



División de Ciencias Básicas e Ingeniería

Número acromático de gráficas gramíneas bipartitas

Tesis para obtener el grado de

MAESTRO EN OPTIMIZACIÓN

por

Ernesto Castelán Chávez

Asesores:

Dr. Rafael López Bracho

Departamento de Sistemas, UAM Azcapotzalco

Dra. Laura Elena Chávez Lomelí

Departamento de Ciencias Básicas, UAM Azcapotzalco

16 de marzo de 2016

Dedicatoria

A mis padres.

Agradecimientos

A mis asesores, el Dr. Rafael López Bracho y la Dra. Laura Elena Chavez Lomelí, por todo el apoyo, los consejos y la sabiduría que me han brindado a lo largo de la maestría.

A la UAM y a sus gigantes sobre cuyos hombros tuve la oportunidad de pararme.

A mi familia por todo el apoyo y amor incondicional que siempre me han brindado.

Al universo.

Resumen

En este trabajo estudiamos diversas propiedades de las gráficas gramíneas bipartitas, enfocándonos en particular en las coloraciones completas y el número acromático de las mismas.

En el capítulo 1, presentamos al lector los conceptos preliminares más importantes para el desarrollo de éste trabajo.

En el capítulo 2, introducimos una clasificación de las gramíneas bipartitas en varias familias, y presentamos varias propiedades relacionadas con la estructura de estas familias, en particular, mostramos dos resultados importantes: una caracterización de un grupo de gramíneas bipartitas en términos de acoplamientos y la relación que el mismo grupo guarda con la familia de torneos regulares. También exploramos el problema de reconocer gráficas gramíneas en estas familias y presentamos un programa entero y un algoritmo que resuelven el problema.

En cuanto a problemas de coloración, en el capítulo 3, damos una cota superior, que es justa, para el número acromático de una familia de gramíneas bipartitas y clasificamos las coloraciones completas que alcanzan dicha cota. Estudiamos algunas de las coloraciones completas mencionadas y exhibimos condiciones necesarias y condiciones suficientes para la existencia de estas coloraciones. Así mismo, presentamos técnicas para obtener y extender coloraciones completas en las gráficas de interés.

Contenido

| | |
|---|------------|
| Contenido | VII |
| Lista de Figuras | IX |
| Lista de Tablas | XI |
| 1. Conceptos preliminares | 3 |
| 1.1. Matrices | 3 |
| 1.2. Teoría de gráficas | 4 |
| 1.2.1. Operaciones elementales | 5 |
| 1.2.2. Subgráficas y menores | 5 |
| 1.2.3. Isomorfismos y homomorfismos | 6 |
| 1.2.4. Caminos y ciclos | 7 |
| 1.2.5. Acoplamientos | 7 |
| 1.2.6. Familias comunes de gráficas | 8 |
| 1.2.7. Coloraciones | 8 |
| 1.3. Complejidad computacional | 9 |
| 2. Gráficas gramíneas | 11 |
| 2.1. Reconocer gráficas gramíneas de espigas cortas | 12 |
| 2.1.1. Consideraciones sobre la complejidad del problema | 14 |
| 2.1.2. Modelo de programación entera | 16 |
| 2.1.3. Algoritmo de backtracking | 17 |
| 2.2. Gráficas gramíneas bipartitas | 19 |
| 2.2.1. Gráficas gramíneas bipartitas de espigas cortas | 20 |
| 2.2.2. Relación con torneos regulares | 21 |
| 2.2.3. Gráficas gramíneas de matriz circulante | 24 |
| 3. Número acromático | 25 |
| 3.1. Número pseudo-acromático de GGEC | 25 |
| 3.2. Coloraciones completas de GGEC | 26 |
| 3.2.1. Coloraciones completas de GGBEC sin espiguillas | 26 |
| 3.2.2. Obtención de coloraciones completas en GGBEC sin espiguillas | 28 |
| 3.2.3. Coloraciones completas de GGBEC con espiguillas | 31 |
| 3.3. Número acromático de GGMC | 32 |
| 4. Conclusiones y trabajo futuro | 35 |
| Anexo A. Ejemplos de gráficas gramíneas bipartitas | 37 |

| | |
|--|-----------|
| Anexo B. Listado de GGBEC sin espiguillas | 41 |
| Bibliografía | 43 |

Lista de Figuras

| | |
|---|----|
| 1.1. Distintos tipos de matrices | 4 |
| 1.2. Distintos tipos de gráficas. | 5 |
| 1.3. Ejemplo de contracción de aristas. | 6 |
| 1.4. Ejemplos de subgráficas y menores. | 6 |
| 1.5. Ejemplo de acoplamiento. | 8 |
| | |
| 2.1. La transformación 4-polígono \rightarrow 4-estrella. | 11 |
| 2.2. Ejemplo de una gráfica gramínea. | 12 |
| 2.3. La gráfica de Petersen es una GGEC. | 13 |
| 2.4. Ejemplos de gráficas candidatas a GGEC. | 13 |
| 2.5. Contracción de aristas en triángulos y cuadrados. | 14 |
| 2.6. Ejemplo de una GGEC bipartita con ciclos alternantes. | 15 |
| 2.7. Aristas cuadrado-prohibidas por e | 17 |
| 2.8. Tiempo de ejecución del algoritmo 2.1. | 18 |
| 2.9. Ejemplos de GGBEC con y sin espiguillas. | 20 |
| 2.10. Distintas representaciones de las GGBEC sin espiguillas. | 21 |
| 2.11. Transformación de GGBEC sin espiguillas a torneo regular y viceversa. | 22 |
| 2.12. Mapeo de aristas y arcos entre GGBEC y torneos regulares. | 23 |
| 2.13. Ciclos hamiltonianos en torneos regulares y en GGBEC con y sin espiguillas. | 24 |
| | |
| 3.1. Ejemplo de coloración pseudo-completa en una GGEC con espiguillas. | 26 |
| 3.2. Ejemplos de coloraciones de permutación y no-permutación en GGBEC sin espiguillas. | 27 |
| 3.3. Complemento bipartito de la GGMC generada por la cadena "110". | 29 |
| 3.4. Coloración completa de permutación como problema de acoplamiento y de asignación. | 30 |
| 3.5. Extensión de coloraciones completas en GGBEC con espiguillas. | 31 |
| 3.6. Una GGBEC con $\psi(G) = s$ y $\psi(G \oplus K_2) = s$ | 32 |
| 3.7. Ejemplos de GGMC con $\psi(G) = s$ | 34 |
| 3.8. Una GGMC sin coloración completa de no-permutación. | 34 |
| | |
| A.1. Gráfica gramínea bipartita, ejemplo de la categoría 1.1 del teorema 2.6. | 37 |
| A.2. Gráfica gramínea bipartita, ejemplo de la categoría 1.1 del teorema 2.6. | 38 |
| A.3. Gráfica gramínea bipartita, ejemplo de la categoría 1.2 del teorema 2.6. | 39 |
| A.4. Gráfica gramínea bipartita, ejemplo de la categoría 1.2 del teorema 2.6. | 39 |
| A.5. Gráfica gramínea bipartita, ejemplo de la categoría 2 del teorema 2.6. | 40 |

Lista de Tablas

| | |
|--|----|
| B.1. Propiedades de las GGBEC con nueve o menos espigas y sin espiguillas. | 41 |
| B.2. Conteo de GGBEC con once espigas y sin espiguillas. | 42 |

Lista de algoritmos

| | |
|---|----|
| 2.1. Algoritmo para enumerar los acoplamientos gramíneos de G | 17 |
| 3.1. Heurística para obtener una coloración completa de G | 30 |

Conceptos preliminares

En éste capítulo daremos algunas definiciones y conceptos básicos necesarios para el desarrollo de éste trabajo, aunque en general asumimos que el lector está familiarizado con los conceptos elementales de teoría de gráficas y complejidad computacional. Tomamos como referencia el libro de Diestel de teoría de gráficas [8] y el libro de Arora y Barak sobre complejidad computacional [1], en caso de que el lector desee profundizar en los temas presentados, puede revisar dicho material.

1.1. Matrices

Definición 1.1. Una *matriz* de tamaño $m \times n$ es un arreglo rectangular de mn elementos dispuestos en m renglones y n columnas.

Generalmente se denota una matriz con una letra mayúscula y a sus elementos con la misma letra en minúscula junto con dos subíndices para indicar su posición (fila y columna). La matriz en sí se representa listando sus elementos entre corchetes.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

A veces los elementos de una matriz pueden definirse con una fórmula, digamos $f(i,j)$, y en ese caso podemos definir la matriz \mathbf{A} de tamaño $m \times n$ como $a_{i,j} = f(i,j)$. Se da por hecho que $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$.

Los elementos de una matriz pueden ser cualquier tipo de objeto matemático, aunque generalmente son números enteros, reales o complejos.

Definición 1.2. Una *matriz binaria* es aquella en la que sus elementos únicamente pueden tomar los valores 0 o 1.

Definición 1.3. Una *matriz antisimétrica* es aquella de tamaño $n \times n$ en la que $a_{i,j} = -a_{j,i}$. Extendemos ésta definición para matrices binarias, de modo que una matriz binaria sea antisimétrica cuando $a_{i,j} = \neg a_{j,i}$ para $i \neq j$.

Definición 1.4. Una *matriz circulante* es aquella de tamaño $n \times n$ en la que $a_{i,j} = a_{i+1,j+1}$ donde la suma se efectúa módulo n . En matrices de este tipo, cada renglón de la matriz se obtiene desplazando hacia la derecha los elementos del renglón anterior.

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 & -4 \\ 3 & 0 & -7 & 3 \\ -1 & 7 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Una matriz antisimétrica

(b) Una matriz binaria antisimétrica

(c) Una matriz circulante

Figura 1.1: Distintos tipos de matrices

1.2. Teoría de gráficas

La teoría de gráficas es una rama de las matemáticas discretas que estudia las propiedades de las gráficas, estructuras que representan de manera abstracta elementos y las relaciones entre éstos.

Definición 1.5. Una *gráfica*, a veces también llamada *gráfica simple*, es una pareja ordenada $G = (V, E)$ donde V es un conjunto de elementos llamados *vértices* y E es un conjunto de *aristas*. Una arista es un subconjunto de V con exactamente dos elementos.

Las gráficas suelen representarse como un dibujo en el que los vértices se pintan como puntos y las aristas como líneas que unen dos puntos. Casi siempre, es irrelevante la posición o forma de los puntos y líneas. Por ejemplo, la figura 1.2a muestra una representación de la gráfica $G = (V, E)$ con $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}\}$.

Definición 1.6. Una *multigráfica* $G = (V, E)$ es una gráfica que permite múltiples aristas entre un mismo par de vértices y, en este caso, E es un conjunto que permite elementos repetidos, también conocido como multiconjunto. Cuando hay dos o más aristas entre un mismo par de vértices, a éstas aristas se les llama *aristas paralelas*.

En la figura 1.2b observamos aristas paralelas entre los vértices 1 y 2 y entre los vértices 3 y 4.

Definición 1.7. Una *gráfica dirigida*, también conocida como *digráfica*, es una pareja ordenada $G = (V, A)$ donde V es un conjunto de elementos llamados *vértices* y A es un conjunto de *arcos*. Un arco es una pareja ordenada de vértices diferentes, y puede visualizarse como una arista que tiene orientación o dirección.

Las aristas de una gráfica dirigida suelen pintarse como flechas que indican su dirección. Observe, en la figura 1.2c, que los arcos $(3, 4)$ y $(4, 3)$ tienen direcciones distintas y por lo tanto son diferentes.

Notación. Las aristas $\{x, y\}$ y los arcos (x, y) suelen representarse simplemente como xy .

Definición 1.8. La *matriz de adyacencia* de una gráfica o gráfica dirigida $G = (V, E)$ con n vértices es la matriz binaria de tamaño $n \times n$ en la que $a_{i,j} = 1$ si y sólo si $ij \in E$.

Definición 1.9. Diremos que un vértice v y una arista e son *incidentes* si $v \in e$. Dos vértices x, y en G son *adyacentes* o *vecinos* si la arista xy existe en G , y dos aristas son adyacentes si tienen un extremo en común.

Definición 1.10. Los dos vértices incidentes a una arista se conocen como sus *extremos*. Para gráficas dirigidas, dado un arco xy , se dice que x es su vértice inicial mientras que y es su vértice final.

Definición 1.11. El *vecindario* de un vértice v , denotado $N(v)$, es el conjunto de vértices adyacentes a v . El vecindario de un conjunto de vértices U , denotado $N(U)$, es el conjunto de vértices en $V \setminus U$ adyacentes a algún vértice en U .

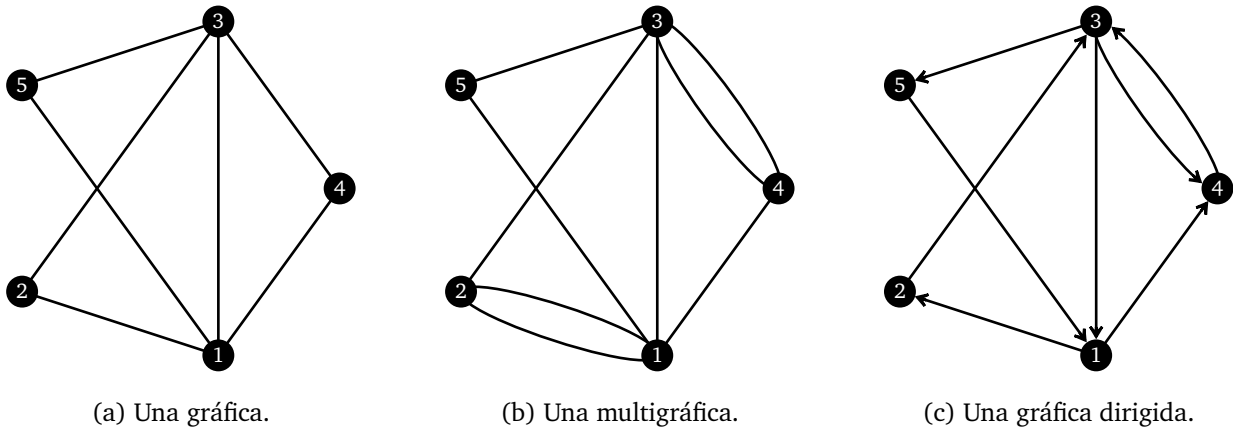


Figura 1.2: Distintos tipos de gráficas.

Definición 1.12. El *grado* de un vértice v , denotado $\deg(v)$, es el número de aristas incidentes a v . Para gráficas dirigidas, se define el grado de entrada $\deg^-(v)$ como el número de arcos que tienen al vértice v como vértice final, y el grado de salida $\deg^+(v)$ como el número de arcos que tienen al vértice v como vértice inicial.

Definición 1.13. Si todos los vértices de G tienen grado k , diremos que G es k -regular o simplemente regular.

1.2.1. Operaciones elementales

Una operación de gráficas produce una gráfica con algún cambio realizado a partir de una gráfica original. A continuación definimos algunas operaciones elementales de gráficas.

Definición 1.14. El *borrado de una arista* e de un gráfica, denotado $G \setminus e$, es la operación que simplemente elimina la arista e del conjunto de aristas.

El *borrado de un vértice* v , denotado $G \setminus v$, es la operación que elimina a v del conjunto de vértices y a todas las aristas incidentes a v del conjunto de aristas.

Definición 1.15. La *contracción de una arista* $e = xy$, denotada G/e , es la operación que elimina la arista e y reemplaza los vértices x, y con un nuevo vértice v_e incidente a todas las aristas que originalmente eran incidentes a x o a y .

Note que, bajo esta definición, la contracción de aristas puede producir aristas paralelas, como se observa en la figura 1.3. Es común que la contracción de aristas se defina de forma que no se produzcan aristas paralelas y en su lugar sean reemplazadas por aristas simples, sin embargo, en este trabajo conservaremos las aristas paralelas y consideraremos que la contracción de aristas en una gráfica puede resultar en una multigráfica.

Podemos generalizar las tres operaciones anteriores para que se puedan aplicar sobre un conjunto de vértices o un conjunto de aristas, para lo cual basta aplicar la operación de forma iterada sobre los elementos de dicho conjunto.

1.2.2. Subgráficas y menores

Definición 1.16. Sea $G = (V, E)$, si $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$, entonces $G' = (V', E')$ es una *subgráfica* de G , lo cual denotamos como $G' \subseteq G$.

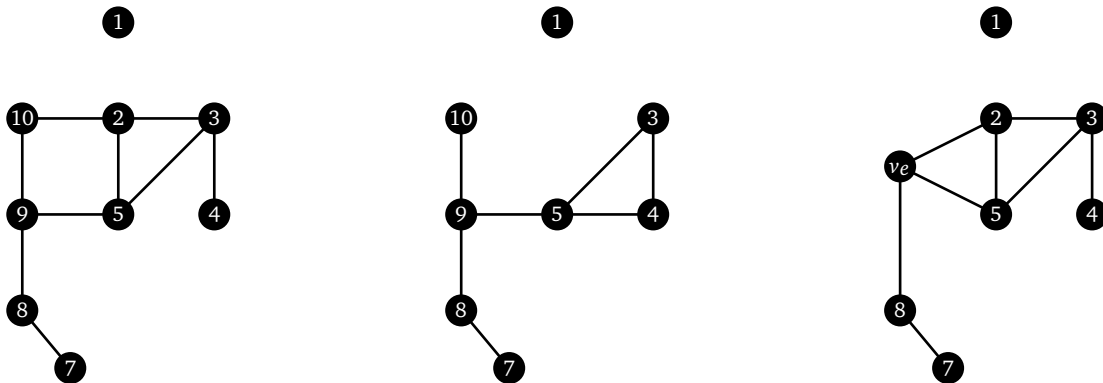
Si además E' contiene todas las aristas $xy \in E$ tal que $x, y \in V'$, entonces G' es un *subgráfica inducida* de G y lo denotamos como $G' = G[V']$.

(a) Una gráfica G .(b) La gráfica G/e .

Figura 1.3: Ejemplo de contracción de aristas.

Observación 1.1. Una subgráfica puede obtenerse mediante una secuencia de borrado de vértices y aristas, mientras que una subgráfica inducida sólo puede obtenerse mediante borrado de vértices.

Definición 1.17. Sea $G = (V, E)$, si una gráfica H puede obtenerse de G mediante una secuencia de borrado de vértices o aristas y contracciones de aristas, diremos que H es un *menor* de G .



(a) Una subgráfica de la gráfica de la figura 1.3a.

(b) Una subgráfica inducida de la gráfica de la figura 1.3a.

(c) Un menor de la gráfica de la figura 1.3a.

Figura 1.4: Ejemplos de subgráficas y menores.

1.2.3. Isomorfismos y homomorfismos

Definición 1.18. Dadas dos gráficas $G = (V, E)$ y $H = (V', E')$, un *isomorfismo* es una función biyectiva $\phi : V \rightarrow V'$ tal que $xy \in E \Leftrightarrow \phi(x)\phi(y) \in E'$ para todos $x, y \in V$. Cuando existe un isomorfismo entre dos gráficas decimos que éstas son *isomorfas* y lo denotamos como $G \simeq H$.

Generalmente no se distingue entre gráficas isomorfas, es decir que consideramos dos gráficas isomorfas como la misma.

Definición 1.19. Un *automorfismo* es un isomorfismo de una gráfica en sí misma, es decir, una función $\phi : V \rightarrow V$ tal que $xy \in E \Leftrightarrow \phi(x)\phi(y) \in E$ para todos $x, y \in V$.

Definición 1.20. Dadas dos gráficas $G = (V, E)$ y $H = (V', E')$, un *homomorfismo* es una función $\phi : V \rightarrow V'$ tal que $xy \in E \Rightarrow \phi(x)\phi(y) \in E'$ para todos $x, y \in V$.

Las definiciones de isomorfismo y homomorfismo pueden parecer muy similares, pero son fundamentalmente distintas: un homomorfismo preserva la adyacencia entre vértices, pero puede mapear vértices distintos a un mismo vértice o dos vértices independientes a vértices adyacentes, mientras que un isomorfismo preserva íntegra toda la estructura de la gráfica.

Definición 1.21. La *imagen* de $G = (V, E)$ bajo el homomorfismo ϕ es la gráfica $\phi(G) = (V', E')$ con $V' = \{\phi(v) : v \in V\}$ y $E' = \{\phi(x)\phi(y) : xy \in E\}$.

Definición 1.22. Harary *et al.* [12] definen un *homomorfismo completo* como aquel cuya imagen es la gráfica completa K_n .

Los conceptos de isomorfismo y homomorfismo también se aplican a gráficas dirigidas siempre y cuando se conserve la dirección de los arcos.

1.2.4. Caminos y ciclos

Definición 1.23. Un *camino (dirigido)* es una gráfica (dirigida) $P = (V, E)$ en donde

$$V = \{v_0, v_1, \dots, v_k\}$$

$$E = \{v_0v_1, v_1v_2, \dots, v_{k-1}v_k\}$$

y todos los v_i son distintos. Podemos denotar un camino simplemente como una secuencia de vértices $P_k = v_0, \dots, v_k$. La *longitud* de un camino es el número de aristas que contiene.

Definición 1.24. Decimos que una gráfica $G = (V, E)$ es *conexa* si, entre cada par de vértices $x, y \in V$, existe un camino $P = x, \dots, y$ en G .

Definición 1.25. Un *ciclo (dirigido)* es un camino (dirigido) $P_{k-1} = v_0, \dots, v_{k-1}$ al cual le agregamos la arista $v_{k-1}v_0$. Los ciclos también pueden denotarse como una secuencia de vértices $C_k = v_0, \dots, v_{k-1}, v_0$. La *longitud* de un ciclo es el número de aristas o de vértices que contiene.

Note que en una gráfica el ciclo más pequeño que puede haber es de longitud tres, mientras que en multigráficas o gráficas dirigidas pueden haber ciclos de longitud dos.

Notación. Llamaremos *triángulos* y *cuadrados* a los ciclos de longitud tres y cuatro, respectivamente.

Definición 1.26. El *cuello* de una gráfica es la longitud del ciclo más corto contenido en la gráfica.

Definición 1.27. Si un ciclo C en G contiene todos los vértices de la gráfica, diremos que C es un *ciclo hamiltoniano* o bien que G es *hamiltoniana*.

1.2.5. Acoplamientos

Definición 1.28. Decimos que dos vértices o dos aristas son *independientes* cuando no son adyacentes. De igual manera, un conjunto U de vértices o de aristas es independiente si toda pareja de vértices o de aristas en U es independiente.

Definición 1.29. Un *acoplamiento* en $G = (V, E)$ es un conjunto $M \subseteq E$ de aristas independientes. Decimos que un vértice de G está *cubierto* por el acoplamiento si es incidente a alguna arista en M . Un *acoplamiento perfecto* es aquel en el que todos los vértices de la gráfica están cubiertos por M .

Definición 1.30. Dada una gráfica G y un acoplamiento M en G , un *camino o un ciclo M -alternante*, o simplemente *alternante*, es aquel en el que sus aristas están alternadamente dentro y fuera del acoplamiento.

En la figura 1.5 observamos un ejemplo de acoplamiento en el que $P = 1, 2, 5, 6, 7, 8$ es un camino alternante y $C = 2, 5, 9, 10, 2$ es un ciclo alternante.

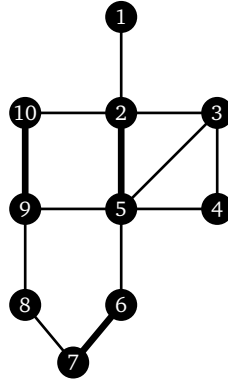


Figura 1.5: Ejemplo de acoplamiento.

1.2.6. Familias comunes de gráficas

Definición 1.31. La *gráfica completa* de n vértices, denotada K_n , es aquella en la que cualesquiera dos vértices son adyacentes.

Definición 1.32. Una gráfica $G = (V, E)$ es *bipartita* si existe una partición de V en dos conjuntos independientes X, Y . En ese caso, podemos denotar la gráfica como $G = (X \cup Y, E)$ y solemos referirnos a X y a Y como los lados izquierdo y derecho, respectivamente.

Definición 1.33. La *gráfica bipartita completa* de tamaño n, m , denotada $K_{n,m}$, es aquella con $|X| = n$ y $|Y| = m$ tal que cualesquiera dos vértices $x \in X, y \in Y$ son adyacentes.

Definición 1.34. Una gráfica es *aplanable* si es posible dibujarla en el plano de forma que las aristas no se crucen más que en los vértices.

Dos resultados muy importantes sobre esta familia de gráficas son los teoremas de Kuratowski y de Wagner. El teorema de Kuratowski da una caracterización de las gráficas aplanables en términos de subgráficas prohibidas, esto es, muestra que una gráfica G es aplanable si y sólo si no contiene ciertas gráficas (subdivisiones de K_5 o $K_{3,3}$) como subgráficas de G . El teorema de Wagner, equivalente al de Kuratowski, se expresa en términos de menores prohibidos en vez de subgráficas prohibidas.

Teorema 1.1 (Wagner). *Una gráfica es aplanable si y solo si no tiene a K_5 ni a $K_{3,3}$ como menor.*

Definición 1.35. Un *torneo* es una gráfica dirigida en la que entre cada par de vértices existe exactamente un arco. Un torneo es *regular* si todos los vértices tienen el mismo grado de entrada y de salida. Un torneo es *circulante* si su matriz de adyacencia es circulante.

1.2.7. Coloraciones

Definición 1.36. Una *coloración por vértices* de una gráfica $G = (V, E)$ es un etiquetado de sus vértices, esto es, una función $c : V \rightarrow S$ donde S se conoce como el conjunto de colores. Cuando $|S| = k$ decimos que c es una *k -coloración*. Si $c(x) \neq c(y)$ para todos x, y adyacentes, decimos que la coloración es *propia*.

Es costumbre que cuando se habla a secas de una coloración, implícitamente se hace referencia a una coloración propia por vértices. En este documento seguiremos la misma convención y precisaremos los casos en los que hagamos referencia a coloraciones que no sean propias o por vértices.

Definición 1.37. Dada una gráfica $G = (V, E)$ y una coloración c , la *clase cromática* i es $\{v \in V : c(v) = i\}$, el conjunto de vértices con color i .

Es importante mencionar que el nombre que tengan los colores es irrelevante, lo fundamental es la partición de vértices que definen las clases cromáticas. En este trabajo los colores toman los valores enteros $0, 1, \dots, k - 1$.

Definición 1.38. El *número acromático* de una gráfica G , denotado $\chi(G)$, es el menor entero k tal que G tiene una k -coloración.

En este trabajo extendemos parte del lenguaje presentado y hablamos de colores adyacentes, conectados o vecinos para indicar que existen vértices adyacentes que tienen los colores en cuestión, y también hablamos de vecinos de los colores para referirnos al vecindario de los vértices de cierta clase cromática.

1.3. Complejidad computacional

La teoría de la complejidad computacional es una rama de la teoría de la computación que se encarga de la clasificación de los problemas computacionales de acuerdo a su dificultad inherente, es decir, a la cantidad de recursos computacionales (principalmente tiempo y espacio) necesarios para resolverlo sin importar el algoritmo específico utilizado.

Definición 1.39. Intuitivamente, un *problema de decisión* es la formalización de una pregunta que puede tener como respuesta “sí” o “no”, dependiendo del valor que tomen los *parámetros de entrada* del problema. A un conjunto de valores específicos que tomen los parámetros de entrada se le conoce como *instancia*.

Por ejemplo “dado un entero x ¿es x un número primo?” es un problema de decisión cuya respuesta depende del valor específico que tome x . En este caso, x es el parámetro de entrada y $x = 7$, $x = 9$ son dos instancias distintas del problema.

Definición 1.40. En un *problema de optimización*, hay un costo $f(s)$ asociado a cada solución s del problema y se desea encontrar una solución de costo mínimo (o máximo, según sea el caso).

Para resolver un problema de decisión o de optimización se puede utilizar un algoritmo, que es, a grandes rasgos, una secuencia ordenada y finita de instrucciones que definen un proceso finito y determinista el cual, a partir de los parámetros de entrada, produce la salida deseada.

Dado un algoritmo es importante conocer qué tan eficiente es en cuanto a su tiempo de ejecución, es decir, dada una entrada específica ¿cuánto tiempo tardará el algoritmo en ejecutarse? Dicha pregunta se responde con una función $T(n)$ que, dada la longitud n de la entrada, nos da una cota, superior o inferior, del tiempo de ejecución del algoritmo. Se busca que la función $T(n)$ no dependa de detalles técnicos o de implementación, sino que sea inherente al algoritmo. Dependiendo de la forma que tome $T(n)$, clasificamos los algoritmos en lineales, cuadráticos, polinomiales, exponenciales, etc.

Los problemas de decisión y optimización se clasifican de acuerdo a la eficiencia que tienen los algoritmos que los resuelven.

Definición 1.41. Un problema de decisión está en P si existe un algoritmo de tiempo polinomial que lo resuelva.

Definición 1.42. Un problema de decisión está en *NP* si toda solución se puede verificar como correcta en tiempo polinomial, aunque no exista un algoritmo de tiempo polinomial que resuelva el problema.

Definición 1.43. Decimos que un problema *A* es *reducible* o se *reduce* al problema *B*, si existe un algoritmo de tiempo polinomial que permita transformar toda instancia *a* del problema *A* a una instancia *b* del problema *B*, de forma que la solución de *b* también resuelva *a*. En este sentido, el problema *B* es al menos tan “difícil” como el problema *A*.

Definición 1.44. Decimos que un problema de decisión *A* es *NP-completo* si está en *NP* y todo problema en *NP* se reduce a *A*.

Definición 1.45. Decimos que un problema de optimización *A* es *NP-difícil* o *NP-duro* si todo problema en *NP* se reduce a *A*, aunque *A* no esté en *NP*.

Gráficas gramíneas

La familia de gráficas gramíneas fue introducida en 2011 por López Bracho y Rodríguez Sánchez [16] en un estudio sobre gráficas 4-polígono reducibles, es decir gráficas que pueden reducirse a un único vértice al aplicar una secuencia de operaciones conocidas como reducciones serie-paralelo y la transformación 4-polígono \rightarrow 4-estrella. Dicha transformación consiste en reemplazar un ciclo de longitud 4 de una gráfica por una estrella de 4 puntas, aumentando en uno el número de vértices de la gráfica pero conservando el número de aristas. En su trabajo, López Bracho y Rodríguez Sánchez, demuestran que algunas gráficas gramíneas son 4-polígono reducibles.

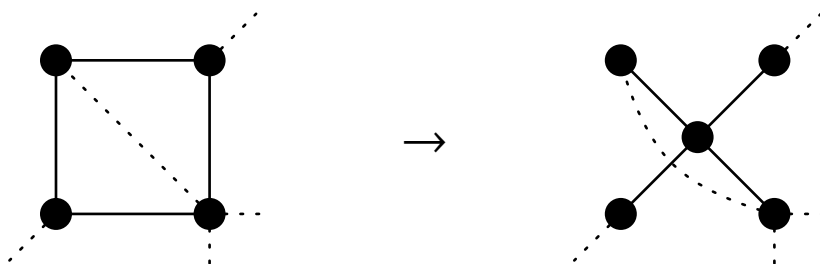


Figura 2.1: La transformación 4-polígono \rightarrow 4-estrella.

Primeramente, daremos la definición de gráfica gramínea y haremos algunas observaciones básicas sobre la estructura de estas gráficas.

Definición 2.1. Decimos que una gráfica $G = (V, E)$ es *gramínea* (derivada de K_s) si existe una partición de V en s subconjuntos, tal que:

- k subconjuntos estén formados por l vértices de grado d y la subgráfica inducida por éstos (llamada *espiga*) sea un camino de longitud $l - 1$,
- $s - k$ subconjuntos estén formados por un único vértice de grado $s - 1$ (llamado *espiguilla*), y
- al contraer todas las aristas de las espigas se obtenga la gráfica K_s .

Advierta que cuando hablamos del tamaño de una espiga hacemos referencia a la cantidad de vértices en ésta y cuando hablamos de su longitud nos referimos a la cantidad de aristas.

En la figura 2.2 observamos un ejemplo de gráfica gramínea con dos espigas de tamaño tres (señaladas por las aristas más gruesas) y cuatro espiguillas. Si se contraen las aristas de las espigas se obtiene la gráfica K_6 .

Algunas gráficas bien conocidas, como las gráficas completas y los ciclos, son ejemplos sencillos de gráficas gramíneas. En efecto, toda gráfica completa K_n puede considerarse una gráfica gramínea trivial sin espigas y con n espiguillas, y de hecho, para algunos valores de n , la gráfica completa es la

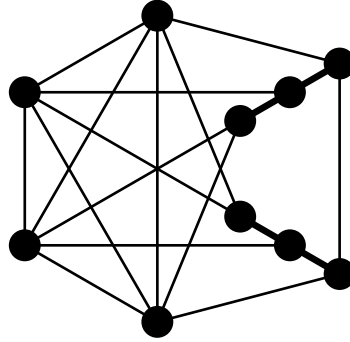


Figura 2.2: Ejemplo de una gráfica gramínea.

única gramínea derivada de K_n . Así mismo, todo ciclo C_n es una gráfica gramínea derivada de K_3 que puede tener:

- una sola espiga de tamaño $n - 2$ y dos espiguillas, para cualquier valor de n ,
- dos espigas de tamaño $(n - 1)/2$ y una espiguilla, si n es impar, o
- tres espigas de tamaño $n/3$ y ninguna espiguilla, si n es múltiplo de 3.

Note que los casos anteriores no son exclusivos, el ciclo C_9 , por ejemplo, satisface las tres condiciones de manera simultánea.

Observación 2.1. Si una gráfica gramínea G no tiene espiguillas, entonces es regular de grado d , en caso contrario todo vértice de G tiene grado d o bien tiene grado $s - 1$.

Observación 2.2. Cada espiga debe conectarse con las espigas y espiguillas restantes mediante una arista, en consecuencia toda gráfica gramínea satisface la igualdad $l(d - 2) + 2 = s - 1$.

Observación 2.3. Toda gráfica gramínea derivada de K_s tiene a K_s como menor, por lo que únicamente las gráficas gramíneas con $s \leq 4$ son aplanables.

2.1. Reconocer gráficas gramíneas de espigas cortas

Habiendo definido la familia de gráficas gramíneas, surgen dos preguntas importantes: ¿qué condiciones son necesarias y suficientes para que una gráfica sea gramínea? y ¿qué tan eficientemente se puede decidir si una gráfica es gramínea? Estudiamos estas dos interrogantes y obtuvimos resultados interesantes para una subfamilia de gráficas gramíneas.

Definición 2.2. Una gráfica gramínea es llamada *de espigas cortas* si sus espigas tienen longitud uno. Abreviamos el término “gráfica gramínea de espigas cortas” como GGEC.

Como se observa en la figura 2.3, la gráfica de Petersen es una GGEC con cinco espigas y sin espiguillas.

Observación 2.4. Al fijar el valor $l = 2$ en la observación 2.2, se sigue que toda GGEC satisface la igualdad $2d - 2 = s - 1$, por lo tanto, el valor de s siempre es impar.

Definición 2.3. Por observaciones anteriores, sabemos que ser conexa, que cada vértice tenga grado d o grado $s - 1$ y satisfacer la igualdad $2d - 2 = s - 1$ son condiciones necesarias para que una gráfica sea GGEC. Si G es una gráfica que satisface dichas condiciones, decimos que G es *candidata a GGEC* y denotamos como $G[d]$ a la subgráfica inducida por los vértices de G que tienen grado d .

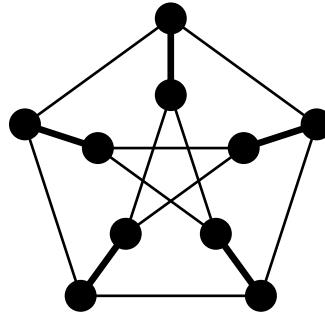


Figura 2.3: La gráfica de Petersen es una GPEC.

La figura 2.4 muestra en (a) la gráfica G_1 , la cual es candidata a GPEC, y en (b) la gráfica G_2 que es una GPEC y por definición también es candidata a GPEC. En ambas gráficas se ha dibujado en color negro a $G_i[3]$ (la subgráfica inducida por los vértices de grado 3) y en color gris el resto de la gráfica. Observe que $G_2[3]$ y la subgráfica inducida por las espigas de G_2 son la misma, y que las espigas, por tener longitud uno, definen un acoplamiento perfecto en $G_2[3]$.

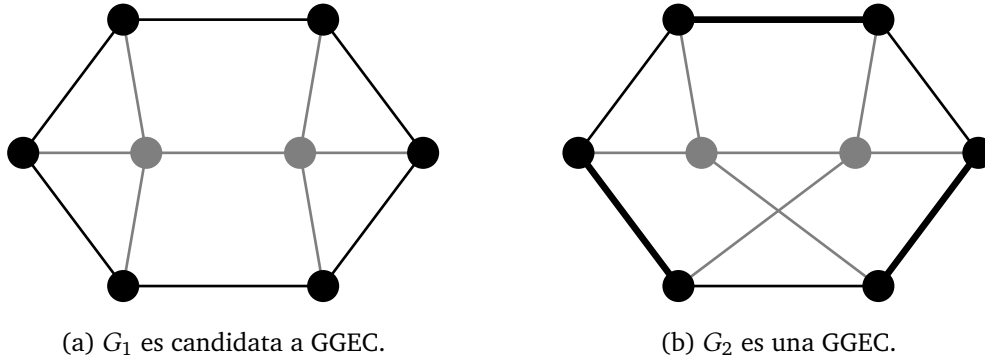


Figura 2.4: Ejemplos de gráficas candidatas a GPEC.

Definición 2.4. Sea G una gráfica candidata a GPEC, un acoplamiento perfecto M en $G[d]$ es llamado *acoplamiento gramíneo* si al contraer las aristas de M se obtiene la gráfica K_s .

Lema 2.1. Una gráfica es GPEC si y sólo si tiene al menos un acoplamiento gramíneo.

Demostración. Sea G una GPEC y M un acoplamiento gramíneo en G , las aristas en M y los vértices no cubiertos por M inducen, respectivamente, espigas y espiguillas en G , y viceversa. Es decir que los conceptos de acoplamiento gramíneo y partición en espigas y espiguillas son equivalentes. ■

Teorema 2.1. Sea G una gráfica candidata a GPEC y M un acoplamiento perfecto en $G[d]$, M es un acoplamiento gramíneo si y sólo si G no contiene cuadrados M -alternantes y ninguna arista de M está contenida en un triángulo de G .

Demostración. Sea $G = (V, E)$ una gráfica candidata a GPEC con k espigas y $s - k$ espiguillas y M un acoplamiento perfecto en $G[d]$ de tamaño k . Sabiendo que $2d - s + 1 = 2$ (observación 2.4), la cantidad de vértices y aristas en G se puede calcular fácilmente:

$$|V| = 2k + (s - k) = s + k \tag{2.1a}$$

$$|E| = \frac{2kd + (s - k)(s - 1)}{2} = \frac{s^2 - s}{2} + \frac{k(2d - s + 1)}{2} = \binom{s}{2} + k \tag{2.1b}$$

Si consideramos que al contraer una arista e en G se pueden producir aristas paralelas, tenemos que

$$|V(G/e)| = |V(G)| - 1$$

$$|E(G/e)| = |E(G)| - 1$$

y por lo tanto G/M es una multigráfica con exactamente s vértices y $\binom{s}{2}$ aristas.

Sea H una multigráfica de s vértices y $\binom{s}{2}$ aristas, por el principio del palomar, exactamente una de las siguientes proposiciones es cierta: H es isomorfa a K_s o bien H tiene aristas paralelas.

Para que G/M tenga aristas paralelas es necesario contraer suficientes aristas en un ciclo de G , esto es, contraer una arista en un triángulo de G o dos aristas en un cuadrado de G (ver figura 2.5). Contraer una sola arista en un cuadrado de G no produce aristas paralelas. En ciclos de longitud 5 o más, puesto que M es un acoplamiento, no se pueden contraer más de $n/2$ aristas en ciclos pares y $(n-1)/2$ aristas en ciclos impares, cantidad insuficiente para producir aristas paralelas. Es decir, G/M contiene aristas paralelas si y sólo si G contiene cuadrados M -alternantes o alguna arista de M está contenida en un triángulo de G .

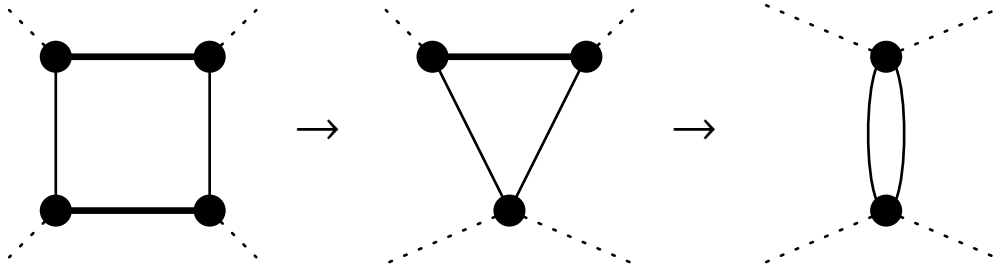


Figura 2.5: Contracción de aristas en triángulos y cuadrados.

Finalmente, las siguientes proposiciones son equivalentes:

- M es un acoplamiento gramíneo en G .
- G/M es isomorfa a K_s .
- G/M no contiene aristas paralelas.
- G no contiene cuadrados M -alternantes y ninguna arista de M está contenida en un triángulo de G .

■

2.1.1. Consideraciones sobre la complejidad del problema

Ahora, dada una gráfica G que sea candidata a GGEC, ¿qué tan eficientemente se puede encontrar un acoplamiento gramíneo en G ? Si agregamos la restricción de que G sea bipartita, al no contener triángulos (ni ningún ciclo de longitud impar), basta encontrar un acoplamiento perfecto M en $G[d]$ sin cuadrados M -alternantes. Dicho problema que fue estudiado con mayor profundidad por Müller en 1990 [17], en donde define el problema de la siguiente manera:

Problema 2.1 (AC_4FM). [17] *Dada una gráfica G y un entero k , decidir si existe un acoplamiento M en G libre de cuadrados M -alternantes con $|M| \geq k$.*

Se conoce la complejidad de este problema para algunas familias de gráficas bipartitas, que es en donde el problema tiene relevancia para este trabajo. En particular, el problema se sabe NP-completo

para gráficas bipartitas cordales [17] (también llamadas bipartitas débilmente cordales), pero se puede resolver en tiempo polinomial para gráficas bipartitas distancia-hereditarias [17], convexas [7] y biconvexas [3] (las últimas dos, siendo subfamilias de las gráficas bipartitas cordales).

El siguiente lema, presentado en el trabajo de Müller, nos indica que las GGEC bipartitas no pertenecen a ninguna de las familias mencionadas anteriormente.

Lema 2.2. [17] *Sea G una gráfica bipartita cordal, una gráfica fuertemente cordal o una gráfica distancia hereditaria sin cuadrados alternantes con respecto a un acoplamiento M en G , entonces M es un acoplamiento sin ciclos alternantes en G .*

En la figura 2.6 vemos una gráfica G , que es GGEC bipartita, y un acoplamiento gramíneo M en G (aristas gruesas) que contradicen el lema 2.2. Por el teorema 2.1, G no tiene cuadrados M -alternantes, sin embargo, G contiene al menos un ciclo M -alternante de longitud 6 (aristas punteadas), por lo que no es bipartita convexa ni distancia-hereditaria. Estos ciclos alternantes son comunes en los acoplamientos gramíneos de las GGEC bipartitas.

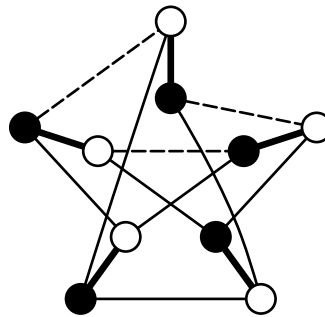


Figura 2.6: Ejemplo de una GGEC bipartita con ciclos alternantes.

Retomando la idea inicial, si agregamos la restricción de que G sea una gráfica con cuello al menos cinco (sin triángulos ni cuadrados) y es candidata a GGEC, entonces cualquier acoplamiento perfecto en $G[d]$ es un acoplamiento gramíneo de G . Las gráficas C_6 y de Petersen son ejemplos de este tipo de gráficas.

Corolario 2.1. *Toda gráfica candidata a GGEC con cuello ≥ 5 es gramínea de espigas cortas.*

Es de interés, entonces, encontrar las gráficas candidatas a GGEC que tengan cuello ≥ 5 , sin embargo, basándonos en un resultado presentado por van Lint y Wilson [19] que establece un límite en el número de aristas que pueden tener estas gráficas, mostraremos que las gráficas con las características buscadas son pocas.

Teorema 2.2. [19] *Sea G una gráfica con n vértices y m aristas, si G tiene cuello ≥ 5 , entonces*

$$m \leq \frac{1}{2}n \sqrt{n-1}$$

Teorema 2.3. *Sea G una gráfica candidata a GGEC sin espiguillas, si G tiene más de 5 espigas, entonces G tiene cuello < 5 .*

Demostración. Sea $G = (V, E)$ una gráfica candidata a GGEC con s espigas y sin espiguillas, denotaremos $n = |V|$ y $m = |E|$. Como G no tiene espiguillas, sustituimos $k = s$ en las ecuaciones 2.1 y obtenemos:

$$n = 2s \tag{2.2a}$$

$$m = \binom{s}{2} + s = \binom{s+1}{2} \tag{2.2b}$$

Suponga que $s > 5$ y que G tiene cuello ≥ 5 , entonces, sustituyendo m y n en el teorema 2.2, tenemos:

$$\begin{aligned} \binom{s+1}{2} &\leq s\sqrt{2s-1} \\ \frac{s(s+1)}{2} &\leq s\sqrt{2s-1} \\ s+1 &\leq 2\sqrt{2s-1} \\ (s+1)^2 &\leq 4(2s-1) \\ s^2 - 6s + 5 &\leq 0 \\ (s-3)^2 &\leq 4 \\ s &\leq 5 \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción. ■

Se puede hacer un desarrollo similar al anterior para gráficas candidatas a GGEC con una espiguilla, pero se concluye que si $s \geq 7$, entonces la gráfica debe tener cuello < 5 y para gráficas candidatas a GGEC con dos o más espiguillas, la existencia de triángulos o cuadrados es inevitable.

2.1.2. Modelo de programación entera

Del teorema 2.1 se desprende un modelo de programación entera para decidir si una gráfica candidata a GGEC es, efectivamente, una GGEC.

Definición 2.5. Sea $G = (V, E)$ una gráfica candidata a GGEC con $G[d] = (V_{[d]}, E_{[d]})$. Si dos aristas independientes $a, b \in E_{[d]}$ están contenidas en un cuadrado de G , decimos que b es una *arista cuadrado-prohibida* por a y viceversa, y definimos el conjunto $P_a^\square = \{b : b \text{ es cuadrado-prohibida por } a\}$ (ver figura 2.7). Por otra parte, si una arista $a \in E_{[d]}$ está contenida en un triángulo de G , decimos que a es una *arista triángulo-prohibida* y definimos el conjunto $P^\Delta = \{a : a \text{ es triángulo-prohibida}\}$.

Teorema 2.4. Sea G una gráfica candidata a GGEC, el siguiente programa entero tiene solución factible si y sólo si G tiene un acoplamiento gramíneo.

$$\max. \sum_{e \in E_{[d]}} x_e$$

sujeto a:

$$\sum_{e \sim v} x_e = 1 \quad \forall v \in V_{[d]} \quad (2.3a)$$

$$|P_e^\square| x_e + \sum_{a \in P_e^\square} x_a \leq |P_e^\square| \quad \forall e \in E_{[d]} \quad (2.3b)$$

$$x_e = 0 \quad \forall e \in P^\Delta \quad (2.3c)$$

$$x_e \in \{0, 1\} \quad \forall e \in E_{[d]} \setminus P^\Delta \quad (2.3d)$$

En este programa entero, $x_e = 1$ si la arista e forma parte del acoplamiento, y $x_e = 0$ en caso contrario, además, $e \sim v$ denota que la arista e es incidente al vértice v .

Demostración. El programa entero presentado es una extensión del programa entero para el problema de acoplamiento perfecto, al cual se agregan dos restricciones:

- La restricción 2.3b actúa como una condicional, de suerte que si $x_e = 1$, entonces, para cumplir la desigualdad, ninguna arista del conjunto P_e^\square debe formar parte del acoplamiento, evitando así la presencia de cuadrados alternantes.
- La restricción 2.3c simplemente impide que las aristas contenidas en algún triángulo de G formen parte del acoplamiento.

Como las restricciones del programa entero coinciden con las condiciones del teorema 2.1, toda solución del programa entero será un acoplamiento gramíneo y viceversa. ■

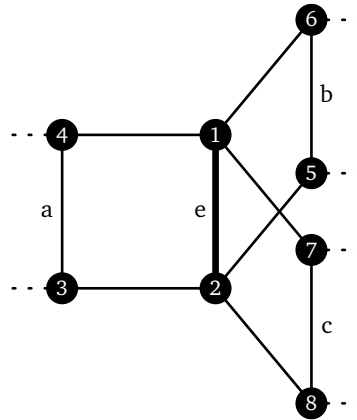


Figura 2.7: Las aristas a , b y c son cuadrado-prohibidas por e y conforman el conjunto P_e^\square .

2.1.3. Algoritmo de backtracking

También se diseñó un algoritmo de backtracking que permite enumerar todos los acoplamientos gramíneos de una gráfica candidata a GGEC.

Teorema 2.5. *Sea G una gráfica candidata a GGEC, el siguiente algoritmo enumera todos los acoplamientos gramíneos de G .*

Algoritmo 2.1 Algoritmo para enumerar los acoplamientos gramíneos de G .

```

1: función ACOPLG( $G, M, P$ )
2:   si  $|M| = \frac{1}{2}|V[d]|$  entonces
3:     mostrar  $M$ 
4:   si no
5:     para cada  $e \in E[d] \setminus P$  hacer
6:       ACOPLG( $G, M \cup \{e\}, P \cup P_e^\square \cup \delta(e) \cup \mu(e)$ )
7:     fin para
8:   fin si
9: fin función

10: función ENUMACOPLG( $G$ )
11:   ACOPLG( $G, \emptyset, P^\Delta$ )
12: fin función

```

En donde $\delta(e)$ denota el conjunto de aristas adyacentes a la arista e , y dada una numeración arbitraria de las aristas, definimos $\mu(e) = \{a \in E[d] : a \leq e\}$.

Demostración. El algoritmo construye progresivamente un acoplamiento M en $G[d]$ que cumple con las restricciones del teorema 2.1, para lo cual mantiene en todo momento un conjunto P de aristas prohibidas, las cuales no pueden pertenecer a M .

Inicialmente, $P = P^\Delta$ (línea 11), lo cual evita que M tenga aristas contenidas en triángulos de G . Luego, se agrega al acoplamiento alguna arista e que no haya sido prohibida, con lo cual también debe crecer el conjunto P (líneas 5 y 6). Se añaden al conjunto de aristas prohibidas:

- las aristas en P_e^\square , para evitar la formación posterior de cuadrados M -alternantes,
- las aristas en $\delta(e)$, para que M sea un acoplamiento en todo momento, y
- las aristas en $\mu(e)$, para que no se consideren como soluciones diferentes los acoplamientos que sólo difieren en el orden de las aristas.

El proceso continúa de forma recursiva (línea 6), agregando aristas al acoplamiento hasta que éste sea un acoplamiento perfecto de $G[d]$ (línea 2), momento en el que también es un acoplamiento gramíneo de G . ■

Nota. Si sólo se desea decidir si una gráfica G es gramínea, se puede modificar el algoritmo anterior para terminar su ejecución al encontrar el primer acoplamiento gramíneo.

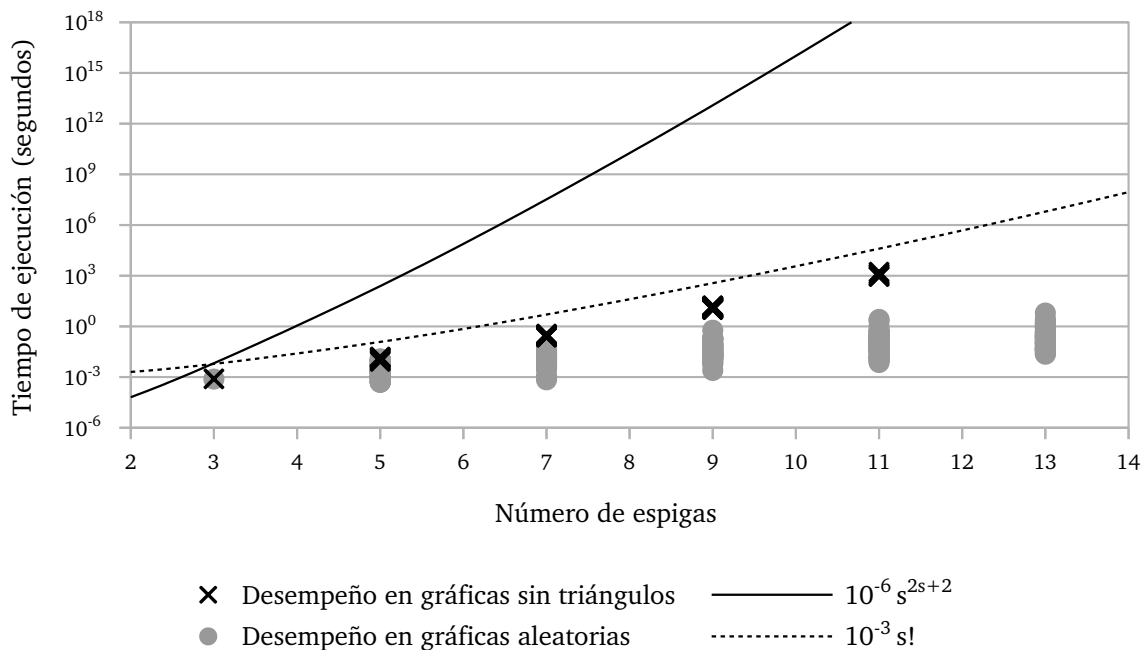


Figura 2.8: Tiempo de ejecución del algoritmo 2.1 en un procesador Intel i7-740QM a 1.73GHz.

Para conocer el tiempo de ejecución del algoritmo en una gráfica candidata a GGEC con s espigas, consideramos que los conjuntos P^Δ , P_e^\square , $\delta(e)$ y $\mu(e)$ pueden calcularse en tiempo polinomial antes de la ejecución del algoritmo¹, y que las operaciones de conjuntos se realizan en tiempo lineal. Puesto que los conjuntos usados por el algoritmo son subconjuntos de $|E_{[d]}|$, y que $|E_{[d]}| \leq \frac{s(s+1)}{2}$, entonces las operaciones de conjuntos de las líneas 5 y 6 se realizan en tiempo $O(s^2)$. Por último, mostrar la solución, en la línea 3, toma tiempo $O(s)$.

¹ Con implementaciones sencillas P^Δ se puede calcular en tiempo $O(|E_{[d]}|d^2)$, P_e^\square en tiempo $O(d^3)$ por arista, $\delta(e)$ en tiempo $O(d)$ por arista y $\mu(e)$ en tiempo $O(|E_{[d]}|)$ por arista, en donde $d = (s + 1)/2$ es el grado de los vértices, además todos los resultados pueden almacenarse en espacio $O(|E_{[d]}|^2)$.

Como en cada nivel de recursión se elige una de hasta $|E_{[d]}|$ aristas diferentes, el tiempo de ejecución del algoritmo, para el peor caso, es

$$O(s^2|E_{[d]}|^s) = O\left(s^2 \left(\frac{s(s+1)}{2}\right)^s\right) = O(s^{2s+2})$$

Dicha cota es muy holgada, porque no toma en cuenta que las aristas prohibidas limitan las opciones disponibles en cada nivel de recursión, sin embargo, no es trivial determinar el comportamiento del conjunto P , lo cual dificulta obtener una mejor estimación del tiempo de ejecución del algoritmo. A pesar de todo, mediante resultados experimentales, podemos darnos una mejor idea de la complejidad del algoritmo.

Se ejecutó el algoritmo en múltiples instancias de gráficas candidatas a GGEC sin espiguillas elegidas de manera aleatoria, pero asegurando la presencia de gráficas sin triángulos, ya que en éstas se obtienen los peores tiempos de ejecución. Los resultados, condensados en la figura 2.8, parecen indicar que el algoritmo tiene complejidad $O(s!)$ para el peor caso.

2.2. Gráficas gramíneas bipartitas

En seguida definimos las subfamilias de gramíneas bipartitas y gramíneas bipartitas de espigas cortas, sobre las cuales hacemos observaciones más precisas acerca de su estructura.

Teorema 2.6. *Sea G una gráfica gramínea bipartita, G pertenece a una de las siguientes categorías:*

1. G tiene cero o dos espiguillas y
 - 1.1. un número par de espigas de tamaño impar, o bien
 - 1.2. un número impar de espigas de tamaño par.
2. G tiene una espiguilla y espigas de tamaño impar.

Demostración. Sea $G = (V, E)$ una gráfica gramínea bipartita con k espigas y k' espiguillas ($s = k + k'$), cada espiga compuesta por l vértices de grado d y las espiguillas por vértices de grado $s - 1$, y sean X y Y los elementos de la bipartición (tal que $V = X \cup Y$).

En cualquier caso, el número de espiguillas $k' \leq 2$, ya que si $k' > 2$, como todas las espiguillas son adyacentes entre sí, éstas formarían al menos un triángulo en G , lo cual es una contradicción pues G es bipartita. Ahora, dividimos la prueba en tres casos y probamos cada uno por separado.

Caso 1.1. Si $k' = 0$ o $k' = 2$, y l es impar, se prueba que k debe ser par. Si $k' = 0$, entonces G es una gráfica regular, por lo que $|X| = |Y|$, y $|V|$ es par. Si $k' = 2$, como las espiguillas son adyacentes, una espiguilla debe pertenecer a X y la otra a Y . Dado que G es bipartita,

$$\sum_{x \in X} \deg(x) = d(|X| - 1) + (s - 1) = d(|Y| - 1) + (s - 1) = \sum_{y \in Y} \deg(y)$$

de donde $|X| = |Y|$, y $|V|$ también es par. Entonces, sabemos que $|V| = kl + k'$, que $|V|$ y k' son pares y que l es impar, por lo cual k debe ser par.

Caso 1.2. Si $k' = 0$ o $k' = 2$, y l es par, se prueba que k debe ser impar. Sabemos que $l(d - 2) + 3 = s$ (por la observación 2.2) y que l es par, por lo cual s debe ser impar. Como $s = k + k'$, y k' es par, se sigue que s y k tienen la misma paridad, es decir k es impar.

Caso 2. Si $k' = 1$, se prueba que l debe ser impar. Suponga que $k' = 1$ pero que l es par. Puesto que cada espiga induce un camino, $l/2$ vértices de cada espiga deben pertenecer a X y $l/2$ deben pertenecer

a Y . Supongamos, sin pérdida de generalidad, que la espiguilla de G pertenece a X , entonces

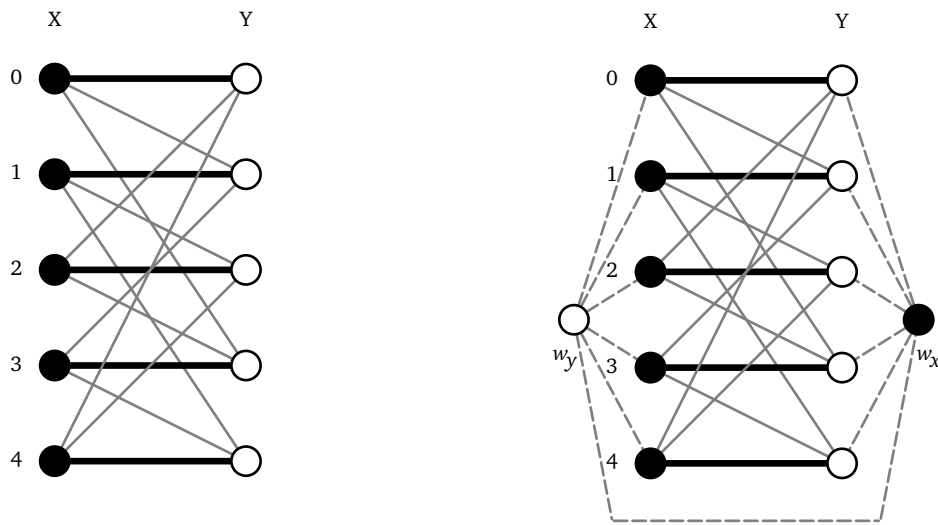
$$\sum_{x \in X} \deg(x) = \frac{1}{2}dkl + (s-1) \neq \frac{1}{2}dkl = \sum_{y \in Y} \deg(y)$$

lo cual es una contradicción para una gráfica bipartita. ■

En el anexo A podrá encontrar ejemplos no triviales de gráficas gramíneas bipartitas correspondientes a cada una de las categorías del teorema 2.6.

2.2.1. Gráficas gramíneas bipartitas de espigas cortas

Definición 2.6. Una gráfica es llamada *gráfica gramínea bipartita de espigas cortas* si es una GGEC y es bipartita. Abreviamos el término “gráfica gramínea bipartita de espigas cortas” como GGBEC.



(a) La gráfica G es una GGBEC sin espiguillas.

(b) La gráfica $G' = G \oplus K_2$ es una GGBEC con espiguillas.

Figura 2.9: Ejemplos de GGBEC con y sin espiguillas.

En la figura 2.9 observamos dos ejemplos de GGBEC con cinco espigas, una sin espiguillas y la otra con dos espiguillas. Las espigas están indicadas por aristas gruesas y de color negro, mientras que el resto de las aristas son de color gris, y son punteadas si son incidentes a las espiguillas.

Observación 2.5. Sea $G = (X \cup Y, E)$ una GGBEC, al estar compuesta por dos vértices adyacentes, cada espiga de G tendrá un vértice en X y el otro en Y .

Definición 2.7. Sea $G = (X \cup Y, E)$ una GGBEC sin espiguillas, definimos la gráfica $G \oplus K_2$ como aquella que resulta de conectar un vértice de K_2 con todos los vértices en X y el otro vértice de K_2 con todos los vértices en Y , es decir, $G \oplus K_2 = (X' \cup Y', E')$, donde

$$\begin{aligned} X' &= X \cup w_x \\ Y' &= Y \cup w_y \\ E' &= E \cup \{w_x y : y \in Y\} \cup \{w_y x : x \in X\} \cup \{w_x w_y\} \end{aligned}$$

Teorema 2.7. Toda gráfica G' que sea una GGBEC con espiguillas es de la forma $G' = G \oplus K_2$, donde G es una GGBEC sin espiguillas.

Demostración. Sea $G' = (X' \cup Y', E')$ una GGBEC con espiguillas, por el teorema 2.6 sabemos que G' debe tener exactamente dos espiguillas, las cuales llamaremos u y v . Como u y v son adyacentes y G' es bipartita, supondremos, sin pérdida de generalidad, que $u \in X'$ es adyacente a todos los vértices en Y' , y que $v \in Y'$ es adyacente a todos los vértices en X' . La gráfica $G = G' \setminus \{u, v\}$ es regular, bipartita y puesto que conserva todas las conexiones entre espigas, es una GGBEC sin espiguillas. ■

La figura 2.9b muestra una GGBEC con espiguillas, en la cual podemos notar que si borramos las espiguillas w_x y w_y junto con sus aristas incidentes (líneas punteadas) se obtiene la GGBEC de la figura 2.9a.

2.2.2. Relación con torneos regulares

Es posible representar cualquier GGBEC sin espiguillas mediante una tabla, si numeramos sus espigas y , para $i \neq j$, en la celda del renglón i y columna j anotamos “ $X \rightarrow Y$ ” si el vértice en X de la espiga i es adyacente al vértice en Y de la espiga j , y “ $Y \rightarrow X$ ” en caso contrario (ver figura 2.10a). Podemos simplificar dicha representación asignando a “ $X \rightarrow Y$ ” y a “ $Y \rightarrow X$ ” los valores cero y uno, de manera arbitraria, y así obtener una matriz binaria (ver figura 2.10b).

Definición 2.8. Sea G una GGBEC con s espigas y sin espiguillas, y dada una numeración de las espigas, definimos la *matriz* $M(G)$ como la matriz binaria de tamaño $s \times s$ en la que, para $i \neq j$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el vértice en } X \text{ de la espiga } i \text{ y el vértice en } Y \text{ de la espiga } j \text{ son adyacentes} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Los elementos de la diagonal usualmente tomarán el valor cero, pero también pueden tomar el valor uno, en cuyo caso denotaremos la matriz como $M^1(G)$.

Es importante observar que aunque distintas numeraciones de las espigas producen matrices $M(G)$ diferentes, las consideramos matrices equivalentes pues se puede transformar una matriz en la otra mediante operaciones de intercambio de renglones y columnas.

Observación 2.6. La matriz $M(G)$ de toda GGBEC sin espiguillas es una matriz antisimétrica, en el sentido que $a_{ij} = \neg a_{ji}$.

| | | | | | |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 0 | — | X→Y | Y→X | X→Y | Y→X |
| 1 | Y→X | — | X→Y | Y→X | X→Y |
| 2 | X→Y | Y→X | — | X→Y | Y→X |
| 3 | Y→X | X→Y | Y→X | — | X→Y |
| 4 | X→Y | Y→X | X→Y | Y→X | — |

| |
|---|
| $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ |
|---|

(a) La gráfica de la figura 2.9a en forma de tabla. (b) La matriz asociada a la gráfica de la figura 2.9a.

Figura 2.10: Distintas representaciones de las GGBEC sin espiguillas.

Podrá observar que la matriz asociada a una GGBEC también puede ser la matriz de adyacencia de un torneo regular, y es que, como se mostrará en los resultados siguientes, existe una estrecha relación entre las GGBEC sin espiguillas y los torneos regulares.

Definición 2.9. Sea $G = (X \cup Y, E)$ una GGBEC sin espiguillas y sea $M \subset E$ un acoplamiento gramíneo en G , definimos la operación *contracción dirigida*, denotada por $\text{CONTRACCIÓN}(G, M)$, como el resultado de asignar una dirección, de X hacia Y , a todas las aristas de la gráfica y después contraer las aristas en M para obtener un torneo regular.

Definición 2.10. Sea $T = (V, A)$ un torneo regular, definimos la operación *expansión dirigida*, denotada por $\text{EXPANSIÓN}(T)$, como el resultado de separar cada vértice $v \in V$ en dos vértices adyacentes v_x y v_y de forma que salgan de v_x todos los arcos que originalmente salían de v y lleguen a v_y todos los arcos que originalmente llegaban a v , finalmente convertimos en aristas todos los arcos de la gráfica para obtener una GGBEC sin espiguillas y un acoplamiento gramíneo formado por las aristas $v_x v_y$.

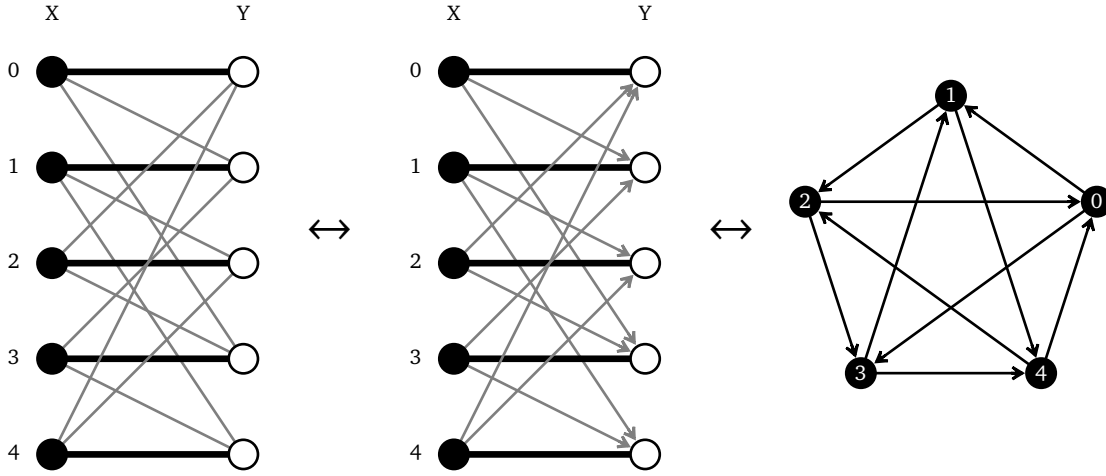


Figura 2.11: Transformación de GGBEC sin espiguillas a torneo regular y viceversa.

Observación 2.7. Dados G , M y T , el resultado tanto de $\text{CONTRACCIÓN}(G, M)$ como de $\text{EXPANSIÓN}(T)$ es único, más aún, CONTRACCIÓN y EXPANSIÓN son operaciones inversas.

Observación 2.8. Sea $G = (X \cup Y, E)$ una GGBEC sin espiguillas con un acoplamiento gramíneo M , y sea $T = (V, A)$ el torneo regular resultado de $\text{CONTRACCIÓN}(G, M)$, la operación CONTRACCIÓN define una función biyectiva $\rho : E \setminus M \rightarrow A$ y por lo tanto existe la función inversa $\rho^{-1} : A \rightarrow E \setminus M$.

Observación 2.9. Un isomorfismo entre dos gráficas $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ es una función biyectiva $\psi : V_1 \rightarrow V_2$, además el isomorfismo induce otra función, también biyectiva, que llamaremos por el mismo nombre, $\psi : E_1 \rightarrow E_2$. De manera inversa, una función biyectiva $\psi : E_1 \rightarrow E_2$ define un isomorfismo entre las gráficas. Si las gráficas son dirigidas, ψ debe preservar el sentido de los arcos.

Teorema 2.8. Sean G_1 y G_2 dos GGBEC sin espiguillas con M_1 y M_2 respectivos acoplamientos gramíneos, y sean $T_1 = \text{CONTRACCIÓN}(G_1, M_1)$ y $T_2 = \text{CONTRACCIÓN}(G_2, M_2)$, entonces G_1 y G_2 son isomorfas si y sólo si T_1 y T_2 también lo son, más aún, de ser el caso, existe un isomorfismo $\psi : G_1 \rightarrow G_2$ tal que $\psi(M_1) = M_2$.

Demostración. Sean $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ dos GGBEC sin espiguillas con M_1 y M_2 respectivos acoplamientos gramíneos, y sean $T_1 = (V_1, A_1)$ el resultado de $\text{CONTRACCIÓN}(G_1, M_1)$ y $T_2 = (V_2, A_2)$ el resultado de $\text{CONTRACCIÓN}(G_2, M_2)$. Las operaciones de CONTRACCIÓN definen las funciones biyectivas:

$$\rho : E_1 \setminus M_1 \rightarrow A_1$$

$$\sigma : E_2 \setminus M_2 \rightarrow A_2$$

Probaremos el teorema en dos partes.

En primer lugar, probaremos que si existe un isomorfismo $\phi : T_1 \rightarrow T_2$, entonces también existe un isomorfismo $\psi : G_1 \rightarrow G_2$. Podemos componer las funciones ρ , ϕ y σ^{-1} para obtener la función biyectiva

$$\psi = \sigma^{-1} \circ \phi \circ \rho : E_1 \setminus M_1 \rightarrow E_2 \setminus M_2$$

que mapea únicamente las aristas que no son espigas de G_1 a G_2 . Por otra parte, al realizar la operación $\text{CONTRACCIÓN}(G_1, M_1)$, cada espiga de G_1 es comprimida a un vértice en T_1 , el cual podemos mapear a un vértice en T_2 aplicando el isomorfismo ϕ , y por último, podemos realizar la operación $\text{EXPANSIÓN}(T_2)$ para que cada vértice en T_2 se convierta en una espiga de G_2 y así completar la función biyectiva $\psi : E_1 \rightarrow E_2$ que define un isomorfismo de G_1 a G_2 .

Finalmente, probaremos que si T_1 y T_2 no son isomorfas, entonces G_1 y G_2 tampoco lo son. Suponga que T_1 y T_2 no son isomorfas, pero que existe un isomorfismo $\psi : G_1 \rightarrow G_2$, entonces podríamos componer las funciones ρ^{-1} , ψ y σ para obtener la función biyectiva

$$\phi = \sigma \circ \psi \circ \rho^{-1} : A_1 \rightarrow A_2$$

que define un isomorfismo de T_1 a T_2 , lo cual es una contradicción. ■

$$\begin{array}{ccc} (G_1, M_1) & \xleftrightarrow{\psi} & (G_2, M_2) \\ \rho^{-1} \updownarrow \rho & & \sigma^{-1} \updownarrow \sigma \\ T_1 & \xleftrightarrow{\phi} & T_2 \end{array}$$

Figura 2.12: Mapeo de aristas y arcos entre GGBEC y torneos regulares.

Empleando la relación que guardan las GGBEC con los torneos regulares y un resultado presentado por Camion [6], que nos da una condición necesaria y suficiente para que un torneo sea hamiltoniano, probaremos que toda GGBEC (con o sin espiguillas) es hamiltoniana.

Teorema 2.9. [6] *Un torneo admite un ciclo hamiltoniano si y sólo si es fuertemente conexo.*

Teorema 2.10. *Todo torneo regular es fuertemente conexo.*

Demostración. Sea $T = (V, A)$ un torneo regular con $|V| = 2m+1$. Supongamos que T no es fuertemente conexo, es decir, existe una pareja de vértices $u, v \in V$ tal que no existe en T ningún camino dirigido de u a v . Como $\text{deg}^+(u) = m$, existen los vértices w_1, w_2, \dots, w_m y los arcos uw_1, uw_2, \dots, uw_m . Para evitar la presencia de caminos de u a v , deben existir los arcos vw_1, vw_2, \dots, vw_m y vu , esto implica que $\text{deg}^+(v) = m + 1$, lo cual es una contradicción. ■

Teorema 2.11. *Toda GGBEC admite un ciclo hamiltoniano.*

Demostración. Sea $T = (\mathcal{V}, A)$ un torneo regular con un ciclo hamiltoniano que podemos expresar mediante una secuencia de vértices $v_0, v_1, v_2, \dots, v_n, v_0$. Podemos aplicar la operación $\text{EXPANSIÓN}(T)$ para obtener $G = (V, E)$, una GGBEC sin espiguillas. Recordemos que a cada vértice $v_i \in \mathcal{V}$ corresponden dos vértices adyacentes $v_{i_x}, v_{i_y} \in V$, y que a cada arco $v_i v_j \in A$ corresponde una arista $v_{i_x} v_{j_y} \in E$. Entonces, a partir del ciclo en T , construimos el siguiente ciclo hamiltoniano en G :

$$v_{0_y}, v_{0_x}, v_{1_y}, v_{1_x}, v_{2_y}, v_{2_x}, \dots, v_{n_y}, v_{n_x}, v_{0_y}$$

Ahora, aplicamos la operación $G \oplus K_2$ para obtener G' , una GGBEC con dos espiguillas las cuales llamamos w_x y w_y . Sustituyendo cualquier arista del ciclo en G , digamos $v_{0_y} v_{0_x}$, por un camino que pase por w_x y w_y en G' , obtendremos el siguiente ciclo hamiltoniano en G' :

$$v_{0_y}, w_x, w_y, v_{0_x}, v_{1_y}, v_{1_x}, v_{2_y}, v_{2_x}, \dots, v_{n_y}, v_{n_x}, v_{0_y}$$

■

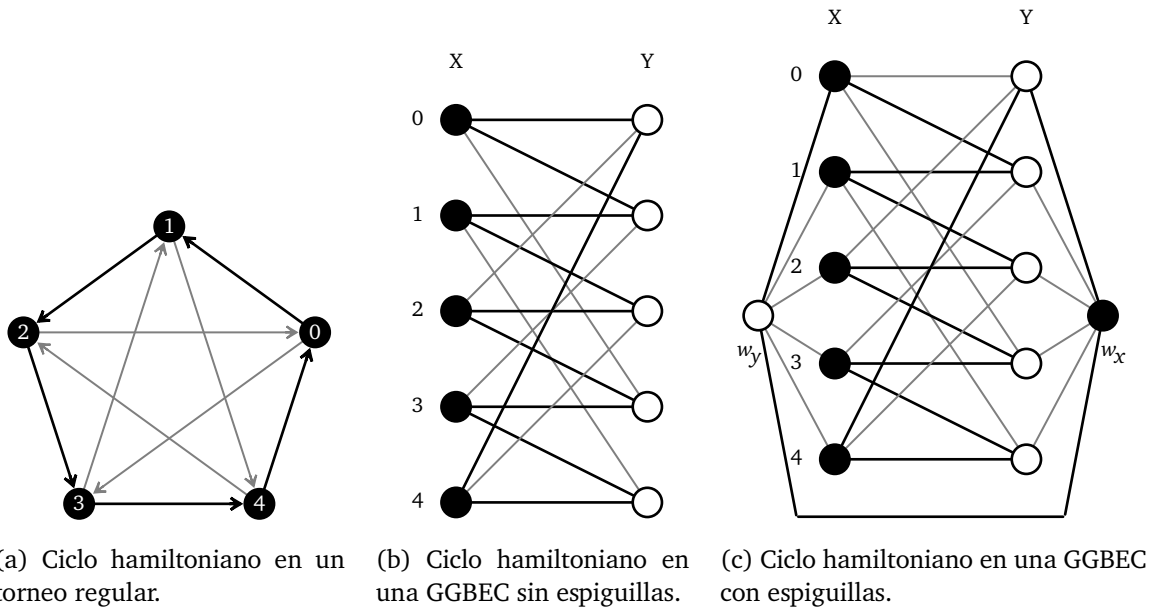


Figura 2.13: Ciclos hamiltonianos en torneos regulares y en GGBC con y sin espiguillas.

2.2.3. Gráficas gramíneas de matriz circulante

Enseguida se introduce una última subfamilia de gráficas gramíneas.

Definición 2.11. Una GGEC es llamada *gráfica gramínea de matriz circulante* si existe una numeración de sus espigas tal que $M(G)$ sea circulante. Abreviamos el término “gráfica gramínea de matriz circulante” como GGMC.

Aún no sabemos si es posible decidir en tiempo polinomial si una gráfica G es gramínea, pero si G es una GGBC y conocemos uno de sus acoplamientos gramíneos, podemos decidir si G es una GGMC en tiempo polinomial, basta decidir si $CONTRACCIÓN(G)$ es circulante, problema que fue resuelto por Ponomarenko en 1992 [18]. Efectivamente, si $CONTRACCIÓN(G)$ es un torneo circulante, entonces tiene una matriz de adyacencia circulante para alguna numeración de sus vértices, la cual podemos aplicar a las espigas de G y obtener una matriz $M(G)$ circulante.

Observación 2.10. Si G es una GGMC, entonces $CONTRACCIÓN(G)$ es un torneo circulante y viceversa.

Las GGMC se pueden construir a partir de cadenas binarias. Dada cualquier cadena binaria de longitud n , se puede construir una GGMC con $s = 2n + 1$ espigas y sin espiguillas de la manera siguiente: a partir de la cadena original $a_1 a_2 \dots a_n$ construimos la cadena $a_1 a_2 \dots a_{2n}$ en donde $a_i = \neg(a_{2n-i+1})$ para $1 \leq i \leq n$, y con ésta construimos la matriz $M(G)$ que describe a la gráfica gramínea. $M(G)$ se obtiene como sigue:

$$M(G) = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{2n} \\ a_{2n} & 0 & a_1 & \cdots & a_{2n-1} \\ a_{2n-1} & a_{2n} & 0 & \cdots & a_{2n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{2n} & 0 \end{bmatrix}$$

Decimos, entonces, que G es una GGMC generada por la cadena $a_1 a_2 \dots a_n$.

Observación 2.11. En toda GGMC, si $a_k = 1$, el vértice en X de la espiga i será adyacente al vértice en Y de la espiga $(i + k) \bmod s$, para $1 \leq k \leq 2n$. En cambio, si $a_k = 0$, entonces el vértice en Y de la espiga i será adyacente al vértice en X de la espiga $(i + k) \bmod s$.

Número acromático

En 1967, Harary, Hedetniemi y Prins [12] introducen los conceptos de coloración completa y número acromático en un trabajo en el que equiparan coloraciones y homomorfismos de gráficas. A grandes rasgos, proponen que una coloración de una gráfica G equivale a un homomorfismo de G a otra gráfica H , en el cual dos vértices de G se mapean al mismo vértice de H si se les ha asignado el mismo color, así, eligiendo distintas gráficas destino se producen distintos tipos de coloraciones. En el caso de la coloración completa se utiliza un tipo particular de homomorfismo a K_n llamado homomorfismo completo.

Definición 3.1. Una coloración es *completa* si, además de ser propia, cumple con la propiedad de que para cada pareja de colores distintos exista al menos una arista con tales colores en sus extremos. Si la coloración ocupa k colores, diremos que es una k -coloración completa.

Definición 3.2. El *número acromático* de una gráfica G , denotado $\psi(G)$, es el mayor entero k para el cual existe una k -coloración completa de G .

En dicho trabajo, Harary *et al.* prueban que, para toda k tal que $\chi(G) \leq k \leq \psi(G)$, existe una k -coloración completa de G .

El problema de calcular $\psi(G)$ es NP-difícil, incluso cuando G es un árbol [4], una gráfica bipartita o su complemento [10, 20], o si es a la vez cográfica y gráfica de intervalos [2]. Se conocen pocos problemas que sean NP-difíciles cuando se restringen a clases de gráficas tan particulares como las anteriores, aun así, existen algoritmos para aproximar $\psi(G)$ en gráficas con cuello al menos cinco [13], gráficas bipartitas [14] y árboles [15], y es posible resolver el problema en tiempo polinomial en algunas gráficas cuando su grado máximo es acotado por una constante [9, 5].

3.1. Número pseudo-acromático de GGEC

Un concepto relacionado, que trataremos brevemente, es el de número pseudo-acromático, introducido en 1969 por Gupta [11]. Dicho concepto es muy parecido al de número acromático, excepto que elimina el requerimiento de que las coloraciones sean propias.

Definición 3.3. Una coloración *pseudo-completa* es una coloración, no necesariamente propia, en la que para cada pareja de colores distintos existe al menos una arista con tales colores en sus extremos. Si la coloración ocupa k colores, diremos que es una k -coloración pseudo-completa.

Definición 3.4. El *número pseudo-acromático* de una gráfica G , denotado $\psi_s(G)$, es el mayor entero k para el cual existe una k -coloración pseudo-completa de G .

Gupta muestra en su trabajo que la desigualdad siguiente se cumple para toda gráfica G :

$$\chi(G) \leq \psi(G) \leq \psi_s(G) \tag{3.1}$$

Encontrar una k -coloración pseudo-completa en una gráfica con exactamente $\binom{k}{2}$ aristas es equivalente a encontrar una k -coloración en la que cada pareja de colores esté presente en a lo más una arista de la gráfica, ésta es conocida como coloración armoniosa. Por tanto, de los resultados que prueban la dificultad de encontrar una k -coloración armoniosa en gráficas con $\binom{k}{2}$ aristas [2, 10], se deduce que calcular $\psi_s(G)$ es NP-difícil. A pesar de lo anterior, cuando G es una GGEC, resulta inmediato conocer $\psi_s(G)$.

Teorema 3.1. Si G es una GGEC derivada de K_s , entonces $\psi_s(G) = s$.

Demostración. Sea G una GGEC con k espigas y $s - k$ espiguillas ($k \leq s$). Asignando el mismo color a los dos vértices de cada espiga y un color único a cada espiguilla, obtenemos una s -coloración pseudo-completa de G .

Supongamos, ahora, que $\psi_s(G) > s$. Es necesario que cada clase de color sea adyacente a las demás, es decir, cada clase de color requiere al menos s vecinos. Como los vértices de las espigas tienen grado $(s + 1)/2$ y los de las espiguillas tienen grado $s - 1$, cada color debe estar presente en al menos dos vértices, por lo tanto, G debe tener al menos $2(s + 1)$ vértices, lo cual es una contradicción puesto que G tiene exactamente $s + k$ vértices (ecuación 2.1). ■

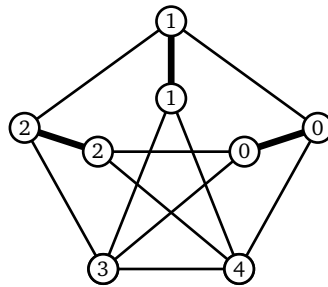


Figura 3.1: Ejemplo de coloración pseudo-completa en una GGEC con espiguillas.

3.2. Coloraciones completas de GGEC

Del teorema 3.1 y la desigualdad 3.1 se desprende inmediatamente el siguiente corolario:

Corolario 3.1. Si G es una GGEC derivada de K_s , entonces $\psi(G) \leq s$.

Por ahora, enfocamos nuestro estudio en los casos en los que la cota anterior se vuelve justa, es decir, en coloraciones completas de GGEC con s colores. Más adelante (en la sección 3.3), presentaremos familias de GGEC con $\psi(G) = s$ y una GGEC con $\psi(G) < s$.

Observación 3.1. Sea G una GGEC con s espigas y sin espiguillas, en toda s -coloración completa de G cada color es asignado a exactamente dos vértices. Lo anterior se sigue de que, como todos los vértices tienen grado $(s + 1)/2$, cada color debe estar presente en al menos dos vértices, pero como G tiene $2s$ vértices, ningún color puede estar presente en más de dos vértices.

3.2.1. Coloraciones completas de GGEC sin espiguillas

En GGEC sin espiguillas, distinguimos varios tipos de s -coloraciones completas.

Nota. A menos de que se indique lo contrario, en lo que queda de la sección 3.2, G representará a una GGEC con s espigas y sin espiguillas.

Definición 3.5. Dada $G = (X \cup Y, E)$, decimos que una s -coloración (completa) de G es una *coloración (completa) de permutación*, si los s colores están presentes en X y en Y , en caso contrario decimos que es una *coloración (completa) de no-permutación*.

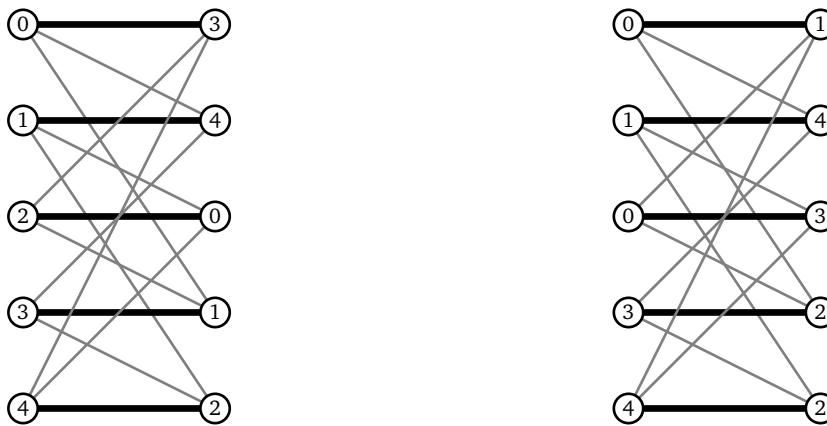
Observación 3.2. Dada una numeración de las espigas de G , podemos asumir que, en las coloraciones completas de permutación de la gráfica, los colores en X son fijos y los colores en Y son variables, es decir, el vértice en X de la espiga i tendrá color i . Tomando en cuenta lo anterior, podemos representar cada coloración completa de permutación mediante una secuencia c_0, c_1, \dots, c_{s-1} en donde c_i es el color del vértice en Y de la espiga i .

Definición 3.6. Dada una coloración completa de no-permutación de G , le llamamos *color repetido en X (o en Y)* al color que está presente en dos vértices de X (o de Y).

Observación 3.3. En toda coloración completa de no-permutación de G , habrá sólo un color c_x repetido en X y un color c_y repetido en Y . De haber otro color c_z repetido en X (o en Y), como G es bipartita, c_z no estaría conectado con c_x (o en c_y).

Observación 3.4. En toda coloración completa de no-permutación de G , es necesario que la pareja de vértices con color repetido tenga al menos $s - 1$ vecinos distintos.

Definición 3.7. Dada $G = (X \cup Y, E)$, decimos que una coloración completa de permutación de G es *k -cíclica*, si para cada $i = 0, 1, \dots, s - 1$, el color del vértice en X de la espiga i es igual al color del vértice en Y de la espiga $(i + k) \bmod s$. Si una coloración de G es k -cíclica para algún entero k , diremos, simplemente, que es *cíclica*.



(a) La coloración completa de permutación 2-cíclica para esta gráfica.

(b) Una coloración completa de no-permutación con los colores 0 y 2 repetidos en X y Y , respectivamente.

Figura 3.2: Ejemplos de coloraciones de permutación y no-permutación en GGBEC sin espiguillas.

Como hay más aristas en una GGBEC con s espigas y sin espiguillas, que parejas de colores en una s -coloración completa de la misma, algunas parejas de colores estarán presentes en más de una arista de la gráfica. Como veremos enseguida, dichas parejas de colores están distribuidas de manera particular.

Definición 3.8. Dada una coloración de una gráfica H , si los colores c_i y c_j están presentes en más de una arista de H , diremos que $\{c_i, c_j\}$ es una *pareja de colores repetida*. Si c_i y c_j están presentes en exactamente dos aristas, entonces diremos que es una *pareja de colores birrepetida* o que existe una *biconexión* entre los colores c_i y c_j .

Observación 3.5. En toda coloración completa de permutación de G , todas las parejas de colores repetidas son birrepetidas.

Teorema 3.2. *Una s -coloración propia de permutación de G es completa si y sólo si la coloración tiene s parejas de colores birrepetidas.*

Demostración. Se sigue de la observación anterior, que toda coloración completa de permutación de G tiene s parejas de colores birrepetidas. Ahora, supongamos que G tiene una coloración propia de permutación con s parejas de colores birrepetidas, las cuales están presentes en $2s$ aristas, pero que la coloración no es propia, entonces debe haber menos de $\binom{s}{2} - s$ parejas de colores en las $\binom{s}{2} - s$ aristas restantes, lo cual es una contradicción, pues implica que una pareja de colores estaría presente en tres o más aristas, o que habría más de s parejas de colores repetidas. ■

Teorema 3.3. *En toda coloración completa de permutación de G , para cada color c_i existen los colores c_j y c_k , tal que hay una biconexión entre c_i y c_j , y entre c_i y c_k .*

Demostración. Los vértices con color c_i (de grado $(s + 1)/2$ y sin vecinos en común) tienen, en total, $s + 1$ vecinos, en los cuales deben estar asignados los $s - 1$ colores restantes. Ningún color está presente en más de dos vértices (observaciones 3.1 y 3.5), por lo tanto habrá dos colores que tengan biconexión con c_i . ■

Teorema 3.4. *En toda coloración completa de permutación de G , las aristas con parejas de colores repetidas forman una colección de ciclos.*

Demostración. Del teorema anterior sabemos que para todo color c_i , existen dos parejas de colores repetidas: $\{c_i, c_j\}$ y $\{c_i, c_k\}$. Puesto que la coloración es de permutación, las dos aristas con la pareja de colores $\{c_i, c_j\}$ (o $\{c_i, c_k\}$) no pueden ser incidentes al mismo vértice, entonces se infiere que cada vértice de G es incidente a dos aristas con parejas de colores repetidas, formando así una colección de ciclos (ver aristas grises en la figura 3.2a). ■

En los casos estudiados hasta ahora, las aristas con parejas de colores repetidas han formado un ciclo hamiltoniano en G , pero aún queda por descubrir si éste siempre será el caso, o si hay gráficas en donde las aristas con parejas de colores repetidas formen dos o más ciclos disjuntos por aristas.

3.2.2. Obtención de coloraciones completas en GGEC sin espiguillas

Dada una gráfica, encontrar una coloración completa no es tarea fácil, pero para GGEC sin espiguillas y coloraciones completas de permutación, encontramos un par de problemas equivalentes que, aunque tienen la misma complejidad computacional, permiten encontrar soluciones de manera más práctica.

Definición 3.9. Sea $H = (X \cup Y, E)$ una gráfica bipartita con $|X| = n$ y $|Y| = m$, llamaremos *complemento bipartito de H* , denotado $K_{n,m} \setminus H$, a la gráfica bipartita con el mismo conjunto de vértices que H y con el conjunto de aristas $\bar{E} = \{xy : x \in X, y \in Y, xy \notin E\}$, conformado por las aristas no presentes en H .

Observación 3.6. Toda subgráfica bipartita completa inducida en H produce un conjunto independiente en $K_{n,m} \setminus H$ con vértices en X y en Y , y viceversa.

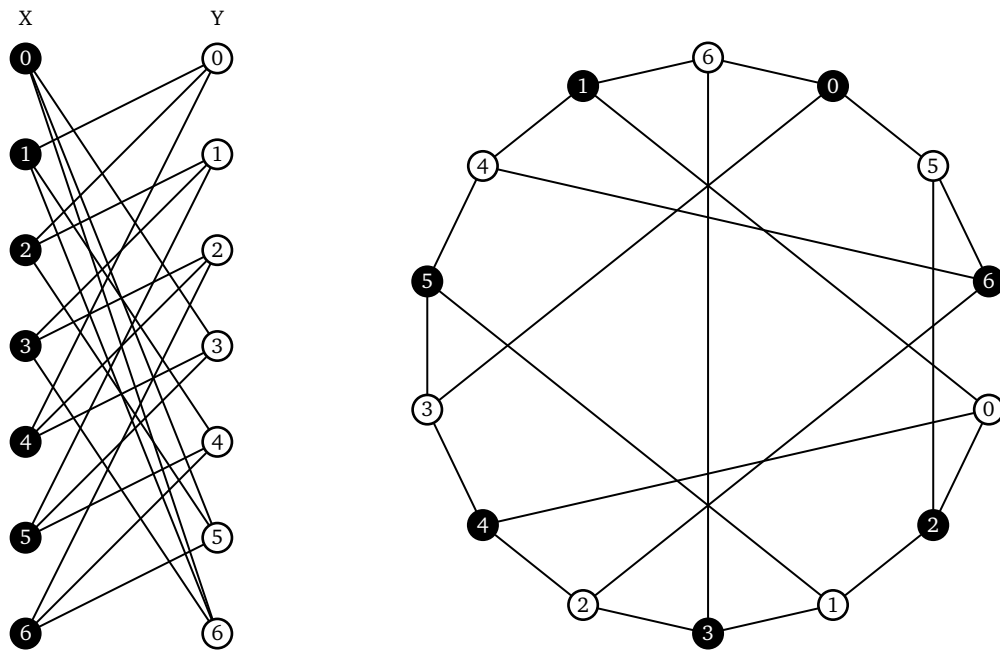
Teorema 3.5. *Toda coloración completa de permutación de G es equivalente a un acoplamiento perfecto en $K_{s,s} \setminus G$ sin cuadrados alternantes.*

Demostración. Dada G , sea M un acoplamiento perfecto en $K_{s,s} \setminus G$ sin cuadrados alternantes. Los extremos de las aristas en M inducen las clases cromáticas de una coloración propia de G , y como cada arista tiene un elemento en X y el otro en Y , la coloración es de permutación (ver figura 3.4a). Como M no contiene cuadrados alternantes en $K_{s,s} \setminus G$, entonces no existen clases cromáticas independientes en G y la coloración es completa.

De igual manera, las clases cromáticas de toda coloración completa de permutación inducen un acoplamiento perfecto en $K_{s,s} \setminus G$, y como no hay dos clases cromáticas que induzcan un conjunto independiente en G , entonces no se podrán formar cuadrados alternantes en $K_{s,s} \setminus G$. ■

El teorema anterior permitirá estudiar la razón por la que algunas GGBEC tienen muchas o pocas coloraciones completas de permutación, en particular nos permite comprender por qué la GGMC generada por la cadena “110” tiene un gran número de coloraciones completas de permutación. Recordemos que una GGMC es una GGBEC cuya matriz $M(G)$ es circulante, y que dicha gráfica puede representarse en su totalidad por medio de una cadena binaria (sección 2.2.3).

El complemento bipartito $K_{s,s} \setminus G$ de la GGMC generada por la cadena “110” no contiene cuadrados, por lo cual todo acoplamiento perfecto en $K_{s,s} \setminus G$ induce una coloración completa de permutación en G . Este tipo de gráficas no son comunes, de hecho, el teorema 2.2 señala la imposibilidad de que exista una GGEC con más de nueve espigas cuyo complemento bipartito esté libre de cuadrados y una exploración exhaustiva revela que tampoco existen otras GGEC con siete o nueve espigas que tengan esa propiedad.



(a) Representación bipartita de la gráfica con las espigas etiquetadas.

(b) Representación circular de la gráfica que conserva el etiquetado de espigas.

Figura 3.3: Complemento bipartito de la GGMC generada por la cadena “110”.

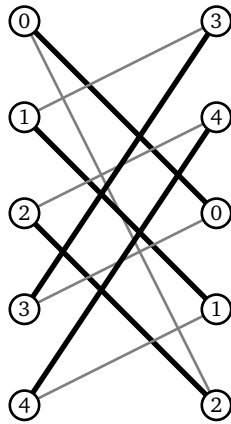
El teorema 3.5 nos permite aplicar los resultados de la sección 2.1 al problema de coloración completa, pero además, por la relación que guardan el problema de acoplamiento bipartito y el de asignación, también nos permite concluir que se puede reducir el problema de coloración a uno de asignación.

Definición 3.10. Dada A , una matriz de costos, diremos que una asignación en A tiene un *cero-cuadrado* si los elementos $a_{ij}, a_{kl} = 0$ forman parte de la asignación y $a_{il}, a_{kj} = 0$, y diremos que

tiene un uno-cuadrado si $a_{il}, a_{kj} = 1$.

Teorema 3.6. *Toda coloración completa de permutación de G es equivalente a una asignación de costo cero sin cero-cuadrados usando como matriz de costos $M^1(G)$.*

Demostración. Los ceros en $M^1(G)$ equivalen a pares de vértices independientes en G y a aristas en $K_{s,s} \setminus G$, por lo que toda asignación de costo cero en $M^1(G)$ equivale a un acoplamiento perfecto de $K_{s,s} \setminus G$ y a una coloración propia de permutación de G . Entonces, dada una asignación de costo cero en $M^1(G)$, los cero-cuadrados equivalen a dos clases cromáticas independientes, y los uno-cuadrados a una biconexión entre dos clases cromáticas, por lo que, si $M^1(G)$ no tiene cero-cuadrados, la coloración equivalente será completa y viceversa. ■



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \mathbf{0} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \mathbf{0} & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & \mathbf{0} & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) El complemento bipartito de la gráfica 3.2a y el acoplamiento inducido por su coloración completa de permutación (aristas negras).

(b) La matriz $M^1(G)$ asociada a la gráfica 3.2a y la asignación inducida por su coloración completa de permutación (en negrita).

Figura 3.4: Coloración completa de permutación como problema de acoplamiento y de asignación.

Si, para una gráfica G , encontramos una solución a los problemas anteriores, tendremos una coloración completa con s colores, sin embargo, no todas las gráficas tienen número cromático $\psi(G) = s$ o podría ser muy difícil encontrar una solución para instancias muy grandes. En tal caso, es posible resolver el problema de manera parcial, es decir, encontrar un acoplamiento con algunos cuadrados alternantes o una asignación con algunos cero-cuadrados, y usar esa solución para generar una coloración completa que use menos de s colores (ver algoritmo 3.1).

Algoritmo 3.1 Heurística para obtener una coloración completa de G .

Entrada: G , una GGEC con s espigas y sin espiguillas.

Salida: Una coloración completa de G .

- 1: Encontrar un acoplamiento perfecto $M = \{m_0, m_1, \dots, m_{s-1}\}$ en $K_{s,s} \setminus G$
 - 2: **para** $i = 0, 1, \dots, s - 1$ **hacer**
 - 3: Asignar a los extremos de m_i el color i
 - 4: **fin para**
 - 5: **para cada** $m_i, m_j \in M$ contenidas en un cuadrado de $K_{s,s} \setminus G$ **hacer**
 - 6: Asignar a los extremos de m_i el color de m_j
 - 7: **fin para**
-

El algoritmo parte de una coloración propia de permutación inducida por un acoplamiento perfecto en $K_{s,s} \setminus G$ (líneas 1 a 3). Si la coloración no es completa, el algoritmo combina dos a dos las clases cromáticas independientes (líneas 5 y 6), reduciendo el número de colores pero asegurando una coloración completa.

Hasta ahora no se cuenta con ningún método para generar acoplamientos o asignaciones que nos dé una garantía sobre el número de cuadrados alternantes o de cero-cuadrados que contendrán las soluciones. De encontrarse tal método, podríamos emplearlo en la línea 1 y convertir el algoritmo 3.1 en un algoritmo de aproximación.

3.2.3. Coloraciones completas de GGBEC con espiguillas

Hasta ahora hemos estudiado las coloraciones completas únicamente en GGBEC sin espiguillas, puesto que al agregar espiguillas a la gráfica, resulta directo extender las coloraciones manteniendo o incrementando (dependiendo de la estructura de la gráfica) la cantidad de colores en ellas.

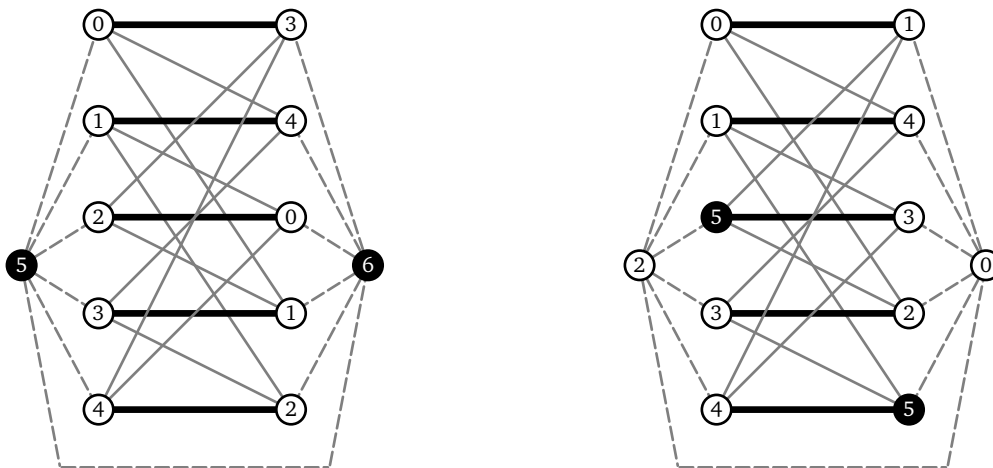
Teorema 3.7. *Dada G , $\psi(G \oplus K_2) = s + 2$ si y solo si G tiene una coloración completa de permutación.*

Demostración. Si G tiene una coloración completa de permutación, entonces ésta se puede extender en $G \oplus K_2$ agregando dos colores, basta asignar a cada espiguilla un color nuevo (ver figura 3.5a).

Ahora, suponga que $\psi(G \oplus K_2) = s + 2$, entonces la espiguilla w_x tendrá color c_x y la espiguilla w_y tendrá color c_y . Los colores c_x y c_y deben ser adyacentes a los demás, por lo que s colores estarán en X y los mismos estarán en Y , lo cual define una coloración completa de permutación en G . ■

Corolario 3.2. *Si $\psi(G) = s$ pero G no tiene ninguna coloración completa de permutación, entonces $s \leq \psi(G \oplus K_2) \leq s + 1$.*

En efecto, dada una coloración completa de no-permutación de G con colores repetidos c_x y c_y , resulta trivial extender la coloración a $G \oplus K_2$ sin agregar ningún color adicional, basta asignar los colores c_x y c_y a las espiguillas de la gráfica. En algunos casos es posible agregar un color adicional, para esto se deben identificar dos vértices independientes con colores c_x y c_y en cuyo vecindario estén presentes los $s - 2$ colores restantes, una vez identificados, se les puede asignar un nuevo color (ver figura 3.5b).

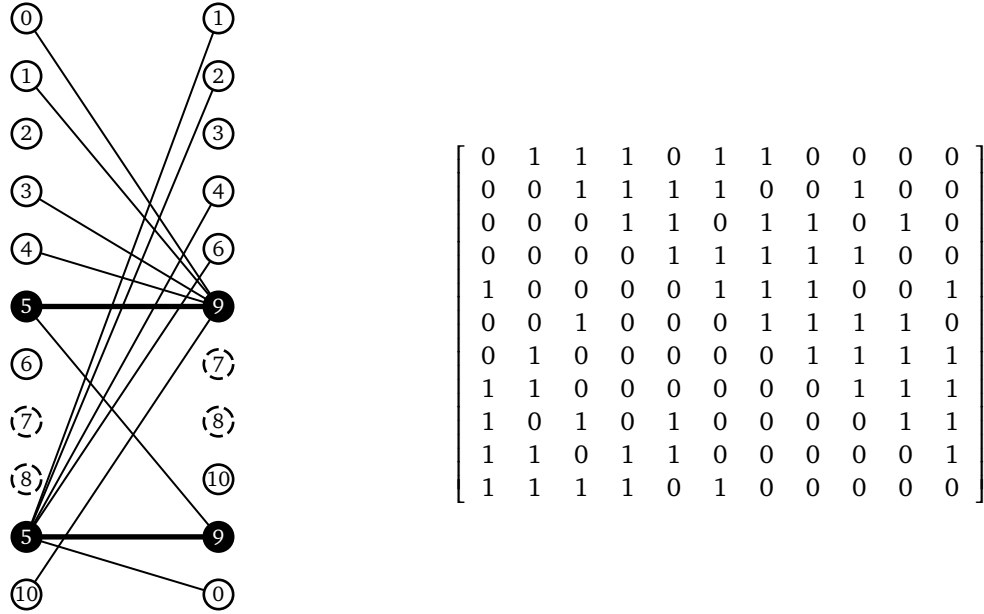


(a) Extensión de la coloración de permutación de la figura 3.2a.

(b) Extensión de la coloración de no-permutación de la figura 3.2a.

Figura 3.5: Extensión de coloraciones completas en GGBEC con espiguillas.

Dada una coloración completa de no-permutación, resulta sencillo determinar si su extensión tendrá $s + 1$ colores, pues sólo deben revisarse cuatro parejas de vértices y verificar que cumplan con las condiciones ya mencionadas. Si la extensión de la coloración tiene $s + 1$ colores, sabremos que $\psi(G \oplus K_2) = s + 1$, pero en caso contrario, no podemos afirmar que $\psi(G \oplus K_2) = s$, a menos que la extensión de la coloración tenga s colores para toda coloración completa de no-permutación de G . La figura 3.6 ilustra este último caso, pues la gráfica tiene una única s -coloración completa en la cual no es posible agregar un color adicional al extenderla a $G \oplus K_2$.



(a) La única pareja independiente de vértices con colores repetidos no es adyacente a los colores 7 y 8. (Sólo se muestran las aristas relevantes).

(b) La matriz $M(G)$ asociada a la gráfica.

Figura 3.6: Una GGMC con $\psi(G) = s$ y $\psi(G \oplus K_2) = s$.

3.3. Número acromático de GGMC

En general es difícil saber el número acromático de una gráfica, pero es posible construir GGMC con número acromático conocido. En esta sección, mostramos que tres familias de GGMC tienen $\psi(G) = s$.

Teorema 3.8. Sea G una GGMC con $s = 2n + 1$ espigas, generada por la cadena $a_1 a_2 \dots a_n$. Si la cadena toma alguna de las siguientes formas:

$$\begin{aligned}
 a_1, a_2, \dots, a_n &= 0 & (a) \\
 a_1, a_2, \dots, a_{n-1} &= 0 \quad y \quad a_n = 1 & (b) \\
 a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, a_n &= 0 \quad y \quad a_{n-1} = 1 & (c)
 \end{aligned}$$

entonces $\psi(G) = s$.

Demostración. Probaremos que las gráficas en cuestión admiten una coloración completa 1-cíclica en cualquiera de los tres casos. Recordemos que una coloración 1-cíclica es aquella en la que, para $i = 0, \dots, s - 1$, el vértice en X de la espiga i y el vértice en Y de la espiga $i + 1$ tienen color i (definición 3.7). En esta prueba, todas las sumas y restas se realizan módulo s .

- *Caso a.* La gráfica tiene dos vértices con color i :
 - El vértice en X de la espiga i , que es adyacente al vértice en Y de la misma espiga i y de las espigas $i + n + 1, i + n + 2, \dots, i + 2n$ (observación 2.11). Dichos vértices tienen colores $i - 1 = i + 2n, i + n, i + n + 1, \dots, i + 2n - 1$, respectivamente (definición 3.7).
 - El vértice en Y de la espiga $i + 1$, que es adyacente al vértice en X de la misma espiga $i + 1$ y de las espigas $i + 2, i + 3, \dots, i + n + 1$. El color de los vértices en X es igual a su número de espiga.

En esta coloración, el color i es adyacente a todos los demás colores y no es adyacente a él mismo (ver ejemplos de la figura 3.7). Como G es una GGMC, los demás colores tienen exactamente el mismo patrón de adyacencia y, por lo tanto, la coloración es completa. Se aplica el mismo argumento en los casos restantes.

- *Caso b.* La gráfica tiene dos vértices con color i :
 - El vértice en X de la espiga i , que es adyacente al vértice en Y de la misma espiga i y de las espigas $i + n, i + n + 2, i + n + 3, \dots, i + 2n$. Dichos vértices tienen colores $i - 1 = i + 2n, i + n - 1, i + n + 1, i + n + 2, \dots, i + 2n - 1$, respectivamente.
 - El vértice en Y de la espiga $i + 1$, que es adyacente al vértice en X de la misma espiga $i + 1$ y de las espigas $i + 2, i + 3, \dots, i + n, i + n + 2$. El color de los vértices en X es igual a su número de espiga.
- *Caso c.* La gráfica tiene dos vértices con color i :
 - El vértice en X de la espiga i , que es adyacente al vértice en Y de la misma espiga i y de las espigas $i + n - 1, i + n + 1, i + n + 3, i + n + 4, \dots, i + 2n$. Dichos vértices tienen colores $i - 1 = i + 2n, i + n - 2, i + n, i + n + 2, i + n + 3, \dots, 2n - 1$, respectivamente.
 - El vértice en Y de la espiga $i + 1$, que es adyacente al vértice en X de la misma espiga $i + 1$ y de las espigas $i + 2, i + 3, \dots, i + n - 1, i + n + 1, i + n + 3$. El color de los vértices en X es igual a su número de espiga.

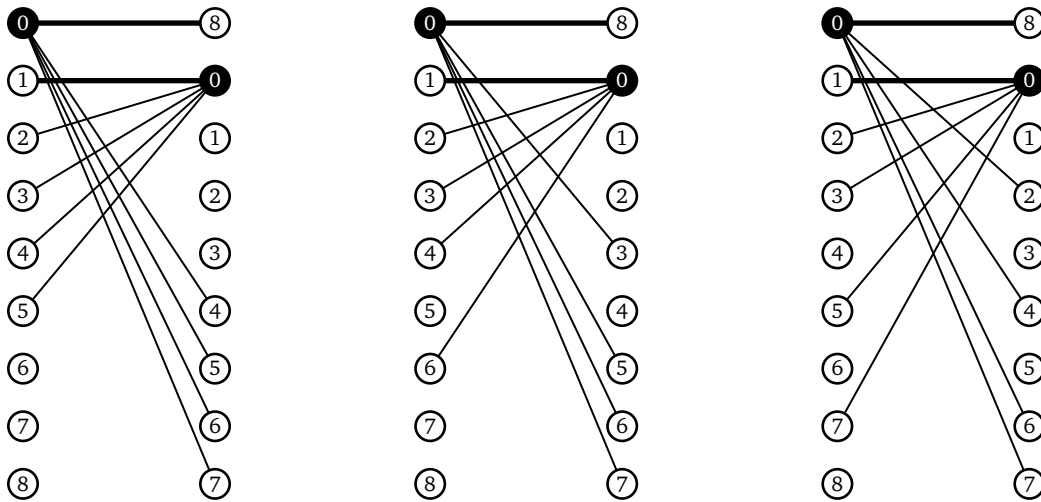
■

Podría pensarse, con la información presentada hasta ahora, que todas las GGMC tienen una coloración completa de permutación o al menos una s -coloración completa, pero no es así. Existen GGMC con $\psi(G) < s$ y una de esas gráficas es una GGMC con once espigas (ver anexo B), sin embargo, todas las GGMC estudiadas hasta ahora que tienen $\psi(G) = s$ también tienen una coloración cíclica.

La GGMC generada por la cadena “10111” no cuenta con ninguna s -coloración completa. Como se ilustra en la figura 3.8, si tomamos cualquier pareja de vértices en X , con la intención de asignarles el mismo color, podemos comprobar que los vértices tendrán menos de diez vecinos, por lo que la gráfica no podrá tener una coloración completa de casi-permutación (observación 3.4). Una búsqueda exhaustiva realizada por computadora nos indica que la gráfica tampoco tiene una coloración completa de permutación.

En todos los ejemplos de GGMC analizados hasta ahora, es decir, gráficas de hasta 15 espigas, observamos que las que tienen número acromático $\psi(G) = s$ también tienen al menos una coloración completa cíclica, lo cual nos lleva a proponer la siguiente conjetura:

Conjetura. Sea G una GGMC con s espigas, entonces $\psi(G) = s$ si y sólo si G tiene una coloración completa cíclica.



(a) GGMC generada por "0000" (b) GGMC generada por "0001" (c) GGMC generada por "0010"

Figura 3.7: Ejemplos de GGMC con $\psi(G) = s$. (Sólo se muestran las aristas relevantes).

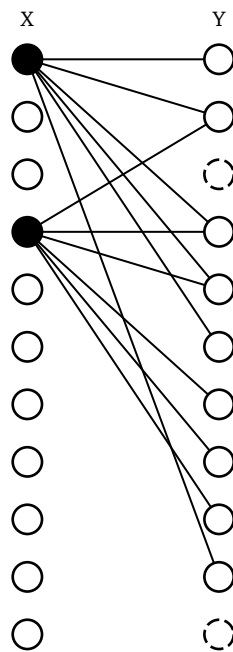


Figura 3.8: La GGMC generada por "10111" no tiene coloración completa de no-permutación. (Sólo se muestran las aristas relevantes).

Conclusiones y trabajo futuro

En este trabajo, inicialmente realizamos una clasificación de las gráficas gramíneas bipartitas, identificando a las gramíneas bipartitas de espigas cortas (GGBEC), sobre las cuales enfocamos nuestro estudio posterior, y el conjunto complementario de gramíneas bipartitas de “espigas largas”. Ideamos una forma de representar las GGBEC mediante matrices, lo cual nos permitió identificar un subconjunto de gráficas que llamamos gramíneas de matriz circulante.

Abordamos el problema de decidir cuándo una gráfica es GGBEC y pudimos caracterizar a la familia en términos de acoplamientos, con lo cual presentamos un programa entero y un algoritmo de backtracking para resolver el problema. Así mismo, descubrimos la estrecha relación que guardan las GGBEC con los torneos regulares, lo cual nos permitió probar que todas las GGBEC son hamiltonianas.

Dimos una cota superior para el número acromático de las GGBEC, que aunque es directa, resultó justa. Clasificamos las coloraciones completas que alcanzan dicha cota en coloraciones completas de permutación, de no-permutación y cíclicas, lo que facilitó su estudio. En particular, para las coloraciones de permutación, determinamos una serie de condiciones necesarias y de condiciones suficientes para que fueran coloraciones completas.

Este trabajo revela que las gráficas gramíneas son una familia amplia y con bastante riqueza. Tan sólo de las gramíneas bipartitas y bipartitas de espigas cortas surgen relaciones interesantes con otras áreas de la teoría de gráficas. Tales conexiones nos permitieron relacionar nuestros problemas con problemas NP-difíciles ya conocidos, lo cual a su vez, permite una exploración más profunda de los temas tratados.

A la conclusión de este trabajo existen temas en esta línea de investigación en los que se puede profundizar como parte de un trabajo futuro. En relación a la complejidad de los problemas estudiados, sabemos que el problema de número acromático es NP-difícil en general y para varias familias de gráficas, sin embargo desconocemos su dificultad para gráficas gramíneas en particular, principalmente debido a que las condiciones restrictivas de las gráficas gramíneas dificultan la reducción de problemas con complejidad conocida a ésta familia de gráficas. Las mismas dificultades están presentes al estudiar la complejidad del problema de decidir si una gráfica es gramínea. Por la correspondencia que tienen con otros problemas NP-completos y NP-difíciles, pensamos que ambos problemas podrían permanecer difíciles para gráficas gramíneas e incluso para GGBEC.

Conocer con mayor profundidad el grupo de automorfismos de las GGBEC es algo que podría aliviar las dificultades mencionadas anteriormente, pues creemos que conociendo las simetrías que guardan estas gráficas, podría simplificarse el análisis de los problemas de interés.

En relación al número acromático, queremos encontrar una prueba o bien un contraejemplo para la conjetura presentada en la sección 3.3. También buscamos una cota inferior de $\psi(G)$ en GGBEC, la cual creemos que podría ser igual a la cota superior menos una constante. En general, consideramos importante obtener buenas cotas superiores e inferiores de $\psi(G)$ para otras familias de gráficas gramíneas.

Finalmente, en este trabajo nos enfocamos principalmente a las coloraciones de permutación y

a las gramíneas de espigas cortas, pero también es de interés estudiar con mayor profundidad las coloraciones de no-permutación y las gramíneas de “espigas largas”.

Ejemplos de gráficas gramíneas bipartitas

En este anexo damos ejemplos de gráficas gramíneas bipartitas que no son de espigas cortas. Cada ejemplo está representado por un dibujo de la gráfica y, debido al gran tamaño de algunos ejemplos, también por una tabla.

El dibujo de cada gráfica es similar al de la figura 2.9b. Las espigas están numeradas y señaladas por aristas gruesas. El resto de las aristas son de color gris y son punteadas si son adyacentes a una espiguilla. Los vértices de las espigas están dispuestos en cuatro columnas de forma que podemos referirnos a un vértice mediante su número de espiga y su columna. Finalmente, el color de los vértices exhibe la bipartición de la gráfica.

La tabla asociada a cada gráfica es una extensión de la tabla presentada en la figura 2.10a. Cada celda de la tabla describe la conexión entre un par de espigas, por ejemplo, si en el renglón i y columna j está el elemento $A \rightarrow B$, significa que el vértice A de la espiga i es adyacente al vértice B de la espiga j . Lo anterior implica que en el renglón j y columna i estará el elemento $B \rightarrow A$, por lo cual podemos omitir la mitad de los elementos de la tabla y sólo mencionar los elementos de la mitad superior derecha.

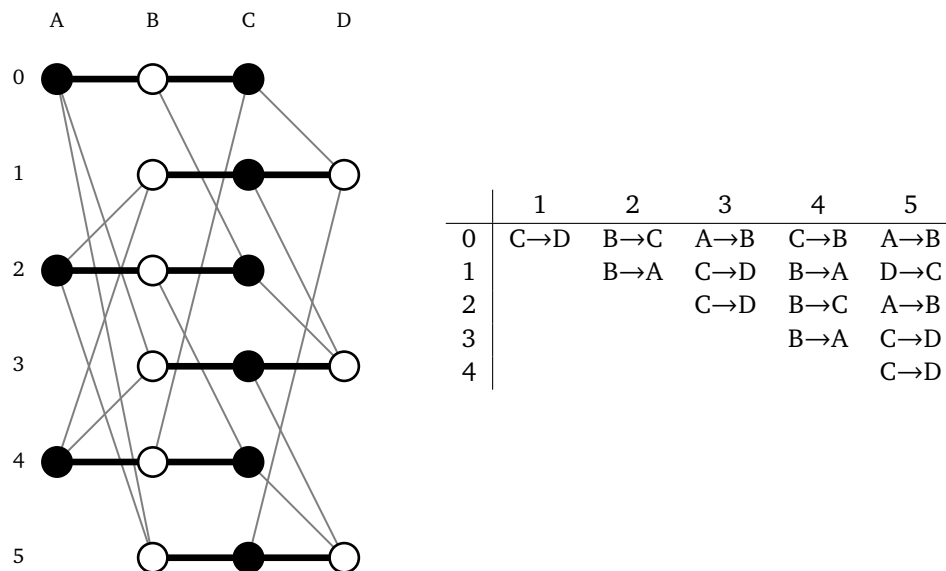
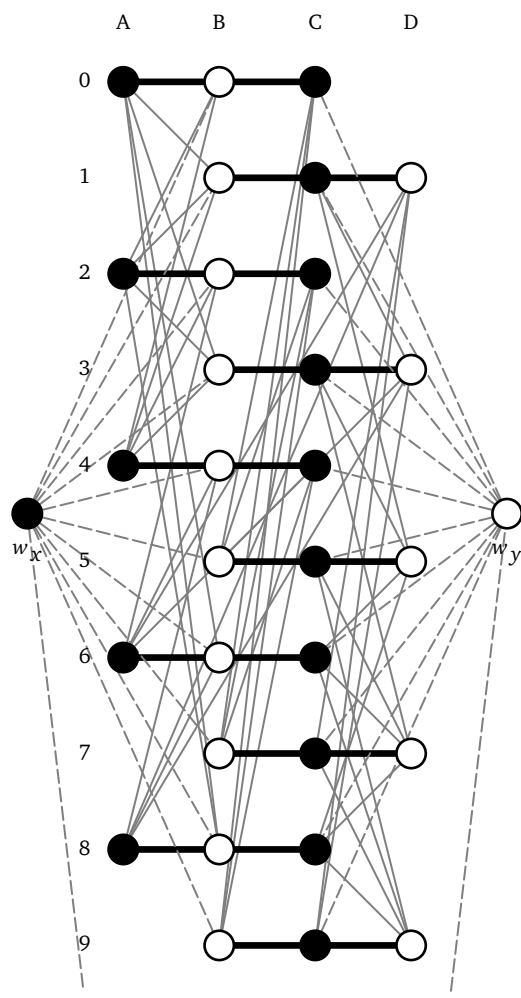


Figura A.1: Gráfica gramínea bipartita con 6 espigas de tamaño 3 y sin espiguillas, ejemplo de la categoría 1.1 del teorema 2.6.



| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 0 | A→B | B→A | A→B | B→A | C→B | A→B | C→B | A→B | C→B |
| 1 | | B→A | C→D | B→A | C→D | D→A | D→C | D→A | D→C |
| 2 | | | A→B | B→A | C→B | B→A | C→B | A→B | C→B |
| 3 | | | | B→A | C→D | D→A | C→D | D→A | D→C |
| 4 | | | | | C→B | B→A | C→B | B→A | C→B |
| 5 | | | | | | D→C | C→D | D→C | C→D |
| 6 | | | | | | | C→D | B→A | C→D |
| 7 | | | | | | | | D→C | C→D |
| 8 | | | | | | | | | C→D |

Figura A.2: Gráfica gramínea bipartita con 10 espigas de tamaño 3 y dos espiguillas, ejemplo de la categoría 1.1 del teorema 2.6. Las espiguillas w_x y w_y se conectan, respectivamente, con los vértices B y C de cada espiga.

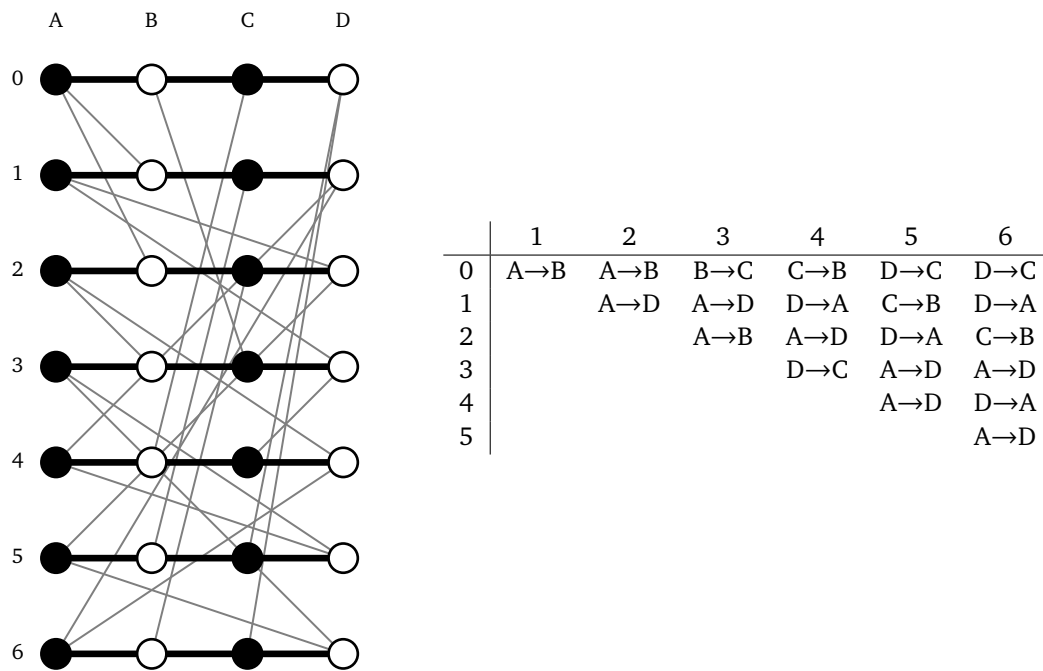


Figura A.3: Gráfica gramínea bipartita con 7 espigas de tamaño 4 y sin espiguillas, ejemplo de la categoría 1.2 del teorema 2.6.

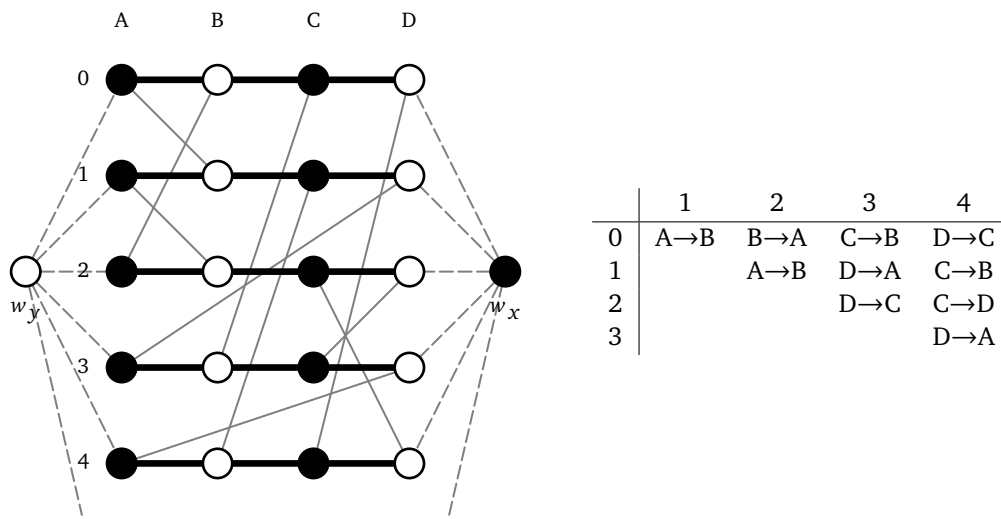


Figura A.4: Gráfica gramínea bipartita con 5 espigas de tamaño 4 y dos espiguillas, ejemplo de la categoría 1.2 del teorema 2.6. Las espiguillas w_x y w_y se conectan, respectivamente, con los vértices D y A de cada espiga.

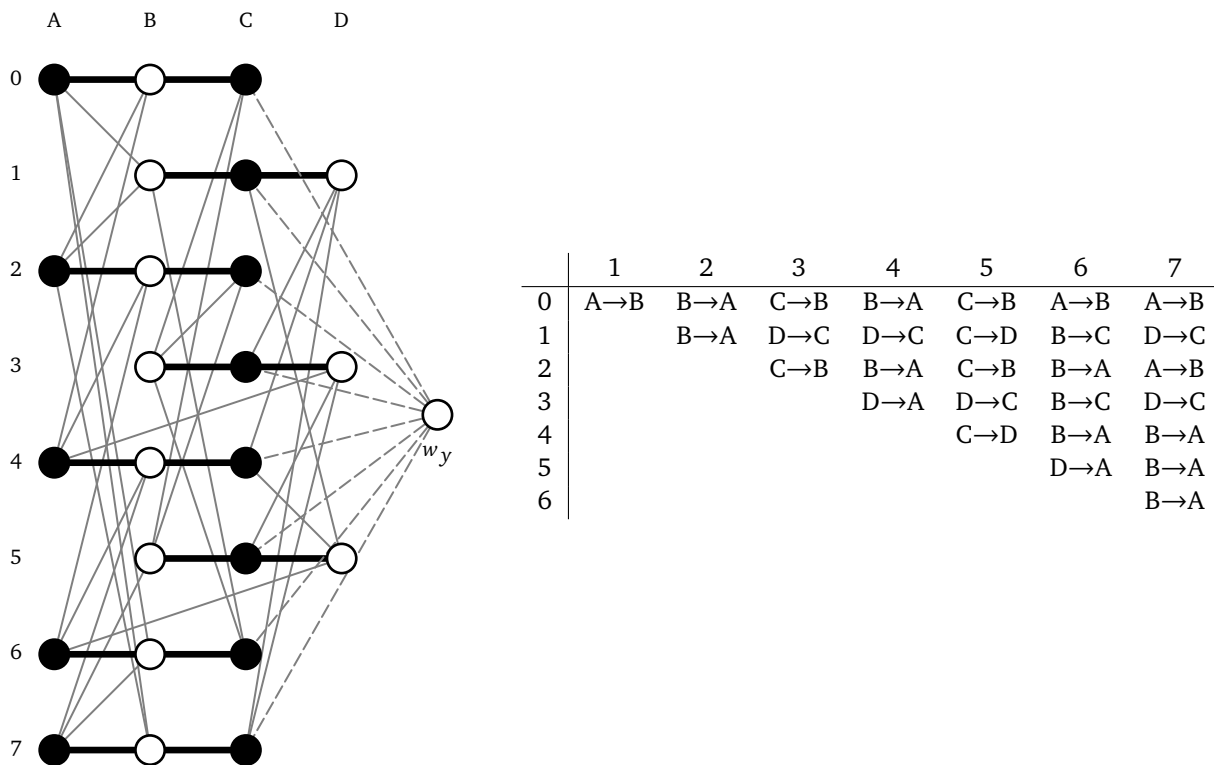


Figura A.5: Gráfica gramínea bipartita con 8 espigas de tamaño 3 y una espiguilla, ejemplo de la categoría 2 del teorema 2.6. La espiguilla w_y se conecta con el vértice C de cada espiga.

Listado de GGBEC sin espiguillas

Con ayuda de la computadora pudimos generar y analizar todas las GGBEC con once o menos espigas y sin espiguillas.

En la siguiente tabla, enumeramos todas las GGBEC con nueve o menos espigas y sin espiguillas, y sus propiedades más importantes, incluyendo el número acromático. La segunda columna de la tabla proporciona la matriz triangular superior de $M(G)$, a partir de la cual, recordando que $a_{ij} = \neg a_{ji}$, se puede obtener la matriz completa. Finalmente, si la gráfica es una GGMC, entonces la última columna muestra la cadena que la genera.

| Nombre | $M(G)$ | AP ¹ | AG ² | CPP ³ | CCP ⁴ | CCNP ⁵ | $\psi(G)$ | GGCM |
|-------------|---|-----------------|-----------------|------------------|------------------|-------------------|-----------|------|
| 3 espigas | | | | | | | | |
| GGBEC-d2-01 | 10 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 3 | 3 | 1 |
| 5 espigas | | | | | | | | |
| GGBEC-d3-01 | 1100 110 11 1 | 13 | 2 | 2 | 2 | 50 | 5 | 11 |
| 7 espigas | | | | | | | | |
| GGBEC-d4-01 | 111000 11100 1110 111 11 1 | 144 | 2 | 31 | 2 | 84 | 7 | 111 |
| GGBEC-d4-02 | 001011 00011 1000 110 00 1 | 144 | 1 | 24 | 6 | 150 | 7 | |
| GGBEC-d4-03 | 110100 11010 1101 110 11 1 | 144 | 8 | 24 | 24 | 336 | 7 | 110 |
| 9 espigas | | | | | | | | |
| GGBEC-d5-01 | 11110000 1111000 111100 11110 1111 111 11 1 | 2783 | 2 | 484 | 2 | 108 | 9 | 1111 |
| GGBEC-d5-02 | 00010111 0010101 000110 10000 1101 000 11 0 | 2714 | 1 | 460 | 1 | 87 | 9 | |
| GGBEC-d5-03 | 00010111 0010101 000110 10000 1011 000 10 1 | 2700 | 1 | 448 | 4 | 125 | 9 | |
| GGBEC-d5-04 | 00010111 0010110 010001 10000 1111 000 10 1 | 2730 | 1 | 468 | 0 | 68 | 9 | |
| GGBEC-d5-05 | 11101000 1110100 111010 11101 1110 111 11 1 | 2693 | 1 | 448 | 23 | 315 | 9 | 1110 |
| GGBEC-d5-06 | 10110010 1011001 101100 10110 1011 101 10 1 | 2681 | 8 | 460 | 28 | 432 | 9 | 1011 |
| GGBEC-d5-07 | 00110110 0001110 110000 00111 0101 000 11 1 | 2711 | 1 | 456 | 1 | 45 | 9 | |
| GGBEC-d5-08 | 00110110 0001110 110000 00111 1001 100 11 1 | 2692 | 1 | 448 | 0 | 78 | 9 | |
| GGBEC-d5-09 | 00110110 1110000 101100 01111 1001 110 11 1 | 2712 | 1 | 468 | 0 | 51 | 9 | |
| GGBEC-d5-10 | 00110110 1110000 101100 11011 1101 110 11 1 | 2696 | 1 | 456 | 2 | 61 | 9 | |
| GGBEC-d5-11 | 00101110 0001110 001001 01100 0000 111 11 1 | 2704 | 1 | 452 | 4 | 91 | 9 | |
| GGBEC-d5-12 | 00101110 0001110 001001 00110 0000 101 11 1 | 2687 | 1 | 448 | 6 | 156 | 9 | |
| GGBEC-d5-13 | 00110101 1110000 100110 11011 1110 001 01 0 | 2684 | 2 | 448 | 21 | 243 | 9 | |
| GGBEC-d5-14 | 11110000 1100110 111100 11011 1011 110 01 1 | 2688 | 1 | 444 | 7 | 143 | 9 | |
| GGBEC-d5-15 | 10001110 0011101 010100 10000 0111 010 11 1 | 2700 | 2 | 456 | 0 | 106 | 9 | |

Tabla B.1: Propiedades de las GGBEC con nueve o menos espigas y sin espiguillas.

¹Acoplamiento perfecto

²Acoplamiento gramíneo

³Coloraciones propias de permutación

⁴Coloraciones completas de permutación

⁵Coloraciones completas de no-permutación

Existen demasiadas GGBEC de once espigas y sin espiguillas para mostrar en este documento, por lo que sólo mencionaremos algunos datos relevantes.

La tabla B.2 cataloga las gráficas de acuerdo al tipo de 11-coloraciones completas que tienen. Es evidente que las 50 gráficas sin 11-coloraciones completas tienen $\psi(G) < 11$, pero es importante notar que todas ellas tienen $\psi(G) = 10$.

| | Con CCNP | Sin CCNP | Total |
|---------|----------|----------|-------|
| Con CCP | 279 | 6 | 285 |
| Sin CCP | 888 | 50 | 938 |
| Total | 1167 | 56 | 1223 |

Tabla B.2: Conteo de GGBEC con once espigas y sin espiguillas.

Entre las 1223 gráficas encontradas, existen cuatro que son GGMC, generadas por las cadenas “11111”, “11110”, “11101” y “10111”, la última, mencionada en la sección 3.3, teniendo $\psi(G) = 10$. Finalmente, la gran mayoría de estas gráficas tienen un único acoplamiento gramíneo, tan sólo ocho gráficas tienen más: seis gráficas tienen dos acoplamientos gramíneos, una gráfica tiene cuatro acoplamientos y otra gráfica tiene doce acoplamientos gramíneos.

Bibliografía

- [1] Arora, S. and Barak, B. (2009). *Computational complexity: a modern approach*. Cambridge University Press.
- [2] Bodlaender, H. L. (1989). Achromatic number is np-complete for cographs and interval graphs. *Information Processing Letters*, 31(3):135–138.
- [3] Brandstädt, A. (1989). The jump number problem for biconvex graphs and rectangle covers of rectangular regions. In *Fundamentals of Computation Theory*, volume 380, pages 68–77. Springer.
- [4] Cairnie, N. and Edwards, K. (1997). Some results on the achromatic number. *Journal of Graph Theory*, 26(3):129–136.
- [5] Cairnie, N. and Edwards, K. (1998). The achromatic number of bounded degree trees. *Discrete Mathematics*, 188(1):87–97.
- [6] Camion, P. (1959). Chemins et circuits hamiltoniens des graphes complets. *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, 249(21):2151–2152.
- [7] Dahlhaus, E. (1994). The computation of the jump number of convex graphs. In *Orders, Algorithms, and Applications*, volume 831 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 176–185. Springer.
- [8] Diestel, R. (2000). *Graph theory*. Springer.
- [9] Edwards, K. J. (2013). Achromatic number of collections of paths and cycles. *Discrete Mathematics*, 313(19):1856–1860.
- [10] Farber, M., Hahn, G., Hell, P., and Miller, D. (1986). Concerning the achromatic number of graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 40(1):21–39.
- [11] Gupta, R. P. (1969). Bounds on the chromatic and achromatic numbers of complementary graphs. In *Recent Progress in Combinatorics*, pages 229–235. Academic Press.
- [12] Harary, F., Hedetniemi, S., and Prins, G. (1967). An interpolation theorem for graphical homomorphisms. *Portugaliae Mathematica*, 26(4):453–462.
- [13] Kortsarz, G. and Krauthgamer, R. (2001). On approximating the achromatic number. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 14(3):408–422.
- [14] Kortsarz, G. and Shende, S. (2003). Approximating the achromatic number problem on bipartite graphs. In *Algorithms-ESA 2003*, pages 385–396. Springer.
- [15] Krysta, P. and Lory, K. (2006). Efficient approximation algorithms for the achromatic number. *Theoretical computer science*, 361(2):150–171.

- [16] López Bracho, R. and Rodríguez Sánchez, G. (2011). Graph reductions using the 4-polygon to 4-star transformation. *Advances and Applications in Discrete Mathematics*, 7(1):9–38.
 - [17] Müller, H. (1990). Alternating cycle-free matchings. *Order*, 7(1):11–21.
 - [18] Ponomarenko, I. (1992). Polynomial time algorithms for recognizing and isomorphism testing of cyclic tournaments. *Acta Applicandae Mathematica*, 29(1):139–160.
 - [19] van Lint, J. H. and Wilson, R. M. (2001). *A Course in Combinatorics*, chapter 4, pages 37–42. Cambridge University Press, second edition.
 - [20] Yannakakis, M. and Gavril, F. (1980). Edge dominating sets in graphs. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 38(3):364–372.
-