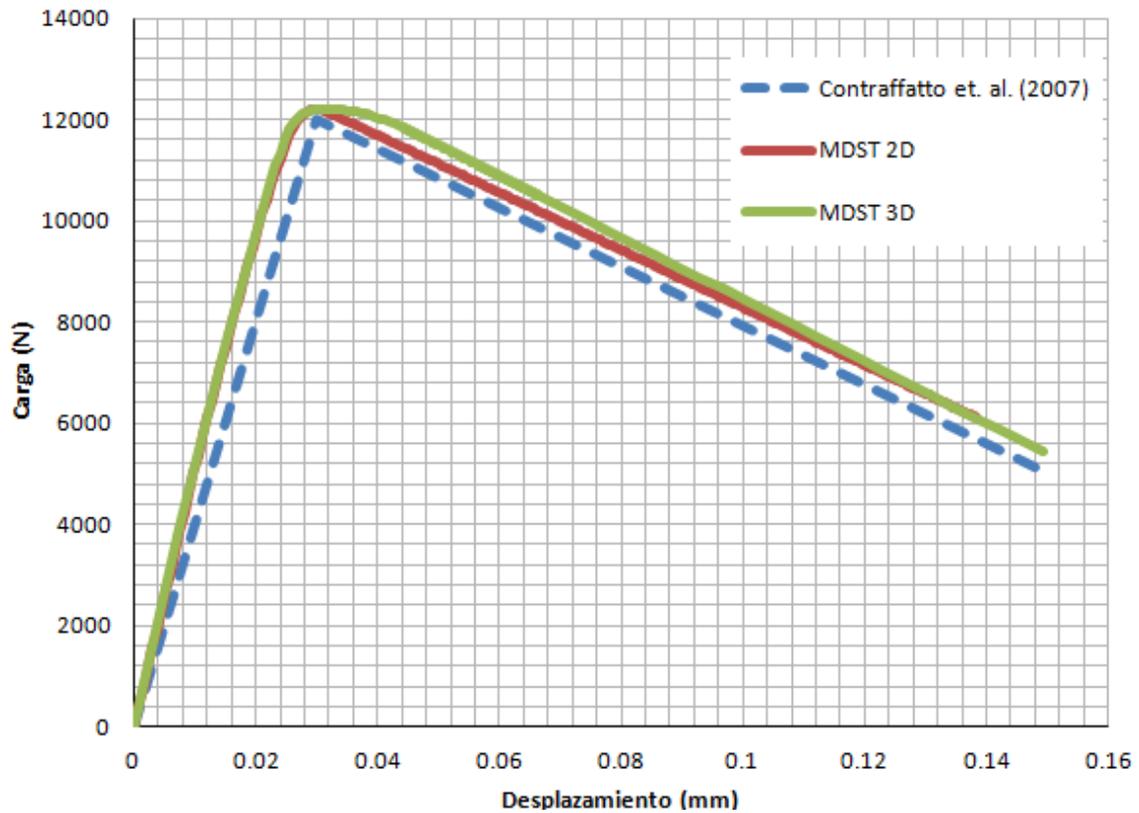


Figura 3.8. Carga contra Desplazamiento de espécimen de sección variable

3.3 Cilindro de concreto simple en tensión pura

Un cilindro de concreto simple que tiene una ranura perimetral en el centro del eje longitudinal, se somete a carga de tensión pura uniaxial. Las propiedades del material son: *modulo de Young* $E=30.5 \text{ GPa}$ ($3109.072 \text{ kgf/cm}^2$), *relación de Poisson* $\nu=0.2$, *esfuerzo máximo de tensión* $\sigma_u=1.79 \text{ MPa}$ (18.24 kgf/cm^2) y *energía de fractura* $G_f=100 \text{ N/m}$ (0.102 kgf/cm).

Barragán (2002) realizó una serie de ensayos a tensión en especímenes con la geometría y condiciones de frontera que se presentan en la *Figura 3.9*, reportando una serie de resultados que se comparan con los obtenidos en una simulación en el MDST.

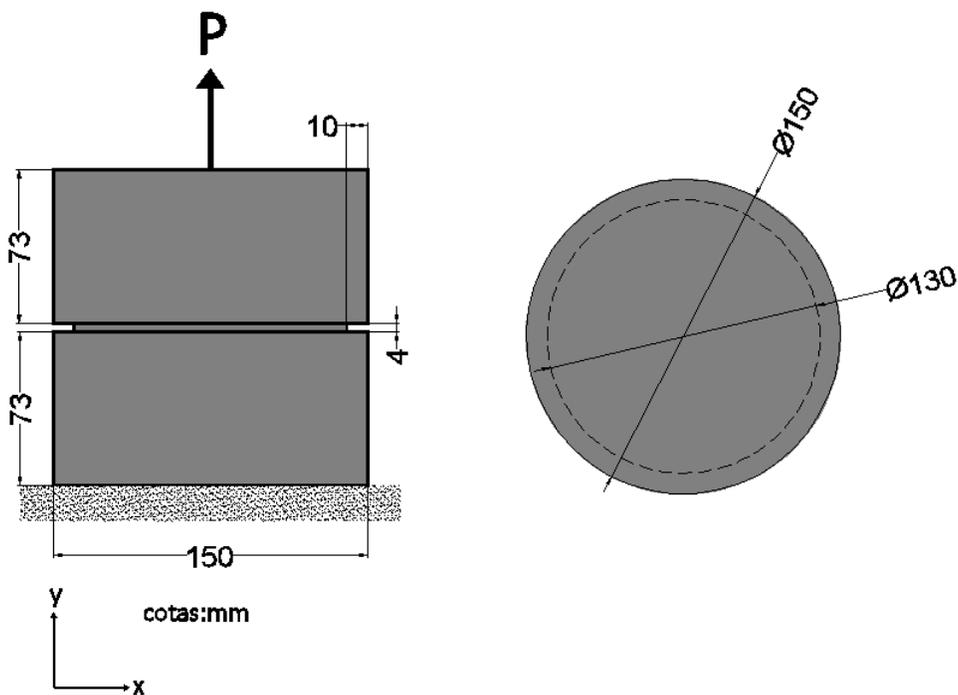


Figura 3.9. Cilindro de concreto simple con carga de tensión pura, Blanco (2006)

Para la simulación en 2D se estructuró una malla de cuadriláteros de 866 elementos finitos como se muestra en la *Figura 3.10*, para el análisis en 3D se estructuró una malla de hexaedros de 848 elementos finitos mostrándose en *Figura 3.11*; en ambos casos se muestra la malla antes y después generarse el daño. Uno de los datos de entrada necesarios para la simulación en el programa FEAP es el espesor del sólido en el caso de un análisis en 2D, en este ejemplo como se trata de un cilindro, si en el archivo de entrada se coloca como espesor el diámetro, FEAP lo interpretaría como un área transversal cuadrada. Para resolver este problema se calculó un área equivalente a un rectángulo en los extremos y en la parte reducida del cilindro (parte media) respetando el diámetro como uno de los lados del rectángulo equivalente despejando de la ecuación para el cálculo de un área circular como se muestra a continuación:

$$\frac{\pi D^2}{4} = D \times L \Rightarrow L = \frac{\pi D}{4}$$

donde D es el diámetro de la circunferencia y L el ancho del área equivalente.

$L = 117.809\text{mm} \rightarrow$ Para las caras extremas

$L = 102.101\text{mm} \rightarrow$ Para la parte media

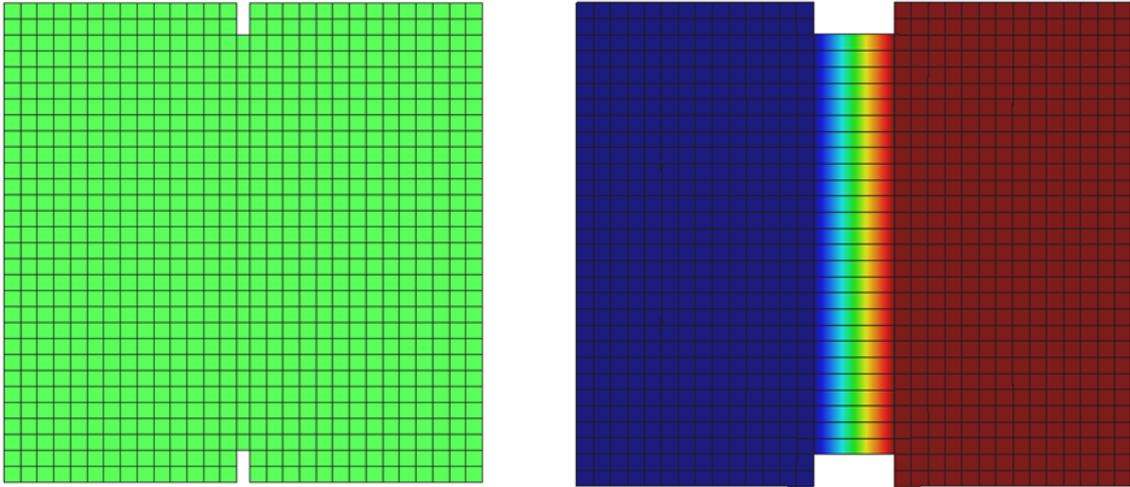


Figura 3.10. Malla de elementos finitos utilizada en el análisis 2D en el MDST: antes y después del daño

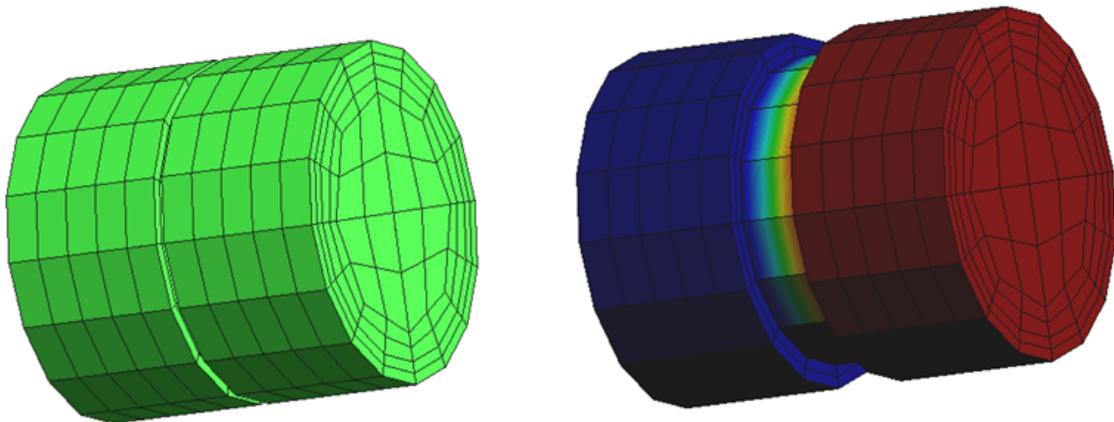


Figura 3.11. Malla de elementos finitos utilizada en el análisis 3D en el MDST: antes y después del daño

En la *Figura 3.12* se muestran gráficamente los resultados obtenidos con el MDST; se observa que el uso de una longitud equivalente para el caso de 2D es válida obteniendo resultados consistentes con el modelo en 3D que muestra el sólido en su forma real.

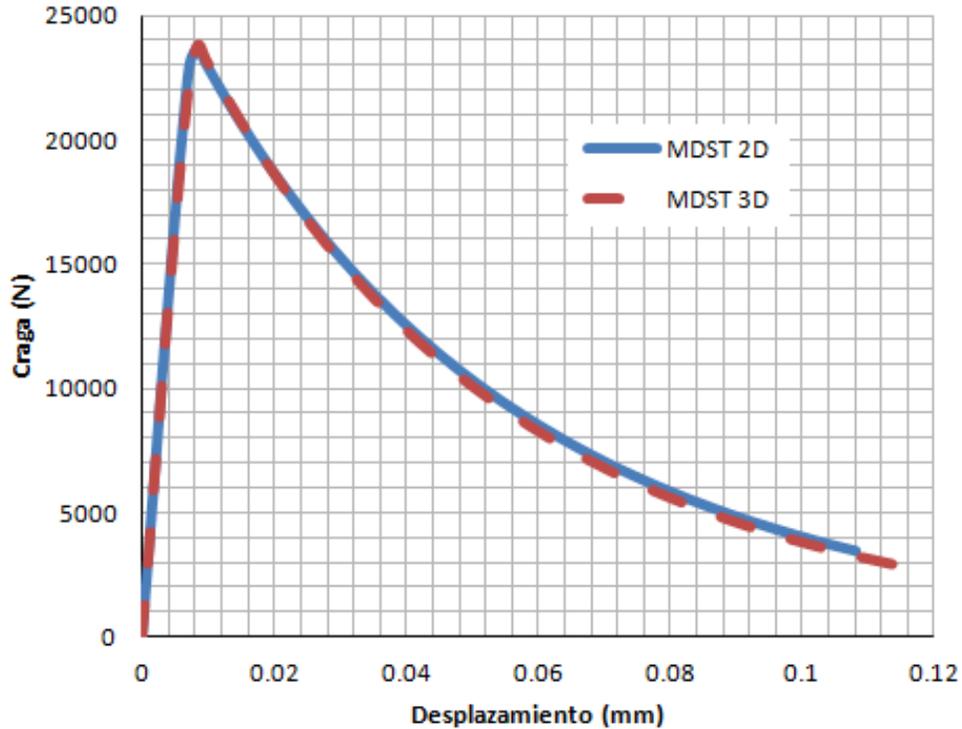


Figura 3.12. Carga contra Desplazamiento de cilindro de concreto

Barragán (2002) en sus reportes, presenta resultados con graficas de esfuerzo-deformación; los resultados con los modelos de daño se obtienen, como se ostenta en la *Figura 3.12*, en magnitudes de fuerza-desplazamiento. Para poder hacer una comparación entre el MDST y las pruebas experimentales, se obtienen los esfuerzos con respecto a las fuerzas obtenidas haciendo uso de la ecuación en la forma más simple del esfuerzo nominal como se muestra a continuación:

$$A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi 130^2}{4} = 13273.23 \text{ mm}^2 \quad \sigma = \frac{F}{A}$$

El área obtenida en la ecuación anterior es la respectiva al sólido en su parte media antes de empezar el incremento de carga, lo que refiere ausencia de daño; sin embargo, cuando la gráfica está en descenso lo que representa el ablandamiento del material, el área central donde se presenta el daño ha sufrido deformaciones que la hacen más pequeña en su diámetro debido a un tipo de falla I, lo que significa un esfuerzo mayor al calculado.

En la *Figura 3.13* se muestra una gráfica donde se comparan los resultados experimentales reportados por Barragán (2002) y los obtenidos con el MDST, donde se puede observar una comparación consistente.

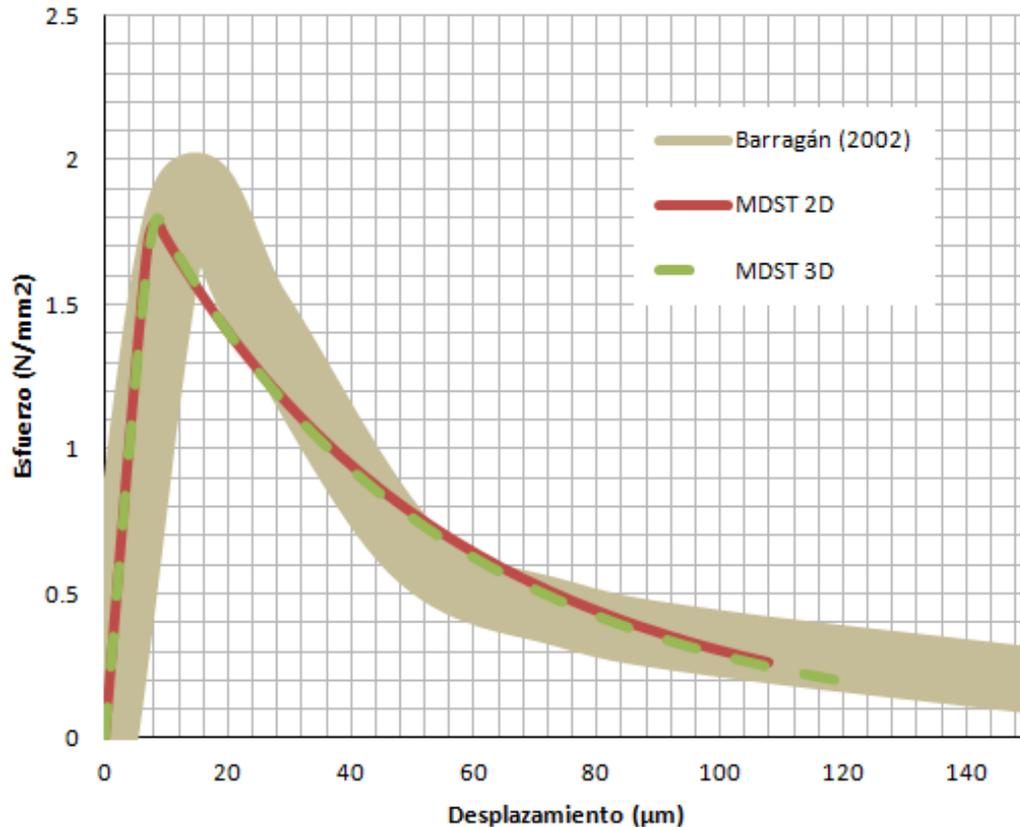


Figura 3.13. Esfuerzo contra Desplazamiento de cilindro de concreto

3.4 Pieza de concreto con muesca sometida a desgarre por tensión

Una pieza prismática con una muesca en uno de sus costados se somete a una prueba de DCB por sus siglas en inglés *Double Cantiliver Test* (Prueba del Doble Voladizo), que consta de ejercer una fuerza perpendicular al eje de la muesca para inducir un desgarre en la parte media de la pieza, esto produce una concentración de esfuerzos a tensión y cortante. Las propiedades del sólido de concreto simple son: *modulo de Young* $E=36500$ MPa ($372,069.32$ kgf/cm²), *relación de Poisson* $\nu=0.18$, *esfuerzo máximo de tensión* $\sigma_u=3$ MPa (30.58 kgf/cm²) y *energía de fractura* $G_f=50$ J/m² (0.05 kgf-cm/cm²). Como el ejemplo se basa en una figura prismática y regular, se uso la simetría del modelo, por lo que se simulo sólo la mitad del elemento.

Blanco (2006) realizó la prueba del DCB en una pieza con la geometría y condiciones de frontera que se muestra en la *Figura 3.14*, para encontrar un error entre un algoritmo matemático que desarrolló para la simulación de daño en sólidos y otro también desarrollado por el llamado IMPL-EX, con base en una serie de pruebas numéricas donde varia los incrementos de tiempo Δt para la aplicación de carga. En este ejemplo se hace una comparación entre los resultados reportados por Blanco (2006) y los obtenidos en simulaciones con los modelos MDST y MDSC.

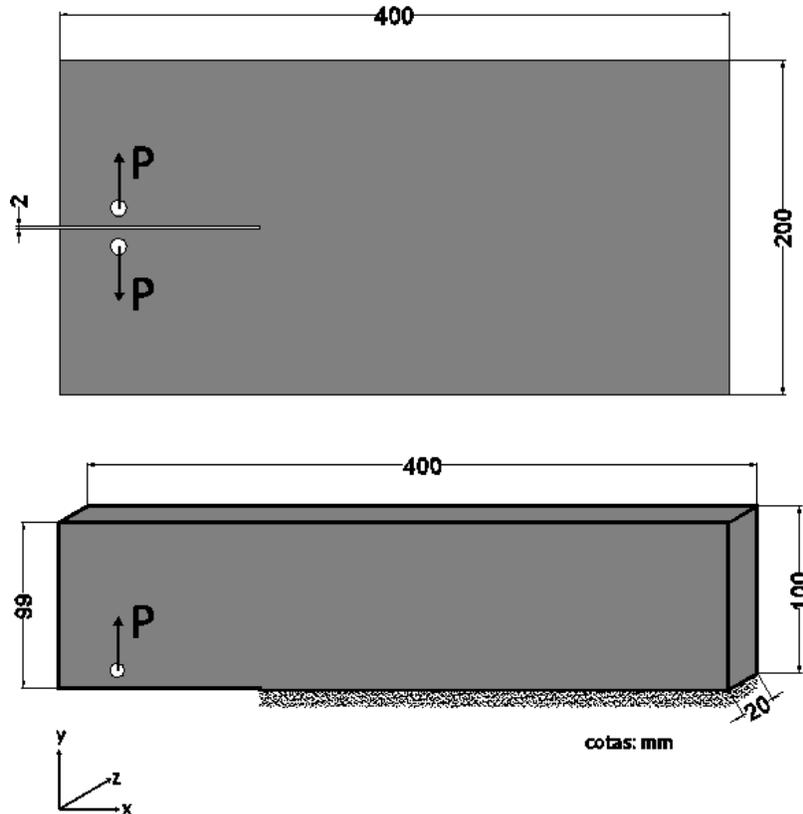


Figura 3.14. Pieza simétrica sometida a tensión

Para la simulación con los modelos MDST y MDSC, se estructuró en 2D una malla de cuadriláteros de 428 elementos finitos como se muestra en la *Figura 3.15*; en 3D se estructuró una malla de hexaedros de 856 elementos finitos como la mostrada en la *Figura 3.16*. En ambas figuras se exponen las mallas antes y después de la falla.

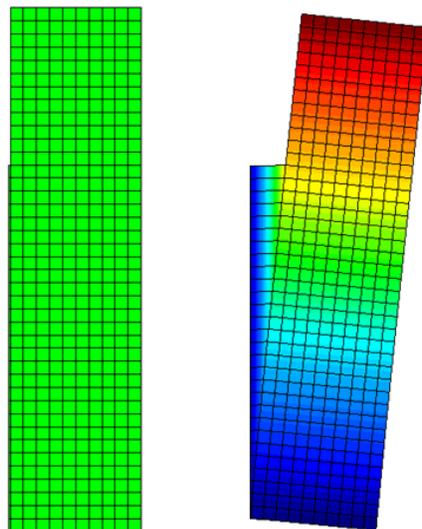


Figura 3.15. Malla de elementos finitos en 2D: antes y después del daño

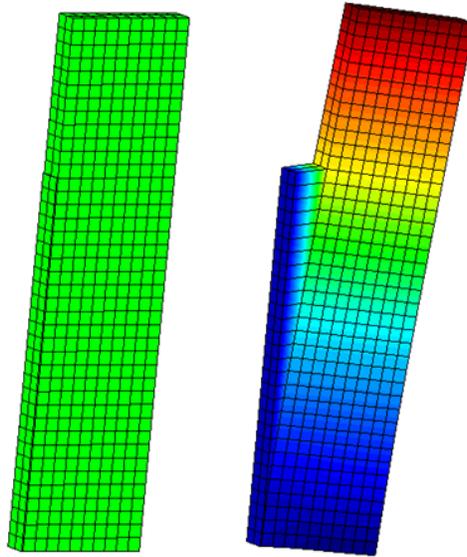


Figura 3.16. Malla de elementos finitos en 3D: antes y después del daño

En la *Figura 3.17* se muestra una comparación entre los resultados reportados por Blanco (2006) y las simulaciones con los MDST y MDSC; se observa que los resultados obtenidos con el MDST tienen una pendiente mayor en la rama ascendente en comparación a los reportados por Blanco (2006), mientras que el MDSC alcanza un umbral mayor, esto se debe a que la falla por tensión se alcanza antes de empezarse a romper el material en un estado de endurecimiento por deformación.

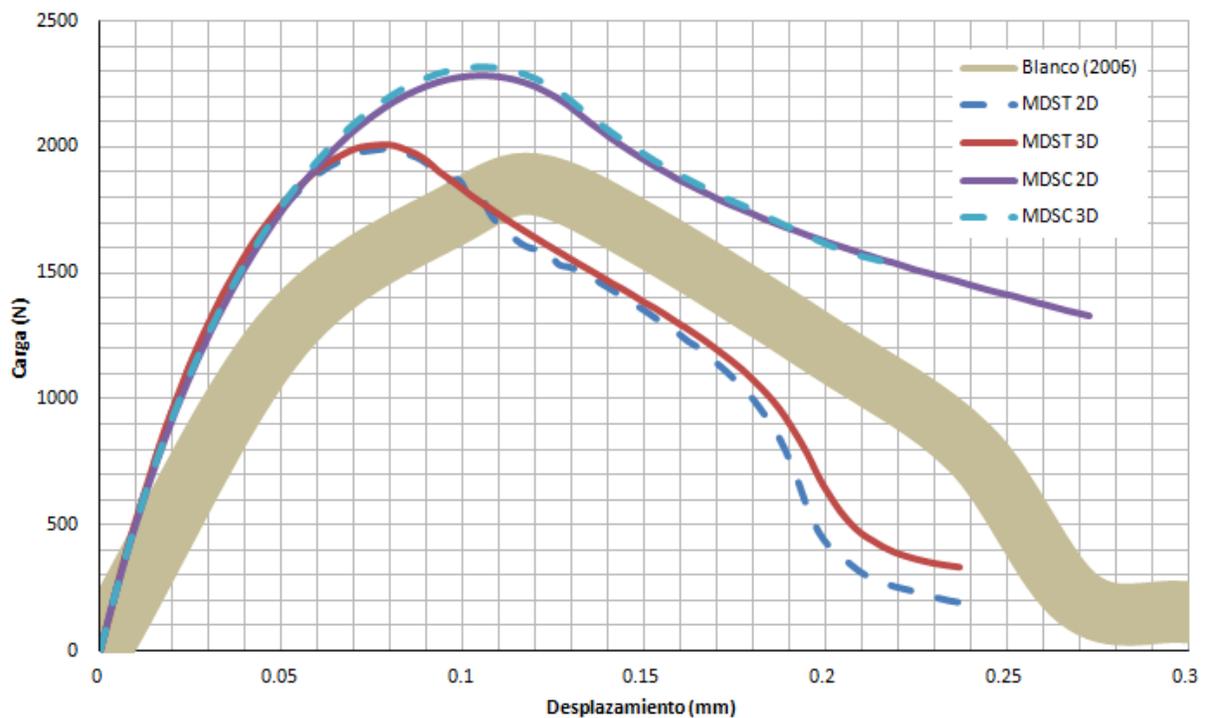


Figura 3.17. Carga contra Desplazamiento de pieza prismática

Se observa en las Figura 3.15 y Figura 3.16, que el daño inicia en la parte media de la pieza donde termina la muesca mostrando un desgarre que provoca una falla justo como se espera en la prueba DCB, además, en la comparación de los resultados se aprecia un desfase en las graficas debiéndose a que el modelo numérico desarrollado por Blanco (2006) considera las compresiones que se generan en el extremo opuesto a la muesca, distinto al MDST y MDSC que como su nombre lo dice, sólo considera los esfuerzos de tensión y cortante respectivamente.

Como se mencionó en la *sección 2.2*, el MDST sólo es válido para esfuerzos y desplazamientos aplicados en la dirección horizontal X ; en un intento por resolver esta desventaja y ajustar el modelo para todo tipo de aplicaciones, se propone un cambio en el acomodo de las deformaciones en el tensor de este campo que se utiliza para el cálculo de la norma, colocando el valor positivo como primer término:

$$\begin{aligned} \text{si } (\varepsilon_x \geq \varepsilon_y) &\Rightarrow \varepsilon_x = \varepsilon_x \wedge \varepsilon_y = \varepsilon_y \\ \text{en otro caso } (\varepsilon_x < \varepsilon_y) &\Rightarrow \varepsilon_x = \varepsilon_y \wedge \varepsilon_y = \varepsilon_x \end{aligned} \quad (72)$$

$$\tau_\sigma = \sqrt{\boldsymbol{\sigma}^+ : \mathbf{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma}} \quad \mathbf{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\varepsilon} \quad \boldsymbol{\sigma}^+ = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{\max} \\ \varepsilon_{\min} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (73)$$

En la *Figura 3.18* se muestra una comparación entre los resultados obtenidos con el MDST simulando la sección prismática en su posición original (aplicación de la carga en dirección vertical Y), el MDST con la norma modificada como se propone en las ecuaciones (72) y (73), y los resultados reportados por Blanco (2006).

En esta figura se observa que la simulación de la pieza en posición original alcanza un valor umbral mucho mayor al real debido a que el esfuerzo máximo no coincide con la deformación máxima; así mismo, la simulación con el modelo modificado alcanza una carga ultima consistente con los reportes de Blanco (2006), sin embargo, en el descenso de la grafica se ven trazos discontinuos lo que demuestra que no se está calculando correctamente el ablandamiento de la pieza; esto se debe a que en ese momento de la simulación los esfuerzos a tensión empiezan a ser menores en comparación de los esfuerzos a compresión localizados en el extremo opuesto de la ranura, esto ocasiona que las deformaciones cambien de posición, como se propone en la ec. (72), independientemente que sean de apertura o contracción según lo demande el esfuerzo.

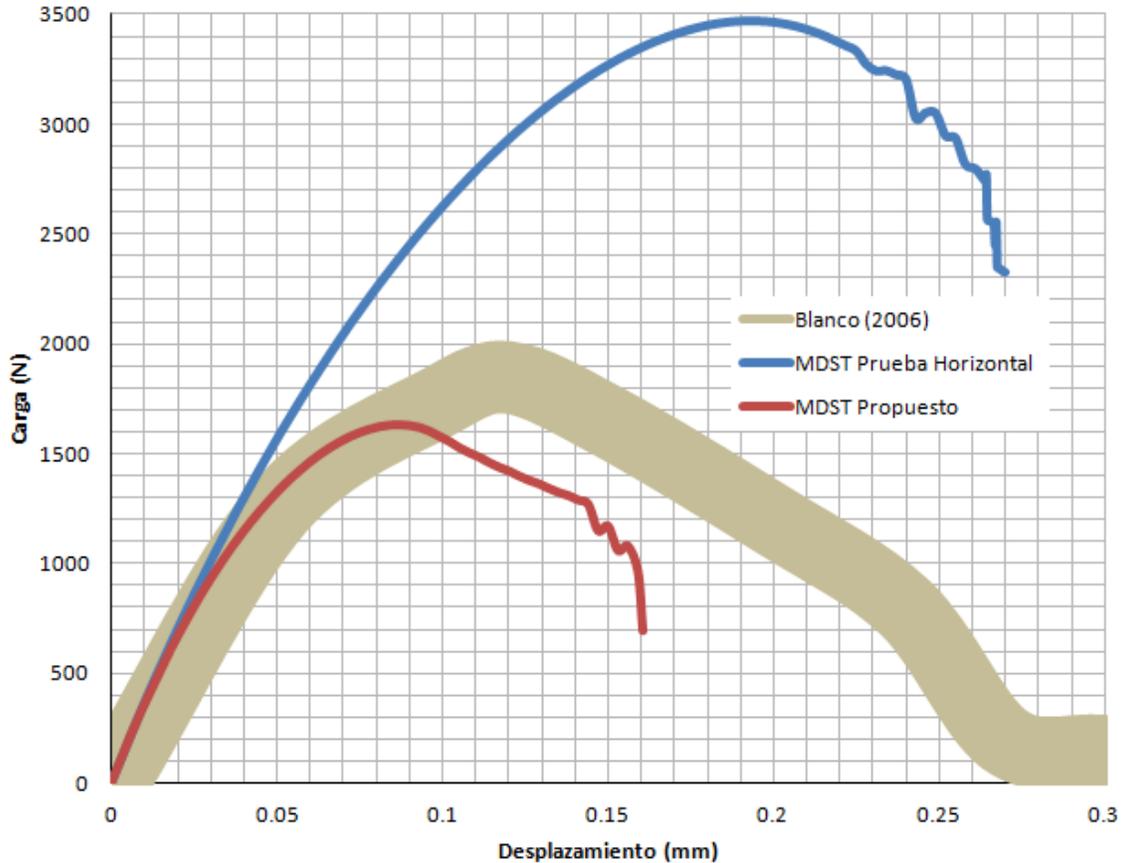


Figura 3.18. Resultados de modelo propuesto y prueba original: Carga contra Desplazamiento

3.5 Cortante puro en espécimen

Un espécimen de concreto se somete a una carga horizontal aplicada sobre su superficie; debido a que el espécimen está restringido en la mitad de su cuerpo, se concentran esfuerzos de cortante puro a lo largo de su eje longitudinal. Las propiedades del elemento son: *modulo de Young* $E=26,500$ KPa (265.036 kgf/cm²), *relación de Poisson* $\nu=0.3$, *esfuerzo máximo de tensión* $\sigma_u=40$ KPa (0.4077 kgf/cm²), *esfuerzo máximo a cortante* $\tau_u=20$ KPa (0.2038 kgf/cm²), *modulo de cortante* $G=10,000$ kPa (101.937 kgf-cm/cm²) y *modulo de ablandamiento* $H_s/E=-0.100$.

Borja (2000) realizó pruebas numéricas en 2D utilizando un modelo matemático basado en la aproximación de discontinuidad de interiores en especímenes con la geometría y condiciones de frontera como las mostradas en la *Figura 3.19*, variando el tamaño de la malla de elementos finitos. Con el objeto de comparar con los resultados reportados por Borja (2000) se realizaron simulaciones en el modelo de daño MDSC en 2D y 3D.

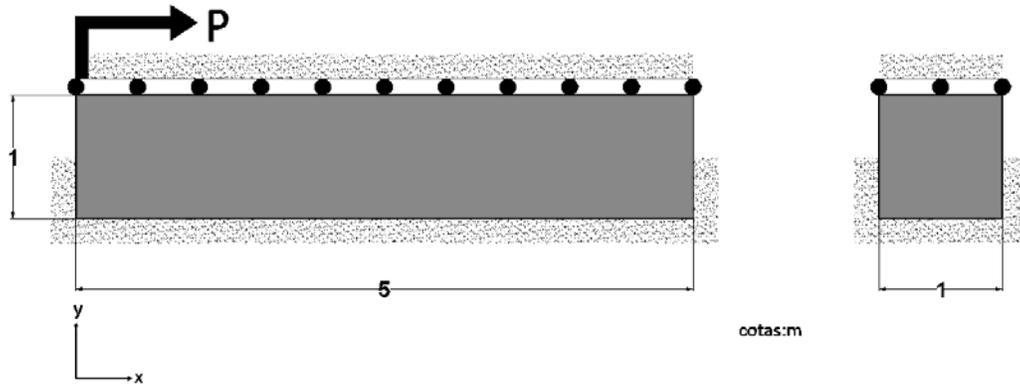


Figura 3.19. Especimen embebido sometido a cortante puro

Para la simulación en el MDSC se estructuró en 2D una malla de cuadriláteros de 45 elementos finitos la cual se muestra en la *Figura 3.20*; para la simulación en 3D se usó una malla estructurada de hexaedros con 135 elementos finitos mostrada en la *Figura 3.21*. En ambas figuras se presentan las mallas antes y después del daño.

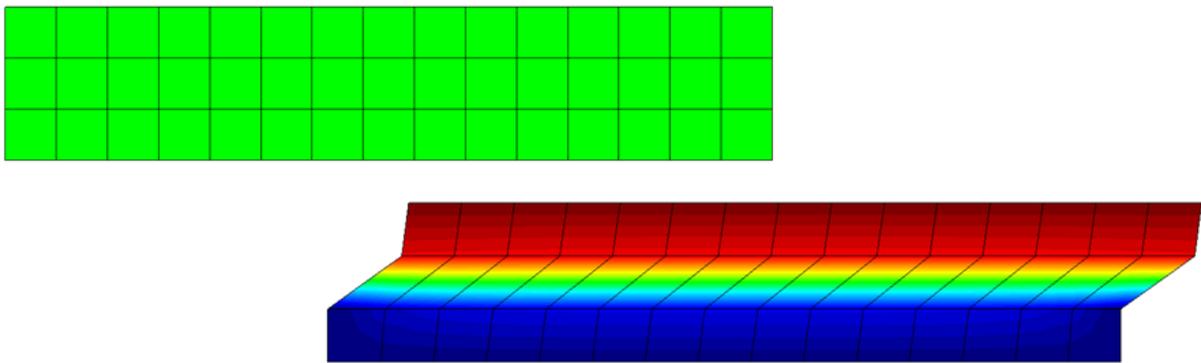


Figura 3.20. Malla en 2D: antes y después del daño

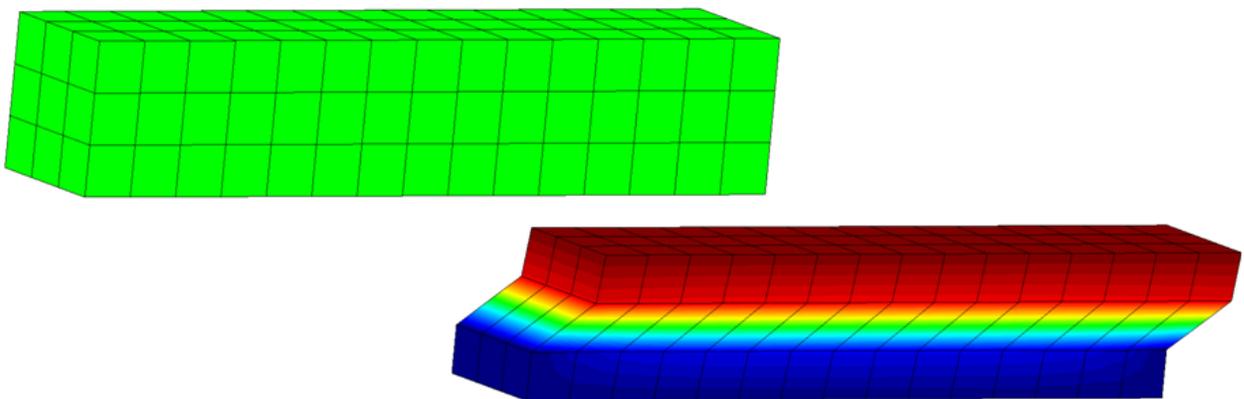


Figura 3.21. Malla en 3D: antes y después del daño

En las figuras anteriores se observa que la concentración de esfuerzos se enfoca en la parte media del espécimen recorriendo su longitud justo como se esperaba que reaccionara bajo la carga aplicada; los resultados obtenidos con el MDSC son consistentes con los reportados por Borja (2000) como se muestra en la *Figura 3.2*. Es de interés mencionar que este autor utilizó un modelo de plasticidad y ablandamiento, por lo que al no trabajar con este criterio el MDSC, se tomó el esfuerzo de fluencia como el esfuerzo ultimo.

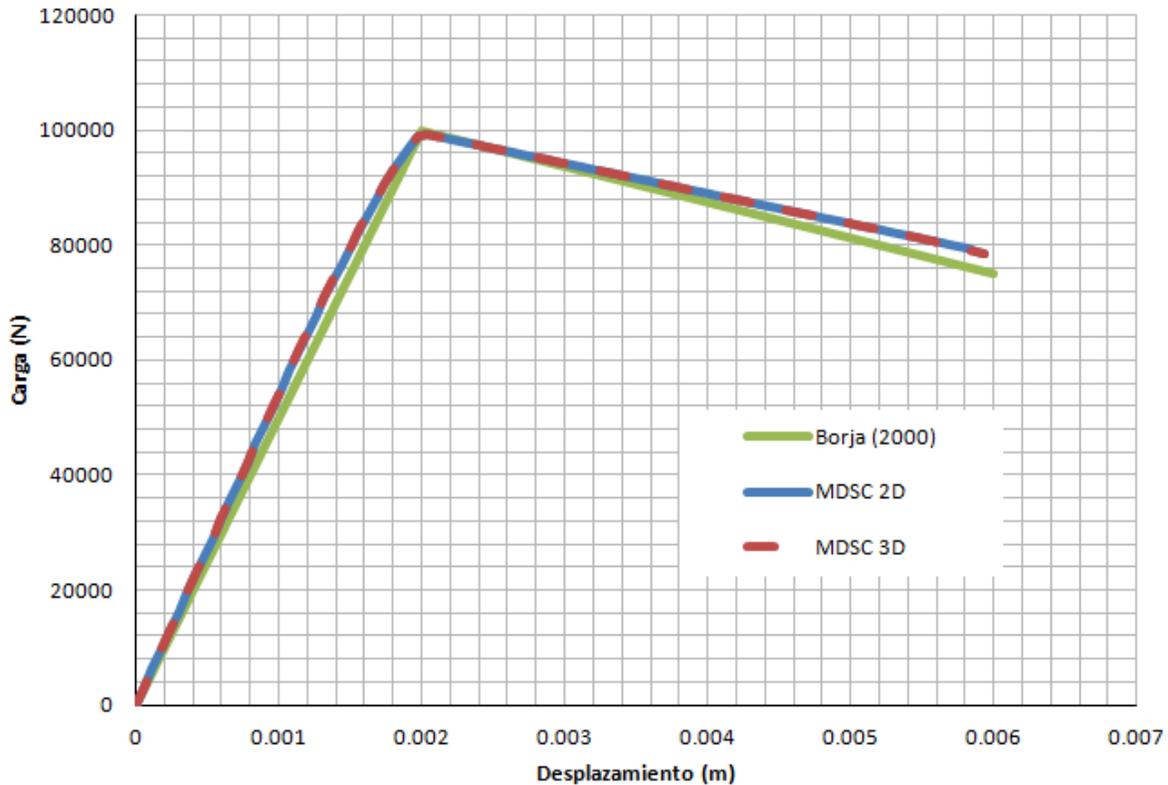


Figura 3.22. Curva carga contra desplazamiento de espécimen embebido

3.6 Bloque de concreto sometido a compresión (cortante indirecto)

Un bloque de concreto se somete a cargas de compresión; debido a la no homogeneidad del material, en algún punto del sólido inicia una falla debido a esfuerzos cortantes como usualmente pasa en las pruebas a compresión de cilindros de concreto, en las que se genera un plano de falla diagonal. Las propiedades del material son: *modulo de Young* $E=20,000$ KPa (203.387 kgf/cm²), *relación de Poisson* $\nu=0.4$, *esfuerzo máximo de tensión* $\sigma_u=37.5$ KPa (0.382263 kgf/cm²), *esfuerzo máximo a cortante* $\tau_v=18.75$ KPa (0.191131 kgf/cm²), *modulo de cortante* $G=7143$ kPa (72.8135 kgf-cm/cm²) y *modulo de ablandamiento* $H_s/E=-0.100$. Borja (2000) realizó pruebas en bloques con la geometría y condiciones de frontera como las que se muestran en la *Figura 3.23* utilizando un modelo de plasticidad basado en la aproximación de discontinuidad de interiores.

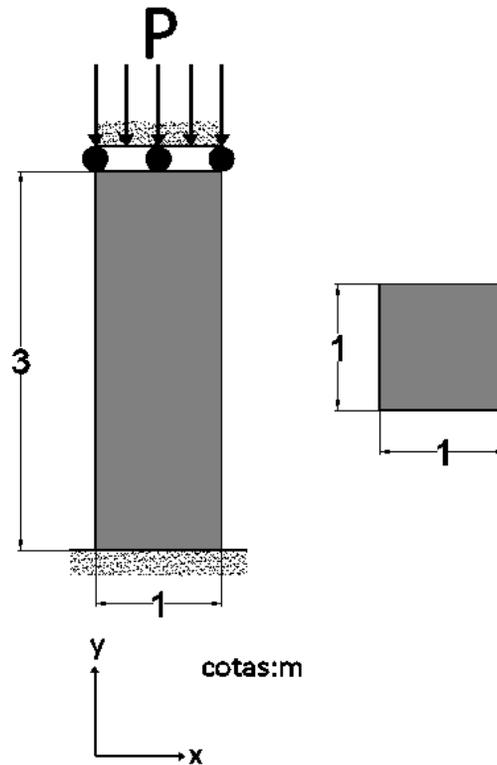


Figura 3.23. Bloque de concreto en compresión

Para la simulación en 2D se estructuró una malla de triángulos de 150 elementos finitos, la cual se muestra en la *Figura 3.24*; en 3D se estructuró una malla de hexaedros de 375 elementos finitos, como se observa en la *Figura 3.25*. El cambio de forma en las mallas se debe a que en 2D se igualó la utilizada por Borja (2000) y en 3D el programa GID no reconoce elementos en forma de prisma triangular, por lo que se utilizó la forma más simple de elemento finito. En ambos casos se muestran las mallas antes y después del daño.

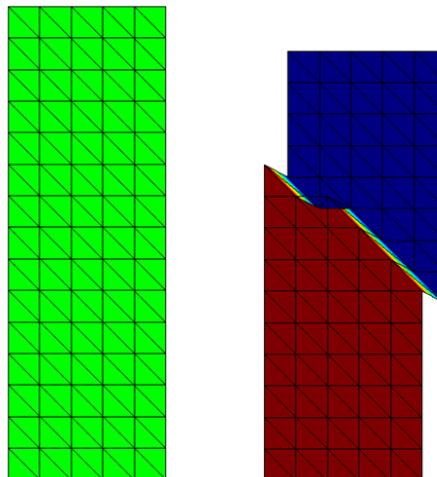


Figura 3.24. Malla en 2D: antes y después del daño

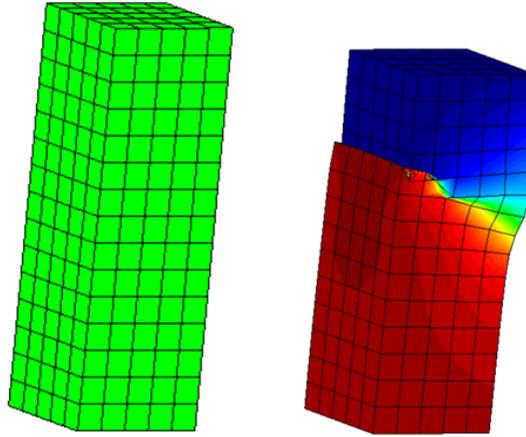


Figura 3.25. Malla en 3D: antes y después del daño

Al aplicarse la fuerza de compresión, se obtiene el mismo estado de esfuerzos en todos los elementos finitos; con motivo de encontrar la carga y desplazamiento de falla en el bloque, se asigna en un elemento en la malla en 2D y en una franja de elementos en la malla en 3D un esfuerzo último menor para forzar el inicio de daño en un punto, como ocurre físicamente. En la *Figura 3.26* se muestran los elementos a los que se asignó un esfuerzo menor en ambas dimensiones.

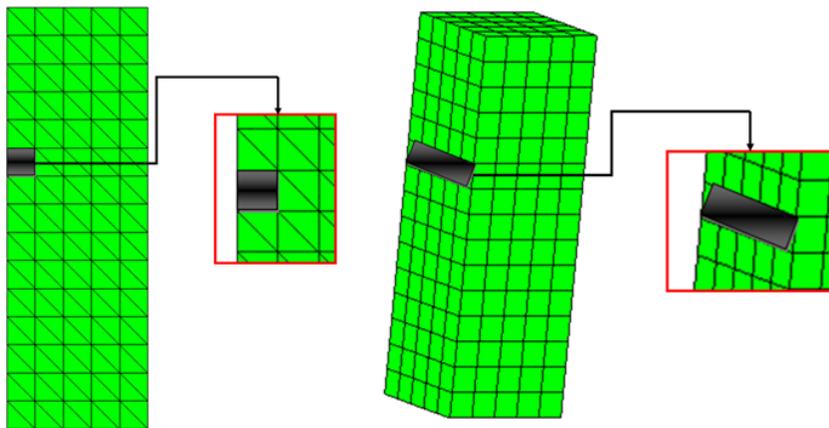


Figura 3.26. Ubicación de elementos finitos con esfuerzo ultimo menor

Este ejemplo se simuló primeramente con el MDSC, con el cual no se alcanzó el daño bajo la carga reportada y esperada, esto debido a que, como se mencionó en el *capítulo 2.3*, este modelo sólo es válido cuando el sólido que se está estudiando se encuentra con cargas aplicadas que le produzcan esfuerzos de cortante puro, lo cual en este ejemplo no se cumple, pues la carga aplicada es de compresión. En *Figura 3.27* se muestra la curva carga-desplazamiento, donde se comparan los resultados obtenidos con el MDSC y los reportados por Borja (2000), se observa que la gráfica del modelo de daño sigue en ascenso sin alcanzar la carga y el desplazamiento de falla.

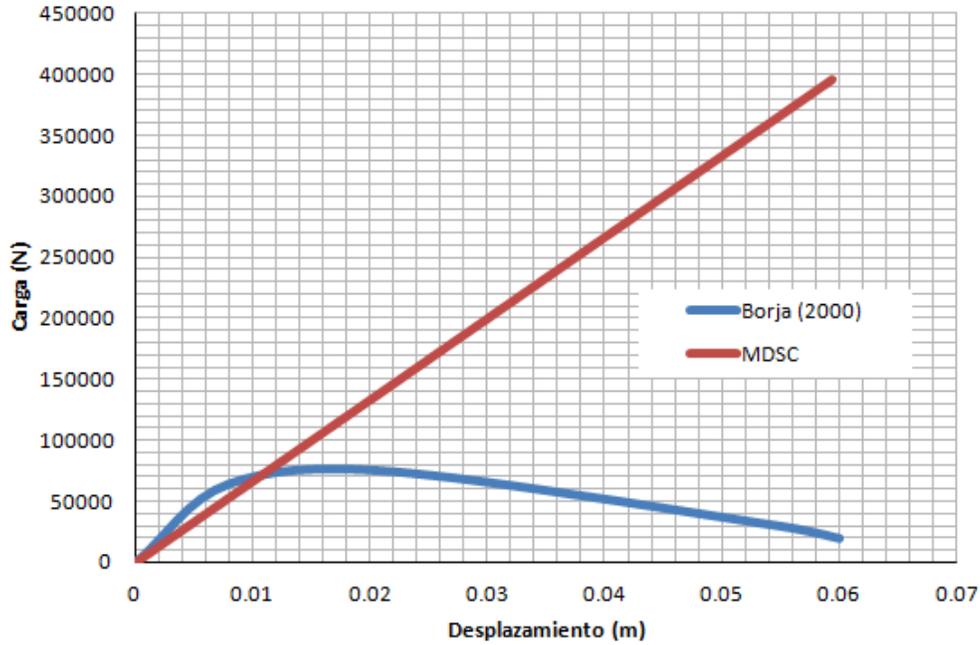


Figura 3.27. Bloque de concreto. Comparación con el MDSC

Para resolver este problema correctamente, se usó el MDITC con el cual se encuentran resultados consistentes en comparación con los reportados por Borja (2000), esto se muestra en la *Figura 3.28*. Es de importancia mencionar que el MDITC, como su nombre lo dice, considera de magnitud igual los esfuerzos a tensión y compresión; para obtener los valores reales, los resultados se modifican multiplicándolos por un factor igual a f' / f_t .

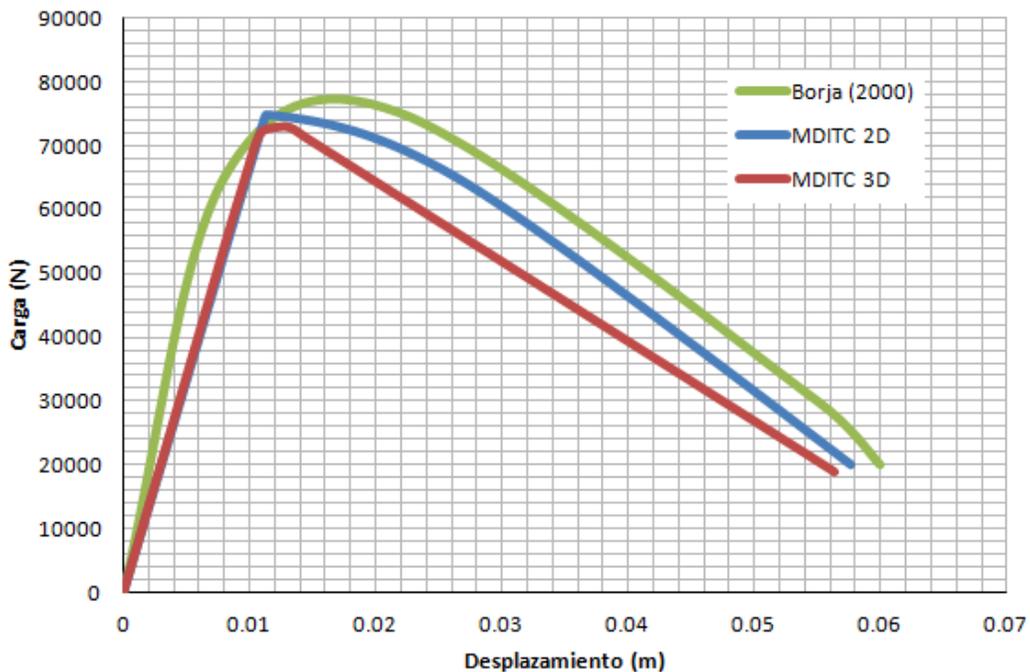


Figura 3.28. Carga contra Desplazamiento de bloque de concreto

3.7 Cilindro de concreto en compresión simple (cortante indirecto)

Este ejemplo consiste en una prueba a compresión simple de un cilindro de concreto en la maquina universal del laboratorio de estructuras de la Universidad Autónoma Metropolitana, unidad Azcapotzalco, que se realizaron como parte de pruebas de calidad del concreto utilizado para la construcción de travesaños acartelados de Urbina-Californias (2012). La geometría y condiciones de frontera del espécimen de concreto se muestran en la Figura 3.29. El concreto tiene una resistencia a la compresión $f'_c=260 \text{ kg/cm}^2$, relación de Poisson $\nu=0.2$, se considera un modulo de ablandamiento $H_s/E=-0.01$; con base a esto se obtienen sus propiedades del espécimen considerando un concreto clase 1:

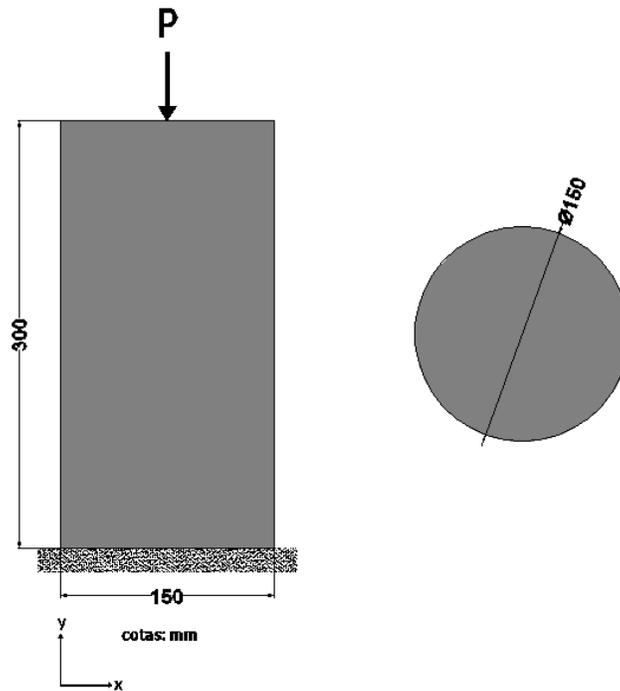


Figura 3.29. Cilindro de concreto sometido a compresión simple

$$\text{Modulo elástico } E_c = 14000\sqrt{f'_c} = 14000\sqrt{260} = 225743.21 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{Área } A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi 15^2}{4} = 176.715 \text{ cm}^2$$

$$\text{Esfuerzo ultimo a tensión } f'_t \approx \frac{f'_c}{10} \approx \frac{260}{10} \approx 26 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{Esfuerzo ultimo a cortante } \tau_u = \frac{f'_t}{2} = \frac{26}{2} = 13 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{Rigidez a cortante } G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{225743.21}{2(1+0.2)} = 94059.7 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{Desplazamiento elástico ultimo } \delta = \frac{LP}{EA} = \frac{Lf'_c A}{EA} = \frac{Lf'_c}{E} = \frac{30(260)}{225743.21} = 0.034 \text{ cm} = 0.34 \text{ mm}$$

Para la simulación en 2D, se estructuró una malla de cuadriláteros de 450 elementos finitos la cual se muestra en la *Figura 3.30*; en 3D se estructuró una malla de hexaedros de 1440 elementos finitos, esto se muestra en la *Figura 3.31*. Cabe mencionar que, como en el *ejemplo 3.3*, el espécimen al tener caras transversales circulares, se encuentra una sección rectangular equivalente respetando como uno de los lados el diámetro del círculo:

$$A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi 15^2}{4} = 176.715 \text{ cm}^2$$

$$176.715 = D \times L \therefore L = 11.781 \text{ cm}$$

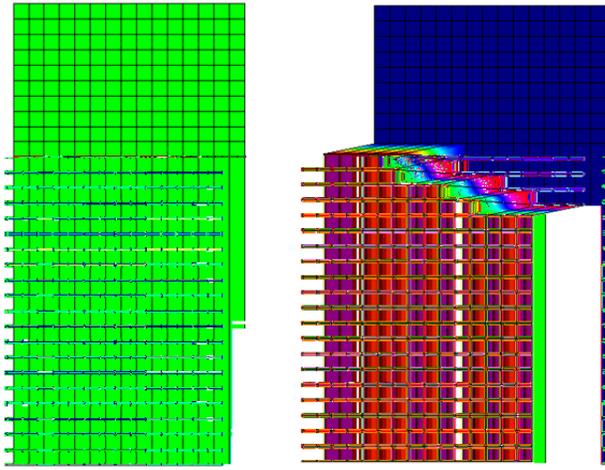


Figura 3.30. Malla en 2D: antes y después del daño

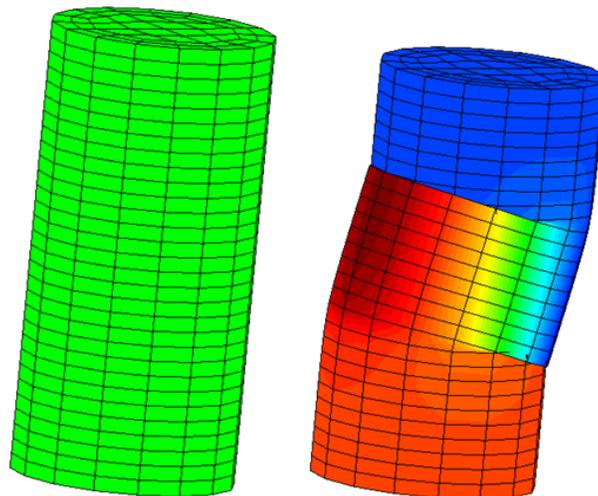


Figura 3.31. Malla en 3D: antes y después del daño

En la *Figura 3.32* se muestran los elementos finitos reducidos en su esfuerzo último para inducir la falla cortante por la no homogeneidad del material.

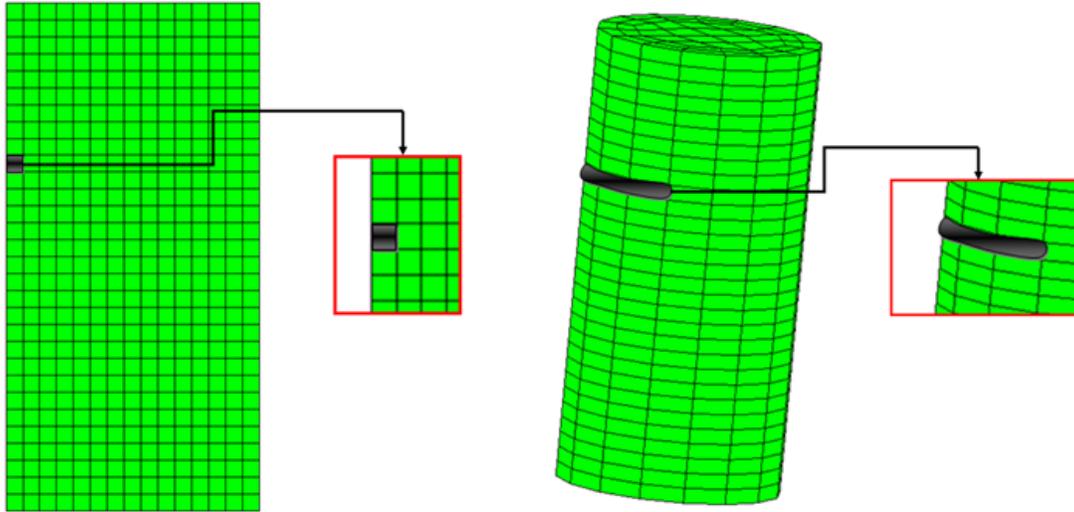


Figura 3.32. Elementos finitos con esfuerzo último reducido, en 2D y 3D

Al igual que el ejemplo anterior, se realizó primeramente una simulación utilizando el MDSC con el cual no se obtuvieron resultados congruentes con los reportados en laboratorio, observándose un comportamiento en el intervalo elástico tendiente a infinito, esto se muestra en la *Figura 3.33*. Para resolver este problema se utilizó el MDITC encontrando resultados congruentes con los de Urbina-Californias (2012) mostrados en la *Figura 3.34*; se factorizaron los resultados obtenidos con el MDITC por f'_d/f'_t para alcanzar el valor umbral.

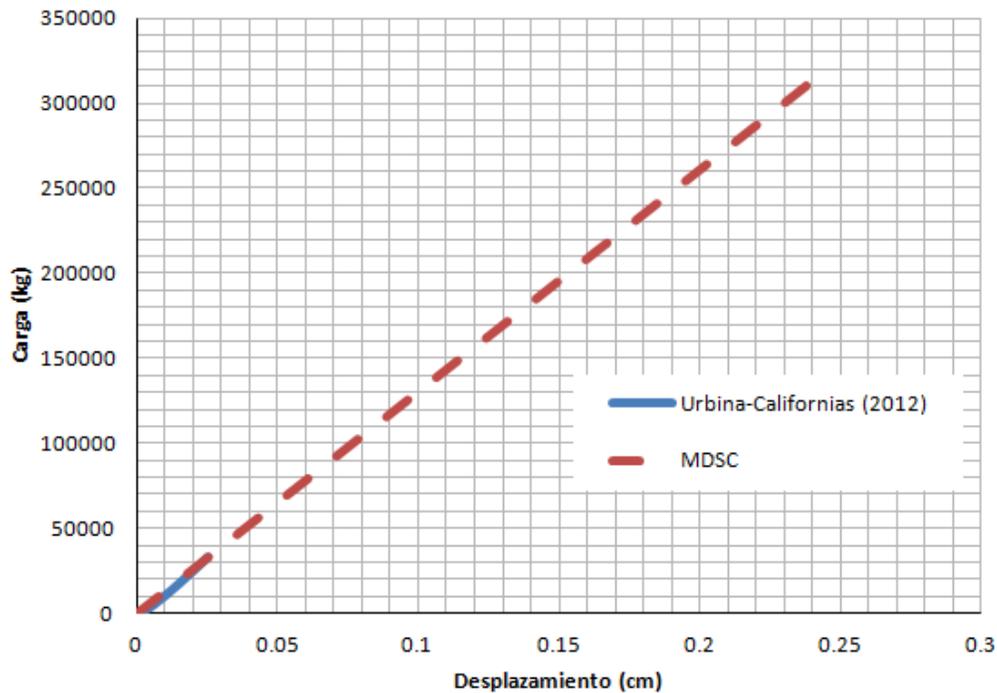


Figura 3.33. Curva carga contra desplazamiento comparada con el MDSC

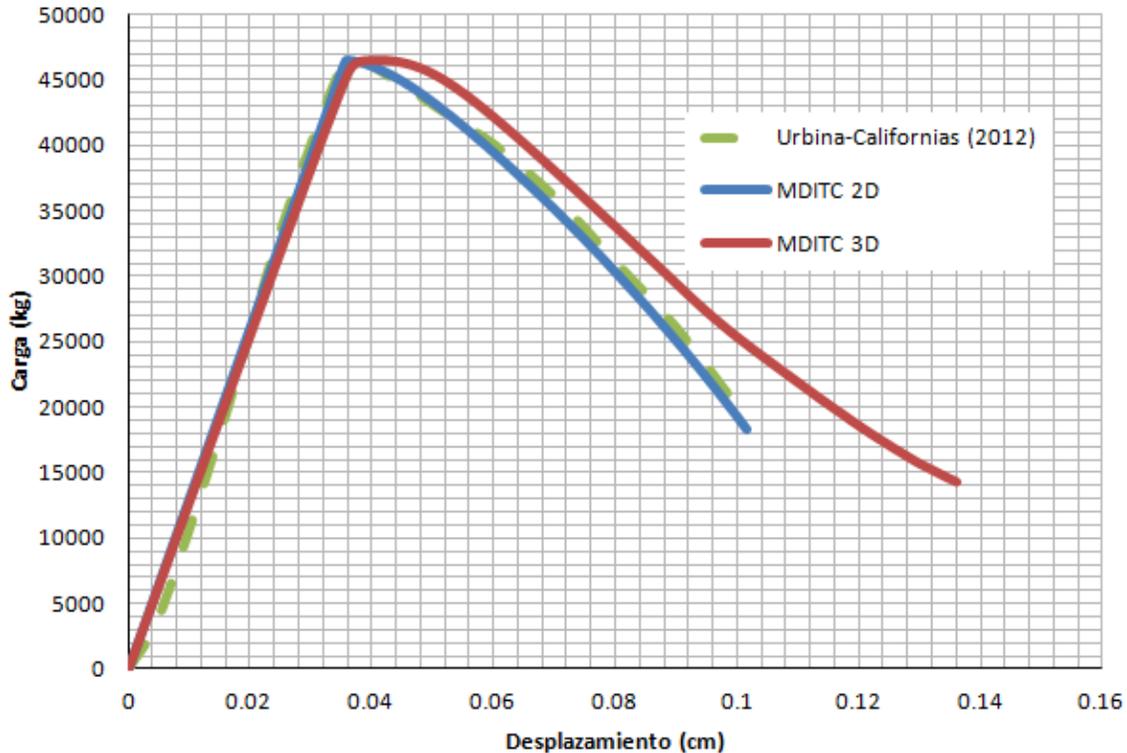


Figura 3.34. Curva carga contra desplazamiento utilizando el MDITC

3.8 Zapata en espacio finito con carga simétrica

Una zapata ubicada en un espacio finito, se somete a una carga de compresión hasta que falla el suelo donde se encuentra desplazada presentando una cuña por punzonamiento como ocurre comúnmente con estos elementos estructurales. Las propiedades del suelo donde se encuentra desplazada la zapata son *modulo de Young* $E=1.0 \text{ GPa}$ (10193.7 kg/cm^2), *relación de Poisson* $\nu=0.45$, *esfuerzo ultimo* $\sigma_u=1.0 \text{ MPa}$ (10.193 kg/cm^2), *modulo de ablandamiento* $\bar{H}=-0.25 \text{ Gpa/m}$ (-254842 kg/m). La zapata tiene una rigidez 1×10^4 veces mayor que la del suelo.

Manzoli (1998) realizó pruebas numéricas en un espécimen con la geometría y las condiciones de frontera mostradas en la Figura 3.35, utilizando un modelo matemático que desarrollo tomando como criterio la aproximación de discontinuidad de interiores. Para la solución de este problema se analizo solamente en 2D considerando un espesor unitario tratándose como un sistema en deformación plana; por consiguiente, se omite el análisis en 3D no teniendo como dato un espesor del sistema. Se estructuro una malla de cuadriláteros de 2128 elementos finitos, tendido elementos con relación de aspecto más pequeña en la mitad superior del suelo donde se espera que se presente la falla, esto se hace con el fin de tener un análisis más refinado en esa parte del espacio finito; esta malla se muestra en la Figura 3.36 antes y después del daño.

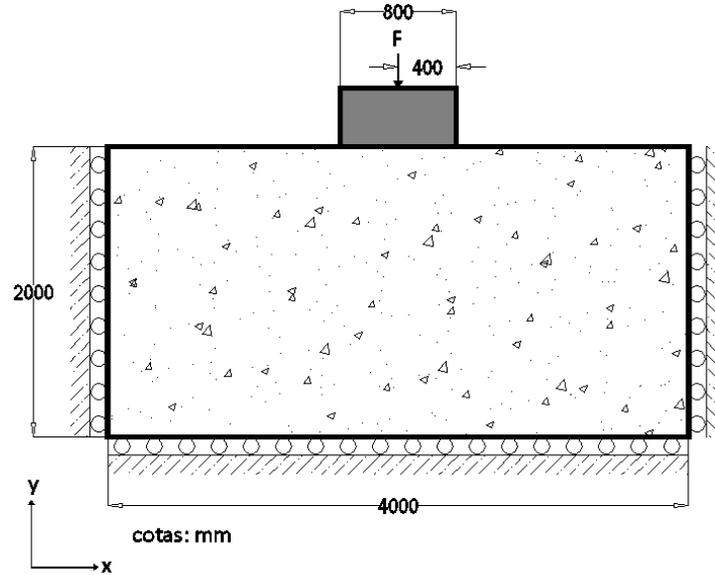


Figura 3.35. Zapata en espacio finito con carga simétrica

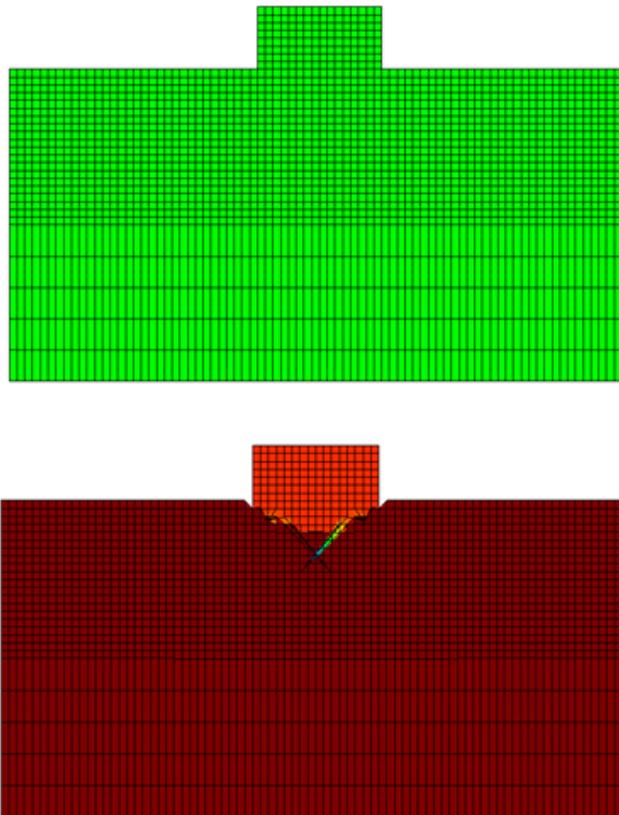


Figura 3.36. Malla: antes y después del daño

Para la simulación en este ejemplo se utilizó primeramente el MDSC por esperarse un fallo de cortante por punzonamiento, no obstante, este modelo no alcanza la falla por tratarse

de esfuerzos a compresión, por consiguiente se utilizaron los MDITC y el MDDTC para encontrar la falla. En la *Figura 3.37* se comparan los resultados reportados por Manzoli (1998) con los obtenidos con los modelos de daño; se observa en la grafica una consistencia en la rama ascendente y en el valor umbral, en el ablandamiento del sistema se aprecia un desfase en los resultados, esto se debe a que el modelo matemático desarrollado por Manzoli (1998) considera las propiedades plásticas del medio mismas que los modelos desarrollados en este trabajo no consideran.

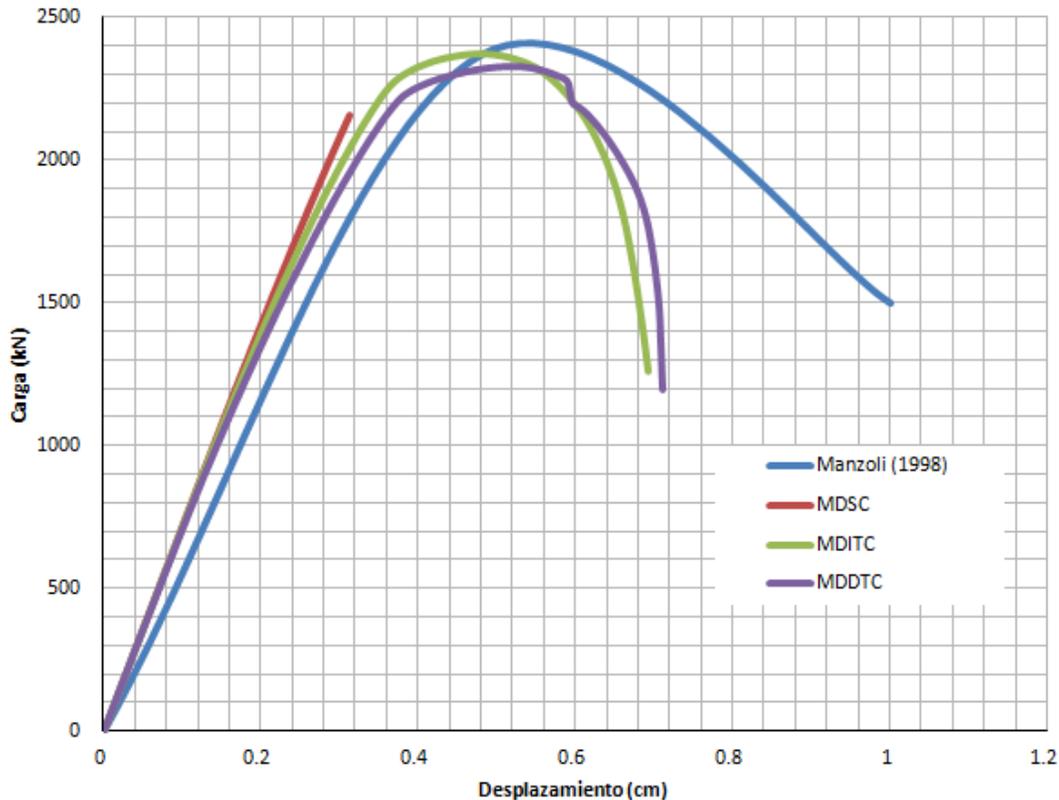


Figura 3.37. Curva carga contra desplazamiento de zapata con carga simétrica

En un ejemplo similar se utilizan la misma geometría, condiciones de frontera y propiedades mecánicas de este ejemplo, pero con una carga asimétrica localizada a 8 cm del centro de la zapata.

3.8.1 Zapata en espacio finito con carga asimétrica

Este ejemplo también desarrollado por Manzoli (1998) se trata de una zapata ubicada en un espacio finito, con una carga de compresión asimétrica localizada a 8 cm de su centro. La geometría y condiciones de frontera del sistema se muestran en la *Figura 3.38*. Para la simulación de este ejemplo se utilizó la misma malla estructurada en el ejemplo anterior, utilizando para su solución los modelos MDSC, MDITC y MDDTC; en la *Figura 3.39* se muestra la malla después del daño donde se presenta una falla de cortante por

punzonamiento localizada en el extremo derecho de la zapata, mismo donde se espera que ocurra el asentamiento siendo el lado donde se encuentran los mayores esfuerzos debido a la asimetría de la carga.

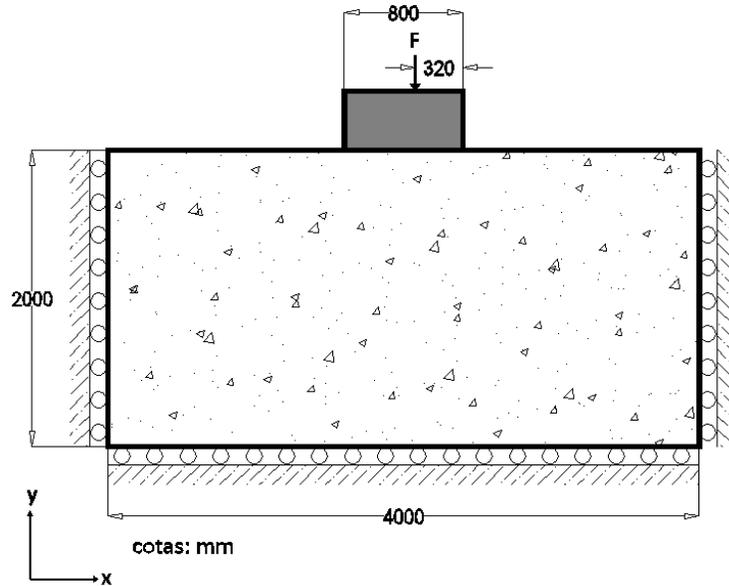


Figura 3.38. Zapata en espacio finito con carga asimétrica

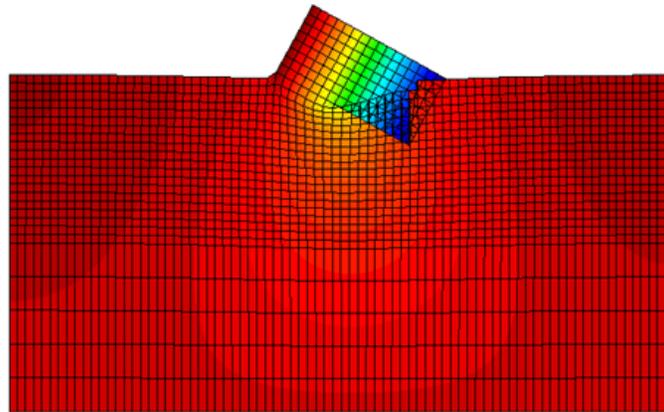


Figura 3.39. Malla: después del daño

Se realiza una comparación de los resultados reportados por Manzoli (1998) y los obtenidos con los modelos de daño de esta investigación, esto se muestra en la *Figura 3.40*. Se observa que, al igual que el ejemplo anterior, el MDSC no alcanza el valor umbral mientras que el MDITC y el MDDTC alcanzan una fuerza última menor que los reportados por Manzoli (1998) y un desfase en el ablandamiento del sistema debido a la plasticidad que se considera en el modelo matemático de discontinuidad de interiores a diferencia de los modelos de daño que no la consideran.

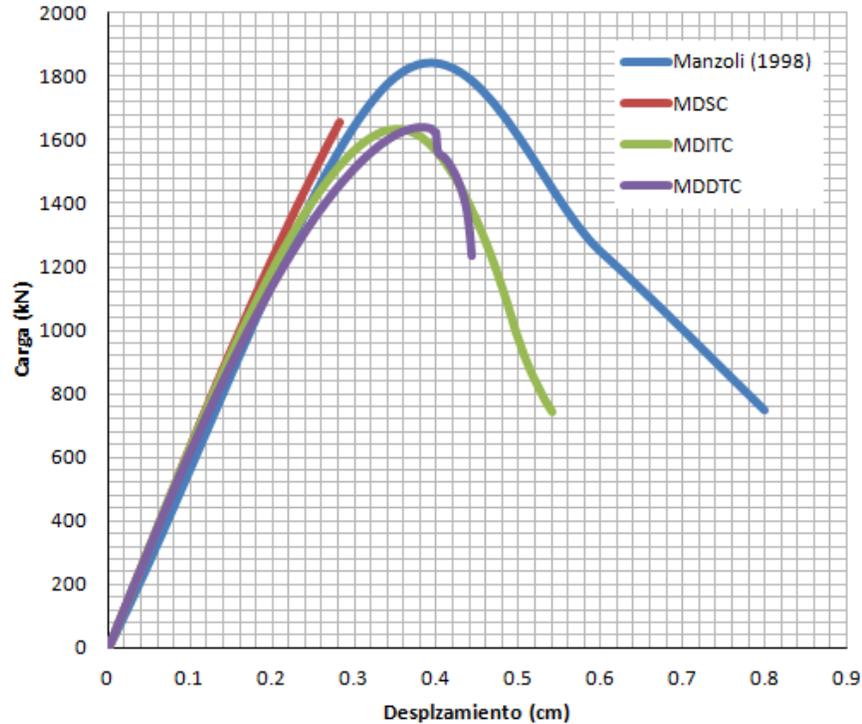


Figura 3.40. Zapata con carga asimétrica

3.9 Prueba brasileña (tensión indirecta)

Un cilindro de concreto se somete a compresión en su eje longitudinal produciendo una tensión indirecta, por efecto de Poisson, en el eje perpendicular; las propiedades del material son: *Resistencia Última a Tensión* $\sigma_u=2.6 \text{ MPa}$ (26.5 kg/cm^2), *Relación de Poisson* $\nu=0.2$, *Modulo de Young* $E=30.5 \text{ GPa}$ (310907 kg/cm^2) y una *Energía de Fractura* $G_f=100 \text{ N/m}$ (0.1019 kg/cm).

Blanco (2006) desarrollo un modelo numérico para el análisis de estructuras bajo distintos tipos de esfuerzos al que llamo IMPL-EX desarrollando este problema en especímenes con la geometría y condiciones de frontera que se muestran en la *Figura 3.41*. Para la solución de este ejemplo, se utilizaron los MDST y MDDTC, comparando al final los resultados obtenidos con estos modelos de daño y los reportados por Blanco (2006).

Para la simulación en 2D se estructuro una malla de cuadriláteros de 398 elementos finitos como se muestra en la *Figura 3.42*, en el análisis en 3D se estructuro una malla de hexaedros de 2388 elementos finitos, esto se muestra en la *Figura 3.43*. Ambas mallas se muestran antes y después del daño.

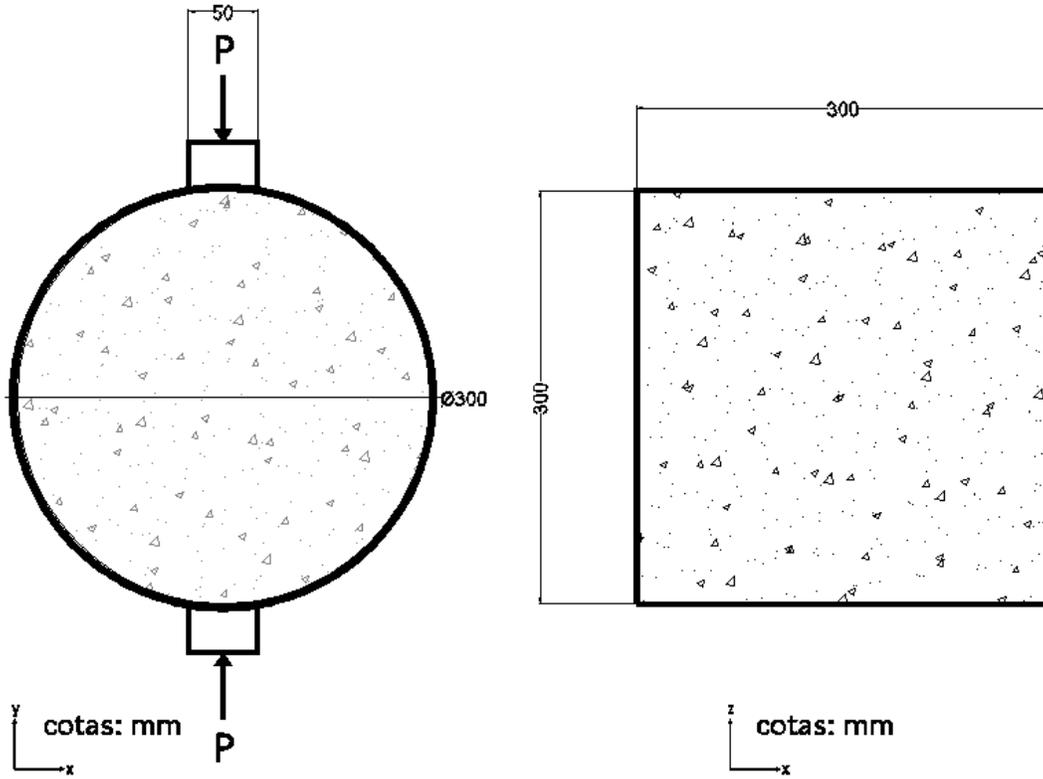


Figura 3.41. Cilindro de concreto sometido a tensión indirecta

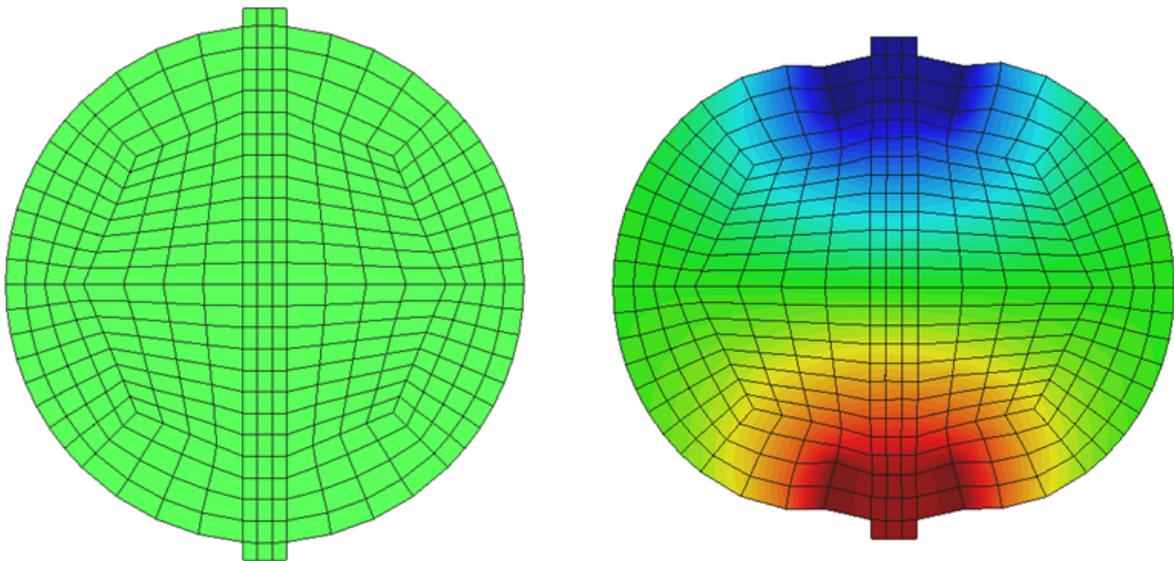


Figura 3.42. Malla: a) antes y b) después del daño

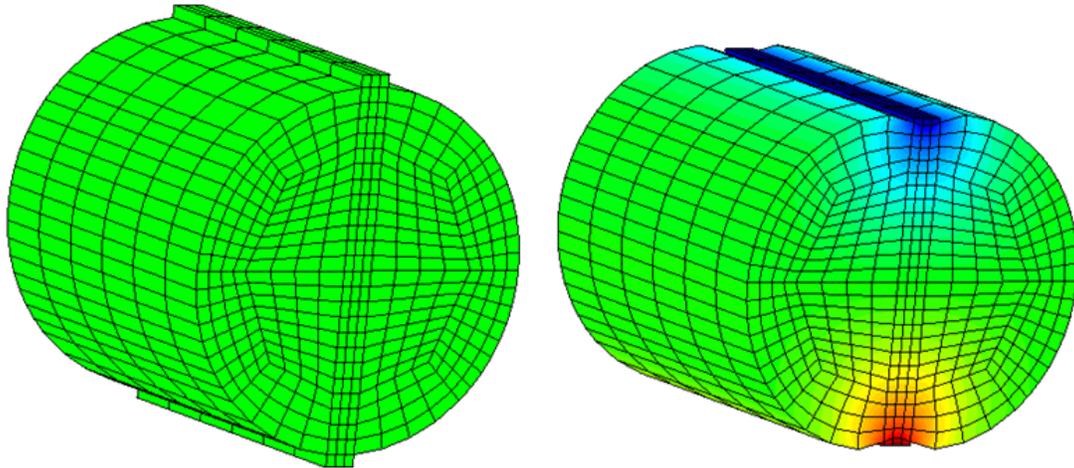


Figura 3.43. Malla: a) antes y b) después del daño

En los resultados reportados por Blanco (2006), muestra una gráfica $Carga/Carga_{max}$ vs. $Desplazamiento/Desplazamiento_{max}$ dejando la incertidumbre de cuáles fueron los valores máximos encontrados en la prueba; primeramente se muestra, en la Figura 3.44, los resultados obtenidos con los modelos MDST y MDDTC en una gráfica de $Carga-Desplazamiento$, siendo de este tipo los valores derivados de las simulaciones con estos modelos de daño.

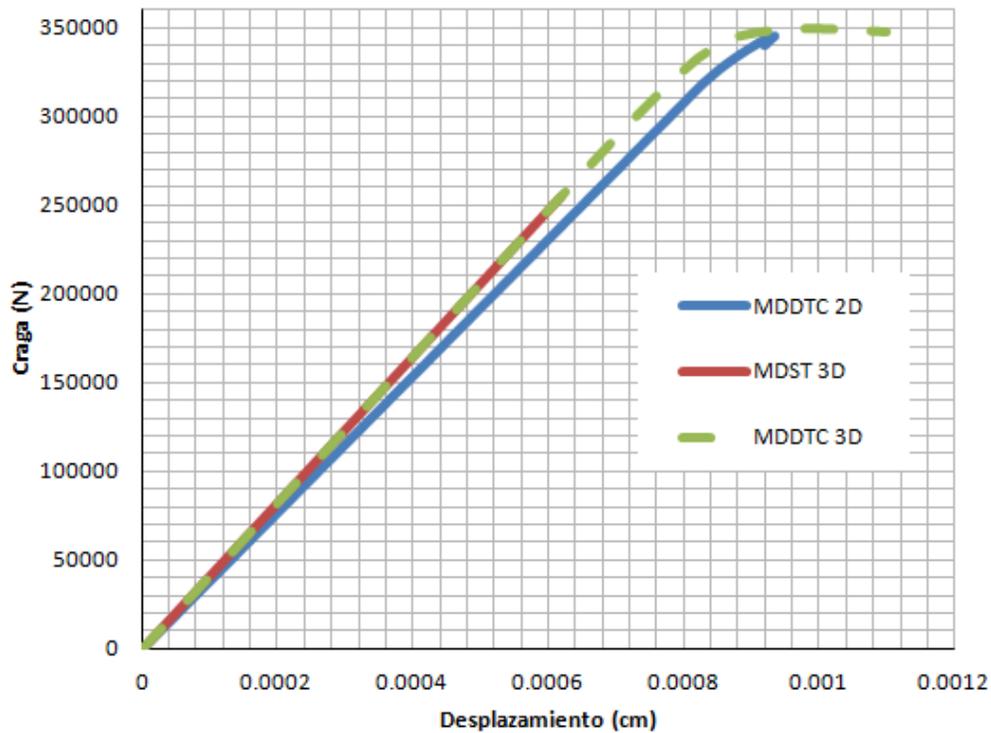


Figura 3.44. Resultados con modelos de daño

En la *Figura 3.45* se muestra la comparación entre los resultados reportados por Blanco (2006) y los obtenidos con MDST y MDDTC, tomando como referencia para poder graficar $Carga/Carga_{max}$ vs. $Desplazamiento/Desplazamiento_{max}$, los valores máximos obtenidos con estos modelos de daño. Se observa que mientras el MDST no alcanza el valor umbral, el MDDTC alcanza a ablandar un poco pero no se obtiene todo el descenso que se esperaba en la gráfica; en el primero esto se debe a que no logra resolver correctamente el problema ya que, aunque las deformaciones principales son de tipo I, los esfuerzos mayores siempre son de compresión por el tipo de carga; el segundo se encuentra con un problema de atoramiento de esfuerzos, esto se debe a que en el corazón del cilindro los esfuerzos resultantes son iguales en todos los elementos, no encontrando un punto de falla, siendo el propósito de esta prueba analizar el comportamiento rumbo al colapso por tensión indirecta debido al efecto de Poisson y no por compresión directa donde, como ocurre comúnmente en este tipo de elementos estructurales, se presenta un plano de falla por cortante.

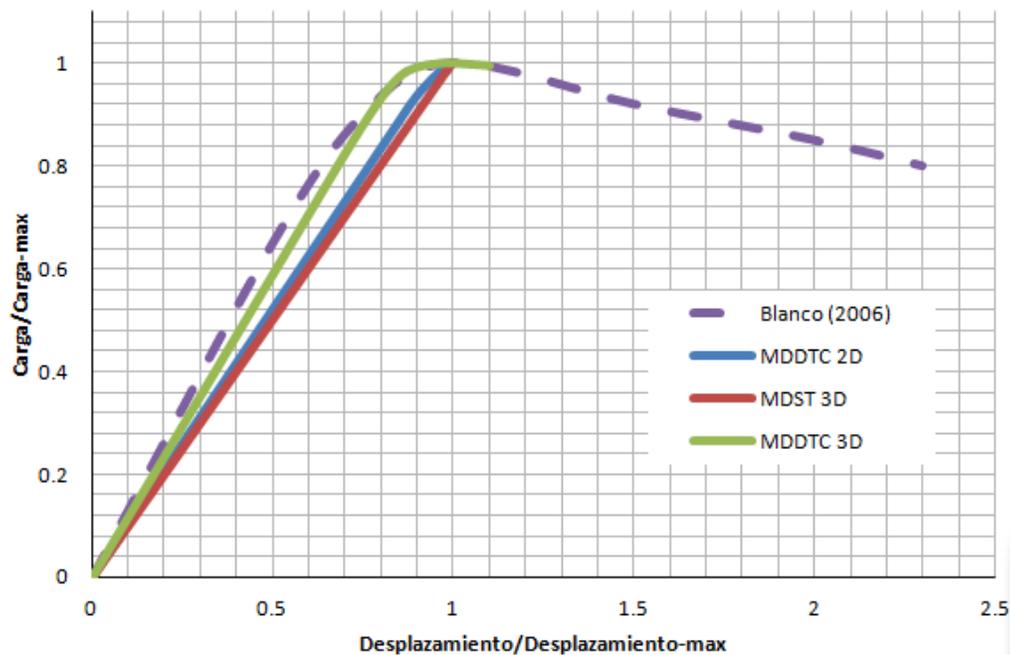


Figura 3.45. Comparación de resultado, cosientes entre maximos $Carga/Carga_{max}$ - $Desplazamiento/Desplazamiento_{max}$

Conclusiones y Recomendaciones

Conclusiones

En esta investigación se realizó la formulación, la implantación y la validación de dos modelos de daño (*Modelo de Daño Isotrópico Sólo Tensión "MDST"* y *Modelo de Daño Isotrópico Sólo Cortante "MDSC"*) para la solución de sólidos sometidos a esfuerzos de sólo tensión y sólo cortante, los cuales resolvieron problemas en 2D y 3D llegando a las siguientes conclusiones:

- a) Con base en las comparaciones realizadas con soluciones numéricas y experimentales, se valida el uso no solo de estos modelos de daño sino, en general, de los análisis numéricos para la solución o aproximación del comportamiento de elementos bajo cargas de colapso;
- b) Se observó en los ejemplos de aplicación que utilizar un modelo más general, como el Modelo de Daño Isotrópico Igual Tensión Compresión, aunque puede obtenerse una solución aproximada, no representa adecuadamente el deterioro en materiales que tiene diferentes umbrales a tensión y compresión, presentando un aplastamiento prematuro, por lo cual se concluye que para problemas con materiales con diferentes umbrales no resulta adecuado su uso;
- c) Para superar el problema de aplastamiento prematuro, se usaron los modelos de daño de Modelo de Daño Isotrópico Sólo Tensión, Modelo de Daño Isotrópico Sólo Cortante y Modelo de Daño Isotrópico Diferente Tensión Compresión, concluyendo que se pueden estudiar estructuras bajo las mismas sollicitaciones de carga obteniendo un resultado particular según el modelo que se utilice;
- d) Los resultados obtenidos con los modelos desarrollados en esta investigación son congruentes con los resultados reportados experimental y numéricamente, concluyendo que se obtiene una adecuada simulación del ablandamiento del material localizando sus zonas de degradación;
- e) Es posible asignar la energía de fractura en los modelos implantados en este trabajo, obtenida por experimentos o reportada en la literatura, siendo dependiente de los resultados numéricos;
- f) El Modelo de Daño Isotrópico Sólo Cortante presentó problemas cuando las deformaciones no presentan las de tipo angulares, siendo estas últimas necesarias

para alcanzar la superficie de daño, con lo cual se concluye que solo es válido para problemas donde las fuerzas externas produzcan cortante puro en los sólidos;

- g) El Modelo de Daño Isotrópico Sólo Tensión presentó problemas cuando las deformaciones máximas ocurrían en dirección vertical, lo cual no ocurría en la dirección perpendicular, con lo que se concluye que este modelo de daño sólo es válido para problemas que presenten deformaciones máximas en dirección horizontal;
- h) Los modelos de daño en 2D y 3D no presentan atoramientos de esfuerzos, lo cual garantiza una adecuada simulación de estructuras evolucionando al colapso.

Recomendaciones

Con base en los resultados obtenidos, se hacen las siguientes recomendaciones:

- a) La simulación numérica de un modelo idealizado en 2D se realiza de una manera más rápida en comparación con uno en 3D, obteniendo resultados bastantes aproximados; sin embargo, en 3D, aunque el proceso del cálculo es más tardado, se obtiene y se puede observar un mejor comportamiento de la estructura en su evolución al colapso por lo cual se recomienda una simulación en 3D cuando se requiera una mejor apreciación de los resultados y en 2D cuando se requiera de un análisis menos detallado;
- b) Verificar correctamente las cargas a las que estará sometida la estructura, considerando las conclusiones antes expuestas, para la elección del modelo de daño que se adecue a las solicitaciones;
- c) Seleccionar un tamaño óptimo de la malla de elementos finitos, considerando que esto puede detener o hacer mas tardado el proceso de cálculo, recomendando diseñar una malla estructurada y refinada en la zona de concentración de esfuerzos;
- d) Considerar la simetría de los sólidos cuando esto sea posible, permitiendo trabajar en un modelo con un sistema de ecuaciones reducido que reproduzca de manera óptima el comportamiento global de material.

Trabajos futuros

Siguiendo la línea e investigación de este trabajo, algunos proyectos para realizar en el futuro son:

- a) Los ejemplos de aplicación presentados son principalmente de concreto simple, lo cual permite incursionar en problemas adecuando los Modelo de Daño Isotrópico Sólo Tensión y Modelo de Daño Isotrópico Sólo Cortante para la simulación de concreto reforzado;
- b) Asimismo, los ejemplos realizados son para materiales isotrópicos, dejando a consideración el comportamiento de materiales anisotrópicos;
- c) Incluir los problemas de plasticidad de los sólidos, cuando esto lo requiera;
- d) Analizar estructuras completas considerando la diferencia de esfuerzos en sus elementos discretizándolas por tipo de modelo de daño, según se requiera;
- e) Considerar efectos dinámicos como por ejemplo: cargas cíclicas, y adecuar para la obtención del comportamiento histerético de los materiales;
- f) Formular modelos de daño para esfuerzos como: torsión, flexión y/o pandeo, cortante rasante;
- g) Estudiar el comportamiento de ensambles y conexiones en estructuras prefabricadas.

Referencias

- [1] Ahmad, S.H. y S.P. Shah. (1982), "Complete Triaxial Stress-Strain Curves for Concrete.", ASCE Journal of the Structural Division 108 (ST4), pp. 728-742.
- [2] Archundia, H., C. Tena y M. Cuevas (2005), **Estudio experimental del cortante estático en trabes acarteladas de concreto reforzado**, Departamento de Estructuras de la Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Azcapotzalco.
- [3] Armero, F. (1997), "On the characterization of localized solutions in inelastic solids: an analysis of wave propagation in a softening bar", *Computer Methods Applied Mechanics Engineering.*, available also as UCB/SEMM, Report no. 97/18, submitted for publication.
- [4] Armero, F. (1997), "Localized anisotropic damage of brittle materials", In: Owen, D.R.J., Onate, E., Hinton, E. (Eds.), *Proc. COMPLASV, CIMNE*, Barcelona.
- [5] Armero, F. y S. Li (1998), "Numerical simulation of anisotropic damage at nite strains", *Proc. 12th ASCE Engineering Mechanics Conference, La Jolla, CA.*
- [6] Armero, F. y S. Oller (1999), "A general framework for continuum damage models part II: applications to the numerical simulation of porous metals", *International Journal Solids Structures*, vol. 37, pp. 7437-7464.
- [7] Baqueiro, L., H. Perez, J. Varela (2006), "Caracterización de los parámetros de fractura del concreto simple mediante un análisis numérico", *Ingeniería*, vol. 10-3, pp. 23-34.
- [8] Barragan, B. (2002), "Failure and Toughnes of Steel Fiber Reinforced Concrete Under Tension and Shear", Tesis Doctoral, Universidad Politecnica de Catluña.
- [9] Bazant, Z. y Cedolin (1979), "Blunt crack band propagation in nite element analysis", *Journal of Engineering Mechanical Division ASCE*, vol. 105, pp. 297-315
- [10] Bazant, Z. (1983) "Crack band theory for fracture of concrete", *Materials and Structures RILEM*, vol. 16, pp. 155-177.
- [11] Bazant, Z. (1985), "Microplane model for progressive fracture of concrete and rock", *Journal of Engineering Mechanical*, vol. 111, pp. 559-582.
- [12] Bazant Z. P y Planas J. (1998), "Fracture and Size Effect in Concrete an others Cuasibrittle Materials", CRC Press, Boca Raton, FL.

-
- [13] Bicanic, N. y B. Mang (1990), "Computer Aided Analysis and design of Concrete Structures", *Second International Conference on Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures*, vol. 2, pp. 945-958.
- [14] Blanco, S. (2006), "Contribuciones a la simulación numérica del fallo material en medios tridimensionales mediante la metodología de discontinuidades fuertes de continuo", Tesis Doctoral, Universidad Autónoma de Catalunya.
- [15] Borja, R. (2000), "A Finite element model for strain localization analysis of strongly discontinuous field based on standard Galerkin approximation", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 190, pp. 1529-1549.
- [16] Buttlar, W., G. Paulino y S. Song (2006), "Application of Graded Finite Elements for Asphalt Pavements", *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 132 no. 3, pp. 204-249.
- [17] Chaboche J.L. (1992), "Damage Induced Anisotropy: On the Difficulties Associated with Active/Passive Unilateral Condition", *International Journal of Damage Mechanics*, vol.1, No. 2, pp. 148-171.
- [18] Chaboche J.L. (1993), "Development of Continuum Damage Mechanics for Elastic Solids Sustaining Anisotropic and Unilateral Damage", *International Journal of Damage Mechanics*, vol.2, pp.311-329.
- [19] Contrafatto L., Cuomo M., Micciché M. L. (2007), "A intra-element discontinuities approach for modelling cohesive fracture processes.", En *Proceedings XVIII AIMETA, National Congress*, 11 14 September 2007, Brescia, Italia, pp. 11-14.
- [20] Cordebois, J. y Sidoroff F. (1979), "Damage-induced elastic anisotropy, in mechanical behavior of anisotropic solids", *Colloque Euromech 115*, pp. 761-774.
- [21] Evangelista, F., J. Roesler y G. Paulino (2009), "Numerical Simulation of Fracture Resistance of Functionally Graded Concrete Materials", *Transportation Research record: Journal of the Transportation Research Board*, no. 2113, pp. 122-131.
- [22] Govindjee, S., G. Kay y J. Simo (1995), "Anisotropic modeling and numerical simulation of brittle damage in concrete", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 38, pp. 3611-3633.
- [23] Hansen, N. y H. Schreyer (1994), "A thermodynamically consistent framework for theories of elastoplasticity coupled with damage", *International Journal for Solids and Structures*, vol. 31, pp. 359-389.

- [24] Ju, J. (1989), "On energy-based coupled elastoplastic damage theories: constitutive modeling and computation aspects", *International Journal for Solids and Structures*, vol. 25, pp. 803-833.
- [25] Juárez, G. y Ayala G.A. (2010). "Aproximación del proceso de falla en sólidos con elementos finitos mixtos usando modelos de daño continuos". *Rev. Int. Mét. Num. Cal. Dis. Ing.*, Vol. 26, Núm. 3, pp. 225-232.
- [26] Juárez, G. (2006), "Modelado Numérico de Problemas de Fractura en Sólidos Mediante Discontinuidades Interiores", Tesis Doctoral, Universidad Nacional Autónoma de México.
- [27] Juárez, G. y Ayala G. (2010). "Análisis de estructuras con elementos finitos mixtos", *XVII Congreso Nacional de Ingeniería Estructural*, León, Guanajuato, noviembre.
- [28] Kachanov, L. (1958), **Time of the rupture proces under creep conditions**, IVZ Akad Nauk, S.S.R., Otd Tech Nauk 8.
- [29] Kumar, S. y S. Barai (2011), **Concrete fracture models and applications**, Springer.
- [30] Herrera, L. (2011), "Modelación numérica del concreto simple con elementos finitos usando un modelo constitutivo de daño", Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia.
- [31] Lemaitre, J. y Chaboche J. (1978), "Aspecta phenoménologique de la rupture par endommagement", *Journal of Mecanique Théorique et Apliquée 1978*, pp. 317-365.
- [32] Lemaitre, J. (1996), **A course on damage mechanics**, Springer Verlag, 1996.
- [33] Lubliner, J. (1990), **Plasticity Theory**, Mc. Millan Publishing U.S.A.
- [34] Luccioni, B. (2003), **Apuntes de mecánica de daño continuo**, primera edición, CIMNE, España.
- [35] Luccioni, B., Oller S. y Danesi R. (1996), "Coupled plastic-damage model", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 129*, pp. 81-89
- [36] Manzoli, L. (1998), "Un modelo analítico y numérico para la simulación de discontinuidades Fuertes en la mecánica de sólidos", Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Cataluña.
- [37] Méndez, H. (2012), "Implantación de modelos de daño para la simulación de elementos de concreto reforzado en su evolución al colapso", Tesis de Maestría, Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Azcapotzalco, México.

-
- [38] Murakami, S. (1983), **Notion of continuum damage mechanics and its application to anisotropic creep damage theory.**
- [39] Oller, S. (2001), **Fractura mecánica. Un enfoque global**, primera edición, CIMNE, España.
- [40] Ozer, H., Al-qadi I. y Duarte C. (2011), "A Three-Dimensional Generalised Finite Element Analysis for the Near-Surface Cracking Problem in Flexible Pavements", *International Journal of Pavement Engineering*, vol. 12 no. 4, pp. 407-419.
- [41] Rashid, Y. (1968) "Analysis of prestressed concrete pressure vessels", *Nuclear Engineering Design*, vol. 7 pp. 334-344.
- [42] Rots, J., P. Nauta, G. Kusters y T. Blaauwendraa (1985), "Smeared Crack Approach and Fracture Localization in Concrete", *Heron* 30.
- [43] Rots, J. (1985), **Computational modeling of concrete fracture.**
- [44] Simo, J. y J. Ju, (1987a), "Strain- and stress-based continuum damage models Part I: formulation", *International Journal for Solids and Structures*, vol. 23, pp. 821-840.
- [45] Simo, J. y J. Ju (1987b), "Strain- and Stress-Based Continuum Damage Models Part II: Computational Aspects", *International Journal for Solids and Structures*, vol. 23, pp. 841-869.
- [46] Vázquez, J., F. Rastellini y R. Ortega (2004), **Modelo isótropo de daño y modelo J2 de plasticidad. Implementación numérica con regularización viscosa**, primera edición, España.
- [47] Vieira, W. (2003), "A three dimensional setting for strong discontinuities modeling in failure mechanics", Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Catalunya.
- [48] Wagoner, P., W. Buttlar, G. Paulino y P. Blamkeship (2005), "Investigation of the Fracture Resistance of Hot-Mix Asphalt Concrete Using a Disk-Shaped Compact Tension Test", *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board*, no. 1929, pp. 183-192.
- [49] Wu, J., A. Collop y G. McDowell (2011), "Discrete Element Modeling of Constant Strain Rate Compression Test on Idealized Asphalt Mixture", *Journal of Materials in Civil Engineering*, vol. 3 ni. 1, pp. 2-11.

Anexo A

Implantación numérica

Para describir la forma estructurada como se desarrolla la programación de los modelos de daño descritos en el *Capítulo 2*, en este apéndice se desarrollan los diagramas de flujo útiles para la implantación en un programa de elementos finitos.

A.1. Diagrama de flujo

En la *Figura A. 1*, se muestra el diagrama de flujo general de los modelos de daño, el cual inicia con valores de entrada tomados de cada punto de integración de cada elemento finito, concluyendo con los valores de salida.

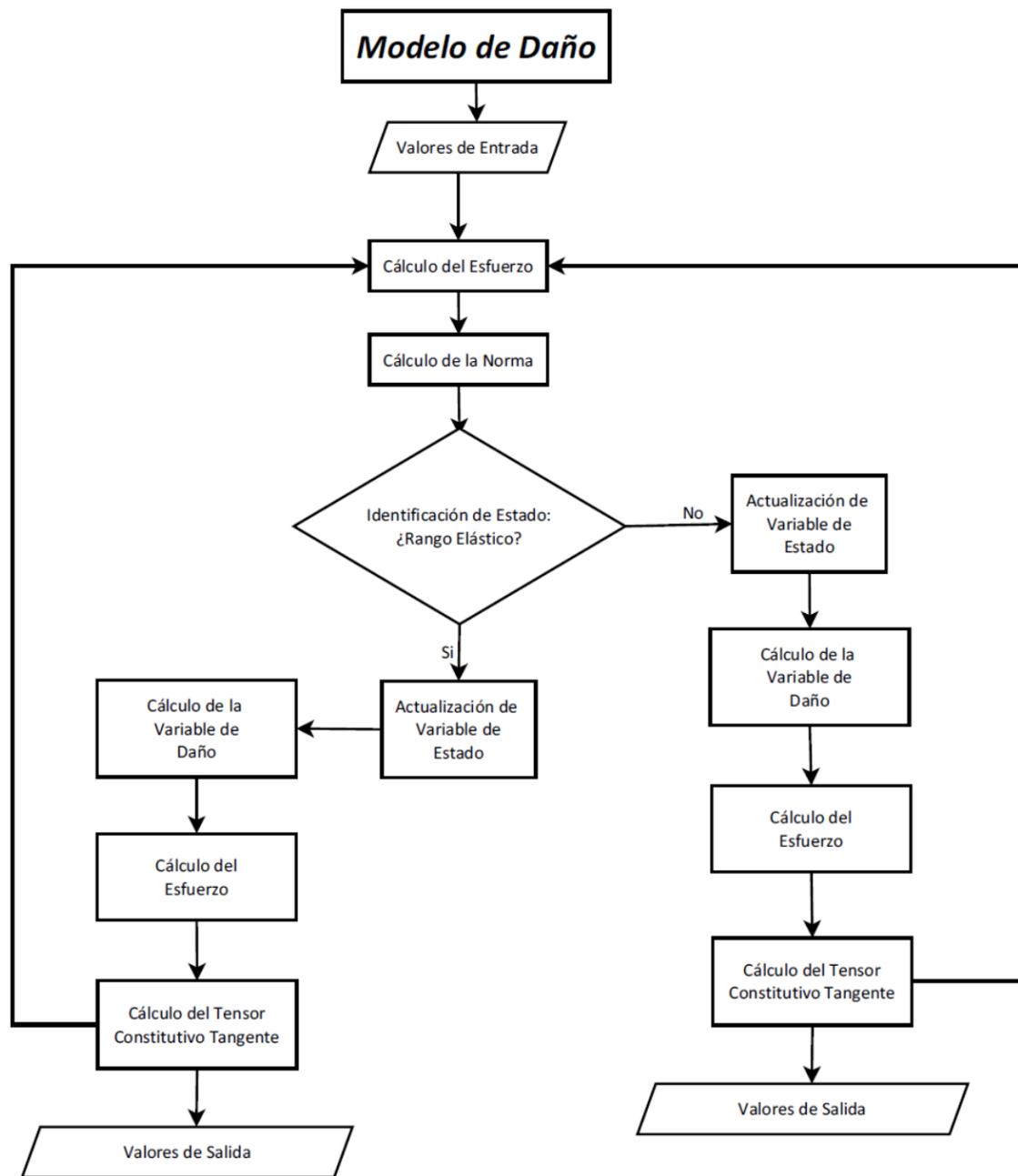


Figura A. 1. Diagrama de flujo general

A.2. Modelo de daño isotrópico igual tensión compresión (MDITC)

En la *Figura A. 2* se muestra el diagrama de flujo para la implantación del Modelo de Daño Igual Tensión Compresión, los valores de entrada consisten en el esfuerzo umbral σ_u , modulo elástico E y variable de estado elástica r_0 ; y los de salida consisten en los estados de esfuerzo $\sigma_{t+\Delta t}$, el tensor constitutivo tangente $C^d_{t+\Delta t}$, así como la variable de estado $r_{t+\Delta t}$.

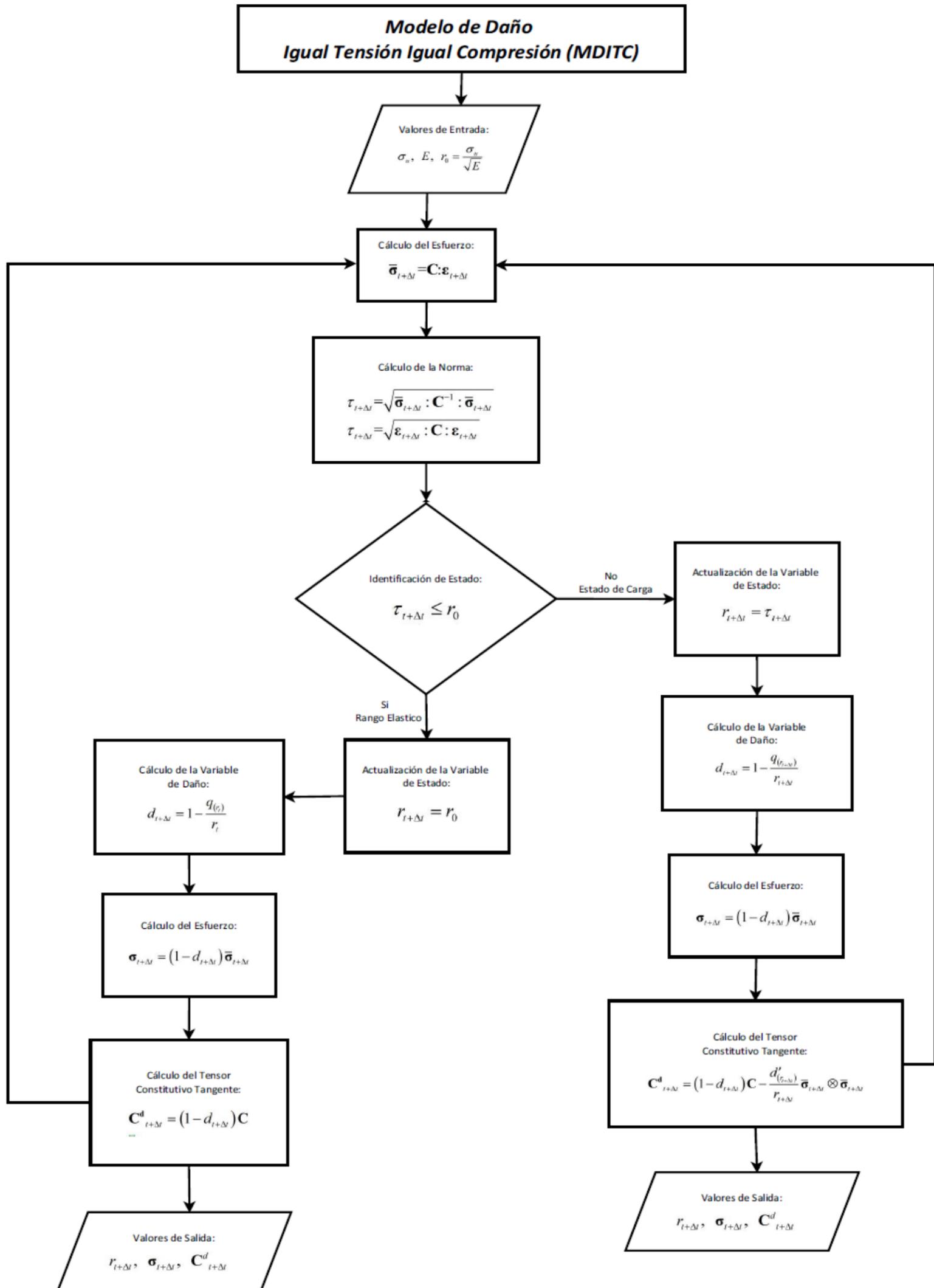


Figura A. 2. Diagrama de flujo para el MDITC

A.3. Modelo de daño isotrópico sólo tensión (MDST)

En la *Figura A. 3* se muestra el diagrama de flujo general para la implementación del Modelo de Daño Sólo Tensión, de igual manera que el Modelo de Daño Igual Tensión Compresión, se muestran los valores de entrada y salida, la diferencia entre estos es en el cálculo de las normas tanto en el espacio de esfuerzos $\tau(\sigma)_{t+\Delta t}$ como en el de deformaciones $\tau(\varepsilon)_{t+\Delta t}$, y el tensor constitutivo tangente $C^d_{t+\Delta t}$.

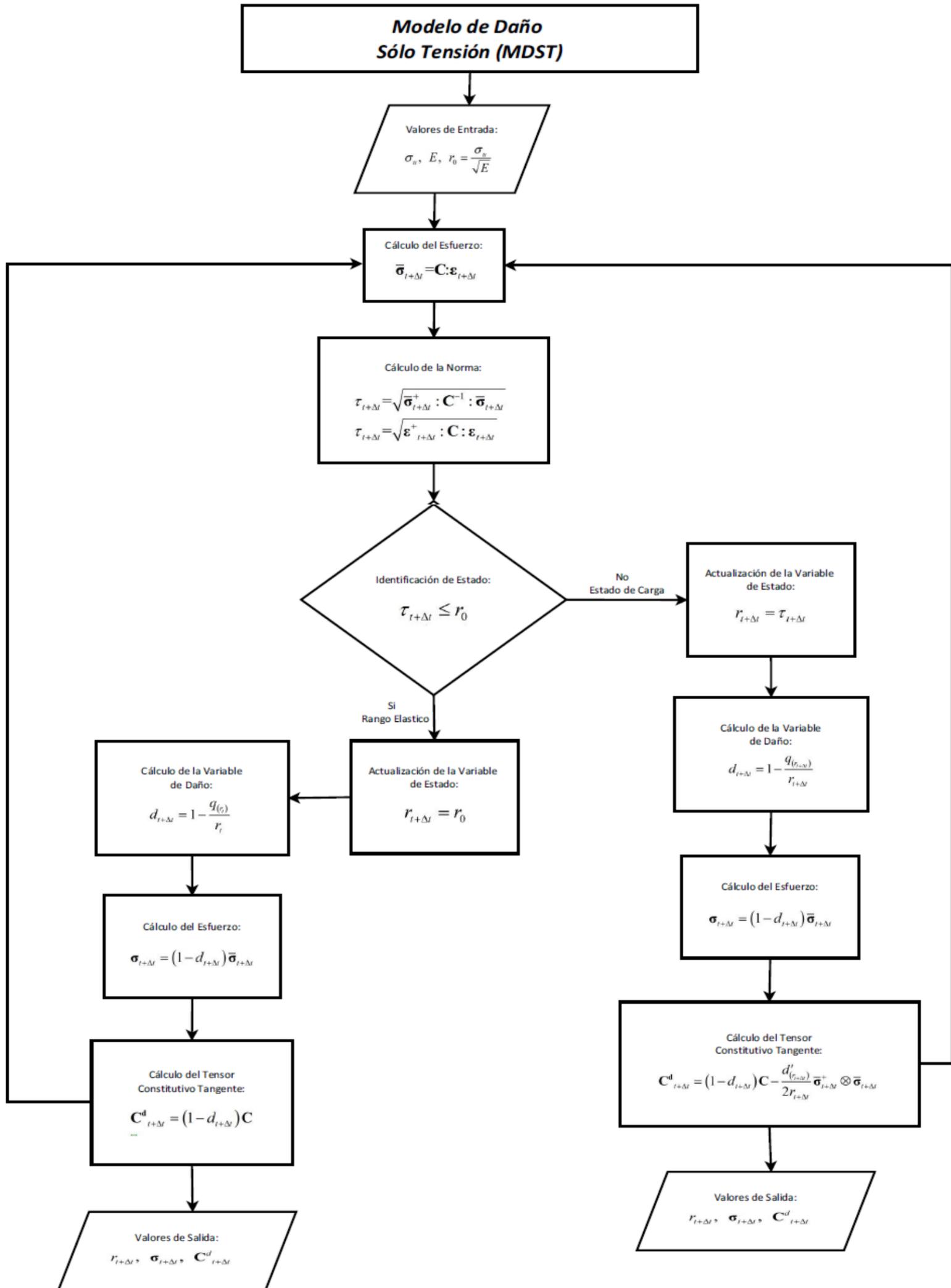


Figura A. 3. Diagrama de flujo para el MDST

A.4. Modelo de daño sólo cortante (MDSC)

Para la implantación del Modelo de Daño Sólo Cortante se muestra su diagrama de flujo en la *Figura A. 4*. Los valores de entrada, al igual que los dos anteriores, son el esfuerzo umbral y el módulo de elasticidad incluyendo también del módulo de rigidez a cortante G , la variable de estado r_0 (que depende, para este modelo, del módulo G) y el módulo de Poisson ν ; el cálculo de las normas marcan también un cambio, lo que diferencia el tensor constitutivo tangente.

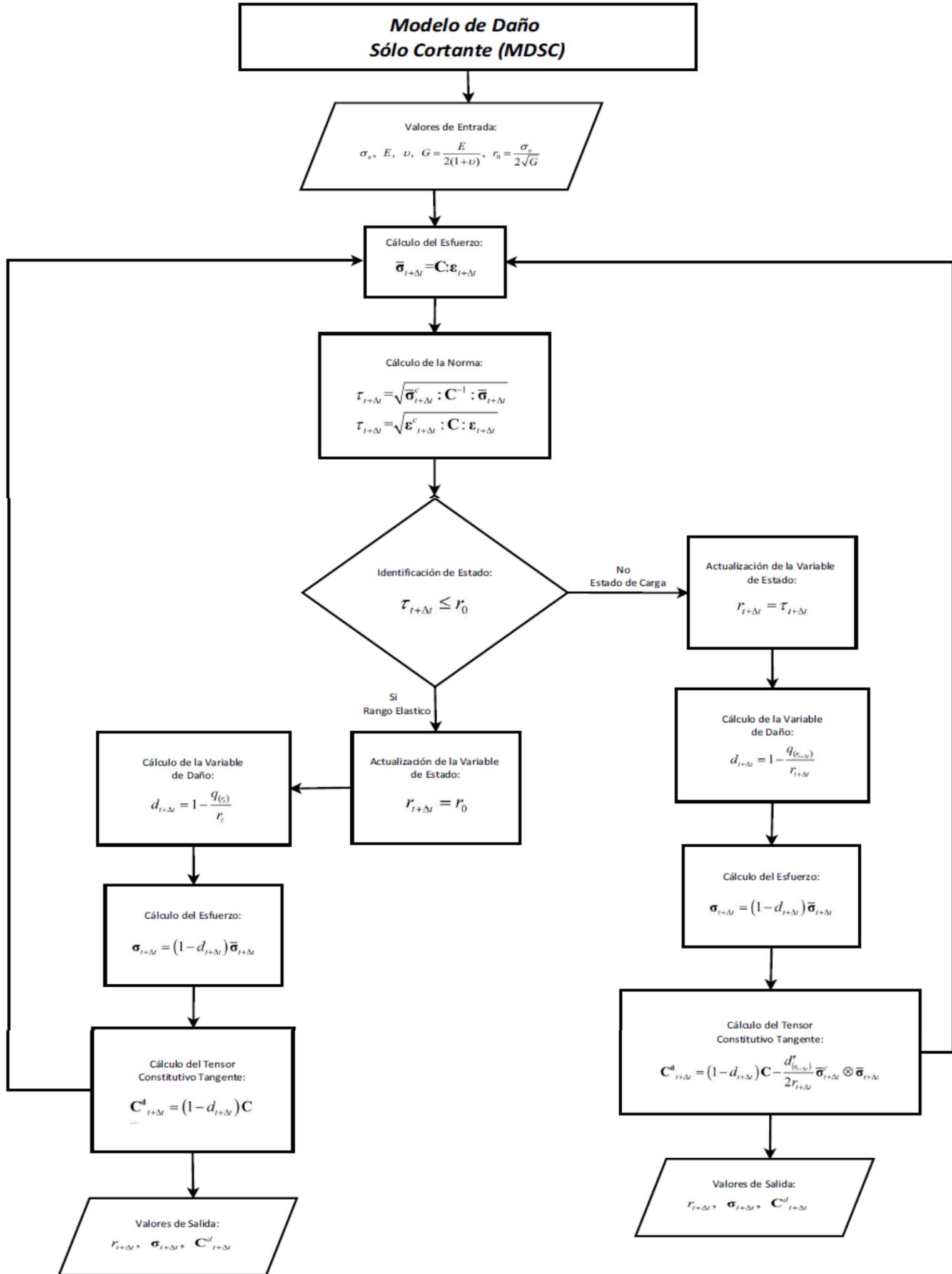


Figura A. 4. Diagrama de flujo para el MDSC

A.5. Modelo de daño diferente tensión compresión (MDDTC)

La implementación del Modelo de Daño con Diferente Umbral a Tensión y Compresión se muestra en el diagrama de flujo de la *Figura A. 5*, cabe mencionar que este modelo fue tomado como referencia y comprobación de algunos ejemplos de aplicación.

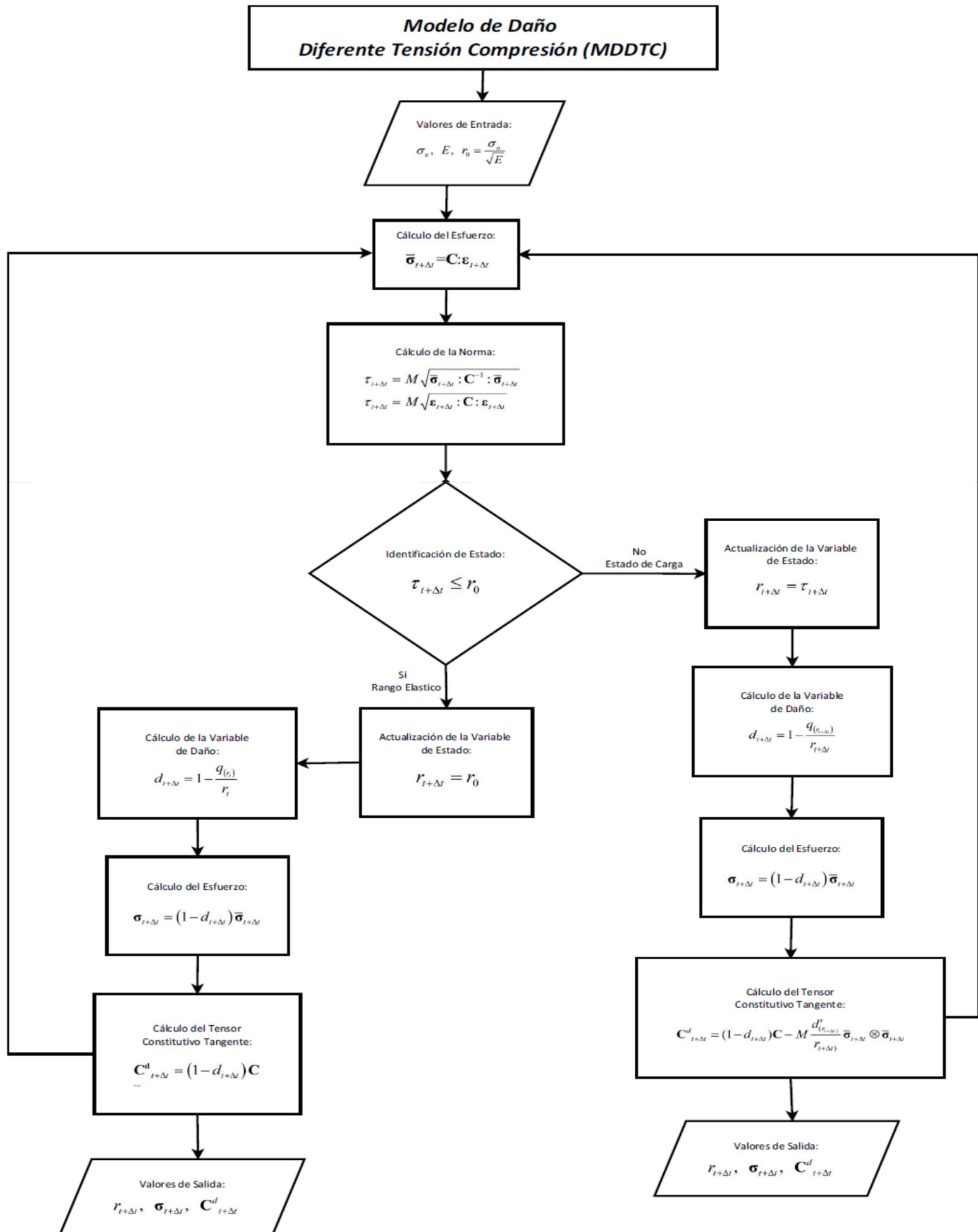


Figura A. 5. Diagrama de flujo para el MDDTC

En los diagramas de flujo mostrados en las *Figuras A.1 a A.5* se observa que, dependiendo del modelo constitutivo de daño, cambia el cálculo del tensor constitutivo tangente cuando el material se encuentra en estado de carga; en el caso de descarga o carga neutra, este tensor se calcula de la misma manera para todos los modelos, ya que el material se encuentra en su rango elástico lo que significa que aún no genera algún tipo de daño. A diferencia del MDSC que ocupa variables y ecuaciones de entrada distintos a los otros modelos, estos necesitan del mismo tipo de valores para comenzar su análisis.

Anexo B

Subrutinas desarrolladas para el programa FEAP

B.1. Subrutina modelo de daño isotrópico igual tensión compresión

A continuación se muestra el algoritmo desarrollado en el lenguaje de programación Fortran como subrutina para su implantación en el programa de elementos finitos FEAP, del modelo de daño igual tensión compresión (MDITC) para una simulación de sólidos en 2D:

```
c$Id: umat11.f,v 1.1 2007/06/22 18:41:35 rlt Exp $
  subroutine umat11(eps,theta,td,d,ud,hn,h1,nh,ii,istrt, sig,dd,isw)

c      * * F E A P * * A Finite Element Analysis Program

c....  Copyright (c) 1984-2007: Regents of the University of California
c              All rights reserved

c-----[---+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----]
c      Modification log                               Date (dd/mm/year)
c      Original version                               01/11/2006
c-----[---+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----]
c      Purpose: User Constitutive Model 1

c      Input:
c      eps(*) - Current strains at point (small deformation)
c              - Deformation gradient at point (finite deformation)
c      theta - Trace of strain at point
c              - Determinant of deformation gradient
c      td - Temperature change
c      d(*) - Program material parameters (nnd)
c      ud(*) - User material parameters (nud)
c      hn(nh) - History terms at point: t_n
c      h1(nh) - History terms at point: t_n+1
c      nh - Number of history terms
c      ii - Current point number
c      istrt - Start state: 0 = elastic; 1 = last solution
c      isw - Solution option from element

c      Output:
c      sig(*) - Stresses at point.
c              N.B. 1-d models use only sig(1)
c      dd(6,*) - Current material tangent moduli
c              N.B. 1-d models use only dd(1,1) and dd(2,1)
c-----[---+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----]
c      implicit none

c      include 'sdata.h'

c      integer nh,istrt,isw, ii,i,j
c      real*8 td
c      real*8 eps(*),theta(*),d(*),ud(*),hn(nh),h1(nh), sig(*),dd(6,*)

c      real*8 beta(6),ss0(2*ndf),spr(3),epsnorm,rtr,rzero,thick
c      real*8 q,H,Su,onefact,twofact,secdd(6,6),tandd(6,6),efsig(6)
```

```

logical state

save
thick=d(14)
Su=ud(1)
H=ud(3)

do i=1,4
  efsig(i)=0.D0
  do j=1,4
    secdd(i,j)=0.D0
  end do
end do

epsnorm=0.d0

c Stress:
c Linear Elastic Constitutive Model equal to subroutine estrsd

call dmat2d(d,d(31),dd,beta)

do i = 1,4
  efsig(i) = efsig(i) - beta(i)*td
  do j = 1,4
    efsig(i)= efsig(i) + dd(i,j)*eps(j)
  end do ! j
end do ! i

c Set plane stress case (dd(3,3) = 0.0d0)

if(dd(3,3) .eq. 0.0d0 ) then

  eps(3) = d(90)*efsig(1) + d(91)*efsig(2) + d(92)*td
  efsig(3) = 0.0d0

endif

rzero=Su/dsqrt(d(1))

c Computation of strains norm

do i=1,4
  epsnorm=epsnorm+efsig(i)*eps(i)
end do

epsnorm=dsqrt(epsnorm)

c hl(1)=rtr
hl(1)=dmaxl(rzero,hn(1))

c Displacement Damage Model

if (epsnorm.le.hl(1))then

  rtr=hl(1)

c Compute "q"
  if (ud(4).eq.1)then
    q = rzero+H*(rtr - rzero) !lineal

  elseif (ud(4).eq.2)then
    q = rzero*dexp(-H*(1.d0 - rtr/rzero)) !exponential
    H=H*dexp(-H*(1.d0 - rtr/rzero)) !Hd

  end if

c Compute factors "(1-d)=q/r"
  onefact = q/rtr

```

```

c      Compute "sigma=(1-d)*efsig
      do i=1,4
        sig(i)=onefact*efsig(i)
      end do

c      Compute tangent stiffness matrix
      do i=1,4
        do j=1,4
          dd(i,j)=onefact*dd(i,j)
        end do
      end do

      elseif (epsnorm.gt.hl(1))then

        rtr=epsnorm

        hl(1)=rtr

c      Compute "q"
      if (ud(4).eq.1)then
        q = rzero+H*(rtr - rzero)           !lineal

      elseif (ud(4).eq.2)then
        q = rzero*dexp(-H*(1.d0 - rtr/rzero))   !exponential
        H=H*dexp(-H*(1.d0 - rtr/rzero))   !Hd
      end if

c      Compute factors (1-d)=q/r and (q-Hr)/r3
      onefact = q/rtr
      twofact = H/rtr**2 - q/rtr**3

c      Compute secant matrix
      do i=1,4
        do j=1,4
          secdd(i,j)=onefact*dd(i,j)
        end do      ! j
      end do      ! i

c      Compute tangent matrix and sigma

      if (onefact.gt.0.d0)then

        do i=1,4
          do j=1,4
            dd(i,j)=secdd(i,j)+twofact*efsig(i)*efsig(j)
          end do      ! j
        end do      ! i

c      Compute sigma
      do i=1,4
        sig(i)=onefact*efsig(i)
      end do      ! i

      else

        do i=1,4
          do j=1,4
            dd(i,j)=0.d0
          end do      ! j
        end do      ! i

        do i=1,4
          sig(i)=0.d0
        end do      ! i

      end if

end if

end

```

B.2. Subrutina modelo de daño isotrópico sólo tensión

A continuación se muestra el algoritmo desarrollado en el lenguaje de programación Fortran como subrutina para su implantación en el programa de elementos finitos FEAP, del modelo de daño sólo tensión (MDST) para una simulación de sólidos en 2D:

```

c$Id:$
      subroutine umat15(eps,theta,td,d,ud,hn,h1,nh,ii,istrt, sig,dd,isw)

c      * * F E A P * * A Finite Element Analysis Program

c....  Copyright (c) 1984-2008: Regents of the University of California
c              All rights reserved

c-----[---.---+---.---+---.-----]
c      Modification log                               Date (dd/mm/year)
c      Original version                               01/11/2006
c-----[---.---+---.---+---.-----]
c      Purpose: User Constitutive Model 1

c      Input:
c      eps(*) - Current strains at point      (small deformation)
c              - Deformation gradient at point (finite deformation)
c      theta - Trace of strain at point
c              - Determinant of deforamtion gradient
c      td - Temperature change
c      d(*) - Program material parameters (nnd)
c      ud(*) - User material parameters (nud)
c      hn(nh) - History terms at point: t_n
c      h1(nh) - History terms at point: t_n+1
c      nh - Number of history terms
c      ii - Current point number
c      istrt - Start state: 0 = elastic; 1 = last solution
c      isw - Solution option from element

c      Output:
c      sig(*) - Stresses at point.
c              N.B. 1-d models use only sig(1)
c      dd(6,*) - Current material tangent moduli
c              N.B. 1-d models use only dd(1,1) and dd(2,1)
c-----[---.---+---.---+---.-----]
      implicit none

      include 'sdata.h'

      integer nh,istrt,isw, ii,i,j
      real*8 td,thfact1(4,4),thfact2(4),thfact3(4,4),thau(4)
      real*8 eps(*),theta(*),d(*),ud(*),hn(nh),h1(nh), sig(*),dd(6,*)

      real*8 beta(6),ss0(2*ndf),spr(4),sprc(3),epsnorm,rtr,rzero,thick
      real*8 q,H,Su,onefact,twofact,secdd(6,6),tandd(6,6),efsig(6)

      logical state

      save

      thick=d(14)
      Su=ud(1)
      H=ud(3)

      do i=1,4
         efsig(i)=0.D0
         do j=1,4
            secdd(i,j)=0.D0
         end do
      end do
end do

```

```

    epsnorm=0.d0

c   Stress:
c   Linear Elastic Constitutive Model equal to subroutine estrsd
c   sig-xx, sig-yy, sig-zz, sig-xy

    call dmat2d(d,d(31),dd,beta)

    do i = 1,4
        efsig(i) = efsig(i) - beta(i)*td
        do j = 1,4
            efsig(i)= efsig(i) + dd(i,j)*eps(j)
        end do ! j
    end do ! i

c   Set plane stress case (dd(3,3) = 0.0d0)

    if(dd(3,3) .eq. 0.0d0 ) then !Verificar esfuerzo plano

        eps(3) = d(90)*efsig(1) + d(91)*efsig(2) + d(92)*td
        efsig(3) = 0.0d0

    endif

c   Compute principal stresses

    call pstr2d(efsig,sprc)
    spr(1)=sprc(1)
    spr(2)=sprc(2)
    spr(3)=0.0d0
    spr(4)=0.0d0

    rzero=Su/dsqrt(d(1))

c   Calculo de solo tensores positivos

    do i=1,4
        if(spr(i).lt.0.d0)then
            spr(i)=0.d0
        else
            spr(i)=spr(i)
        endif
    enddo

c   Calculo de la norma

    do i=1,4
        epsnorm=epsnorm+spr(i)*eps(i)
    end do

    if(epsnorm.lt.0.0001d0)then
        epsnorm=0.d0
    end if

    epsnorm=dsqrt(epsnorm)

    h1(1)=dmax1(rzero,hn(1))

c   Displacement Damage Model

    if (epsnorm.le.h1(1))then

        rtr=h1(1)

c   Compute "q"

        if (ud(4).eq.1)then
            q = rzero+H*(rtr - rzero)           !lineal

        elseif (ud(4).eq.2)then

```

```

        q = rzero*dexp(-H*(1.d0 - rtr/rzero))      !exponential
        H=H*dexp(-H*(1.d0 - rtr/rzero))          !Hd
    end if
c   Compute factors "(1-d)=q/r"
        onefact = q/rtr
c   Compute "sigma=(1-d)*efsig"
        do i=1,4
            sig(i)=onefact*efsig(i)
        end do
c   Compute tangent stiffness matrix
        do i=1,4
            do j=1,4
                dd(i,j)=onefact*dd(i,j)
            end do
        end do
        elseif (epsnorm.gt.hl(1))then
            rtr=epsnorm
            hl(1)=rtr
c   Compute "q"
            if (ud(4).eq.1)then
                q = rzero+H*(rtr - rzero)          !lineal
            elseif (ud(4).eq.2)then
                q = rzero*dexp(-H*(1.d0 - rtr/rzero))      !exponential
                H=H*dexp(-H*(1.d0 - rtr/rzero))          !Hd
            end if
c   Compute factors (1-d)=q/r and (q-Hr)/r3
            onefact = q/rtr
            twofact = (q/(rtr**3))-(H/(rtr**2))
c   Compute secant matrix
            do i=1,4
                do j=1,4
                    secdd(i,j)=onefact*dd(i,j)
                end do      ! j
            end do          ! i
c   Compute tangent matrix and sigma
            if (onefact.gt.0.d0)then
                do i=1,4
                    do j=1,4
                        dd(i,j)=secdd(i,j)-(0.5*twofact*spr(i)*efsig(j))
                    end do      ! j
                end do          ! i
c   Compute sigma
                do i=1,4
                    sig(i)=onefact*efsig(i)
                end do      ! i
            else
                do i=1,4

```

```

        do j=1,4
            dd(i,j)=0.d0
        end do ! j
    end do ! i

    do i=1,4
        sig(i)=0.d0
    end do ! i

end if

end if

end

```

B.3. Subrutina modelo de daño isotrópico sólo cortante

A continuación se muestra el algoritmo desarrollado en el lenguaje de programación Fortran como subrutina para su implantación en el programa de elementos finitos FEAP, del modelo de daño sólo cortante (MDSC) para una simulación de sólidos en 2D:

```

c$Id:$
      subroutine umat17(eps,theta,td,d,ud,hn,h1,nh,ii,istrt, sig,dd,isw)

c      * * F E A P * * A Finite Element Analysis Program

c.... Copyright (c) 1984-2008: Regents of the University of California
c          All rights reserved

c-----[-----+-----+-----+-----+-----]
c      Modification log                               Date (dd/mm/year)
c          Original version                             01/11/2006
c-----[-----+-----+-----+-----+-----]
c      Purpose: User Constitutive Model 1

c      Input:
c          eps(*) - Current strains at point          (small deformation)
c                - Deformation gradient at point    (finite deformation)
c          theta - Trace of strain at point
c                - Determinant of deformation gradient
c          td    - Temperature change
c          d(*)  - Program material parameters (nnd)
c          ud(*) - User material parameters (nud)
c          hn(nh) - History terms at point: t_n
c          hl(nh) - History terms at point: t_n+1
c          nh    - Number of history terms
c          ii    - Current point number
c          istrt - Start state: 0 = elastic; 1 = last solution
c          isw   - Solution option from element

c      Output:
c          sig(*) - Stresses at point.
c                 N.B. 1-d models use only sig(1)
c          dd(6,*) - Current material tangent moduli
c                 N.B. 1-d models use only dd(1,1) and dd(2,1)
c-----[-----+-----+-----+-----+-----]
      implicit none

      include 'sdata.h'

      integer nh,istrt,isw, ii,i,j
      real*8 td
      real*8 eps(*),theta(*),d(*),ud(*),hn(nh),hl(nh), sig(*),dd(6,*)

```

```

real*8  beta(6),ss0(2*ndf),spr(4),sprc(3),epsnorm,rtr,rzero,thick
real*8  q,H,Su,onefact,twofact,secdd(6,6),tandd(6,6),efsig(6)
real*8  efc(6),tmax,G,ps,epr(4),epsd(4),eprc(4),emax
real*8  absoluto,factoru,factord,nc

logical state

save
thick=d(14)
Su=ud(1)
H=ud(3)
ps=d(2)

do i=1,4
  efsig(i)=0.D0
  do j=1,4
    secdd(i,j)=0.D0
  end do
end do

epsnorm=0.d0

c  Stress:
c  Linear Elastic Constitutive Model equal to subroutine estrsd
c  sig-xx, sig-yy, sig-zz, sig-xy

call dmat2d(d,d(31),dd,beta)

do i = 1,4
  efsig(i) = efsig(i) - beta(i)*td
  do j = 1,4
    efsig(i)= efsig(i) + dd(i,j)*eps(j)
  end do ! j
end do ! i

c  Set plane stress case (dd(3,3) = 0.0d0)

if(dd(3,3) .eq. 0.0d0 ) then !Verificar esfuerzo plano
  eps(3) = d(90)*efsig(1) + d(91)*efsig(2) + d(92)*td
  efsig(3) = 0.0d0
endif

c  Esfuerzo cortante maximo y tensor de esfuerzos

tmax=dsqrt((((efsig(1)-efsig(2))**2)/4)+(efsig(4)**2))
efc(1)=0
efc(2)=0
efc(3)=0
efc(4)=tmax

G=d(1)/(2*(1+ps))
rzero=Su/(2*dsqrt(G))

c  Computation of strains norm

do i=1,4
  epsnorm=epsnorm+efc(i)*eps(i)
end do

if(epsnorm.lt.0.0001d0)then
  epsnorm=0.d0
end if

epsnorm=dsqrt(epsnorm)

hl(1)=dmax1(rzero,hn(1))

```

```

c      Displacement Damage Model
      if (epsnorm.le.hl(1))then

          rtr=hl(1)

c      Compute "q"
          if (ud(4).eq.1)then
              q = rzero+H*(rtr - rzero)                !lineal

          elseif (ud(4).eq.2)then
              q = rzero*dexp(-H*(1.d0 - rtr/rzero))    !exponential
              H=H*dexp(-H*(1.d0 - rtr/rzero))        !Hd

          end if

c      Compute factors "(1-d)=q/r"

          onefact = q/rtr

c      Compute "sigma=(1-d)*efsig"

          do i=1,4
              sig(i)=onefact*efsig(i)
          end do

c      Compute tangent stiffness matrix

          do i=1,4
              do j=1,4
                  dd(i,j)=onefact*dd(i,j)
              end do
          end do

          elseif (epsnorm.gt.hl(1))then

              rtr=epsnorm

              hl(1)=rtr

c      Compute "q"

          if (ud(4).eq.1)then
              q = rzero+H*(rtr - rzero)                !lineal

          elseif (ud(4).eq.2)then
              q = rzero*dexp(-H*(1.d0 - rtr/rzero))    !exponential
              H=H*dexp(-H*(1.d0 - rtr/rzero))        !Hd
          end if

c      Compute factors (1-d)=q/r and (q-Hr)/r3

          onefact = q/rtr
          twofact =(q/(rtr**3))-(H/(rtr**2))

c      Compute secant matrix

          do i=1,4
              do j=1,4
                  secdd(i,j)=onefact*dd(i,j)
              end do      ! j
          end do          ! i

c      Compute tangent matrix and sigma

          if (onefact.gt.0.d0)then

              do i=1,4
                  do j=1,4
                      dd(i,j)=secdd(i,j)-(0.5*twofact*efc(i)*efsig(j))
                  end do
              end do
          end if

```

```
        end do      ! j
      end do      ! i
c      Compute sigma

      do i=1,4
        sig(i)=onefact*efsig(i)
      end do      ! i

      else

      do i=1,4
        do j=1,4
          dd(i,j)=0.d0
        end do      ! j
      end do      ! i

      do i=1,4
        sig(i)=0.d0
      end do      ! i

      end if

      end if

      end
```

Para simular elementos sólidos en 3D, los tensores se cambian en el comando *DO=1,4* por el comando *DO=1,6* para obtener los seis esfuerzos y deformaciones necesarias para trabajar en esta dimensión.