

2m 11. 3158.6

V.005
11488849

Université de Montréal

Analyse des bifurcations dans un modèle du
flutter auriculaire

par

Nicolas Doyon

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en mathématiques

Orientation mathématiques appliquées

décembre 2003



QA
3
U34
2034
v.005

1002

Direction des bibliothèques

AVIS

L'auteur a autorisé l'Université de Montréal à reproduire et diffuser, en totalité ou en partie, par quelque moyen que ce soit et sur quelque support que ce soit, et exclusivement à des fins non lucratives d'enseignement et de recherche, des copies de ce mémoire ou de cette thèse.

L'auteur et les coauteurs le cas échéant conservent la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent ce document. Ni la thèse ou le mémoire, ni des extraits substantiels de ce document, ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans l'autorisation de l'auteur.

Afin de se conformer à la Loi canadienne sur la protection des renseignements personnels, quelques formulaires secondaires, coordonnées ou signatures intégrées au texte ont pu être enlevés de ce document. Bien que cela ait pu affecter la pagination, il n'y a aucun contenu manquant.

NOTICE

The author of this thesis or dissertation has granted a nonexclusive license allowing Université de Montréal to reproduce and publish the document, in part or in whole, and in any format, solely for noncommercial educational and research purposes.

The author and co-authors if applicable retain copyright ownership and moral rights in this document. Neither the whole thesis or dissertation, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms, contact information or signatures may have been removed from the document. While this may affect the document page count, it does not represent any loss of content from the document.

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

**Analyse des bifurcations dans un modèle du
flutter auriculaire**

présenté par

Nicolas Doyon

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Robert Brunet

(président-rapporteur)

Jacques Bélair

(directeur de recherche)

Alain Vinet

(membre du jury)

Mémoire accepté le:

RÉSUMÉ

Dans ce travail, nous effectuons l'analyse mathématique du modèle proposé par Vinet [9] pour décrire le flutter auriculaire classique de type I, désordre cardio-électrique qui survient lorsque l'onde cardio-électrique ne passe plus correctement de l'oreillette au ventricule. L'onde électrique tourne alors sur un anneau de tissu cardiaque entourant la valve séparant l'oreillette du ventricule.

Nous effectuons l'analyse linéaire du modèle proposé par Alain Vinet. Nous montrons d'abord que pour toute valeur de L (périmètre de l'anneau), l'équation proposée admet un et un seul point fixe, correspondant à une propagation à vitesse constante de l'onde électrique autour de l'anneau. Ensuite, nous démontrons l'existence d'une longueur critique L_0 telle que le point fixe est stable si $L > L_0$ et instable si $L < L_0$.

Nous étudions le comportement des solutions périodiques apparaissant près du point de bifurcation. Nous voyons alors que le point fixe perd sa stabilité par une bifurcation de Hopf et effectuons les calculs nécessaires afin de déterminer la nature de la bifurcation.

Le modèle développé par Vinet se distingue des modèles précédents en tenant compte du couplage résistif entre les cellules voisines. Monsieur Vinet utilise une distribution gaussienne pour modéliser le couplage résistif des cellules voisines. Nous montrons que le modèle est qualitativement peu sensible au choix de cette distribution. Nous étudions l'influence de la force de couplage sur la stabilité des solutions. À la fin de ce travail, nous voyons comment le couplage résistif influence le comportement du modèle près du point de bifurcation.

Mots-clés :

Bifurcation de Hopf, Propagation cardio-électrique, Équation différentielle à délai

We conduct the mathematical analysis of a model of the type I atrial flutter proposed by Vinet in [9]. This cardio-electrical disorder occurs when the electrical wave does not cross properly from the atria to the ventricles. The wave then circums around a ring of cardiac tissue surrounding the valva separating the atria from the ventricle.

We conduct the linear analysis of Vinet's model. We first show that for any value of L (perimeter of the ring), the equation used in the model allows one and only one constant solution meaning a constant speed wave propagation around the ring of cardiac tissue. We then exhibit a critical length L_0 such that the constant solution is stable if $L > L_0$ and unstable if $L < L_0$.

We study the behaviour of periodic solutions occurring near this point of bifurcation. We see that the constant solution loses its stability through a Hopf bifurcation and make the necessary calculations to determine which kind of Hopf bifurcation occurs.

This model distinguishes itself from its ancestors by taking the resistive coupling of neighbour cells into account. Vinet uses a gaussian distribution to model this resistive coupling. We show that the model is qualitatively insensitive to the choice of the distribution. We study how the resistive coupling affects the stability of solutions. At the end, we see how this coupling force affects the behaviour of the model near the bifurcation point.

Keywords :

Hopf bifurcation, Cardio-electrical propagation, delay differential equation

TABLE DES MATIÈRES

Résumé	iii
Liste des figures	viii
Liste des tableaux	ix
Liste des sigles et abréviations	x
Introduction	1
Chapitre 1. Notions de cardiologie	3
Chapitre 2. Modélisation	7
2.1. automates finis	7
2.2. Modèles itératifs	9
2.3. Équation de Beeler-Reuter et modèle de FitzHugh-Nagumo :.....	10
2.4. Modèle de Courtemanche :.....	11
2.5. Le modèle de Vinet :.....	13
Chapitre 3. Équations différentielles fonctionnelles	16
Chapitre 4. Analyse linéaire du modèle de Vinet	21
4.1. Solutions constantes	21
4.2. Linéarisation et le cas de la valeur propre nulle	23
4.3. Énoncé du théorème 4.1 et propriétés de la fonction f	24
4.4. Démonstration de la partie i du théorème 4.1	32

4.5. Démonstration de la partie ii du théorème 4.1	37
Chapitre 5. Étude numérique de l'équation caractéristique	45
5.1. Séparation entre les points critiques	45
5.2. Croisement des parties réelles des valeurs propres	48
Chapitre 6. Comportement d'un modèle simplifié près du point de bifurcation	53
Chapitre 7. Bifurcation de Hopf et variété centre	57
7.1. Bifurcation de Hopf	57
7.2. Sous espace et variété centre	61
Chapitre 8. Étude des solutions près du point de bifurcation dans le modèle de Vinet	66
8.1. Influence du paramètre de dispersion sur les oscillations	70
Conclusion	73
Annexe A. Calcul de solution près du point de bifurcation dans le modèle de Vinet	A-i
Annexe B. Programme Matlab utilisé dans le chapitre 5 :	B-i
Bibliographie	B-i

LISTE DES FIGURES

2.1	Fonction $\text{ct}(\text{tr})$	14
2.2	courbe de restitution.....	15
4.1	Point fixe en fonction de L	23
5.1	Partie réelle en fonction de L	46
5.2	Parité réelle en fct de la partie imaginaire.....	46
5.3	dispersion des points critiques.....	48
5.4	Croisement de la valeur propre 0.....	49
5.5	Croisement de la valeur propre 1.....	49
5.6	Fonctions de croisement.....	52
7.1	Bifurcation de Hopf.....	59

LISTE DES TABLEAUX

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

Abréviations non mathématiques :

APD : Durée du pic d'activation

Ca : Calcium

Cl : Chlore

DIA : Intervalle diastolique

ECG : Électrocardiogramme

K : Potassium

TR : Temp de récupération

Symboles mathématiques :

C les nombres complexes

I les nombres imaginaires

N les nombres naturels

R les nombres réels

$R^+, (R^-)$ les réels positifs (négatifs)

Z les nombres entiers

$\Re(z)$ la partie réelle du nombre complexe z

$\Im(z)$ la partie imaginaire du nombre complexe z

INTRODUCTION

Le flutter auriculaire est un désordre cardio-électrique qui survient lorsque l'onde électrique ne passe plus correctement de l'oreillette au ventricule mais se met à tourner de façon frénétique autour de la valve séparant le ventricule de l'oreillette. Ce désordre provoque un battement régulier de l'oreillette à une fréquence de 300 battements par minute. Le battement des oreillettes n'est alors plus coordonné avec celui des ventricules. Le cœur ne joue plus correctement son rôle de pompe et il en résulte une chute de pression. Le développement d'un bon modèle mathématique est nécessaire à la compréhension du flutter auriculaire ainsi qu'au développement de nouveaux traitements.

Différents modèles existent pour décrire la propagation cardio-électrique. Malheureusement, les modèles décrivant bien la propagation cardio-électrique dans le cas général sont difficiles à analyser. Dans le cas du flutter auriculaire, il est possible de considérer que la propagation électrique a lieu dans un anneau de tissu uniforme de dimension 1. Cette simplification nous permet de réduire la complexité des modèles utilisés.

Courtemanche et al. [4] utilisent une équation différentielle à délai à une seule dimension afin de décrire le comportement cardio-électrique lors d'un flutter auriculaire. Le modèle de Courtemanche étudie l'évolution des solutions en fonction du paramètre L , périmètre de l'anneau de tissu uniforme entourant la valve qui sépare l'oreillette du ventricule. Le modèle de Courtemanche et al. prédit l'existence d'une longueur critique L_0 telle que la propagation à vitesse constante est stable pour $L > L_0$ et instable pour $L < L_0$.

Malheureusement, ce modèle ne décrit pas adéquatement le comportement du système lorsque le périmètre de l'anneau est près de la longueur critique. Vinet

soutient dans [9] qu'une bonne compréhension des oscillations qui apparaissent dans le profil de vitesse pour de telles valeurs du périmètre de l'anneau est importante dans le développement de traitements. Dans le même article, monsieur Vinet montre qu'une hypothèse du modèle de Courtemanche et al. n'est pas satisfaite. Monsieur Vinet développe un modèle corrigé où il tient compte de la force de couplage résistif entre les cellules voisines et modélise cette force de couplage par une distribution gaussienne.

Dans ce travail, nous effectuons l'analyse mathématique du modèle de Vinet. Nous donnons des démonstrations des résultats obtenus par Alain Vinet lors des simulations numériques qu'il a effectuées. Nous étudions aussi l'influence de la variance de la distribution de la force de couplage sur le comportement des solutions.

Chapitre 1

NOTIONS DE CARDIOLOGIE

Dans ce mémoire, nous étudions un cas particulier de la propagation cardio-électrique. Dans le coeur, l'onde électrique origine du noeud sino-atrial. Le noeud sino-atrial la partie du coeur dont le rythme autonome est le plus rapide. Cette partie de la grosseur d'un pouce est située en haut de l'oreillette gauche. Lors d'un battement cardiaque chez un sujet sain, une onde électrique origine du noeud sino-atrial et traverse les oreillettes. Le seul lieu de passage que peut emprunter l'onde électrique pour passer des oreillettes aux ventricules est le noeud auriculo-ventriculaire (AV). Le noeud AV est à son tour relié aux fibres de Purkinje qui dispersent l'onde électrique dans les ventricules. L'onde électrique converge finalement au niveau de l'épicarde puis le cycle recommence. Il est possible de mesurer cette activité électrique en plaçant des électrodes de surface. L'électrocardiogramme (ECG) ainsi obtenu est constitué chez le sujet sain d'une vague *P* associé à l'excitation auriculaire, d'un complexe *QRS* associé à l'excitation ventriculaire et d'une vague *T* associée à la repolarisation ventriculaire.

L'activité électrique mesurée par un ECG est la somme de l'activité électrique de chacune des cellules. Les cellules cardiaques sont des cellules excitables avec un potentiel de repos d'environ $-90mv$. Ces cellules génèrent un potentiel d'action lorsque soumises à un courant suffisamment important. Lorsqu'un stimulus 'carré' est appliqué à une cellule isolée ou à un agrégat de cellules isolées, il y a un changement abrupt de comportement lorsque l'intensité du stimulus atteint un certain seuil. En deça de ce seuil, il n'y a qu'une courte réponse électronique; au-delà de ce seuil, la cellule génère un potentiel d'action d'une durée beaucoup

plus grande. La valeur de ce seuil dépend de la durée du stimulus et du temps qui sépare l'application du stimulus du potentiel d'action précédent. Après un potentiel d'action, il y a un intervalle de temps, la période réfractaire absolue, durant lequel il est impossible de provoquer un nouveau potentiel d'action.

Le potentiel d'action normal des myocytes cardiaques peut être divisé en trois phases : une montée très rapide, un plateau durant lequel le potentiel membranaire est maintenu ou se repolarise lentement, et finalement une phase de repolarisation rapide. La présence d'un plateau dans le potentiel d'action rend sa durée beaucoup plus grande que celle d'un potentiel d'action d'un neurone. Les potentiels d'action d'une cellule cardiaque durent entre 100 et 300 ms, selon l'espèce et l'emplacement des cellules. Durant chacune des phases d'un potentiel d'action, un processus ionique spécifique est dominant. La durée du potentiel d'action (APD) peut être définie soit comme le temps qu'il faut pour atteindre un niveau de potentiel de référence durant la repolarisation, soit comme le temps qu'il faut pour compléter une fraction de la repolarisation totale. On nomme courbe de restitution la relation entre le APD et l'intervalle séparant les stimuli (tr). L'intervalle diastolique (DIA), défini comme le temps séparant la fin de l'APD du prochain stimulus, a également été utilisé comme variable indépendante. Ces deux fonctions (APD(tr) et APD(DIA)) ont le plus souvent été modélisées par des doubles exponentielles.

La vitesse de conduction est une fonction croissante du DIA. Cela est dû au courant rapide de sodium responsable de la montée rapide lors du APD et de la propagation. Tout facteur interférant avec la repolarisation suivant cette montée ou qui augmente le potentiel de repos peut retarder ou réduire la réactivation du sodium et ainsi réduire la vitesse de propagation. ([5] chapitre 5)

Les cellules du noeud sino-atrial se différencient des autres cellules du myocarde par la forme de leur potentiel d'action. Leur seuil d'activation est plus faible

que celui des autres cellules cardiaques. Ainsi, durant la repolarisation, le potentiel de la cellule remonte jusqu'au seuil d'activation ce qui provoque l'activité autonome de la cellule.

Par la plus simple approximation, le myocarde peut être considéré comme un réseau de myocytes en forme de bâtonnets interreliés ayant un diamètre moyen de 12-20 μm et une longueur d'environ 100 μm . Les myocytes sont reliés physiquement et électriquement par un réseau de canaux résistifs appelés 'nexus' ou 'gap junctions' ([5] chapitre 2). Malgré leur faible résistance, ces jonctions créent une nuisance résistive au courant intercellulaire et ce faisant, créent des discontinuités dans la transmission de cellule à cellule de l'excitation. Quand les myocytes sont joints bout-à-bout dans le sens de la longueur des fibres cardiaques, deux cellules adjacentes sont liées par un nombre relativement élevé de 'gap junctions' de sorte que le flux électrique peut être considéré comme continu. D'un autre côté, dans la direction perpendiculaire à l'axe des cellules, les fibres voisines sont jointes par un nombre beaucoup plus petit de 'gap-junctions' ce qui donne lieu à une résistance équivalente beaucoup plus grande au niveau des 'gap junctions', ce qui rend la propagation transversale essentiellement discontinue.

On peut regrouper les états d'une cellule cardiaque en trois grandes catégories : état excitable, état excité et état réfractaire. Lorsqu'une cellule dans un état excitable compte suffisamment de cellules excitées dans son voisinage, elle se dépolarise et entre elle-même en état excité. L'onde électrique se propage ainsi des cellules excitées aux cellules excitables. Après avoir été ainsi excitée, la cellule se repolarise. La période de repolarisation est aussi nommée période réfractaire. Lorsqu'une cellule est dans sa période réfractaire elle est plus difficile à exciter. On peut diviser la période réfractaire en une période réfractaire absolue qui survient au début de la période réfractaire durant laquelle il est impossible de réactiver la cellule, et une période réfractaire relative durant laquelle il est possible de réactiver la cellule mais plus difficilement que dans le cas d'une cellule

au repos. Les cellules en état réfractaire créent ainsi une bande de tissu résistif qui empêche l'onde électrique de revenir sur ses pas et assure la propagation unidirectionnelle.

Une anomalie dans la propagation de l'onde cardio-électrique peut causer une contraction non-coordonnée du muscle cardiaque, le coeur ne joue alors plus correctement son rôle de pompe et une chute rapide de pression en résulte. Il existe plusieurs facteurs pouvant dérégler le comportement cardio-électrique. On parle de circuit de réentrée lorsque l'onde électrique ne suit plus son parcours normal mais parvient à trouver un chemin pour se propager de façon soutenue provoquant une haute fréquence d'activation autour du circuit. Par exemple, les tissus morts ne sont pas excitables. S'il y a présence d'une zone ischémique, l'onde électrique doit donc contourner cette région ce qui peut provoquer des turbulences électriques. Dans le pire des cas, l'onde se met à tourner de façon autonome autour de la zone de tissu mort. Comme cette zone est beaucoup plus petite que le coeur lui-même, ce court-circuit est très rapide et la région du coeur entourant la zone morte se met alors à battre de façon frénétique.([2] chapitre 3) À la suite d'une turbulence dans la propagation électrique, il peut aussi apparaître des tourbillons ou vortex qui évoluent de façon autonome, indépendamment de l'activité du noeud sinusal, et ce même en l'absence de zone ischémique.([2] chapitre 3)

Dans ce travail, nous nous intéressons plus particulièrement au flutter auriculaire. Dans le cas du flutter auriculaire classique (type I), l'onde électrique, au lieu d'emprunter le noeud AV puis les fibres de Purkinje pour passer des oreillettes aux ventricules, se met à tourner autour de la valve séparant l'oreillette du ventricule [9]. Il est alors possible que l'oreillette se mette à palpiter rapidement, jusqu'à trois cents battements par minutes et de façon non-coordonnée avec le ventricule. Il en résulte une chute de pression. Le rythme irrégulier d'activité des ventricules qui en résulte peut aussi mener à des arythmies ventriculaires dangereuses.

Chapitre 2

MODÉLISATION

Dans le cas général, modéliser la propagation électrique dans le tissu cardiaque est une tâche très complexe. D'abord parce que pour chacune des cellules, la différence de potentiel membranaire résulte d'une différence entre les concentrations intra-cellulaires et extra-cellulaires de différents ions (sodium, potassium, chlore...). Pour modéliser tous les échanges ioniques, il nous faut un système à plusieurs variables (une par canal ionique) ce qui rend le problème difficile à traiter numériquement et à analyser mathématiquement. De plus, la validation expérimentale des équations pose certains problèmes compte tenu du grand nombre de paramètres à estimer ([5] chapitre 7). Un modèle complet tiendrait également compte de l'orientation des fibres cardiaques qui sont disposées de façon non uniforme. Malgré la difficulté à obtenir un modèle général, plusieurs modèles intéressants ont néanmoins été proposés pour décrire des cas particuliers de la propagation cardio-électrique.

2.1. AUTOMATES FINIS

Peut-être le modèle le plus simple de la propagation électrique (simple au sens où il ne fait pas appel à des outils d'analyse) est celui des automates finis aussi appelés automates cellulaires. De façon générale, un automate fini est constitué d'un treillis, d'un voisinage, d'une liste finie d'états et d'un ensemble de règles de transition. Nous pouvons par exemple utiliser une grille de dimension 2 et identifier chaque point de cette grille à une région de la surface cardiaque. Les règles de transition déterminent le prochain état d'un point de la grille, aussi

appelé cellule d'où le nom parfois utilisé d'automate cellulaire, en fonction de l'état actuel de la cellule et de celui de ses voisins.

Dans le cas le plus simple, nous considérons que chaque région du treillis ne peut prendre que trois états : en activité, en période réfractaire et au repos. Nous représentons ces états respectivement par les nombres 0,1,2. Pour définir l'état initial, nous attribuons une et une seule de ces trois valeurs à chacun des points de la grille. Nous définissons les voisinages de la façon suivante :

x	x	x
x	o	x
x	x	x

Ici les cellules marquées d'un x sont les voisines de la case marquée d'un O .

Nos règles de transitions sont les suivantes :

$$0 \rightarrow 2$$

$$2 \rightarrow 1$$

$$1 \rightarrow 0 \text{ si la cellule possède au moins un voisin à l'état } 0,$$

$$1 \rightarrow 1 \text{ sinon.}$$

Un tel automate, quoi que très simple, permet de modéliser la propagation d'un front d'onde. Une façon de modéliser l'activité du noeud sinusal est d'ajouter 3 états supplémentaires : cellule du noeud sinusal en activité, cellule du noeud sinusal au repos, cellule du noeud sinusal en période réfractaire. Nous représentons respectivement ces états par les nombres 3,4,5. Les règles de transitions deviennent :

$$0 \rightarrow 2$$

$$2 \rightarrow 1$$

$$1 \rightarrow 0 \text{ si la cellule possède au moins un voisin à l'état } 0 \text{ ou à l'état } 5,$$

$$1 \rightarrow 1 \text{ sinon}$$

$$3 \rightarrow 5$$

$$5 \rightarrow 4$$

$$4 \rightarrow 3.$$

Il est possible de raffiner le modèle en augmentant le nombre d'états. Par exemple en différenciant l'état réfractaire absolu, dans lequel une cellule ne peut absolument pas être activée de l'état réfractaire relatif dans lequel une cellule peut être activée si elle compte suffisamment de voisins en état d'activité. Il est également possible d'agrandir le voisinage et de le pondérer en accordant plus d'importance aux voisins proches qu'aux voisins lointains. Avec des raffinements de ce type, il est possible de créer un modèle de type automate fini capable de simuler des phénomènes de vortex ou de réentrée autour d'une zone ischémique. ([2] chapitre 3)

2.2. MODÈLES ITÉRATIFS

Considérons maintenant le cas de la circulation électrique autour d'un anneau de tissu uniforme de dimension un. Fixons un point x sur l'anneau et définissons la période P_i comme la temps séparant la i^e activation du point x de la $i + 1^e$ activation du point x . En simplifiant, nous pouvons considérer que P_{i+1} ne dépend uniquement que de P_i . Notons θ la vitesse de conduction et supposons que θ est une fonction décroissante de P . Nous effectuons ici l'hypothèse que la vitesse est constante lors d'une même rotation. Dans ce cas, P_{i+1} est donné par :

$$P_{i+1} = \frac{2\pi R}{\theta(P_i)} = 2\pi Rf(P_i) \quad (2.1)$$

Où R est le rayon de l'anneau. Un tel modèle a été proposé par Zykov. ([2] chapitre 5)

Nous avons un point fixe lorsque $P = 2\pi Rf(P)$. Notons ce point fixe $P_s = P_s(R)$. Le point fixe P_s est stable lorsque :

$$\left| \frac{2\pi Rdf(P_s)}{dP} \right| < 1$$

De plus, comme $\frac{2\pi Rdf(P_s)}{dP} < 0$, le système convergera ou divergera en alternant autour de P_s .

Cependant, on voit qu'un tel modèle n'utilise que peu d'information. Comme il ne tient pas compte du profil de vitesse autour de l'anneau, il ne peut modéliser tous les phénomènes.

2.3. ÉQUATION DE BEELER-REUTER ET MODÈLE DE FITZHUGH-NAGUMO :

Les équations de Beeler-Reuter décrivent le comportement ionique des cellules. Chacun des ions emprunte un canal ionique qui lui est propre et les équations B.R. calculent ces courants ioniques. Chaque canal est contrôlé par un certain nombre de portes, et la densité des portes de chaque type qui sont dans l'état ouvert constituent les variables du système. Par exemple, dans le coeur du crapaud, l'équation suivante ([5] chapitre 7) a été établie :

$$\frac{dV}{dt} = - \frac{[I_{Ca} + I_K + I_{NaK} + I_{NaCa} + I_{CaP} + I_B]}{C_M}$$

où C_M représente la capacité de la membrane en nanofarads I_{Ca} est le courant intérieur de calcium, I_K le courant extérieur de potassium. Ces deux courants dépendent du temps et du voltage. Le courant de la pompe sodium-potassium est noté I_{NaK} et celui de la pompe sodium-calcium I_{NaCa} . Le courant de la pompe électrogénique de calcium est noté I_{CaP} et le courant de fond I_B . Afin de décrire les échanges ioniques de ces cellules il faut 11 équations différentielles non-linéaires du premier ordre.

Compte tenu du nombre élevé de variables apparaissant dans le modèle Beeler Reuter, une simplification de ce modèle est souhaitable. Les équations de FitzHugh-Nagumo constituent une simplification des équations de Hodgkin et Huxley et dans une certaine mesure de celles de Beeler et Reuter. Il s'agit d'un système d'équations aux dérivées partielles décrivant le parcours d'une onde électrique le long de l'axonne d'un neurone dans l'espace et le temps.

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial t} &= -v(v-a)(v-1) - w + D \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= \epsilon(v - \gamma w)\end{aligned}$$

Voir par exemple [2]. Dans ce modèle, D , a , ϵ et γ sont des paramètres. La variable $v(x, t)$ représente la différence potentiel membranaire au temps t et mesurée à une position x sur l'axonne. La variable w sert à modéliser divers courants ioniques (calcium, sodium, potassium) mais n'admet pas d'interprétation physique concrète. Bien que le modèle de FitzHugh-Nagumo ait été développé pour modéliser la propagation électrique dans les neurones, il peut être utilisé, en donnant d'autres valeurs aux paramètres, pour modéliser la propagation cardio-électrique.

Ces deux modèles ont été utilisés dans le développement des modèles de Vinet et de Courtemanche et al.. Courtemanche et al. montrent que leur modèle peut être déduit de celui de FitzHugh-Nagumo en effectuant certaines simplifications permises par la restriction à la propagation dans un anneau de tissu uniforme de dimension 1. Vinet utilise quant à lui les équations B.R. pour effectuer des simulations numériques qui valident son modèle.

2.4. MODÈLE DE COURTEMANCHE :

Dans le cas d'un flutter auriculaire classique, nous pouvons considérer que la propagation électrique a lieu dans un anneau de tissu uniforme de dimension un ce qui nous simplifie grandement la tâche. Courtemanche et al. ont modélisé cette propagation électrique à l'aide d'une équation différentielle à délai à une seule variable. La réduction de la dimension du problème facilite grandement la compréhension des phénomènes observés. Une première caractéristique du modèle de Courtemanche et al. est qu'il fonctionne en coordonnées mobiles. Courtemanche et al. définissent $x = x(t)$ comme l'emplacement du front d'onde sur l'anneau. Plus précisément, $x(t)$ est le lieu sur l'anneau où la quantité $|\frac{dV(x)}{dx}|$ est maximale.

Bien que x et $x + L$ (L : périmètre de l'anneau) correspondent au même lieu physique, il forment deux points distincts dans l'espace-temps car $x + L$ correspond au moment où le front d'onde a effectué un tour de plus autour de l'anneau.

Le modèle de Courtemanche n'étudie pas directement les concentrations ioniques mais plutôt les quantités suivantes :

$tr(x)$ (recovery time), le temps qui sépare la fin du front d'onde du début d'un nouveau pic d'activation.

$apd(tr)$ (activation peak duration), le temps qui sépare le début de la fin du front d'onde en fonction de tr .

$ct(tr)$ (conduction speed) la vitesse de propagation du front d'onde en fonction de tr .

Courtemanche et al. ont effectué les deux hypothèses supplémentaires suivantes : Pour $tr > tr_{min}$, la fonction $apd(tr(x))$ et la fonction $ct(tr(x))$ sont bien définies. Sous ces hypothèses, le temps séparant le début de deux pics d'activation consécutifs dans une cellule est donné par : $\int_{x-L}^x \frac{1}{ct(tr(s))} ds$ et nous pouvons en déduire l'équation suivante, valide pour $tr > tr_{min}$:

$$tr(x) = \int_{x-L}^x \frac{1}{ct(tr(s))} ds - apd(tr(x-L)) \quad (2.2)$$

Courtemanche et al. [4] ont étudié le comportement des solutions lorsque le périmètre de l'anneau, L , varie. Ils ont noté que pour toute valeur de L , l'équation (2.2) admet une et une seule solution constante. Remarquons ici qu'une solution constante correspond à une propagation à vitesse constante du front d'onde autour de l'anneau. Une analyse linéaire a ensuite montré qu'il existe une longueur critique L_0 telle que ce point fixe est stable pour tout $L > L_0$ et instable pour $L < L_0$ avec $L_0 \approx 14.3cm$. Cette prédiction du modèle de Courtemanche est en accord avec les comportements électriques observés numériquement. Les auteurs ont également comparé la prédiction de leur modèle aux simulations numériques effectuées à partir des équations B. R., cela a validé la valeur de la longueur critique L_0 calculée à partir de leur modèle.

Les choses se gâtent lorsqu'on étudie la propagation électrique pour L légèrement inférieur à L_0 . En effet, pour L légèrement inférieur à L_0 , les simulations faites à partir des équations B.R. montrent des oscillations quasi-périodiques dans le profil de vitesse du front d'onde. Ces oscillations ont une période légèrement inférieure à $2L$. Pour une même valeur de L , le modèle de Courtemanche et al. prédit lui aussi des oscillations quasi-périodiques dans le profil de vitesse. Le problème du modèle de Courtemanche et al. est qu'il prédit également l'existence d'une infinité de longueurs d'ondes. Selon le modèle de Courtemanche, $\forall k \in \mathbb{Z}^+$, pour L légèrement inférieur à L_0 , pour certaines conditions initiales, il existe des longueurs d'ondes légèrement inférieures à $\frac{2L}{2k+1}$ présentes dans le profil de propagation.

2.5. LE MODÈLE DE VINET :

Vinet a tenté d'observer les différentes longueurs d'ondes prédites par le modèle de Courtemanche et al. dans les simulations numériques faites à partir des équations B.R. mais sans succès. Il n'a pu observer que les longueurs d'onde légèrement inférieures à $2L$ et à $2L/3$. Vinet en a conclu que les autres longueurs d'onde ne sont que des artefacts du modèle de Courtemanche et al.. Il a corrigé ce problème en tenant compte du couplage résistif entre les cellules voisines [9]. Ce couplage élimine efficacement les hautes fréquences. Pour modéliser ce couplage, il remplace le terme $apd(x-L)$ par une moyenne pondérée des valeurs de apd prises sur un voisinage de $x-L$. La propagation électrique est donc décrite par l'équation suivante :

$$tr(x) = \int_{x-L}^x \frac{1}{ct(tr(s))} ds - K \int_{x-L-\delta}^{x-L+\delta} e^{-(s-(x-L))^2/2\sigma^2} apd(tr(s)) ds \quad (2.3)$$

où K est une constante de normalisation donnée par :

$$K := \left(\int_{-\delta}^{\delta} e^{-s^2/2\sigma^2} ds \right)^{-1}$$

Le voisinage sur lequel Monsieur Vinet considère que le couplage résistif existe est ici $[x - L - \delta, x - L + \delta]$. Il n'est pas cohérent avec le modèle physique de choisir $\delta > L$. Dans son article [9], il utilise un δ inférieur à un cm. Le choix d'une distribution gaussienne est justifiée comme étant le plus naturel mais nous verrons plus loin que le comportement du système est qualitativement peu sensible au choix de cette distribution. Le modèle de monsieur Vinet prédit avec exactitude le comportement des simulations effectuées à partir des équations B.R.

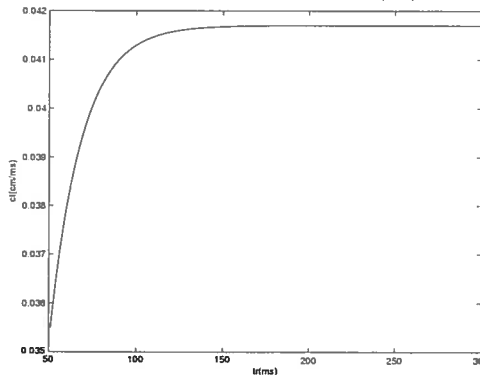
Dans ce travail, nous utilisons les fonctions $c(tr)$ et $apd(tr)$ proposées par Courtemanche et al. dans [4]

$$c(tr) = 0.0417 - 0.0135e^{-(tr-37)/18}$$

$$b(tr) = 250 - 90e^{-t/45}$$

$$apd(tr) = 20 + \frac{b(tr) * t^p}{72^p + t^p}$$

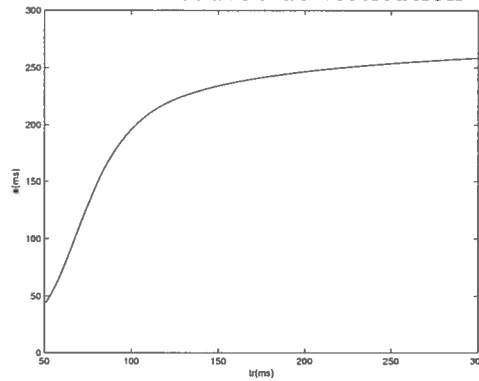
FIG. 2.1. Fonction $c(tr)$



Où la fonction b n'est introduite que pour simplifier l'écriture de la fonction apd .

Dans leur modèle, Courtemanche et al. effectuent deux hypothèses cruciales : La fonction $c(tr)$ est bien définie, la fonction $apd(tr)$ est bien définie. Les simulations numériques effectuées à partir des équations B.R. confirment que la

FIG. 2.2. courbe de restitution



fonction $c(tr)$ est bien définie. Toutefois, il n'en va pas de même pour la fonction $apd(tr)$. En effet, pour des valeurs de L pour lesquelles le système admet des solutions quasi-périodiques, la quantité $apd(tr)$ prend deux valeurs différentes selon que nous nous trouvons sur la branche ascendante ou descendante de la fonction $tr(x)$.

Afin d'effectuer l'analyse mathématique du modèle de Vinet, nous avons besoin de quelques outils mathématiques.

Chapitre 3

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES FONCTIONNELLES

Dans les modèles de Vinet et de Courtemanche et al., l'équation décrivant la propagation électrique peut être ramenée sous la forme suivante :

$$\dot{x}(t) = \int_{t-r}^t f(x(s))ds \quad (3.1)$$

Avec $r > 0$.

Dans son livre *Functional Differential Equations* [6] J.K Hale traite de façon plus générale des équations de la forme :

$$\dot{x}(t) = \int_{t-r_1}^{t+r_2} f(x(s), s)ds \quad (3.2)$$

Dans la classification développée par J.K. Hale dans son livre ([7] chapitre 2), une équation de la forme (3.1) est appelée équation retardée autonome. L'adjectif 'retardée' fait référence à l'intervalle d'intégration : $[t - r, t]$. De la même façon, si cet intervalle est donné par $[t, t + r]$, l'équation est appelée 'avancée' et si l'intervalle est donné par $[t - r_1, t + r_2]$, l'équation est appelée 'neutre'. L'adjectif 'autonome' fait référence au fait que la fonction f ne dépend que de x i.e. $f = f(x(s))$ par opposition à $f = f(x(s), s)$ dans le cas général.

Avant d'étudier le cas particulier de l'équation de Vinet, donnons quelques éléments généraux de théorie à propos des équations de la forme (3.1). Répondons aux questions suivantes : Qu'en est-il de l'existence et de l'unicité des solutions ?

Comment faire pour déterminer la stabilité d'un point fixe ou pour définir une trajectoire ?

Afin de répondre à ces questions, introduisons d'abord un peu de notation.

Posons $C([a, b], R^n)$ l'espace de Banach des fonctions continues de $[a, b]$ dans R^n avec la topologie de la convergence uniforme.

Posons $C = C([-r, 0], R^n)$.

Pour $\phi \in C$, $\|\phi\| := \max_{-r \leq \theta \leq 0} |\phi(\theta)|$.

Pour $\sigma \in R$, $A \geq 0$, $x \in C([\sigma - r, \sigma + A], R^n)$ et pour $t \in [\sigma, \sigma + A]$ nous définissons $x_t \in C$ par $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, $-r \leq \theta \leq 0$.

Avec ces notions, dans le cas général d'une équation de la forme (3.2), nous avons que $\dot{x}(t) = g(x_t, t)$ avec $g : C \times R \rightarrow R^n$ et dans le cas d'un système autonome nous avons $\dot{x}(t) = g(x_t)$ avec $g : C \rightarrow R^n$.

Une fonction x est dite solution de (3.1) sur l'intervalle $[\sigma - r, \sigma + A]$ s'il existe $\sigma \in R$, $A > 0$ tels que $x \in C([\sigma - r, \sigma + A], R^n)$ et $x(t)$ satisfait l'équation (3.1) pour $t \in (\sigma, \sigma + A)$.

Pour $\sigma \in R$ et $\phi \in C$ on dit que $x = x(\sigma, \phi)$ est une solution de (3.1) avec la valeur initiale (σ, ϕ) s'il existe un $A > 0$ tel que $x(\sigma, \phi)$ est une solution de (3.1) sur $[\sigma - r, \sigma + A)$ et que $x_\sigma(\sigma, \phi) = \phi$.

Afin de motiver ces définitions et de montrer la nécessité de redéfinir la notion de trajectoire, mentionnons un exemple tiré de Hale ([7], chapitre 4) où deux solutions distinctes d'une équation de la forme (3.1) se croisent une infinité de fois dans $R \times R^n$

Exemple 3.1 :

Considérons l'équation :

$$\dot{x}(t) = -x(t - \pi/2)$$

Cette équation a pour solution $x = \sin(t)$ et $x = \cos(t)$ et les ensembles $\{t, \sin(t), t \in R\}, \{t, \cos(t), t \in R\}$ se croisent une infinité de fois dans R^2 .

Il suit de l'exemple 3.1, que nous perdons l'unicité des solutions dans $R \times R^n$ à laquelle nous sommes habitués dans le cas des équations différentielles ordinaires. Heureusement, comme le montrent les théorèmes 3.1 et 3.2 ci-dessous, si nous considérons les solutions dans $R \times C$, nous retrouvons des résultats analogues à ceux qui nous sont familiers dans le cas des équations différentielles ordinaires.

Théorème 3.1. *Supposons que $D \in R \times C$ avec D ouvert et que $f : D \rightarrow R^n$ soit continue. Si $(\sigma, \phi) \in D$ alors il existe une solution de (3.2) passant par (σ, ϕ)*

Théorème 3.2. *Supposons que D soit un ouvert de $R \times C$, que $f : D \rightarrow R^n$ soit continu et que $f(t, \phi)$ soit Lipschitzien par rapport à ϕ dans chaque sous-ensemble compact de D . Si $(\sigma, \phi) \in D$ il existe une unique solution de (3.2) avec valeur initiale (σ, ϕ) .*

Pour une démonstration de ces théorèmes il est possible de consulter [7], chapitre 6.

Ajoutons quelques définitions dont nous aurons besoin pour parler de stabilité.

Dans le cas d'un système qui admet une solution unique avec condition initiale (σ, ϕ) , nous notons cette solution unique $x(\sigma, \phi)(t)$. Nous définissons l'état de ce système au temps t comme $x_t(\sigma, \phi)$. La trajectoire passant par (σ, ϕ) est alors définie par l'ensemble :

$$\bigcup_{t \geq \sigma} (t, x_t(\sigma, \phi)) \subset R \times C$$

Pour $t \geq \sigma$ nous définissons l'opérateur $T(t, \sigma) : C \rightarrow C$ par la relation :

$$T(t, \sigma)\phi = x_t(\sigma, \phi)$$

Un point fixe est une fonction constante c telle que $f(c) = 0$

Considérons d'abord le cas le plus simple, le cas d'un système linéaire qui admet l'origine comme point fixe de la forme :

$$\dot{x}(t) = L(x_t) \tag{3.3}$$

Pour $\phi \in C$ et $x(\phi)$ la solution unique de (3.3) ayant $(0, \phi)$ comme condition initiale, définissons $T(t) : C \rightarrow C$ par $x_t(\phi) = T(t)\phi$.

Définissons le spectre $\sigma(L)$ de (3.3) par l'ensemble des solutions λ de l'équation $\lambda e^{\lambda t} = L(e^{\lambda t})$. Nous avons le résultat suivant :

Théorème 3.3. *Si $\forall \lambda \in \sigma(L)$, $\Re(\lambda) < 0$ alors il existe des constantes positives K, γ telles que :*

$$\|T(t)\phi\| \leq Ke^{-\gamma t}\|\phi\|$$

Si $\exists \lambda \in \sigma(L)$, $\Re(\lambda) > 0$ alors il existe des constantes positives K, γ et une fonction ϕ telles que :

$$\|T(t)\phi\| \geq Ke^{\gamma t}\|\phi\|$$

Nous dirons donc que le point fixe 0 est une solution stable de (3.3) si $\forall \lambda \in \sigma(L)$, $\Re(\lambda) < 0$ et instable si $\exists \lambda \in \sigma(L)$ tel que $\Re(\lambda) > 0$.

Pour une démonstration du théorème 3.3 voir [7], chapitre 7. Nous n'étudions pas un système linéaire mais le théorème suivant nous permet d'utiliser le théorème 3.3 pour déterminer la stabilité d'un point fixe d'un système non-linéaire.

Théorème 3.4 (Hartman-Grobman). *Soit f tel que l'origine est un point fixe de $\dot{x}(t) = f(x_t)$ et que $\dot{x}(t) = L(x_t)$ est le linéarisé du système autour de l'origine. Alors :*

Si $\forall \lambda \in \sigma(L)$, $\Re(\lambda) < 0$ alors il existe des constantes positives K, γ et un voisinage de l'origine U tels que $\forall \phi \in U$:

$$\|T(t)\phi\| \leq Ke^{-\gamma t}\|\phi\|$$

Si $\exists \lambda \in \sigma(L)$, $\Re(\lambda) > 0$, alors $\forall \epsilon > 0$, il existe des constantes positives K, γ et une fonction ϕ telle que $\|\phi\| < \epsilon$ et :

$$\|T(t)\phi\| \geq Ke^{\gamma t}\|\phi\|$$

Il s'agit d'une version restreinte du théorème de Hartman-Grobman qui suffira aux besoins de ce travail. Pour une démonstration de ce théorème, voir [7], chapitre 9.

Remarquons que les théorèmes 3.3 et 3.4 ne nous apprennent rien quant à la stabilité d'un point fixe lorsqu'il existe des valeurs propres dont la partie réelle est égale à zéro et que les autres valeurs propres ont une partie réelle négative.

Dans le chapitre 7, nous développerons d'autres outils mathématiques afin de traiter ce cas.

Chapitre 4

ANALYSE LINÉAIRE DU MODÈLE DE VINET

Nous allons maintenant effectuer l'analyse linéaire d'une version un peu plus générale du modèle proposé par Vinet. En relâchant les conditions sur la fonction de distribution du couplage résistif, nous obtenons le modèle suivant :

$$tr(x) = \int_{x-L}^x d(tr(s))ds - K \int_{x-L-\delta}^{x-L+\delta} g(s - (x - L))a(tr(s))ds \quad (4.1)$$

Où $K = K_g = \left(\int_{-\delta}^{\delta} g(s)ds \right)^{-1}$

Et où $g(\theta)$ est une fonction réelle possédant les trois propriétés suivantes :

- 1 : $g(0) \leq 1$
- 2 : $g(\theta) = g(-\theta)$
- 3 : $g(\theta) > g(\xi) > 0$ si $|\theta| < |\xi|$

Ces trois conditions assurent que la fonction g est symétrique et décroissante. La suite de ce chapitre est consacrée à l'analyse linéaire de l'équation (4.1).

Nous allons procéder en deux étapes. Nous allons d'abord prouver que pour toute valeur de L il existe un et un seul point fixe non-trivial. Nous allons ensuite déterminer sa stabilité à l'aide de l'analyse linéaire.

4.1. SOLUTIONS CONSTANTES

Cherchons d'abord des solutions constantes à l'équation (4.1). Afin de simplifier la notation, écrivons $d(tr) := \frac{1}{ct(tr(x))}$ et $a(tr) := apd(tr(x))$. Pour les fonctions $d(tr)$ et $a(tr)$ nous employons les fonctions utilisées par Courtemanche et al. dans [4].

Afin de chercher des points fixes de l'équation (4.1), remplaçons $tr(x)$ par la valeur constante tr^* dans (4.1), nous obtenons alors :

$$tr^* = L \cdot d(tr^*) - a(tr^*) \quad (4.2)$$

Posons $h(tr^*) := L \cdot d(tr^*) - a(tr^*) - tr^*$. L'équation (4.2) est équivalente à $h(tr^*) = 0$. Étant donné que la fonction h est continue par rapport à tr , que $\frac{dh(tr^*)}{dtr^*} = \frac{-1}{c^2(tr^*)} \frac{dc(tr^*)}{tr^*} < 0$ et que $\frac{da(tr^*)}{dtr^*} > 0$, nous avons que $\frac{dh(tr^*)}{dtr^*} < 0$. Pour une valeur de L donnée, l'équation (4.2) admet donc au plus une solution.

Limitons-nous à étudier le comportement de l'équation (4.1) pour des valeurs de L comprises dans l'intervalle $[5cm, 20cm]$. Pour des valeurs L inférieures à $5cm$, il n'y a pas de propagation électrique soutenue à observer. Pour L plus grand que $20cm$ il n'y a que des propagations à vitesse constante à observer.

Nous pouvons vérifier que pour $L = 5cm$, l'équation (4.2) admet une solution. Pour $L \in [5cm, 20cm]$ nous pouvons écrire $tr^*(L)$ la fonction correspondant aux couples $(L, tr^*(L))$ solutions de (4.2). En dérivant chacun des membres de (4.2) par rapport à L nous obtenons :

$$\frac{dtr^*}{dL} = d(tr^*) + Ld'(tr^*)\frac{dtr^*}{dL} - a'(tr^*)\frac{dtr^*}{dL}$$

et en isolant $\frac{dtr^*}{dL}$ nous obtenons :

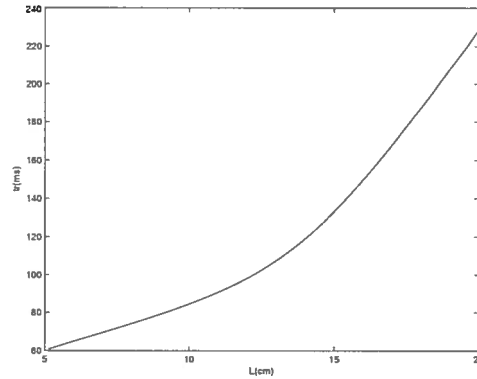
$$\frac{dtr^*(L)}{dL} = \frac{d(tr^*)}{1 + a'(tr^*) - Ld'(tr^*)}$$

Comme $a' > 0$ et $d' < 0$, il suit que $\frac{dtr^*(L)}{dL} > 0$

Cette équation différentielle nous permet donc de vérifier que $tr^*(L)$ est une fonction bien définie, continue et croissante. Le graphique suivant nous montre la valeur de tr^* en fonction de L .

Comme par hypothèse $L \in [5cm, 20cm]$ nous avons $tr^* \in [tr^*(5), tr^*(20)]$ ce qui implique $tr^* > 45$

FIG. 4.1. Point fixe en fonction de L



4.2. LINÉARISATION ET LE CAS DE LA VALEUR PROPRE NULLE

Linéarisons autour du point d'équilibre $tr^*(L)$. Afin de trouver les valeurs propres du système, cherchons des solutions de la forme $\tilde{tr}(x) = tr^*(x) + e^{\lambda x}$. En linéarisant l'équation (4.1) nous obtenons :

$$e^{\lambda x} = d' \int_{x-L}^x e^{\lambda s} ds - a' f(\lambda) e^{\lambda(x-L)} \quad (4.3)$$

Où $d' = d'(tr^*)$ et $a' = a'(tr^*)$

Et où, pour tout nombre complexe λ , $f(\lambda)$ est défini par :

$$f(\lambda) := f_g(\lambda) = K \int_{-\delta}^{\delta} g(u) e^{\lambda u} du$$

Étudions maintenant l'équation (4.3) afin de voir comment évoluent les parties réelles des solutions λ . Plus particulièrement, nous cherchons à savoir pour quelles valeurs de L l'équation (4.3) admet au moins une solution à partie réelle positive.

Afin d'effectuer l'intégrale $\int_{x-L}^x e^{\lambda s} ds$ nous devons traiter séparément le cas $\lambda = 0$ et le cas $\lambda \neq 0$. Montrons par contradiction que $\lambda \neq 0$. En supposant $\lambda = 0$ nous avons de (4.3) :

$$1 = Ld'(tr^*) - a'(tr^*) \quad (4.4)$$

Mais de l'égalité (4.2) nous avons aussi : $L = \frac{tr^* + a(tr^*)}{d(tr^*)}$. En substituant cette valeur dans l'égalité (4.4) nous obtenons :

$$0 = tr^* d'(tr^*) + a(tr^*) d'(tr^*) - a'(tr^*) d(tr^*) - d(tr^*) \quad (4.5)$$

Comme $d'(tr^*) < 0$, $a'(tr^*) > 0$, $d(tr^*) > 0$ et $a(tr^*) > 0$, le membre de droite de l'égalité (4.5) est inférieur à zéro et par conséquent l'équation (4.5) n'admet pas de solution. Il suit que $\lambda \neq 0$. Comme $\lambda \neq 0$ nous pouvons écrire :

$$\int_{x-L}^x e^{\lambda s} ds = e^{\lambda x} \frac{(1 - e^{-\lambda L})}{\lambda}$$

et par conséquent l'égalité (4.3) peut se réécrire :

$$d' - \lambda = e^{-\lambda L} (d' + \lambda a' f(\lambda)) \quad (4.6)$$

4.3. ÉNONCÉ DU THÉORÈME 4.1 ET PROPRIÉTÉS DE LA FONCTION F

À partir de maintenant, nous allons supposer $\delta \leq 1cm$.

Notre objectif est de démontrer le théorème suivant qui décrit l'évolution de la stabilité du point fixe en fonction du paramètre L

Théorème 4.1. *i : Il existe une longueur critique L_0 telle que pour tout $L > L_0$ et pour tout λ solution de (4.6), $\Re(\lambda) < 0$. Pour $L = L_0$, il existe un $\omega_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda = i\omega_0$ et $\lambda = -i\omega_0$ sont des solutions de (4.6). De plus, pour $L = L_0$, si λ est solution de (4.6) avec $\lambda \neq \pm i\omega$, alors $\Re(\lambda) < 0$. La longueur critique L_0 est la solution de $a'(tr^*(L)) = \frac{1}{f(i\omega_0)}$ où $\omega_0 = \omega_0(L)$ est la plus petite solution positive de $\tan(\frac{\omega L}{2}) = \frac{\omega}{d'(tr^*(L))}$.*

ii : Pour tout $L < L_0$, il existe un λ tel que λ est solution de (4.6) et $\Re(\lambda) > 0$

Le théorème 4.1 affirme qu'il peut y avoir propagation du front d'onde à vitesse constante lorsque le périmètre de l'anneau est plus grand qu'une certaine longueur critique mais que ce comportement n'est plus observable lorsque le périmètre de

l'anneau est réduit en deça de cette longueur critique. L'existence de deux et deux seules valeurs propres à partie réelle nulle au point de bifurcation nous apprend que le point fixe perd sa stabilité par une bifurcation de Hopf. Cela nous permettra plus loin de déterminer la stabilité du point fixe au point de bifurcation ainsi que le comportement des solutions périodiques qui apparaissent près du point de bifurcation.

Avant de démontrer le théorème 4.1, nous devons d'abord étudier quelques propriétés de la fonction f . Afin d'obtenir une expression simple pour la fonction f , Vinet et Comtois. ont posé dans [3] : $f = K \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2/2\sigma^2} e^{\lambda s} ds$ avec $\sigma^2 < 0.01$. Bien que de choisir l'intervalle d'intégration plus grand que L ne soit pas cohérent avec le modèle biologique, les auteurs ont justifié leur approximation en mentionnant que pour des raisons physiques, $\|\lambda\|$ ne peut être trop grand et que, pour $\|\lambda\|$ relativement petit, $f = K \int_{-\delta}^{\delta} e^{-s^2/2\sigma^2} e^{\lambda s} ds$ est bien approximé par $f = K \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2/2\sigma^2} e^{\lambda s} ds$. Remarquons cependant que cette approximation n'est pas valide pour des valeurs de $\|\lambda\|$ arbitrairement grandes. En effet si nous posons :

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= K \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda s} e^{-s^2/2\sigma^2} ds \\ &= K \int_{-\infty}^{\infty} e^{(-s^2 + \sigma^2 2\lambda s)/2\sigma^2} ds \end{aligned}$$

En complétant le carré nous obtenons :

$$(-s^2 + \sigma^2 2\lambda s) = -(s - \sigma^2 \lambda)^2 + \lambda^2 \sigma^4$$

Et par conséquent

$$f(\lambda) = e^{\frac{\lambda^2 \sigma^2}{2}} \quad (4.7)$$

En substituant la valeur obtenue dans (4.7) dans l'équation (4.6) nous avons :

$$d' - \lambda = e^{-\lambda L}(d' + \lambda a' e^{\lambda^2 \sigma^2 / 2})$$

En posant :

$$h(\lambda) := e^{-\lambda L}(d' + \lambda a' e^{\lambda^2 \sigma^2 / 2}) + \lambda - d'$$

l'égalité précédente est équivalente à :

$$h(\lambda) = 0 \tag{4.8}$$

Le problème est que pour λ tel que $|\Re(\lambda)|$ est très grand la fonction h peut être approximée par :

$$\tilde{h}(\lambda) := a' e^{-\lambda L} \lambda e^{\lambda^2 \sigma^2 / 2} + \lambda \tag{4.9}$$

Avec $\tilde{h}(\lambda) = h(\lambda) + O(d')$.

L'égalité $\tilde{h}(\lambda) = 0$ est équivalente à : $a' e^{-\lambda L + \lambda^2 \sigma^2 / 2} = -1$. Il existe donc un $\tilde{\lambda}$ avec $\Re(\tilde{\lambda}) > 0$ et $\Re(\tilde{\lambda})$ de l'ordre de $\frac{1}{\sigma}$ qui est solution de $\tilde{h}(\lambda) = 0$. Par la définition des fonctions h et \tilde{h} , il existe un $\lambda \approx \tilde{\lambda}$ qui est solution de $h(\lambda) = 0$.

Cela veut dire que si l'on utilise la valeur donnée par Vinet et al. dans [8] pour la fonction f sans restreindre les valeurs possibles de $\|\lambda\|$, nous obtenons que pour toute valeur de L , le point fixe, c'est-à-dire la propagation à vitesse constante serait instable.

Au lieu d'utiliser cette approximation et de restreindre les valeurs de $\|\lambda\|$, nous restreindrons plutôt l'intervalle d'intégration à $[x - L - \delta, x - L + \delta] \subset [x - L - 1, x - L + 1]$. Il faut alors démontrer les propriétés suivantes de la fonction f avant de procéder à la démonstration du théorème 4.1 proprement dit.

Propriétés de la fonction f :

Propriété 1 : $f(0) = 1$

Propriété 2 : $\forall \omega \in R, f(i\omega) \in R$.

Propriété 3 : $\forall \lambda \in C, \|f(\lambda)\| \leq f(\Re(\lambda))$ et $\|f(\lambda)\| = f(\Re(\lambda)) \Leftrightarrow \lambda \in R$

Propriété 4 : $\forall \omega \in R, f(i\omega) \leq \frac{K\pi}{|\omega|}$

Propriété 5 : $\forall \lambda \in C, f(\lambda) = f(\bar{\lambda})$

Propriété 6 : $\forall \omega_0 \in R$ tel que $|\omega_0| < \frac{\pi}{2\delta}, \forall \omega_1 \in R$ tel que $\omega_1 > \omega_0 > 0, f(i\omega_0) > 0$ et $f(i\omega_0) > f(i\omega_1)$.

Propriété 7 : $\forall \omega \in R, f(i\omega) > \frac{-1}{3}$

Propriété 8 : Si $\Im(\lambda) < \frac{\pi}{2\delta}$, alors $\|f(\lambda)\| > \frac{\sin(\Im(\lambda))}{|\Im(\lambda)|} e^{-\delta|\Re(\lambda)|}$

Propriété 9 : $\|f(\lambda)\| < e^{\delta\Re(\lambda)}$ et $\|f'(\lambda)\| < \frac{e^{\|\lambda\|}}{\|\lambda\|} + \frac{1}{\|\lambda\|^2} - \frac{e^{\|\lambda\|}}{\|\lambda\|^2} - \frac{1}{2}$

Démonstration des propriétés de la fonction f :

Démonstration de la propriété 1 :

La propriété 1 découle directement de la définition de f .

Démonstration de la propriété 2 :

La propriété 2 se démontre directement par symétrie.

Il découle de la propriété 2 que

$$f(i\omega) = K \int_{-\delta}^{\delta} \Re(e^{i\omega u})g(u)du = K \int_{-\delta}^{\delta} \cos(\omega u)g(u)du$$

Nous utiliserons fréquemment cette identité dans la démonstration des autres propriétés de la fonction f .

Démonstration de la propriété 3 :

Il suffit de remarquer que :

$$\|f(\lambda)\| \leq K \int_{-\delta}^{\delta} g(u)\|e^{\lambda u}\|du = K \int_{-\delta}^{\delta} g(u)e^{\Re(\lambda)u}du = f(\Re(\lambda))$$

Ce qui démontre la propriété 3

Démonstration de la propriété 4 :

En supposant $\omega > \frac{\pi}{2\delta}$, nous pouvons écrire :

$$f(i\omega) = K \int_{-\frac{\pi}{2\omega}}^{\frac{\pi}{2\omega}} g(u)e^{i\omega u}du + K \int_{-\delta}^{-\frac{\pi}{2\omega}} g(u)e^{i\omega u}du + K \int_{\frac{\pi}{2\omega}}^{\delta} g(u)e^{i\omega u}du \quad (4.10)$$

Par symétrie on observe que :

$$K \int_{-\delta}^{-\frac{\pi}{2\omega}} g(u) e^{i\omega u} du + K \int_{\frac{\pi}{2\omega}}^{\delta} g(u) e^{i\omega u} du \in \mathbb{R}$$

En effectuant le changement de variable $v := u\omega$ nous avons :

$$K \int_{\frac{\pi}{2\omega}}^{\delta} g(u) e^{i\omega u} du = \frac{K}{\omega} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\delta\omega} g(v/\omega) e^{iv} dv$$

Comme g est une fonction décroissante nous avons

$$\Re \left(K \int_{\frac{\pi}{2\omega}}^{\delta} g(u) e^{i\omega u} du \right) = \Re \left(\frac{K}{\omega} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\delta\omega} g(v/\omega) e^{iv} dv \right) < 0$$

De la même façon nous pouvons montrer :

$$\Re \left(K \int_{-\delta}^{-\frac{\pi}{2\omega}} g(u) e^{i\omega u} du \right) < 0$$

et par conséquent :

$$K \int_{-\delta}^{-\frac{\pi}{2\omega}} g(u) e^{i\omega u} du + K \int_{\frac{\pi}{2\omega}}^{\delta} g(u) e^{i\omega u} du < 0 \quad (4.11)$$

Des équations (4.10) et (4.11), nous avons donc :

$$f(i\omega) \leq K \int_{-\frac{\pi}{2\omega}}^{\frac{\pi}{2\omega}} g(u) e^{i\omega u} du < K \int_{-\frac{\pi}{2\omega}}^{\frac{\pi}{2\omega}} du = \frac{K\pi}{|\omega|}$$

D'autre part si $\omega \leq \frac{\pi}{2\delta}$ nous avons :

$$f(i\omega) \leq K \int_{-\frac{\pi}{2\omega}}^{\frac{\pi}{2\omega}} g(u) e^{i\omega u} < \frac{K\pi}{|\omega|}$$

Ce qui démontre la propriété 4.

Démonstration de la propriété 5 :

La propriété 5 se démontre directement par symétrie.

Démonstration de la propriété 6 :

Observons d'abord que si $0 < \omega_0 < \frac{\pi}{2\delta}$, $\Re(e^{i\omega_0 u}) \geq 0 \forall u \in [-\delta, \delta]$. Cela démontre la première partie de la propriété 6, i.e., $f(i\omega_0) > 0$. Par la propriété 2, nous avons aussi :

$$f(i\omega_0) - f(i\omega_1) = K \int_{-\delta}^{\delta} g(u) \left(\Re(e^{i\omega_0 u}) - \Re(e^{i\omega_1 u}) \right) du$$

D'une part, si $\omega_1 \leq \frac{\pi}{2\delta}$, alors $\Re(e^{i\omega_0 u}) - \Re(e^{i\omega_1 u}) \geq 0 \forall u \in [-\delta, \delta]$, par conséquent $f(i\omega_0) - f(i\omega_1) > 0$.

D'autre part, si $\omega_1 > \frac{\pi}{2\delta}$, nous avons :

$$\begin{aligned} f(i\omega_0) - f(i\omega_1) &= K \int_{-\frac{\pi}{2\omega_1}}^{\frac{\pi}{2\omega_1}} g(u) \left(\Re(e^{i\omega_0 u}) - \Re(e^{i\omega_1 u}) \right) du + \\ &2K \int_{\frac{\pi}{2\omega_1}}^{\delta} g(u) \Re(e^{i\omega_0 u}) du - 2K \int_{\frac{\pi}{2\omega_1}}^{\delta} g(u) \Re(e^{i\omega_1 u}) du \end{aligned}$$

Comme vu dans le cas $\omega_1 \leq \frac{\pi}{2\delta}$ nous avons :

$$\int_{-\frac{\pi}{2\omega_1}}^{\frac{\pi}{2\omega_1}} g(u) \left(\Re(e^{i\omega_0 u}) - \Re(e^{i\omega_1 u}) \right) du > 0 \quad (4.12)$$

Comme par hypothèse $\omega_0 < \frac{\pi}{2\delta}$ nous avons aussi :

$$\int_{\frac{\pi}{2\omega_1}}^{\delta} g(u) \Re(e^{i\omega_0 u}) du > 0 \quad (4.13)$$

Finalement, par la décroissance de la fonction g nous avons :

$$\int_{\frac{\pi}{2\omega_1}}^{\delta} g(u) \Re(e^{i\omega_1 u}) du < 0 \quad (4.14)$$

En combinant les inégalités (4.12), (4.13) et (4.14) nous obtenons bien $f(i\omega_0) - f(i\omega_1) > 0$ et la propriété 6 est ainsi démontrée.

Démonstration de la propriété 7 :

Par la propriété 5, nous pouvons supposer sans perte de généralité que $\omega > 0$.

Supposons d'abord $\delta > \frac{3\pi}{2\omega}$, par la décroissance de la fonction g nous avons :

$$f(i\omega) = K \int_{-\delta}^{\delta} e^{i\omega u} g(u) du > K \int_{-\frac{3\pi}{2\omega}}^{\frac{3\pi}{2\omega}} e^{i\omega u} g(u) du \quad (4.15)$$

Par la décroissance de la fonction g nous avons également :

$$\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} e^{i\omega u} g(u) du > 0$$

Il suit que :

$$K \int_{-\frac{3\pi}{2\omega}}^{\frac{3\pi}{2\omega}} e^{i\omega u} g(u) du > -2K \int_{\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{3\pi}{2\omega}} g(u) du \quad (4.16)$$

Nous avons aussi :

$$K^{-1} = 2 \int_0^{\delta} g(u) du > 2 \int_0^{\frac{2\pi}{3\omega}} g(u) du \quad (4.17)$$

Par la décroissance de la fonction g :

$$2 \int_0^{\frac{3\pi}{2\omega}} g(u) du > 6 \int_{\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{3\pi}{2\omega}} g(u) du \quad (4.18)$$

De (4.15), (4.16), (4.17) et (4.18) il suit que $f(i\omega) > -\frac{1}{3}$, ce qui démontre la propriété 7 dans le cas $\delta > \frac{3\pi}{2\omega}$.

Supposons maintenant $\delta < \frac{\pi}{\omega}$. Par la décroissance de la fonction g nous avons alors :

$$f(i\omega) = K \int_{-\delta}^{\delta} e^{i\omega u} g(u) du > 0 > -\frac{1}{3}$$

La propriété 7 tient donc aussi lorsque $\delta < \frac{\pi}{\omega}$.

Supposons finalement $\frac{\pi}{\omega} \leq \delta \leq \frac{3\pi}{2\omega}$. Nous avons dans ce cas :

$$f(i\omega) > -2K \int_{\frac{\pi}{\omega}}^{\delta} g(u) du$$

avec :

$$K^{-1} = 2 \int_0^{\delta} g(u) du > 6 \int_{\frac{\pi}{\omega}}^{\delta} g(u) du$$

Et par conséquent $f(i\omega) > -\frac{1}{3}$. Ce qui termine la démonstration de la propriété 7.

Démonstration de la propriété 8 :

Nous avons :

$$\|f(\lambda)\| \geq \Re(f(\lambda)) = K \int_{-\delta}^{\delta} \Re(e^{\lambda u})g(u)du = K \int_{-\delta}^{\delta} e^{\Re(\lambda)u} \cos(\Im(\lambda)u)g(u)du$$

Si $\Im(\lambda) < \frac{\pi}{2\delta}$, alors $\forall u \in [-\delta, \delta]$, $\cos(u\Im(\lambda)) > 0$. Il suit que :

$$K \int_{-\delta}^{\delta} e^{\Re(\lambda)u} \cos(\Im(\lambda)u)g(u)du > e^{-|\Re(\lambda)|\delta} K \int_{-\delta}^{\delta} \cos(\Im(\lambda)u)g(u)du$$

Comme g est une fonction décroissante et que \cos est une fonction décroissante sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$, nous avons :

$$K \int_{-\delta}^{\delta} \cos(\Im(\lambda)u)g(u)du > \int_0^1 \cos(\Im(\lambda)u)du = \frac{\sin(\Im(\lambda))}{\Im(\lambda)}$$

Il suit que : $\|f(\lambda)\| > \frac{\sin(\Im(\lambda))}{\Im(\lambda)} e^{-\delta|\Re(\lambda)|}$ et la propriété 8 est ainsi démontrée.

Démonstration de la propriété 9 :

Par la propriété 2 nous avons :

$$\begin{aligned} \|f(\lambda)\| &\leq f(\Re(\lambda)) = K \int_{-\delta}^{\delta} e^{\Re(\lambda)u} g(u)du \\ &< e^{\delta\Re(\lambda)} K \int_{-\delta}^{\delta} g(u)du = e^{\delta\Re(\lambda)} \end{aligned}$$

Ce qui démontre la première partie de la propriété 9.

De plus,

$$\begin{aligned} \|f'(\lambda)\| &= \|K \int_{-\delta}^{\delta} g(u)ue^{\lambda u} du\| \\ &= K \int_{-\delta}^{\delta} ug(u)du + K \int_{-\delta}^{\delta} ug(u)(e^{\lambda u} - 1)du \end{aligned}$$

Comme $K \int_{-\delta}^{\delta} ug(u)du = 0$, nous avons :

$$\|f'(\lambda)\| = K \int_{-\delta}^{\delta} ug(u)(e^{\lambda u} - 1)du < K \int_{-\delta}^{\delta} |u|g(u)(e^{\|\lambda u\|} - 1)du$$

Par la décroissance de la fonction g et la croissance de la fonction $|u|(e^{\|\lambda\|u} - 1)$ nous pouvons déduire :

$$\|f'(\lambda)\| < \int_0^1 u(e^{\|\lambda\|u} - 1)du = \frac{e^{\|\lambda\|}}{\|\lambda\|} + \frac{1}{\|\lambda\|^2} - \frac{e^{\|\lambda\|}}{\|\lambda\|^2} - \frac{1}{2}$$

Ce qui achève la démonstration de la propriété 9.

4.4. DÉMONSTRATION DE LA PARTIE I DU THÉORÈME 4.1

Nous sommes maintenant prêts à démontrer le théorème 4.1 proprement dit. Cette démonstration s'effectue à l'aide d'une série de lemmes. Le plan de la démonstration de la partie i du théorème 4.1 va comme suit :

Avec le lemme 4.1 nous déterminons les conditions nécessaires pour que l'équation (4.6) admette une solution λ avec $\Re(\lambda) = 0$.

Avec le lemme 4.2, nous déterminons L_0 , la plus grande valeur de L pour laquelle l'équation (4.6) admet une solution λ avec $\Re(\lambda) = 0$.

Avec le lemme 4.3, nous prouvons l'existence d'une longueur L^* telle que pour tout $L > L^*$, pour tout λ solution de (4.6), $\Re(\lambda) < 0$.

Finalement avec le lemme 4.4, nous prouvons que sur l'intervalle $L \in [L_0, L^*]$, pour tout λ solution de (4.6), $\Re(\lambda)$ est une fonction continue par rapport à L .

Notons qu'au lieu de montrer les lemmes 4.3 et 4.4 il serait plus rapide de montrer directement que pour tout $L > L_0$, pour tout λ solution de (4.6), $\Re(\lambda) < 0$. Je ne suis toutefois pas arrivé à effectuer cette démonstration directement.

Lemme 4.1. *Supposons que l'équation (4.6) admette une solution purement imaginaire $\lambda = i\omega$, alors $a' = \left| \frac{1}{f(i\omega)} \right|$. Supposons de plus que $a' < 3$ alors $a' = \frac{1}{f(i\omega)}$ et ω satisfait l'équation : $\tan\left(\frac{\omega L}{2}\right) = \frac{\omega}{d'}$.*

Démonstration du lemme 4.1 :

Supposons que l'équation (4.6) admette une solution purement imaginaire $\lambda = i\omega$, en prenant les normes de chaque membre de l'égalité, nous obtenons :

$$\|d' - i\omega\| = \|d' + a' f(i\omega) i\omega\| \quad (4.19)$$

Par conséquent, $\|i\omega\| = \|a'f(i\omega)i\omega\|$ et $a' = \frac{1}{|f(i\omega)|}$. Par la propriété 7 de la fonction f , si $a' < 3$, la dernière égalité implique $a' = \frac{1}{f(i\omega)}$. En posant $a' = \frac{1}{f(i\omega)}$, l'équation (4.6) devient :

$$d' - i\omega = e^{-i\omega L}(d' + i\omega) \quad (4.20)$$

En prenant les arguments de chacun des membre de l'équation (4.20), nous obtenons :

$$\arg(d' - i\omega) = -\omega L + \arg(d' + i\omega)$$

Comme $\arg(d' - i\omega) = -\arg(d' + i\omega)$ et que $\arg(d' + i\omega) = \arctan(\frac{\omega}{d'})$ nous avons :

$$2 \arctan\left(\frac{\omega}{d'}\right) = \omega L$$

Ou de façon équivalente, $\tan(\frac{\omega L}{2}) = \frac{\omega}{d'}$ ce qui démontre le lemme 4.1.

Comme d' est très petit, les valeurs de ω satisfaisant cette égalité seront de la forme : $\omega = \frac{(1+2j)\pi}{L} + O(d')$. Plus précisément, en posant $\omega = \frac{(1+2j)\pi}{L} + \xi$ et en effectuant l'approximation linéaire $\tan(\frac{\omega L}{2}) = \frac{-2}{\xi L}$, nous obtenons : $\xi = \frac{-2d'}{(1+2j)\pi} + O(d'^2)$. Par conséquent, nous obtenons :

$$\omega = \frac{(1+2j)\pi}{L} - \frac{2d'}{(1+2j)\pi} + O(d'^2)$$

Lemme 4.2. Soit ω_j la plus petite solution de $\tan(\frac{\omega L}{2}) = \frac{\omega}{d'}$ telle que $\omega_j > \frac{(1+2j)\pi}{L}$. Alors $\forall L, L > 5cm$, pour tout $j > 0$, $f(i\omega_j) < f(i\omega_0)$.

Démonstration du lemme 4.2 :

Nous avons $0 < \omega_0 < \frac{\pi}{2}$ et $\omega_j > \omega_0$, nous pouvons donc utiliser la propriété 6 de la fonction f pour montrer directement le lemme 4.2.

Du lemme 4.2 et du fait que la fonction $a'(tr^*(L))$ est une fonction croissante sur l'intervalle $L \in [L_0, 20cm]$ il suit que si nous notons L_j la plus grande solution

de $a'(tr^*(L)) = \frac{1}{f(i\omega_j)}$ (rien n'exclut a priori l'existence de plusieurs solutions à cette égalité) alors pour tout $j > 0$, $L_j < L_0$.

Lemme 4.3. *Il existe une longueur L^* , $L^* > L_0$ telle que pour toute longueur L , $L \geq L^*$ et pour tout λ solution de (4.6), $\Re(\lambda) < 0$.*

Démonstration du lemme 4.3 :

Supposons que λ soit solution de (4.6) et que $\Re(\lambda) \geq 0$. Choisissons de plus L^* tel que $a'(tr^*(L^*)) = 0.9$ et tel que $\forall L > L^*$, $a'(tr^*(L)) < 0.9$.

Étant donné que par hypothèse $\Re(\lambda) > 0$ et que, par définition de la fonction d , $d' < 0$, nous avons d'une part :

$$\|d' - \lambda\| \geq \|\lambda\| \quad (4.21)$$

Par l'inégalité triangulaire, nous avons aussi :

$$\|e^{-\lambda L}(d' + a'f(\lambda)\lambda)\| \leq \|e^{-\lambda L}\| \|d'\| + \|e^{-\lambda L}f(\lambda)\| \|\lambda\| a'$$

Comme $\Re(\lambda) > 0$, $\|e^{-\lambda L}\| < 1$ et par la propriété 9 de la fonction f nous avons $\|e^{-\lambda L}f(\lambda)\| < 1$. Nous obtenons donc :

$$\|e^{\lambda L}(d' + a'f(\lambda)\lambda)\| < |d'| + \|\lambda\| a' \quad (4.22)$$

En prenant les normes de l'égalité (4.6) et en utilisant les inégalités (4.21) et (4.22) nous obtenons :

$$\|\lambda\| < |d'| + \|\lambda\| a' \quad (4.23)$$

De (4.23) il suit que, $\|\lambda\| < \frac{|d'|}{1-a'}$. Comme par hypothèse $a' < 0.9$ et que $a' < 0.9 \Rightarrow |d'| < 0.005$, il suit que $\frac{|d'|}{1-a'} < 0.05$ et par conséquent $\|\lambda\| < 0.05$. Par la propriété 5 de la fonction f , nous pouvons supposer sans perte de généralité que $\Im(\lambda) > 0$.

Comme $\|\lambda\| < 0.05$, $\Im(\lambda) < 0.05$ donc $|\Im(\lambda)u| < \frac{\pi}{2} \forall u \in [-\delta, \delta]$ et par conséquent $\Re(f(\lambda)) > 0$. Nous avons aussi $\sin(\Im(\lambda)u)e^{\Re(\lambda)u} > \sin(\Im(\lambda)u)e^{-\Re(\lambda)u} \forall u \in [0, \delta]$. Il suit que $\Im(f(\lambda)) > 0$ et que $0 < \arg(f(\lambda)) < \frac{\pi}{2}$. Par conséquent :

$$\arg(\lambda) < \arg(d' + \lambda a' f(\lambda)) < \pi \quad (4.24)$$

En comparant les arguments des membres de l'équation (4.6) nous devons également avoir :

$$\arg(d' - \lambda) = \arg(e^{-\lambda L}) + \arg((d' + \lambda a' f(\lambda))) \quad (4.25)$$

En remarquant que $\pi < \arg(d' - \lambda) < \arg(\lambda) + \pi$ nous voyons que les équations (4.24) et (4.25) impliquent : $|\arg(e^{-\lambda L})| > \pi$ donc $\Im(\lambda)L > \pi$ et par conséquent $\|\lambda\| > \frac{\pi}{L}$. En combinant cette inégalité avec l'inégalité (4.23) nous obtenons :

$$\frac{\pi}{L} < \frac{|d'(tr^*(L))|}{1 - a'(tr^*(L))} \quad (4.26)$$

Comme l'inégalité (4.26) ne dépend que d'une seule variable (L) il est possible de vérifier numériquement, avec Maple par exemple, qu'elle n'est jamais satisfaite pour $L > L^*$ et cela parce que la valeur $|d'|$ est très petite

Ce qui achève la démonstration du lemme 4.3.

Lemme 4.4. *Posons $F(\lambda, L) = d' - \lambda - e^{-\lambda L}(d' + a'\lambda f(\lambda))$. En supposant $\Re(\lambda) > 0$ et $L > L_0$, le système d'équations $F(\lambda, L) = 0$, $\frac{\partial F(\lambda, L)}{\partial \lambda} = 0$ n'admet pas de couple solution (L, λ) .*

Démonstration du lemme 4.4 :

En supposant $F(\lambda, L) = 0$, nous pouvons simplifier pour obtenir :

$$\frac{\partial F(\lambda, L)}{\partial \lambda} = -1 + L(d' - \lambda) - e^{\lambda L}(a'f(\lambda) + a'\lambda f'(\lambda)) \quad (4.27)$$

Comme par hypothèse $\Re(\lambda) > 0$ et par définition $d' < 0$, nous avons d'une part :

$$\| -1 + L(d' - \lambda) \| > \|L\lambda\| \quad (4.28)$$

D'autre part, par l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} \|e^{-\lambda L}(a'f(\lambda) + a'\lambda f'(\lambda))\| &< a'(\|e^{-\lambda L}f(\lambda)\| + \|e^{-\lambda L}f'(\lambda)\lambda\|) \\ &< a'(1 + \|\lambda\|) \end{aligned} \quad (4.29)$$

Par la propriété (9) de la fonction f , nous avons en effet que $\Re(\lambda) > 0$ implique $\|e^{-\lambda L}f(\lambda)\| < 1$ et $\|e^{-\lambda L}f'(\lambda)\| < 1$.

En supposant $\frac{\partial F(\lambda, L)}{\partial \lambda} = 0$, de l'égalité (4.27) nous avons :

$$1 - L(d' - \lambda) = -e^{-\lambda L}(a'f(\lambda) + a'\lambda f'(\lambda))$$

En utilisant les inégalités (4.28) et (4.29), nous obtenons alors $\|L\lambda\| < a' + a'\|\lambda\|$ et par conséquent :

$$\|\lambda\| < \frac{a'(tr^*(L))}{L - a'(tr^*(L))} \quad (4.30)$$

Comme $a'(tr^*(L))$ est une fonction continue ne dépendant que de L et que par hypothèse $L > L_0$, nous pouvons vérifier numériquement que l'inégalité (4.30) implique $\|\lambda\| < \frac{\pi}{2}$. Par la propriété 5 de la fonction f , nous pouvons supposer sans perte de généralité que $\Im(\lambda) > 0$. Nous avons donc $0 < \Im(\lambda) < \frac{\pi}{2}$ et par conséquent $\Re(e^{\lambda u}) > 0, \forall u, u \in [-\delta, \delta]$ ce qui implique $\Re(f(\lambda)) > 0$. Comme nous l'avons vu dans la démonstration du lemme 4.3, pour que l'équation (4.6) soit satisfaite ($\Leftrightarrow F(\lambda, L) = 0$) nous devons avoir :

$$L|\Im(\lambda)| > \pi \quad (4.31)$$

En combinant les inégalités (4.30) et (4.31) et comme $\Im(\lambda) < \|\lambda\|$, nous obtenons la contrainte suivante sur L :

$$\frac{\pi}{L} < \frac{a'(tr^*(L))}{L - a'(tr^*(L))} \quad (4.32)$$

Il est encore une fois possible de vérifier numériquement que l'inégalité (4.32) n'est jamais satisfaite et cette contradiction démontre le lemme 4.4.

Il découle du lemme 4 que pour tout $\tilde{L}, \tilde{L} \in [L_0, L^*]$, pour tout $\tilde{\lambda}_j$ solution de (4.6) en $L = \tilde{L}$, $\lambda_j(L)$ est une fonction continue sur l'intervalle $[L_0, L^*]$ et que la fonction $\lambda_j(L)$ est définie par l'équation différentielle

$$\frac{d\lambda}{dL} = -\frac{\partial F}{\partial L} / \frac{\partial F}{\partial \lambda}$$

Avec pour condition initiale, $\tilde{\lambda}_j$ en $L = \tilde{L}$.

Avec les lemmes 4.1, 4.2, 4.3 et 4.4, nous pouvons achever la démonstration de la partie i du théorème 4.1.

Démonstration de la partie i du théorème 4.1

Supposons qu'il existe une longueur $\tilde{L}, \tilde{L} > L_0$ et un nombre complexe $\tilde{\lambda}$ tel que $\Re(\tilde{\lambda}) > 0$ et que $\tilde{\lambda}$ est solution de (4.6) lorsque $L = \tilde{L}$. Par le lemme 4.3, $\tilde{L} < L^*$. Par le lemme 4.4 nous savons que $\Re(\tilde{\lambda}(L))$ est une fonction continue. Comme $\Re(\tilde{\lambda}(\tilde{L})) > 0$ et que $\Re(\tilde{\lambda}(L^*)) < 0$, cette fonction s'annule pour un certain L , $L_0 < \tilde{L} < L < L^*$, mais cela contredit le lemme 4.2.

4.5. DÉMONSTRATION DE LA PARTIE II DU THÉORÈME 4.1

Pour achever la démonstration du théorème 4.1, il nous reste à montrer que pour tout $L < L_0$ il existe un λ tel que λ est solution de (4.6) avec $\Re(\lambda) > 0$. Nous allons en fait montrer que pour tout $L < L_0$, $\Re(\lambda_0(L)) > 0$. Où λ_0 est la fonction continue telle que $(\lambda_0(L_0), L_0)$ est solution de (4.6) avec $\lambda_0(L_0) = i\omega_0$.

Lemme 4.5.

$$-\Re(\lambda'(L_0)) = \Re\left(\frac{\partial F(\lambda, L)}{\partial L} / \frac{\partial F(\lambda, L)}{\partial \lambda}\right)(i\omega_0, L_0) < 0$$

Le lemme 4.5 affirme que la fonction $\lambda_0(L)$ traverse bien l'axe imaginaire de gauche à droite lorsque L devient inférieur à L_0 .

Démonstration du lemme 4.5 :

En dérivant la fonction $F(\lambda, L)$ par rapport à L et en utilisant le fait que l'égalité (4.6) est satisfaite pour simplifier, nous obtenons :

$$\frac{\partial F(\lambda, L)}{\partial L} = \frac{dd'}{dL} + \lambda(d' - \lambda) - e^{-\lambda L} \left(\frac{dd'}{dL} + f(\lambda)\lambda \frac{da'}{dL} \right) \quad (4.33)$$

Et en particulier :

$$\frac{\partial F(i\omega_0, L_0)}{\partial L} = \frac{dd'}{dL} + i\omega_0(d' - i\omega_0) - e^{-i\omega_0 L_0} \left(\frac{dd'}{dL} + i\omega_0 f(i\omega_0) \frac{da'}{dL} \right)$$

D'autre part, en dérivant la fonction F par rapport à λ et en utilisant l'égalité (4.6) pour simplifier nous obtenons :

$$\frac{\partial F(\lambda, L)}{\partial \lambda} = -1 + L(d' - \lambda) - e^{-\lambda L} (a' f(\lambda) + a' \lambda f'(\lambda)) \quad (4.34)$$

Et en particulier :

$$\frac{\partial F(i\omega_0, L_0)}{\partial \lambda} = -1 + L_0(d' - i\omega_0) - e^{-i\omega_0 L_0} (1 + a' i\omega_0 f'(i\omega_0))$$

Nous avons l'équivalence suivante :

$$\begin{aligned} \Re \left(\frac{\partial F(\lambda, L)}{\partial L} / \frac{\partial F(\lambda, L)}{\partial \lambda} \right) (i\omega_0, L_0) &< 0 \\ \Leftrightarrow \left| \arg \left(\frac{\partial F}{\partial L} (i\omega_0, L_0) \right) - \arg \left(\frac{\partial F}{\partial \lambda} (i\omega_0, L_0) \right) \right| &> \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (4.35)$$

C'est l'inégalité (4.35) que nous allons démontrer afin de prouver le lemme 4.5.

Pour démontrer l'inégalité (4.35), nous utiliserons les quatre identités suivantes ((4.36),(4.37),(4.38),(4.39)).

$$\arg(L(d' - i\omega_0) - 1 - e^{-i\omega_0 L_0}) = \frac{-\omega_0 L_0}{2} \quad (4.36)$$

En utilisant le fait que par le lemme 4.1, $\tan(\frac{\omega_0 L}{2}) = \frac{\omega_0}{d}$, nous avons : $\arg(d' - i\omega_0) = \frac{-\omega_0 L_0}{2}$. En considérant le triangle isocèle ayant pour sommets $(0, -1, -1 - e^{-i\omega_0 L_0})$ on constate aussi que $\arg(-1 - e^{-i\omega_0 L_0}) = \frac{-\omega_0 L_0}{2}$. Ce qui démontre l'égalité (4.36).

Nous avons également :

$$\arg\left(\frac{dd'}{dL} + i\omega(d' - i\omega) - e^{-i\omega L_0} \frac{dd'}{dL}\right) = \frac{\pi - \omega_0 L_0}{2} \quad (4.37)$$

En effet, toujours à cause de l'égalité $\tan(\frac{\omega_0 L}{2}) = \frac{\omega_0}{d}$, nous avons $\arg(i\omega_0(d' - i\omega_0)) = \frac{\pi - \omega_0 L_0}{2}$. Comme $\frac{dd'}{dL} > 0$, nous avons aussi : $\arg(\frac{dd'}{dL}(1 - e^{-i\omega_0 L_0})) = \arg(1 - e^{-i\omega_0 L_0})$. Et en considérant le triangle isocèle formé des sommets $(0, 1, 1 - e^{-i\omega_0 L_0})$ on constate que $\arg(1 - e^{-i\omega_0 L_0}) = -(\frac{\omega_0 L_0 - \pi}{2}) = \frac{\pi - \omega_0 L_0}{2}$. Ce qui démontre l'égalité (4.37).

La troisième identité dont nous aurons besoin est :

$$\arg(-e^{-i\omega_0 L_0} \frac{da'}{dL} i\omega_0 f(i\omega_0)) = \frac{\pi}{2} - \omega_0 L_0 \quad (4.38)$$

En effet, comme $\frac{da'}{dL}(L_0) < 0$, nous avons :

$$\arg(-e^{-i\omega_0 L_0} \frac{da'}{dL} i\omega_0 f(i\omega_0)) = \pi - \omega_0 L_0 + \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \omega_0 L_0$$

et l'égalité (4.38) est ainsi justifiée.

Nous utiliserons finalement l'identité :

$$\arg(-e^{-i\omega_0 L_0} a' i\omega_0 f'(i\omega_0)) = -\omega_0 L_0 \quad (4.39)$$

En effet, comme $\arg(f'(i\omega_0)) = \frac{\pi}{2}$, nous avons : $\arg(-e^{-i\omega_0 L_0} a' i\omega_0 f'(i\omega_0)) = \pi - \omega_0 L_0 + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = -\omega_0 L_0$ ce qui justifie l'égalité (4.39).

En comparant les triangles $\left(0, L(d' - i\omega) - 1 - e^{-i\omega L}, -1 + L(d' - i\omega) - e^{-i\omega L}(1 + a' i\omega f'(i\omega))\right)$ et $\left(0, \frac{dd'}{dL} + i\omega(d' - i\omega) - e^{-i\omega L} \frac{dd'}{dL}, \frac{dd'}{dL} + i\omega_0(d' - i\omega_0) - e^{i\omega L} \left(\frac{dd'}{dL} + i\omega f(i\omega) \frac{da'}{dL}\right)\right)$ et en utilisant les identités (4.36), (4.37), (4.38) et (4.39)

nous déduisons que pour démontrer l'inégalité (4.35) et par le fait même le lemme 4.5, il suffit de montrer l'inégalité suivante :

$$\frac{\|f'(i\omega_0)a'\|}{\|-1 + L(d' - i\omega_0) - e^{-i\omega_0 L_0}\|} < \frac{\|f(i\omega_0)\frac{da'}{dL}\|}{\|\frac{dd'}{dL}(1 - e^{-i\omega_0 L}) + i\omega_0(d' - i\omega_0)\|} \quad (4.40)$$

Par la propriété 8 de la fonction f et le lemme 4.1 nous pouvons montrer : $L_0 > 8cm$, $\omega_0 > \frac{\pi}{7}$ et $1 < a' < 1.5$.

Comme $\omega_0 < \frac{\pi}{7}$, par la propriété 9 de la fonction f nous avons :

$$\|f'(i\omega_0)\| < \frac{7e^{\pi/7}}{\pi} - \frac{7^2 e^{\pi/7}}{\pi^2} + \frac{7^2}{\pi^2} < \frac{1}{6} \quad (4.41)$$

Toujours comme $\omega_0 < \frac{\pi}{4}$, par la propriété 8 de la fonction f nous avons :

$$|f(i\omega_0)| > \frac{7 \sin(\pi/7)}{\pi} > \frac{5}{6} \quad (4.42)$$

Des inégalités (4.41) et (4.42) il suit que : $\|\frac{f(i\omega_0)}{f'(i\omega_0)}\| > 5$. Donc pour prouver l'inégalité (4.40) et par le fait même le lemme 4.5, il suffit de montrer l'inégalité suivante :

$$5 \left| \frac{(\frac{da'}{dL})}{a'} \right| > \frac{\|\frac{dd'}{dL} + i\omega_0(d' - i\omega_0) - e^{-i\omega_0 L_0} \frac{dd'}{dL}\|}{\|-1 - L_0(d' - i\omega_0) - e^{-i\omega_0 L_0}\|} \quad (4.43)$$

Numériquement, on obtient que pour L tel que $1 < a'(tr^*(L)) < 1.5$, $5 \left| \frac{(\frac{da'}{dL})}{a'} \right| > 1$. Nous avons aussi :

$$\begin{aligned} \frac{\|\frac{dd'}{dL}(1 - e^{-i\omega_0 L_0}) + i\omega_0(d' - i\omega_0)\|}{\|-1 - L_0(d' - i\omega_0) - e^{-i\omega_0 L_0}\|} &< \frac{\|\frac{dd'}{dL}(1 - e^{-i\omega_0 L_0})\| + \|i\omega_0(d' - i\omega_0)\|}{\|L_0(d' - i\omega_0)\| - \|-1 - e^{-i\omega_0 L_0}\|} \\ &< \frac{\|2\frac{dd'}{dL}\| + \|i\omega_0(d' - i\omega_0)\|}{\|L_0(d' - i\omega_0)\| - |2d'|} < 1 \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité se vérifiant numériquement avec le lemme 4.1 et la définition de la fonction d .

Cela démontre l'inégalité (4.43) et par le fait même l'inégalité (4.35). La démonstration du lemme 5 est ainsi terminée.

Nous venons de montrer que $\lambda_0(L)$ traverse l'axe imaginaire de gauche à droite lorsque L diminue pour devenir inférieur à L_0 . Avec les lemmes 4.6 et 4.7 nous allons montrer que $\lambda_0(L)$ est une fonction continue pour $L < L_0$ et qu'elle ne croise pas l'axe imaginaire sur l'intervalle $L \in [4cm, L_0]$.

Lemme 4.6. *L'équation 4.6 n'admet pas de solution λ avec $\Re(\lambda) \geq 0$ telle que $\Im(\lambda) = \frac{2\pi}{L}$ ou $\Im(\lambda) = 0$.*

Démonstration du lemme 4.6 :

Supposons que λ soit une solution de (4.6) avec $\Im(\lambda) = 0$ ou $\Im(\lambda) = \frac{2\pi}{L}$. L'équation (4.6) peut alors s'écrire comme :

$$d' - \lambda = e^{-\Re(\lambda)L}(d' + \lambda a' f(\lambda)) \quad (4.44)$$

Supposons d'abord $\Im(\lambda) = 0$. Nous avons dans ce cas $d' - \lambda < 0$. Comme $e^{-\lambda L}(d' + \lambda a' f(\lambda)) = d' - \lambda$, nous avons aussi $e^{-\lambda L}(d' + \lambda a' f(\lambda)) < 0$.

Comme $\lambda a' f(\lambda) > 0$ et $d' < 0$ nous avons :

$$|e^{-\lambda L}(d' + \lambda a' f(\lambda))| < |e^{-\lambda L}d'| < |d'| < |d' - \lambda|$$

Par conséquent, il est impossible que l'équation (4.44) soit satisfaite. Ce qui démontre le lemme 4.6 dans le cas $\Im(\lambda) = 0$.

Supposons maintenant que $\Im(\lambda) = \frac{2\pi}{L}$. Nous avons alors :

$$\Re(f(\lambda)) = \int_{-\delta}^{\delta} \cos\left(\frac{2\pi u}{L}\right) e^{\Re(\lambda)u} g(u) du$$

Pour $L > 4$ et $u \in [-\delta, \delta] \subset [-1, 1]$ nous avons $\cos\left(\frac{2\pi u}{L}\right) > 0$ et donc $\Re(f(\lambda)) > 0$.

D'autre part, l'égalité (4.6) implique aussi :

$$\arg(d' - \lambda) = \arg(d' + \lambda a' f(\lambda))$$

Comme $\pi < \arg(d' - \lambda) < \frac{3\pi}{2}$, l'égalité n'est possible que si $|\arg(f(\lambda))| > \frac{\pi}{2}$. Mais cela contredit $\Re(f(\lambda)) > 0$ et cette contradiction démontre le lemme 4.6.

Lemme 4.7. *Pour tout L , $4cm < L < L_0$, si λ est une solution de (4.6) telle que $\Re(\lambda) \geq 0$ et $0 \leq \Im(\lambda) < \frac{2\pi}{L}$, alors $F(\lambda, L) \neq 0$ ou $\frac{\partial F(\lambda, L)}{\partial \lambda} \neq 0$.*

Démonstration du lemme 4.7

En comparant les normes de l'égalité (4.6), nous avons :

$$\|d' - \lambda\| = \|e^{-\lambda L}(d' + \lambda a' f(\lambda))\|$$

D'une part, comme $d' < 0$ et par hypothèse $\Re(\lambda) > 0$, nous avons :

$$\|d' - \lambda\| \geq \max(\|\lambda\|, |d'|)$$

D'autre part, comme $\Re(\lambda) > 0$, en utilisant la propriété 9 de la fonction f nous avons :

$$\|e^{-\lambda L}(d' + \lambda a' f(\lambda))\| \leq e^{-\Re(\lambda)(L-\delta)}(|d'| + \|\lambda a'\|) \leq e^{-\Re(\lambda)(L-\delta)}(2 \max(|d'|, \|\lambda a'\|))$$

Il suit que :

$$e^{-\Re(\lambda)(L-\delta)} > \frac{\max(|d'|, \|\lambda\|)}{2 \max(|d'|, \|\lambda a'\|)} \geq \frac{1}{2a'}$$

Nous pouvons en déduire :

$$\Re(\lambda) < \frac{\log(2a')}{L-1} \tag{4.45}$$

Comme par hypothèse $|\Im(\lambda)| < \frac{2\pi}{L}$ et que $L \geq 4$, $|\Im(\lambda)| < \frac{\pi}{2}$.

Par la propriété 8 de la fonction f nous avons donc :

$$\|f(\lambda)\| \geq \frac{2}{\pi} e^{-\log(2a')/(L-1)}$$

Comme $|\Im(\lambda)| < \frac{\pi}{2}$ et $|\Re(\lambda)| < \log(2a')/(L-1)$ nous avons : $\|\lambda\| < 1.8$

Par la propriété 9 de la fonction f , nous avons donc :

$$\|f'(\lambda)\| < 1$$

D'autre part, l'égalité $F(\lambda, L) = 0$ implique :

$$e^{-\lambda L} = \frac{d' + a'\lambda f(\lambda)}{d' - \lambda} \quad (4.46)$$

En isoiant $e^{-\lambda L}$ dans l'égalité $\frac{\partial F(\lambda, L)}{\partial \lambda} = 0$ et en substituant la valeur ainsi obtenue dans (4.46), nous obtenons

$$(d' + a'\lambda f(\lambda))(-1 + L(d' - \lambda)) = (d' - \lambda)(a'\lambda f'(\lambda) + a'f(\lambda)) \quad (4.47)$$

Nous allons maintenant obtenir une contradiction en comparant les normes des deux membres de l'équation (4.47). Comme $d' < 0$ et $\Re(\lambda) > 0$, nous avons $\|(-1 + L(d' - \lambda))\| > \|L(d' - \lambda)\|$. De plus :

$$\frac{\|d' + a'\lambda f(\lambda)\|}{\|a'\lambda f(\lambda)\|} > \frac{\|a'\lambda f(\lambda)\| - |d'|}{\|a'\lambda f(\lambda)\|} > \frac{a'(\pi/L)(2/\pi) - |d'|}{a'(\pi/L)(2/\pi)} > 0.9$$

Nous avons donc :

$$\|(d' + a'\lambda f(\lambda))(-1 + L(d' - \lambda))\| > 0.9a'\|(d' - \lambda)\lambda Lf(\lambda)\| \quad (4.48)$$

En utilisant l'inégalité (4.48) dans l'équation (4.47), nous pouvons déduire :

$$0.9a'\|(d' - \lambda)\lambda Lf(\lambda)\| < \|(d' - \lambda)(a'\lambda f'(\lambda) + a'f(\lambda))\|$$

En utilisant le fait que $\|a'\lambda f'(\lambda) + a'f(\lambda)\| \leq \|a'\lambda f'(\lambda)\| + \|a'f(\lambda)\|$ et en simplifiant, nous obtenons :

$$0.9\|\lambda f(\lambda)L\| < \|\lambda f'(\lambda)\| + \|f(\lambda)\|$$

Ou encore :

$$\|(0.9\|\lambda L\| - 1)f(\lambda)\| < \|\lambda f'(\lambda)\| < \|\lambda\| \quad (4.49)$$

Il suit que λ et L doivent satisfaire l'inégalité $\frac{\|(0.9\|\lambda L\| - 1)f(\lambda)\|}{\|\lambda\|} < 1$.

En utilisant les bornes obtenues précédemment nous avons :

$$\frac{\|(0.9\|\lambda L\| - 1)f(\lambda)\|}{\|\lambda\|} = 0.9L\|f(\lambda)\| - \frac{\|f(\lambda)\|}{\|\lambda\|} > \frac{7.2}{\pi} - \frac{8}{\pi^2} > 1$$

Et cette contradiction termine la démonstration du lemme 7.

Démonstration de la partie ii du théorème 4.1

Nous sommes maintenant prêts à terminer la démonstration du théorème 1.

Il nous reste à prouver que pour tout $L < L_0$, il existe un λ tel que $\Re(\lambda) > 0$ et $F(\lambda, L) = 0$. Par le lemme 4.5, il existe un $\eta > 0$ tel que pour tout ϵ , $0 < \epsilon < \eta$, $\Re(\lambda_0(L_0 - \epsilon)) > 0$. Par le lemme 4.7, lorsque $0 < \Re(\lambda_0)$ et $0 < \Im(\lambda_0) < \frac{2\pi}{L}$, la fonction $\lambda_0(L)$ est continue. Par les lemmes 4.1 et 4.6, $\Re(\lambda_0(L)) > 0$ et $0 < \Im(\lambda_0(L)) < \frac{2\pi}{L}$ pour tout $L < L_0$ et le théorème 4.1 est ainsi démontré.

Chapitre 5

ÉTUDE NUMÉRIQUE DE L'ÉQUATION CARACTÉRISTIQUE

Comme nous l'avons montré dans le chapitre 4, la solution de l'équation caractéristique (4.6) passant par $(L_0, i\omega_0)$ peut s'écrire comme une fonction continue $\lambda_0(L)$. Bien que nous l'ayons pas démontré, il semble que les autres valeurs propres peuvent également s'écrire comme des fonctions continues $\lambda_j(L)$.

Dans ce chapitre, nous utilisons la distribution normale de la force de couplage donnée par Alain Vinet dans [9]. Nous étudions le comportement des fonctions $\lambda_j(L)$ et plus particulièrement la façon dont le paramètre σ^2 , correspondant à la variance de la distribution du couplage résistif, influence ces fonctions.

À l'aide de Matlab, nous avons calculé numériquement la valeur de la fonction $\lambda_0(L)$. Pour ce faire nous utilisons la fonction *fzero* de Matlab et le programme placé à l'annexe B.

Le graphique suivant illustre comme la partie réelle de la valeur propre de λ_0 varie en fonction de L pour $\sigma^2 = 0.01$.

Nous voyons que $\Re(\lambda_0(L))$ est une fonction décroissante. Nous pouvons également illustrer comment varie la partie imaginaire de λ_0 en fonction de sa partie réelle toujours pour $\sigma^2 = 0.01$. Ce qui nous donne :

5.1. SÉPARATION ENTRE LES POINTS CRITIQUES

Nous allons estimer la distance entre les points critiques, soient les points où les valeurs propres solutions de (4.6) ont une partie réelle nulle.

FIG. 5.1. Partie réelle en fonction de L

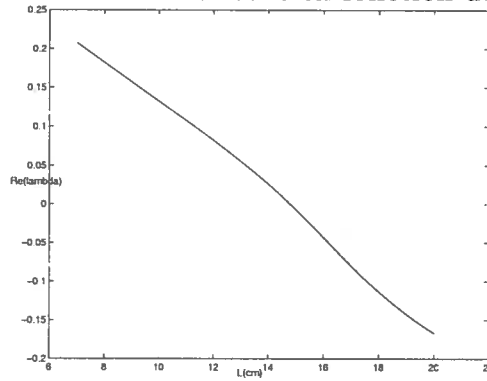
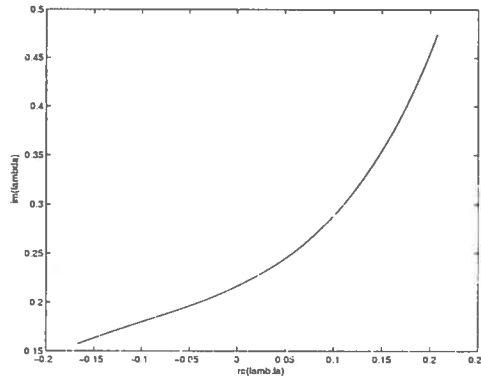


FIG. 5.2. Partie réelle en fct de la partie imaginaire



Nous utilisons l'identité :

$$f(i\omega_j) = e^{-\omega_j^2 \sigma^2 / 2} - \int_{-\infty}^{-\delta} e^{i\omega_j s} e^{-s^2 / 2\sigma^2} ds - \int_{\delta}^{\infty} e^{i\omega_j s} e^{-s^2 / 2\sigma^2} ds = e^{-\omega_j^2 \sigma^2 / 2} + O(e^{-\delta^2 / \sigma^2})$$

Compte tenu du fait que $\omega_j = \frac{(2j+1)\pi}{L} + O(\frac{d'}{j})$ nous avons aussi :

$$e^{-\omega_j^2 \sigma^2 / 2} = e^{((-\pi^2(2j+1)^2 \sigma^2 / 2L^2) + O(d' \sigma^2))} = 1 - \frac{\pi^2(2j+1)^2 \sigma^2}{2L^2} + O(d' \sigma^2, \sigma^4) \quad (5.1)$$

En utilisant le lemme 4.1 nous avons :

$$a'(tr^*(L_i)) - a'(tr^*(L_j)) = \frac{1}{f(i\omega_i)} - \frac{1}{f(i\omega_j)} \quad (5.2)$$

Des équations (5.1) et (5.2) il suit que :

$$a'(tr^*(L_i)) - a'(tr^*(L_j)) = \frac{\pi^2 \sigma^2}{2L^2} ((2i+1)^2 - (2j+1)^2) + O(\sigma^4, d'\sigma^2, e^{-\delta^2/\sigma^2}) \quad (5.3)$$

Posons maintenant $\frac{da'}{dL}$ comme la dérivée de la fonction $a'(tr^*(L))$ par rapport à L en $L = L_0$. Par le développement de Taylor d'ordre 1 nous avons :

$$a'(tr^*(L_i)) - a'(tr^*(L_j)) = (L_i - L_j) \frac{da'}{dL} + O((L_i - L_j)^2) \quad (5.4)$$

Nous avons donc en utilisant (5.3) et (5.4) :

$$L_i - L_j = \frac{\pi^2 \sigma^2}{2L^2} ((2i+1)^2 - (2j+1)^2) \left(\frac{da'}{dL}\right)^{-1} + O(\sigma^4, \sigma^2 d', e^{-\delta^2/\sigma^2}) \quad (5.5)$$

Ce résultat peut être formulé de la façon suivante :

Proposition 5.1.

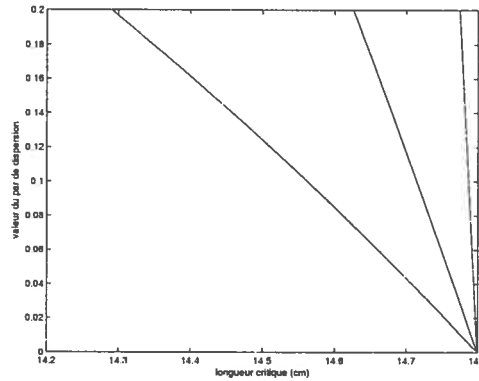
$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{L_i - L_j}{\sigma^2} = ((2i+1)^2 - (2j+1)^2) \frac{\pi^2}{2L^2} \left(\frac{da'}{dL}\right)^{-1} + O(d'\sigma^2, \sigma^4, e^{-\delta^2/\sigma^2})$$

La séparation entre les points critiques est donc proportionnelle à la variance de la distribution de la force de couplage. Cette séparation devient nulle et le point de bifurcation dégénère lorsque $\sigma = 0$, c'est-à-dire lorsqu'on ne tient pas compte du couplage comme dans le modèle de Courtemanche et al..

Remarque 5.1. *Le point critique L_j n'est pas défini pour toute valeur de σ^2 . En fait L_j existe si et seulement il existe un L tel que $a'(tr^*(L)) = \frac{1}{f(i\omega_j)}$. Comme le maximum de la fonction a' est environ 3.1, Le point critique L_j n'est pas défini pour σ tel que $\frac{1}{f(i\omega_j)} > 3.1$*

Le graphique suivant illustre la séparation des points critiques L_0 , L_1 et L_2 en fonction du paramètre de dispersion σ^2 :

FIG. 5.3. dispersion des points critiques



5.2. CROISEMENT DES PARTIES RÉELLES DES VALEURS PROPRES

Il est également intéressant d'étudier les points de croisement des fonctions $\Re(\lambda_i(L))$ et $\Re(\lambda_j(L))$. La valeur $\max_i \Re(\lambda_i)$ détermine la valeur propre dominante. C'est-à-dire la valeur propre correspondant aux oscillations dont l'amplitude augmente le plus rapidement près du point de bifurcation. Notamment, pour une condition initiale aléatoire de type bruit autour du point d'équilibre, lorsque $\Re(\lambda_1) > \Re(\lambda_0)$ la solution numérique se comporte asymptotiquement comme la solution analytique correspondant à la valeur propre λ_1

Remarque 5.2. Lorsque $\sigma \neq 0$, il existe un $\epsilon > 0$ tel que sur l'intervalle $[L_0 - \epsilon, L_0]$, $\max_i \Re(\lambda_i(L)) = \Re(\lambda_0(L))$. Si $\sigma = 0$, alors pour tout L , $L < L_0$ pour $j > i$, $\Re(\lambda_j(L)) > \Re(\lambda_i(L))$.

Donnons deux exemples qui illustrent comment se croisent les parties réelles des différentes valeurs propres. Le graphique suivant illustre la façon dont les fonctions $\Re(\lambda_1)$, $\Re(\lambda_2)$ et $\Re(\lambda_3)$ croisent la fonction $\Re(\lambda_0)$ lorsque $\sigma^2 = 0.01$. Sur le graphique le point L_0 indique la valeur de L pour laquelle $a' = 1$

Le graphique suivant montre comment les fonctions $\Re(\lambda_2)$ et $\Re(\lambda_3)$ croisent $\Re(\lambda_1)$ toujours pour $\sigma^2 = 0.01$ ce graphique montre également que pour cette valeur de σ^2 $\Re(\lambda_4)$, ne croise pas $\Re(\lambda_1)$:

FIG. 5.4. Croisement de la valeur propre 0

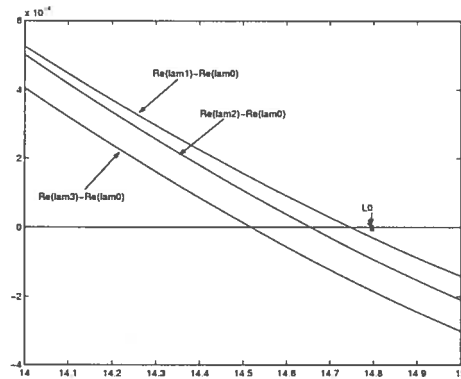
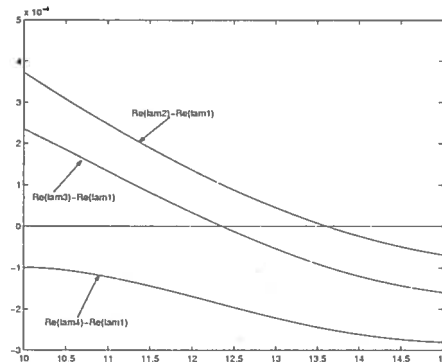


FIG. 5.5. Croisement de la valeur propre 1



Notons $crois_{j,i}(\sigma)$ la plus grande valeur de L pour laquelle $\Re(\lambda_i) = \Re(\lambda_j) > 0$. Nous allons démontrer la proposition suivante qui nous donne un peu d'information sur la façon dont se comportent les fonctions *crois*

Proposition 5.2. i : Pour tout couple (i, j) il existe une valeur $\sigma_{i,j}$ telle que $\forall \sigma > \sigma_{i,j}$, $crois_{i,j}(\sigma)$ n'est pas défini. C'est-à-dire que si $i > j$, pour tout $\sigma > \sigma_{i,j}$, pour tout $L < L_i$, $\Re(\lambda_j) > \Re(\lambda_i)$.

ii : Pour tout couple d'entiers (i, j) nous avons :

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{crois_{i,j}(\sigma)}{\sigma^2} = \frac{\pi^4}{2L_0^2 d'} (2j+1)^2 (2i+1)^2$$

Démonstration de la partie i de la proposition 5.2 :

En supposant $\Re(\lambda_i) = \Re(\lambda_j)$, de l'égalité (4.6) nous avons :

$$\frac{\|d' - \lambda_j\|}{\|d' + a' f(\lambda_j)\lambda_j\|} = \frac{\|d' - \lambda_i\|}{\|d' + a' f(\lambda_i)\lambda_i\|} \quad (5.6)$$

En supposant $\Re(\lambda_j) > 0$ nous avons :

$$\frac{\|d' + a' f(\lambda_j)\lambda_j\|}{\|d' - \lambda_j\|} < \|a' f(\lambda_j)\| \quad (5.7)$$

Nous avons également :

$$\frac{\|d' + a' f(\lambda_j)\lambda_j\|}{\|d' - \lambda_j\|} > \frac{\|a' f(\lambda_j)\lambda_j\| - |d'|}{\|\lambda_j\| + |d'|} > \|a' f(\lambda_j)\| \frac{\|\lambda_j\| - |d'|}{\|\lambda_j\| + |d'|} \quad (5.8)$$

En utilisant les inégalités (5.7) et (5.8) nous obtenons que l'égalité (5.6) implique :

$$\frac{f(\lambda_i)}{f(\lambda_j)} < \frac{\|\lambda_j\| + |d'|}{\|\lambda_j\| - |d'|} \quad (5.9)$$

En supposant $i > j$ on a que l'inégalité (5.9) est contredite pour σ suffisamment grand ce qui termine la démonstration de la partie i de la proposition 5.2.

Notons que comme la situation est symétrique par rapport à i et j nous pouvons en fait remplacer l'inégalité (5.9) par :

$$\frac{f(\lambda_i)}{f(\lambda_j)} < \min_{i,j} \left(\frac{\|\lambda_j\| + |d'|}{\|\lambda_j\| - |d'|}, \frac{\|\lambda_i\| + |d'|}{\|\lambda_i\| - |d'|} \right) \quad (5.10)$$

Nous pouvons en tirer trois corollaires immédiats :

- 1) pour tout $\sigma > 0$, il existe un nombre fini de croisements positifs.
- 2) pour tout (i, j) , il existe une valeur de σ_0 telle que $crois_{i,j}$ n'est pas défini pour tout $\sigma > \sigma_0$.

3) Pour toute valeur de σ , le nombre de croisement positif est beaucoup plus faible que le nombre de fonctions $\Re(\lambda_j(L))$ qui sont positives pour un certain L .

Démonstration de la partie ii de la proposition 5.2

Au point L tel que $a' = 1 + \epsilon$, dans le modèle de Courtemanche et al., nous avons :

$$\Re(\lambda_j) = \frac{\epsilon}{L_0} \left(1 + \frac{2d'}{(2j+1)^2\pi^2}\right) + O(d'^2, \epsilon^2)$$

Cette approximation est donné par Courtemanche dans [4]. Dans le modèle de Vinet, cette approximation linéaire devient :

$$\Re(\lambda_j) = \frac{(1+\epsilon)f(i\omega_j) - 1}{L_0} \left(1 + \frac{2d'}{(2j+1)^2\pi^2}\right) + O(d'^2, \epsilon^2)$$

En utilisant la même approximation que dans la démonstration de la partie *i* de la proposition 5.1 i.e. :

$$f(i\omega_j) = 1 - \frac{(2j+1)^2\pi^2\sigma^2}{2L_0^2} + O(\sigma^4, \sigma^2d', e^{-\delta^2/\sigma^2})$$

Nous obtenons :

$$\Re(\lambda_j) = \left(\epsilon - \frac{(2j+1)^2\pi^2\sigma^2}{2L_0^2}\right) \frac{1}{L_0} \left(1 + \frac{2d'}{(2j+1)^2\pi^2}\right) + O(\sigma^4, d'^2, \epsilon^2, e^{-\delta^2/\sigma^2}) \quad (5.11)$$

En utilisant l'approximation (5.11) et en supposant $\Re(\lambda_j) = \Re(\lambda_i)$, nous avons :

$$\left(\epsilon - \frac{(2j+1)^2\pi^2\sigma^2}{2L_0^2}\right) \frac{1}{L_0} \left(1 + \frac{2d'}{(2j+1)^2\pi^2}\right) = \left(\epsilon - \frac{(2i+1)^2\pi^2\sigma^2}{L^2}\right) \frac{1}{L_0} \left(1 + \frac{2d'}{(2i+1)^2\pi^2}\right) + O(\epsilon^2) \quad (5.12)$$

Ce qui nous donne :

$$\frac{2d'\epsilon}{L_0\pi^2} \left(\frac{1}{(2j+1)^2} - \frac{1}{(2i+1)^2} \right) = \frac{\sigma^2\pi^2}{L_0^3} ((2j+1)^2 - (2i+1)^2) \quad (5.13)$$

Et finalement :

$$\epsilon = -\frac{\sigma^2\pi^4}{2L_0^2d'} (2j+1)^2(2i+1)^2 + O(\sigma^4) \quad (5.14)$$

Ce qui achève la démonstration de la partie **ii** de la proposition 5.2.

La partie **ii** de la proposition 5.2 nous donne le taux linéaire de croissance de $crois_{i,j}(\sigma)$. Mais comme le montre la partie *i* de la proposition 5.2 le taux linéaire de croissance n'est valide que pour de petites valeurs de σ .

La partie **ii** de la proposition 5.2 nous donne également de l'information quant à l'ordre dans lequel surviennent les croisements. Nous avons en effet le corollaire suivant :

Corollaire 5.1. *Pour tout quadruple d'entiers positifs (i, j, k, l) , $\exists \sigma_0 = \sigma_0(i, j, k, l)$ tel que $\forall \sigma \in [0, \sigma_0]$, $(2i + 1)(2j + 1) < (2k + 1)(2l + 1) \Rightarrow crois_{i,j}(\sigma) < crois_{k,l}(\sigma)$.*

Le graphique suivant illustre quelques unes des fonctions $crois_{i,j}(\sigma)$

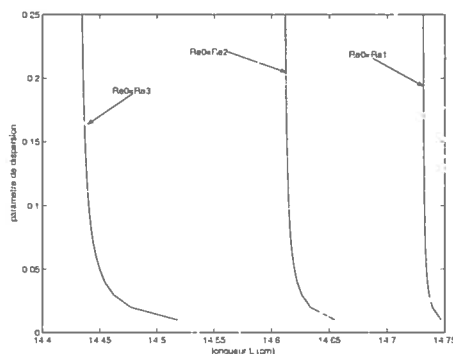


FIG. 5.6. Fonctions de croisement

Les fonctions $crois_{1,2}$ et $crois_{1,3}$ sont définies sur l'intervalle $\sigma^2 \in [0, 25]$. Elles ont une forme similaire et semblent atteindre leur minimum autour de $L = 14.2cm$ et de $L = 13.5cm$. Quant à elle, la fonction $crois_{2,3}$ n'est pas définie pour $\sigma^2 > 0.025$.

Comme on le voit sur ce graphique, contrairement au cas des fonctions $L_j(\sigma)$ l'approximation linéaire des fonctions $crois_{i,j}(\sigma)$ n'est valide que pour de très petites valeurs de σ .

Chapitre 6

COMPORTEMENT D'UN MODÈLE SIMPLIFIÉ PRÈS DU POINT DE BIFURCATION

Le théorème 4.1 n'affirme rien quant à la stabilité du système lorsque $L = L_0$. Afin de déterminer la stabilité du point fixe au point de bifurcation, l'analyse linéaire n'est plus un outil suffisant car le théorème d'Hartman-Grobman ne s'applique pas lorsque le système admet des valeurs propres à parties réelles nulles.

Afin d'analyser la structure de bifurcation au point $L = L_0$, Alain Vinet [9] a étudié le modèle simplifié suivant :

$$tr(x) = dL - a(tr(x - L)) \quad (6.1)$$

Comme la valeur $|d'|$ est très petite, environ 0.0064, Vinet a voulu étudier le modèle simplifié où la fonction $d(tr)$ est supposée constante avec $d(tr) = d$. Comme, pour tout x , la valeur de $tr(x)$ ne dépend que de la valeur $tr(x - L)$, il est possible de considérer ce système comme un système itéré. Vinet a posé $tr_0 = tr(0)$ et $tr_j = tr(jL)$. Il obtient ainsi l'égalité :

$$tr_{j+1} = dL - a(tr_j)$$

Ce système itéré admet un point fixe qui est stable lorsque $a' < 1$ et instable lorsque $a' > 1$.

Étudions la stabilité du point fixe à la bifurcation, c'est-à-dire pour L tel que $a' = 1$.

Posons \tilde{L} la plus grande valeur de L pour laquelle $\frac{da(tr^*(L))}{dtr} = 1$. Posons $tr^* = tr^*(\tilde{L})$, posons a'' la dérivée seconde de la fonction a au point tr^* et a''' la dérivée troisième de la fonction a au point tr^* .

Par une translation, ramenons le point fixe à l'origine en posant $\tilde{tr}_j = tr_j - tr^*$. Nous avons avec ces notations :

$$tr_{j+1}^- = -a(tr^* + tr_{j-1}^-) + a(tr^*)$$

Perturbons le système et supposons $\tilde{tr}_1 = \epsilon$. Comme $a' = 1$, l'analyse linéaire ne nous apprend rien sur la stabilité du système. Nous allons donc remplacer la fonction a par son développement d'ordre 3. Nous avons alors :

$$\tilde{tr}_2 = -\epsilon - \frac{a''}{2}\epsilon^2 - \frac{a'''}{6}\epsilon^3 + O(\epsilon^4)$$

et

$$\tilde{tr}_3 = \epsilon + \frac{a''}{2}\epsilon^2 + \frac{a'''}{6}\epsilon^3 - \frac{a''}{2}\left(-\epsilon - \frac{a''}{2}\epsilon^2\right)^2 - \frac{a'''}{6}(-\epsilon^3) + O(\epsilon^4)$$

Donc $\tilde{tr}_3 = \epsilon + \left(\frac{a'''}{3} - \frac{(a'')^2}{2}\right)\epsilon^3 + O(\epsilon^4)$. Le système itéré fait alterner les signes des \tilde{tr}_i . Le point fixe est donc stable si et seulement si $|\tilde{tr}_3| < |\tilde{tr}_1|$, c'est-à-dire si et seulement si $\frac{a'''}{3} - \frac{(a'')^2}{2} < 0$. Dans le cas de notre système, nous avons $a''' \approx 0.002$, et $a'' \approx -0.0447$. Par conséquent $\frac{a'''}{3} - \frac{(a'')^2}{2} \approx -2.66 \cdot 10^{-4}$ donc l'approximation de Vinet prédit qu'au point d'équilibre, le point fixe est stable.

Ce système itéré simplifié admet également l'existence de cycles super-critiques de période deux près du point de bifurcation, c'est-à-dire lorsque a' est légèrement supérieur à 1. Pour comprendre ce phénomène, posons $a' = 1 + \mu$ et $\tilde{tr}_1 = \epsilon$, nous avons :

$$\tilde{tr}_2 = (-1 - \mu)\epsilon - \frac{a''}{2}\epsilon^2 - \frac{a'''}{6}\epsilon^3 + O(\epsilon^4)$$

et

$$\begin{aligned} t\tilde{r}_3 &= (1 + 2\mu + \mu^2)\epsilon + (1 + \mu)\frac{a''}{2}\epsilon^2 + (1 + \mu)\frac{a'''}{6}\epsilon^3 - \frac{a''}{2}\left((-1 - \mu)\epsilon - \frac{a''}{2}\epsilon^2\right)^2 \\ &\quad - \frac{a'''}{6}\left((-1 - \mu)\epsilon\right)^3 + O(\epsilon^4) \end{aligned}$$

Pour $\mu = O(\epsilon^2)$ nous avons :

$$t\tilde{r}_3 = \epsilon + 2\mu\epsilon + \left(-\frac{a''^2}{2} + \frac{a'''}{3}\right)\epsilon^3 + O(\epsilon^4)$$

Il y aura un cycle de période deux lorsque $tr_1 = tr_3$ c'est-à-dire lorsque : $2\mu = \left(\frac{a''^2}{2} - \frac{a'''}{3}\right)\epsilon^2 + O(\epsilon^3)$. En isolant ϵ nous obtenons :

$$t\tilde{r}_1 = \epsilon = \sqrt{2\mu\left(\frac{a''^2}{2} - \frac{a'''}{3}\right)^{-1} + O(\mu^{3/2})} = \sqrt{2\mu\left(\frac{a''^2}{2} - \frac{a'''}{3}\right)^{-1} + O(\mu^{3/4})} \quad (6.2)$$

Dans notre cas, nous avons $\frac{da'}{dL} = -0.514$. C'est-à-dire qu'au point $L = L_0 - \xi$ nous aurons $a' \approx 1 + 0.514\xi$. Au point $L = L_0 - \xi$ l'amplitude de l'oscillation prédite sera donc de :

$$124.41\sqrt{\xi} + O(\xi^{3/4}) \quad (6.3)$$

Le problème avec ce modèle simplifié, c'est qu'il n'admet pas de solution non constante continue. Supposons en effet que $a' = 1 + \mu$ et que $tr(x)$ soit une solution de (6.1). Supposons de plus que $tr(x)$ soit une fonction périodique de période $2L$. Il suit que $\forall j, t\tilde{r}_j = t\tilde{r}_{j+2}$ et $t\tilde{r}_j \neq t\tilde{r}_{j+1}$. Mais, comme nous l'avons vu dans l'égalité (6.2), cela implique pour tout x , $tr(x) = \pm\sqrt{2\mu\left(\frac{a''^2}{2} - \frac{a'''}{3}\right)^{-1} + O(\mu^{3/4})}$ et par conséquent la fonction $tr(x)$ doit être discontinue.

Malheureusement, avec une fonction continue comme condition initiale, le modèle général de Vinet donné en (2.3) n'admet aucune fonction discontinue comme solution.

Pour avoir une bonne idée de ce qui se passe près du point de bifurcation il faut donc considérer un modèle plus complet. Mais pour ce faire nous avons d'abord besoin de quelques outils théoriques.

Chapitre 7

BIFURCATION DE HOPF ET VARIÉTÉ CENTRE

Nous allons maintenant développer des outils d'analyse afin d'étudier la stabilité du système au point de bifurcation ainsi que l'évolution et la stabilité des solutions périodiques près du point de bifurcation.

7.1. BIFURCATION DE HOPF

Au point de bifurcation $L = L_0$ il n'y a qu'une paire de valeurs propres purement imaginaires conjuguées et le reste des valeurs propres ont une partie réelle négative. De plus, par continuité, il existe un ξ_0 tel que pour tout ξ , $0 < \xi < \xi_0$, lorsque $L = L_0 - \xi$ toutes les valeurs propres de l'équation caractéristique sauf deux ont des parties réelles négatives. Les deux autres valeurs propres sont données par :

$$\lambda = a\xi \pm i(\omega + b\xi) + O(\xi^2)$$

Avec $a > 0$ et $b > 0$. Dans ces circonstances, nous sommes en présence d'une bifurcation de Hopf ([6], chapitre 3). Il existe deux types de bifurcation de Hopf, la bifurcation sous-critique et la bifurcation surcritique. Le comportement du système au point de bifurcation ne peut pas être déterminée à partir de l'analyse linéaire. La nature, sous critique ou surcritique, d'un point de bifurcation de Hopf dépend du développement d'ordre 3 du système autour du point de bifurcation.

Dans le cas d'une bifurcation surcritique, il existe un ξ_0 tel que pour tout $\xi \in [0, \xi_0]$ il existe un cycle stable au point $L_0 - \xi$ et l'amplitude de ce cycle croît proportionnellement à $\sqrt{\xi}$.

Dans le cas d'un point de bifurcation sous-critique, la situation est bien différente. Dans ce cas, il existe un ξ_0 tel que pour tout $\xi \in [0, \xi_0]$ le système admet des cycles instables comme solutions au point $L_0 + \xi$. L'amplitude de ce cycle instable croît proportionnellement à $\sqrt{\xi}$.

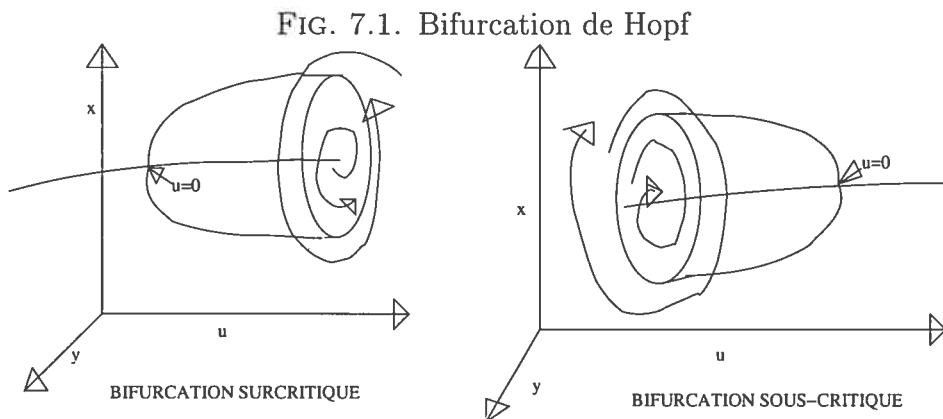
Dans le cas d'une bifurcation surcritique, il peut également se produire un phénomène intéressant. Dans l'intervalle $[L + \xi, L]$ il se produit parfois ce qu'on nomme un phénomène d'hystérèse. C'est-à-dire qu'en plus du point fixe stable, il existe un cycle stable. Le cycle instable agit comme séparateur des bassins d'attraction de ces deux attracteurs. L'histoire du système est donc importante afin de savoir si le système convergera vers le point fixe ou le cycle stable. L'existence du cycle stable d'amplitude supérieure au cycle instable dépend du développement d'ordre 5 du système autour du point de bifurcation.

Lorsque ce cycle stable existe, lorsque que le paramètre L devient légèrement inférieur à L_0 , il y a apparition soudaine d'un cycle stable d'amplitude non négligeable.

Ces deux situations sont illustrées sur la figure 7.1. L'axe des u correspond au paramètre de bifurcation ξ et les axes x, y aux deux dimensions du sous-espace engendré par les vecteurs propres associés aux valeurs propres $i(\omega + b\xi) + a\sqrt{\xi}$, $-i(\omega + b\xi) + a\sqrt{\xi}$.

Voyons maintenant comment déterminer le comportement d'un système à un point de bifurcation de Hopf en considérant les équations différentielles suivantes :

$$\begin{aligned}x' &= y + a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + a_4x^3 + a_5x^2y + a_6xy^2 + a_7y^3 + O(|x|^4, |y|^4) \\y' &= -x + b_1x^2 + b_2xy + b_3y^2 + b_4x^3 + b_5x^2y + b_6xy^2 + b_7y^3 + O(|x|^4, |y|^4)\end{aligned}$$



Ce système possède un point fixe en $(0,0)$ et les valeurs propres de son linéarisé sont $i, -i$.

Dans le cas où les parties réelles des valeurs propres sont non nulles, le théorème d'Hartman Grobman permet d'effectuer un changement de variable lisse afin de linéariser ce système de sorte que le comportement du système autour de l'origine est équivalent au comportement du linéarisé.

Dans le cas où il y a des valeurs propres à partie réelle nulle, comme lorsque nous sommes en présence d'une bifurcation de Hopf, les choses ne sont pas si simple.

Le théorème de la forme normale ([6], chapitre 7), affirme que lorsque le linéarisé d'un système admet des valeurs à partie réelle nulle, il existe un entier ' d ' tel qu'aucun changement de variable analytique ne peut éliminer les termes de degré d . Cet entier d dépend uniquement de la forme linéaire du système.

Dans le cas d'un système dont la forme linéaire est :

$$\begin{aligned}x' &= y \\y' &= -x\end{aligned}$$

il est possible de se débarrasser de termes d'ordre deux avec un changement de variables polynômial mais il est impossible de se débarrasser des termes d'ordre 3.

Pour éliminer les termes de degré 2, nous devons effectuer le changement de variables : $X = x + c_1x^2 + c_2xy + c_3y^2$ et $Y = y + d_1x^2 + d_2xy + d_3y^2$. Afin de déterminer les coefficients c_i et d_i qui feront disparaître les termes d'ordre 2, nous devons résoudre un système d'équations linéaires de six équations à six inconnues. La matrice correspondant à ces équations, qui ne dépend que de la forme linéaire du système, est une matrice inversible. Le système admet donc toujours une solution et c'est pour cette raison qu'il est toujours possible d'éliminer les termes d'ordre 2.

Nous pouvons donc ramener le système sous la forme :

$$\begin{aligned} X' &= Y + A_1X^3 + A_2X^2Y + A_3XY^2 + A_4Y^3 \\ Y' &= -X + B_1X^3 + B_2X^2Y + B_3XY^2 + B_4Y^3 \end{aligned}$$

Si nous tentons d'éliminer les termes d'ordre 3 en effectuant un changement de variables de la forme : $\tilde{X} = X + C_1X^3 + C_2X^2Y + C_3XY^2 + C_4Y^3$ et $\tilde{Y} = Y + D_1X^3 + D_2X^2Y + D_3XY^2 + D_4Y^3$. Nous obtenons un système linéaire de huit équations à huit inconnues à résoudre. Le problème est que la matrice associée à ces équations n'est que de rang 6. Le mieux que l'on puisse espérer est donc de ramener ce système sous la forme suivante qui dépend de 2 ($2=8-6$) paramètres :

$$\tilde{X}' = \alpha(X^2 + Y^2)Y + (1 + \beta(X^2 + Y^2))X \quad (7.1)$$

$$\tilde{Y}' = -(1 + \beta(X^2 + Y^2))X + \alpha(X^2 + Y^2)Y$$

Dans le cas où $\alpha = 0$ et $\beta = 0$ nous ne pouvons déterminer la stabilité du système au point de bifurcation et il nous faut effectuer le développement d'ordre 5 afin d'obtenir plus d'information. Dans le cas où $\alpha \neq 0$ ou $\beta \neq 0$ la forme donnée en (7.1) est appelée forme normale. Afin de simplifier la forme normale, il est possible de passer en coordonnées polaires en posant : $r = \tilde{X}^2 + \tilde{Y}^2$ et $\theta = \arctan(\frac{\tilde{X}}{\tilde{Y}})$ nous obtenons alors :

$$\begin{aligned}\theta' &= 1 + \beta r^2 \\ r' &= \alpha r^3\end{aligned}$$

Comme le système est découplé, la nature du point de bifurcation dépend seulement de la valeur du paramètre α . Le point de bifurcation est sous-critique si $\alpha < 0$ et surcritique si $\alpha > 0$.

Nous venons d'étudier ce qui se passe lorsque les deux valeurs propres ont une partie réelle nulle. Supposons maintenant que la partie réelle des valeurs propres dépende d'un paramètre ξ et plus précisément que $\Re(\lambda) = a\xi + O(\xi^2)$. En effectuant les mêmes changements de variables que lorsque $\xi = 0$ nous obtenons :

$$\begin{aligned}\theta' &= 1 + \beta r^2 \\ r' &= ra\xi + \alpha r^3\end{aligned}$$

Nous avons un cycle limite lorsque $r = \sqrt{-\frac{a\xi}{\alpha}}$. Ce cycle limite sera stable si $\alpha < 0$ et instable si $\alpha > 0$.

7.2. SOUS ESPACE ET VARIÉTÉ CENTRE

Définition :

Le sous-espace centre associé à un système d'équations différentielles est le sous-espace engendré par les vecteurs propres associés aux valeurs propres à partie réelle nulle du linéarisé.

Définition :

La variété centre associée à un système d'équations différentielles est la variété différentielle tangente au sous-espace centre et laissée invariante par le flot du système.

Dans cette section, nous montrons que le comportement de notre équation au point de bifurcation est équivalente à son comportement sur la variété centre qui lui est associée.

Si nous avons un système de la forme :

$$\dot{x}(t) = L(t, x_t) \quad (7.2)$$

Qui admet l'origine comme point fixe et où $L(t, \phi)$ est continu et linéaire en t et en ϕ et où L est défini explicitement par :

$$L(t, \phi) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) \phi(-\tau_k) + \int_{-\tau}^0 A(t, \xi) \phi(\xi) d\xi \quad (7.3)$$

Où chacune des fonction $A_k(t)$, $A(t, \xi)$ est une fonction continue. Nous définissons l'équation adjointe de (7.3) par :

$$\frac{dy(s)}{ds} = - \sum_{k=1}^{\infty} y(s + \tau_k) S(s + \tau_k) - \int_{-\tau}^0 y(s - \xi) A(s - \xi, \xi) d\xi \quad (7.4)$$

Posons $C^* = C([0, r], R^n)$ l'espace des fonctions continues de $[0, r]$ sur les vecteurs rangée de dimension n . Pour $\psi \in C^*$, $\phi \in C$, $t \in R$ définissons le produit scalaire suivant :

$$\begin{aligned} \langle \psi, \phi, t \rangle &= \psi(0) \phi(0) - \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\tau_k} \psi(\xi) A_k(t + \xi) \phi(\xi - \tau_k) d\xi \\ &\quad - \int_{-\tau}^0 \left(\int_{-\theta}^0 \psi(\xi) A(t + \xi, \theta) \psi(\xi + \theta) d\xi \right) d\theta \end{aligned}$$

Notons y^t le transposé de y dans C^* . Il est connu (voir [7]) que si x est une solution de (7.2) sur $[\sigma - r, T]$ et que y est une solution de (7.4) sur $[\sigma, T + r]$ alors $\langle y^t, x_t, t \rangle$ est constant pour $\sigma \leq t \leq T$.

Pour $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ un sous-ensemble fini des valeurs propres de (7.2), posons $P = P_\Lambda$ l'extension linéaire de $M_{\lambda_j}(A)$, $\lambda_j \in \Lambda$, il s'agit de l'espace des vecteurs propres généralisés associé à Λ . De façon similaire, posons $P^* = P_\Lambda^*$

comme l'espace des vecteurs propres généralisés de l'équation adjointe associée à Λ .

Nous allons maintenant utiliser l'équation adjointe afin de décomposer l'espace C . Nous aurons besoin des trois théorèmes suivants tiré de Hale [7], chapitres 11 et 12 :

Théorème 7.1. *Si Φ et Ψ sont respectivement des bases de P_Λ et P_Λ^* et que $\langle \Psi, \Phi \rangle = I$ alors*

$$\begin{aligned} C &= P_\Lambda \oplus Q_\Lambda \\ P_\Lambda &= \{\phi \in C : \phi = \Phi b\} \end{aligned}$$

Pour un certain vecteur b et :

$$Q_\Lambda = \{\phi \in C : \langle \Psi, \phi \rangle = 0\}$$

Par conséquent, pour tout $\phi \in C$,

$$\begin{aligned} \phi &= \phi^{P_\Lambda} + \phi^{Q_\Lambda} \\ \phi^{P_\Lambda} &= \Phi \langle \Psi, \phi \rangle \end{aligned}$$

Dans notre cas, nous allons choisir $\Lambda = \{-i\omega, i\omega\}$. Nous allons également utiliser le théorème suivant qui nous permet de travailler uniquement sur P_Λ .

Théorème 7.2. *Pour tout nombre réel β , posons $\Lambda = \Lambda(\beta) = \{\lambda \in \sigma(A) : \Re(\lambda) \geq \beta\}$ et supposons que C soit décomposé par Λ comme $C = P_\Lambda \oplus Q_\Lambda$, alors il existe des constantes positives κ, γ telles que*

$$\begin{aligned} \|T(t)\phi^{P_\Lambda}\| &\leq \kappa e^{(\beta-\gamma)t} \|\phi^{P_\Lambda}\|, t \leq 0 \\ \|T(t)\phi^{Q_\Lambda}\| &\leq \kappa e^{(\beta-\gamma)t} \|\phi^{Q_\Lambda}\|, t \geq 0 \end{aligned}$$

Il suit que si $\beta \leq 0$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|T(t)\phi^{Q\Lambda}\| = 0$$

Il nous reste donc à calculer $T(t)\phi^{P\Lambda}$ et le théorème suivant, toujours tiré de Hale [7] nous apprend comment faire.

Théorème 7.3. *Supposons que C soit décomposé par Λ comme $P \oplus Q$, que Φ soit une base de P et que Ψ soit une base de P^* . Alors la solution $x(\sigma, \phi)$ d'un système de la forme $x'(t) = L(x_t) + f(x_t)$ est donnée par :*

$$\begin{aligned} x_t^P &= T(t - \sigma)\phi^P + \int_{\sigma}^t T(t - s)X_0^P f(x_s) ds \\ x_t^Q &= T(t - \sigma)\phi^Q + \int_{\sigma}^t T(t - s)X_0^Q f(x_s) ds, t \geq \sigma \end{aligned}$$

où $X_0^P = \Phi\Psi(0)$, $X_0^Q = X_0 - \Phi\Psi(0)$.

De plus, en définissant $y(t)$ par $x_t^P = \Phi y(t)$ nous avons :

$$\dot{y} = By(t) + \Psi(0)f(y(t))$$

où B est défini par l'équation $B\Phi = \Phi B$.

Dans notre cas, par le théorème 7.3, nous aurons :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_t^Q\| = 0$$

Nous prendrons $\Phi = (\sin(\omega t), \cos(\omega t))$. Et avec y solution de l'équation précédente nous aurons donc :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_t - \Phi y(t)\| = 0$$

Dans une article [1] de Bélair et Campbell, l'algorithme détaillé permettant d'effectuer ces calculs et d'ainsi réduire le problème à un problème de dimension 2 est donné.

Dans la section suivante, nous allons déterminer le comportement du modèle de Vinet près du point de bifurcation. Nous n'allons pas effectuer les calculs permettant de réduire la dimension du problème pour ensuite déterminer son comportement à l'aide des changements de variables donnés dans ce chapitre. Les calculs sont trop lourds. Nous allons plutôt utiliser le résultat suivant que l'on obtient comme corollaire immédiat de la théorie développée dans ce chapitre :

Corollaire 7.1. *Si il existe un ξ_0 tel que $\forall \xi, 0 < \xi < \xi_0$, le modèle de Vinet admet des solutions périodiques de la forme $tr(\tilde{x}) = a\sqrt{\xi} \cos(\omega_0 x) + b\sqrt{\xi} \sin(\omega_0 x) + O(\xi^2)$ lorsque $L = L_0 - \xi$, alors le point de bifurcation est un point de bifurcation de Hopf sous-critique. S'il existe un ξ_0 tel que $\forall \xi, 0 < \xi < \xi_0$, le modèle de Vinet admet des solutions périodiques de la forme $a\sqrt{\xi} \cos(\omega_0 x) + b\sqrt{\xi} \sin(\omega_0 x) + O(\xi^2)$ lorsque $L = L_0 + \xi$, alors le point de bifurcation est un point de bifurcation de Hopf surcritique.*

Chapitre 8

ÉTUDE DES SOLUTIONS PRÈS DU POINT DE BIFURCATION DANS LE MODÈLE DE VINET

Nous sommes maintenant prêts à analyser ce qui se passe près du point de bifurcation dans le cas d'un modèle plus complexe. Considérons le modèle suivant :

$$tr(x) = d - K \int_{x-L-\delta}^{x-L+\delta} e^{-(x-L-s)^2/2\sigma^2} a(tr(s)) ds \quad (8.1)$$

Ici, d est toujours considéré comme une fonction constante mais la valeur de la fonction a est pondérée sur un voisinage de $x - L$. La simplification d est une fonction constante nous permet de simplifier les calculs afin de les rendre compréhensibles.

Dans le modèle (8.1), il y a bifurcation lorsque $a' = \frac{1}{f(i\pi/L)}$. Lorsque $a' = \frac{1}{f(i\pi/L)}$, le système admet deux valeurs propres à partie réelle nulle soit $\lambda = \pm i\pi/L$. Par conséquent, le sous-espace centre au point de bifurcation sera de la forme : $tr(x) = a \sin(\frac{\pi x}{L}) + b \cos(\frac{\pi x}{L})$. Pour L légèrement inférieur au L correspondant au point de bifurcation, posons $a'(tr^*) = \frac{1}{f(i\pi/L)} + \eta$. En posant $tr(x) = tr^* + \tilde{tr}(x)$, en développant autour du point d'équilibre tr^* , nous obtenons $a(tr(s)) = a(tr^*) + a'(tr^*)\tilde{tr}(s) + \frac{a''}{2}(tr^*)\tilde{tr}(s)^2 + \frac{a'''}{6}(tr^*)\tilde{tr}(s)^3 + O(\tilde{tr}(s)^4)$. Nous posons a'' , a''' les dérivées deuxième et troisième de a au oint d'équilibre au point de bifurcation. Comme $a'(tr^*) = a' + O(\eta)$, nous avons $a''(tr^*) = a'' + O(\eta)$ et $a'''(tr^*) = a''' + O(\eta)$. Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned}
tr(\tilde{x}) &= -\left(\frac{1}{f(i\pi/L)} + \eta\right)K \int_{x-L-\delta}^{x-L+\delta} e^{-(x-L-s)^2/2\sigma^2} tr(\tilde{s}) ds \\
&- \frac{a'' + O(\eta)}{2} K \int_{x-L-\delta}^{x-L+\delta} e^{-(x-L-s)^2/2\sigma^2} tr(\tilde{s})^2 ds \\
&- \frac{a''' + O(\eta)}{6} K \int_{x-L-\delta}^{x-L+\delta} e^{-(x-L-s)^2/2\sigma^2} tr(\tilde{s})^3 ds + O(tr(\tilde{s})^4)
\end{aligned}$$

Nous savons que le comportement du système est équivalent au comportement du système sur la variété centre. Comme la variété centre est tangente au sous-espace centre, nous cherchons des solutions de la forme : $tr(\tilde{x}) = r\eta + s\sqrt{\eta} \cos(\frac{\pi x}{L}) + t\eta \cos(\frac{2\pi x}{L}) + O(\eta^{3/2})$.

Il nous reste à substituer ce développement de $tr(\tilde{x})$ dans l'équation précédente puis à identifier les coefficients r, s, t . Nous obtenons :

$$\begin{aligned}
r\eta\left(1 + \frac{1}{f(i\pi/L)}\right) + t\eta \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\left(1 + \frac{f(2i\pi/L)}{f(i\pi/L)}\right) &= \frac{\eta^{3/2}}{f(i\pi/L)} s \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \\
- \frac{a''}{4} s^2 \eta - \frac{f(2i\pi/L)a''}{4} s^2 \eta \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + a'' r s f(i\pi/L) \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \eta^{3/2} \\
+ \frac{a''}{2} t s f(i\pi/L) \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \eta^{3/2} + s^3 \frac{a'''}{8} \eta^{3/2} f(i\pi/L) \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) + O(\eta^2)
\end{aligned}$$

Nous pouvons obtenir la valeur de r en comparant les termes constants des deux membres de l'égalité. Cela nous donne :

$$r\eta\left(1 + \frac{1}{f(i\pi/L)}\right) = -\frac{a''}{4} s^2 \eta$$

En isolant r nous en arrivons à :

$$r = -\frac{a'' s^2 f(i\pi/L)}{4(f(i\pi/L) + 1)} \quad (8.2)$$

En considérant les termes de la forme $C \cos(2\pi x/L)$ où C est constant, nous obtenons l'égalité suivante :

$$t\eta \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \left(1 + \frac{f(2i\pi/L)}{f(i\pi/L)}\right) = -\frac{f(2i\pi/L)a''}{4} s^2 \eta \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$$

En isolant t dans l'équation précédente, nous en déduisons :

$$t = -\frac{f(i\pi/L)f(2i\pi/L)a''s^2}{4(f(i\pi/L) + f(2i\pi/L))} \quad (8.3)$$

En considérant les termes de la forme $C \cos(\pi x/L)$ où C est constant, nous obtenons :

$$0 = sf(i\pi/L) + a''rsf(i\pi/L) + \frac{a''}{2}tsf(i\pi/L) + s^3\frac{a'''}{8}f(i\pi/L) \quad (8.4)$$

En substituant les valeurs obtenues dans les identités (8.2) et (8.3) dans l'égalité (8.4), nous obtenons finalement :

$$0 = sf(i\pi/L) - \frac{a''^2s^3f(i\pi/L)^2}{4(f(i\pi/L) + 1)} - \frac{a''^2s^3f(i\pi/L)^2f(2i\pi/L)}{8(f(i\pi/L) + f(2i\pi/L))} + s^3\frac{a'''}{8}f(i\pi/L) \quad (8.5)$$

En isolant s nous concluons :

$$s = \left(\frac{a''^2f(i\pi/L)}{8} \left(\frac{2}{f(i\pi/L) + 1} + \frac{f(2i\pi/L)}{f(i\pi/L) + f(2i\pi/L)} \right) - \frac{a'''}{8} \right) \quad (8.6)$$

Il découle du corollaire 7.1 que le point de bifurcation sera sous-critique si :

$$\left(\frac{a''^2f(i\pi/L)}{8} \left(\frac{2}{f(i\pi/L) + 1} + \frac{f(2i\pi/L)}{f(i\pi/L) + f(2i\pi/L)} \right) - \frac{a'''}{8} \right)^{-1/2} > 0$$

Et surcritique si :

$$\left(\frac{a''^2f(i\pi/L)}{8} \left(\frac{2}{f(i\pi/L) + 1} + \frac{f(2i\pi/L)}{f(i\pi/L) + f(2i\pi/L)} \right) - \frac{a'''}{8} \right) < 0$$

Remarque 8.1. *Si l'on remplace la fonction f par $f \equiv 1$ dans l'égalité (8.6) nous obtenons :*

$$s = \left(\frac{3a''^2}{16} - \frac{a'''}{16} \right)^{-1/2} \quad (8.7)$$

Il est intéressant d'observer que cette valeur diffère de celle obtenue lors de l'approximation par le modèle itéré en (6.2) et ce bien que le critère de stabilité du point de bifurcation soit le même pour les deux modèles. Lorsque $f \equiv 1$, le système admet une infinité de valeurs propres à partie réelle nulle. Dans le modèle itéré, il est donc impossible d'utiliser la méthode utilisée dans ce chapitre car la présence d'une infinité de valeurs propres à partie réelle nulle nous oblige à tenir compte de tous les termes de la forme $C \cos((2k + 1)\pi x/L)$ où C est une constante et k un entier positif.

Il est possible de traiter le problème général, où l'on ne fait plus l'hypothèse que $d(tr)$ est une fonction constante, de façon similaire. Il faut alors chercher des solutions de la forme : $tr(x) = s\sqrt{\eta} \cos((\omega_0 + t\eta)x) + \eta u + \eta v \cos((\omega_0 + t\eta)x) + w \sin((\omega_0 + t\eta)x)$. Ici ω_0 est tel que $\lambda = i\omega_0$ est une valeur propre au point de bifurcation. Remarquons que la période de la solution périodique doit varier proportionnellement à η afin de permettre l'existence d'une solution. Afin de trouver s, t, u, v, w il suffit comme précédemment de substituer et d'identifier terme à terme. La valeur de s ainsi obtenue correspond à une expression très lourde. En négligeant les dérivées supérieures de d ainsi que les puissances deuxième et troisième de d' nous obtenons :

$$s = \left(\frac{a''^2 f(i\pi/L)}{8} \left(\frac{2}{(1 - d'L)f(i\pi/L) + 1} + \frac{f(2i\pi/L)}{f(i\pi/L) + f(2i\pi/L)} \right) - \frac{a'''}{8} \right)^{-1/2} \quad (8.8)$$

Le calcul complet est laissé en annexe. Comme $d' < 0$, la fonction d fait augmenter l'amplitude des oscillations. La valeur de s est en accord avec celle obtenue par Courtemanche et al. dans [4]. C'est-à-dire que si l'on pose $f \equiv 1$

dans (8.8), on obtient la même expression pour la croissance de l'amplitude des oscillations que celle obtenue par Courtemanche et al. dans [4].

8.1. INFLUENCE DU PARAMÈTRE DE DISPERSION SUR LES OSCILLATIONS

Comment la valeur de σ influence-t-elle la valeur de s donnée en (8.8) ? Pour répondre à cette question, il faut remarquer deux choses : la valeur de la fonction f dépend de σ , les valeurs de a'' , a''' et d' dépendent également de σ . Rappelons que nous avons par exemple $a'' = a''(\text{tr}(L_0(\sigma)))$.

Notons a_2, a_3 et a_4 les dérivées deuxième, troisième et quatrième de la fonction a lorsque $a' = 1$. De la même façon, notons d_1 et d_2 les dérivées première et deuxième de la fonction d lorsque $a' = 1$. Étudions la façon dont la valeur propre perd sa stabilité. Nous aurons :

$$\begin{aligned} a' &= \frac{1}{f(i\omega_j)} + \eta \\ a'' &= a_2 + \frac{a_3}{a_2} \left(\frac{1}{f(i\omega_j)} - 1 \right) \\ a''' &= a_3 + \frac{a_4}{a_2} \left(\frac{1}{f(i\omega_j)} - 1 \right) \\ d' &= d_1 + \frac{d_2}{a_2} \left(\frac{1}{f(i\omega_j)} - 1 \right) \end{aligned}$$

L'équation (8.8) devient alors :

$$\begin{aligned} s &= \left(\frac{(a_2 + \frac{a_3}{a_2} (\frac{1}{f(i\omega_j)} - 1))^2 f(i\omega_j)}{8} \left(\frac{2}{(1 - L(d_1 + \frac{d_2}{a_2} (\frac{1}{f(i\omega_j)} - 1))) f(i\omega_j) + 1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{f(2i\omega_j)}{f(i\omega_j) + f(2i\omega_j)} \right) - \frac{a_3 + \frac{a_4}{a_2} (\frac{1}{f(i\omega_j)} - 1)}{8} \right)^{-1/2} \end{aligned}$$

En utilisant comme dans le chapitre 5 l'approximation : $f(i\omega_j) = e^{-(2j+1)^2 \pi^2 \sigma^2 / 2L^2} + O(\sigma^4) = 1 - (2j+1)^2 \pi^2 \sigma^2 / 2L^2 + O(\sigma^4)$

Nous obtenons :

$$\frac{1}{f(i\omega_j)} - 1 = \sigma^2(2j+1)^2\pi^2/2L^2 + O(\sigma^4)$$

et

$$\frac{f(2i\omega_j)}{f(i\omega_j) + f(2i\omega_j)} = \frac{1}{2} - \sigma^2(2j+1)^2\pi^2/8L^2 + O(\sigma^4)$$

Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} s &= \left(\frac{a_2^2 + a_3\sigma^2(2j+1)^2\pi^2/L^2 - a_2^2\sigma^2(2j+1)^2\pi^2/2L^2}{8} \right. \\ &\quad \left(\frac{2}{2 - Ld_1 - L\frac{d_2}{a_2}\sigma^2(2j+1)^2\pi^2/2L^2 - (1 - Ld_1)\sigma^2(2j+1)^2\pi^2/2L^2} + \frac{1}{2} \right. \\ &\quad \left. \left. - \sigma^2(2j+1)^2\pi^2/8L^2 \right) - \frac{a_3 + \frac{a_4}{a_2}\sigma^2(2j+1)^2\pi^2/2L^2}{8} + O(\sigma^4) \right)^{-1/2} \end{aligned}$$

En utilisant l'égalité :

$$\begin{aligned} &\frac{2}{2 - Ld_1 - L\frac{d_2}{a_2}\sigma^2(2j+1)^2\pi^2/2L^2 - (1 - Ld_1)\sigma^2(2j+1)^2\pi^2/2L^2} \\ &= \frac{2}{2 - Ld_1} + \sigma^2(2j+1)^2\pi^2/2L^2 \frac{2(L\frac{d_2}{a_2} - (1 - Ld_1))}{2 - Ld_1} \end{aligned}$$

Nous obtenons finalement :

$$\begin{aligned} s &= \left(\frac{a_2^2}{8} \left(\frac{2}{2 - Ld_1} + \frac{1}{2} \right) - \frac{a_3}{8} + \sigma^2(2j+1)^2\pi^2/2L^2 \left(\frac{a_2^2}{8} \left(\frac{2(L\frac{d_2}{a_2} - (1 - Ld_1))}{2 - Ld_1} - \frac{1}{4} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{a_4}{8a_2} + \frac{2a_3 - a_2^2}{8} \left(\frac{2}{2 - Ld_1} + \frac{1}{2} \right) \right) + O(\sigma^4) \right)^{-1/2} \end{aligned}$$

Dans le cas $j = 0$ nous avons :

$$s \approx (0.00046452 - 0.0026\sigma^2)^{-1/2} \quad (8.9)$$

Nous voyons donc que le paramètre de dispersion de la distribution du couplage résistif fait augmenter la vitesse de croissance des oscillations près du point de bifurcation et nuit à la stabilité des solutions périodiques.

Toutefois, pour de petites valeurs de σ^2 par exemple $\sigma^2 < 0.01$ comme utilisé par monsieur Vinet, $0.0026\sigma^2 \ll 0.00046452$ et l'influence du paramètre σ^2 sur le comportement du système est donc faible.

CONCLUSION

Dans ce travail, nous avons effectué l'analyse mathématique d'un modèle proposé par Vinet pour décrire la propagation électrique lors d'un flutter auriculaire.

Dans le chapitre 4, nous avons démontré rigoureusement l'existence du point de bifurcation observé par Alain Vinet lors de simulations numériques. Par le fait même, nous avons montré que le système est qualitativement peu sensible au choix de la distribution de la force de couplage.

Dans les chapitres 5 et 8 nous avons étudié comment la variance de la distribution de la force de couplage influence la stabilité des solutions et l'amplitude des oscillations. Nous n'avons effectué l'analyse que pour une seule valeur du paramètre p ($p = 5.5$) introduit par Alain Vinet. Il serait intéressant de voir comment le paramètre p influence les résultats obtenus dans ces chapitres.

Dans les chapitres 6, 7 et 8, nous effectuons les calculs permettant de déterminer si la bifurcation de Hopf par laquelle le point fixe perd sa stabilité est surcritique ou sous-critique. Nous n'effectuons toutefois pas les calculs permettant de calculer le comportement exact du système sur la variété centre. Il serait intéressant d'effectuer ces calculs mais il faudrait pour cela résoudre certaines difficultés techniques liées à l'apparition d'une valeur propre nulle lorsque l'on écrit le système sous sa forme dérivée.

Certaines questions demeurent ouvertes quant au choix de la distribution de la force de couplage. Considérer quant la force de couplage résistif suit une distribution gaussienne tronquée sur l'intervalle $[-\delta, \delta]$ implique une discontinuité dans la distribution de la force de couplage. Est-ce que cette discontinuité est expliquée par le modèle biologique? Si oui, comment? Si non, conviendrait-il de choisir une autre distribution à décroissance plus rapide?

Annexe A

CALCUL DE SOLUTION PRÈS DU POINT DE BIFURCATION DANS LE MODÈLE DE VINET

$$r(1 - Ld_1 + c_1) = \frac{s^2}{4}(Ld_2 + a_2)$$

Et par conséquent :

$$r = \frac{s^2(Ld_2 + a_2)}{4(1 - Ld_1 + a_1)}$$

De plus :

$$\begin{aligned} u &+ f(2i\omega_0)ua_1 \cos(2\omega_0 L) + v f(2i\omega_0)a_1(-\sin(2\omega_0 L)) - u \frac{d_1}{2\omega_0} \sin(2\omega_0 L) \\ &- v \frac{d_1}{2\omega_0}(-1 + \cos(2\omega_0 L)) = -\frac{s^2}{2} \frac{a_2}{2} f(2i\omega) \cos(2\omega_0 L) + \frac{d_2 s^2}{8\omega_0} \sin(2\omega_0 L) \end{aligned}$$

De la même façon :

$$\begin{aligned} v &+ f(2i\omega_0)va_1 \cos(2\omega_0 L) + u f(2i\omega_0)a_1 \sin(2\omega_0 L) - v \frac{d_1}{2\omega_0} \sin(2\omega_0 L) \\ &- u \frac{d_1}{2\omega_0}(1 - \cos(2\omega_0 L)) = -\frac{s^2}{4} a_2 f(2i\omega_0) \sin(2\omega_0 L) + \frac{s^2}{8\omega_0} d_2(1 - \cos(2\omega_0 L)) \end{aligned}$$

En combinant ces deux dernières équations nous obtenons :

$$u = \left(v(1 + f(2i\omega_0)a_1 \cos(2\omega_0L) - \frac{d_1}{2\omega_0} \sin(2\omega_0L)) + s^2 \left(\frac{a_2}{4} f(2i\omega_0) \sin(2\omega_0L) - \frac{d_2}{8\omega_0} (1 - \cos(2\omega_0L)) \right) \right) / \left(-a_1 f(2i\omega_0L) \sin(2\omega_0L) + \frac{d_1}{2\omega_0} (1 - \cos(2\omega_0L)) \right)$$

Nous pouvons utiliser cette égalité pour obtenir une équation ne dépendant que de v

$$(1 - \frac{d_1}{2\omega_0} \sin(2\omega_0L) + a_f(2i\omega_0) \cos(2\omega_0L)) \left(v(1 + f(2i\omega_0)a_1 \cos(2\omega_0L) - \frac{d_1}{2\omega_0} \sin(2\omega_0L)) + s^2 \left(\frac{a_2}{4} f(2i\omega_0) \sin(2\omega_0L) - \frac{d_2}{8\omega_0} (1 - \cos(2\omega_0L)) \right) \right) =$$

$$\left(-vf(2i\omega_0)a_1(-\sin(2\omega_0L)) + v\frac{d_1}{2\omega_0}(-1 + \cos(2\omega_0L)) - \frac{s^2 a_2}{4} f(2i\omega_0) \cos(2\omega_0L) + \frac{s^2 d_2}{8\omega_0} \sin(2\omega_0L) \right) \left(-a_1 f(2i\omega_0) \sin(2\omega_0L) + \frac{d_1}{2\omega_0} (1 - \cos(2\omega_0L)) \right)$$

Nous pouvons isoler v et en arriver finalement à :

$$v = s^2 \left(-\frac{a_2}{4} f(2i\omega) \sin(2\omega_0L) + \frac{d_2}{8\omega_0} (1 - \cos(2\omega_0L)) + \frac{a_2 d_1}{8\omega_0} f(2i\omega_0) (1 - \cos(2\omega_0L)) - \frac{d_1 d_2}{16\omega_0^2} \sin(2\omega_0L) + \frac{a_1 d_2}{8\omega_0} f(2i\omega_0L) (\cos(2\omega_0L) - 1) \right) /$$

$$\left((1 + f(2i\omega_0)a_1 \cos(2\omega_0L) - \frac{d_1}{2\omega_0} \sin(2\omega_0L))^2 + \left(\frac{d_1}{2\omega_0} (\cos(2\omega_0L) - 1) - a_1 f(2i\omega_0) \sin(2\omega_0L) \right)^2 \right)$$

De même que :

$$u = s^2 \left(-\frac{a_2}{4} f(2i\omega_0) \cos(2\omega_0L) + \frac{d_2}{8\omega_0} \sin(2\omega_0L) \right) / \left(1 + f(2i\omega_0)a_1 \cos(2\omega_0L) - \frac{d_1}{2\omega_0} \sin(2\omega_0L) \right) + v \left(f(2i\omega_0)a_1 \sin(2\omega_0L) + \frac{d_1}{2\omega_0} (-1 + \cos(2\omega_0L)) \right) / \left(1 + f(2i\omega_0)a_1 \cos(2\omega_0L) - \frac{d_1}{2\omega_0} \sin(2\omega_0L) \right)$$

Pour déterminer s et t nous pouvons utiliser les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
s\sqrt{\epsilon} &+ s\sqrt{\epsilon}\left(\epsilon a_2 + \frac{1}{f(i\omega_0)}\right)f(i\omega_0)\cos((\omega_0 + t\epsilon)L) - s\frac{\sqrt{\epsilon}}{\omega_0}f(i\omega_0)(d_1 + \epsilon d_2)\sin((\omega_0 + t\epsilon)L) \\
&= -\frac{a_3 s^3 \epsilon^{3/2}}{8}f(i\omega_0)\cos(\omega_0 L) + \frac{d_3 s^3 \epsilon^{3/2}}{8\omega_0}f(i\omega_0)\sin(\omega_0 L) - \epsilon^{3/2}\frac{a_2}{2}2rs\cos(\omega_0 L)f(i\omega_0) \\
&+ \epsilon^{3/2}\frac{d_2}{2\omega_0}2rs\sin(\omega_0 L)f(i\omega_0) - \frac{a_2}{2}su\cos(\omega_0 L)f(i\omega_0) + \frac{d_2}{2\omega_0}su\sin(\omega_0 L)f(i\omega_0) \\
&- \frac{a_2}{2}sv\sin(\omega_0 L)f(i\omega_0) - sv\frac{d_2}{2\omega_0}(1 - \cos(\omega_0 L))
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
s\sqrt{\epsilon}\left(\epsilon a_2 + \frac{1}{f(i\omega_0)}f(i\omega_0)\right)\sin((\omega_0 + t\epsilon)L) + s\frac{\sqrt{\epsilon}}{\omega_0}f(i\omega_0)(d_1 + \epsilon d_2)(1 - \cos((\omega_0 + t\epsilon)L)) \\
= -\frac{a_3 s^3 \epsilon^{3/2}}{8\omega_0}f(i\omega_0)\sin(\omega_0 L) + \frac{d_3 s^3 \epsilon^{3/2}}{8\omega_0}f(i\omega_0)(1 - \cos(\omega_0 L)) - \epsilon^{3/2}\frac{a_2}{2}2rs\sin(\omega_0 L)f(i\omega_0) \\
+ \epsilon^{3/2}\frac{d_2}{2\omega_0}2rs(1 - \cos(\omega_0 L))f(i\omega_0) - \epsilon^{3/2}\frac{a_2}{2}su\sin(\omega_0 L)f(i\omega_0) \\
+ \epsilon^{3/2}\frac{d_2}{2\omega_0}f(i\omega_0)(1 - \cos(\omega_0 L)) + \epsilon^{3/2}\frac{a_2}{2}sv\cos(\omega_0 L)f(i\omega_0) - \epsilon^{3/2}\frac{d_2}{2\omega_0}sv\sin(\omega_0 L)f(i\omega_0)
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que $\lambda = i\omega_0$ est une solution de l'équation caractéristique, les deux équations précédentes se simplifient pour donner :

$$\begin{aligned}
&sa_2 f(i\omega_0)\cos(\omega_0 L) - stL\sin(\omega_0 L) - \frac{sd_2}{\omega_0}f(i\omega_0)\sin(\omega_0 L) \\
&- \frac{stLd_1}{\omega_0}f(i\omega_0)\cos(\omega_0 L) = -\frac{a_3 s^3}{8}f(i\omega_0)\cos(\omega_0 L) + \frac{d_3 s^3}{8\omega_0}f(i\omega_0)\sin(\omega_0 L) \\
&- a_2 rs\cos(\omega_0 L)f(i\omega_0) + \frac{d_2}{\omega_0}rs\sin(\omega_0 L)f(i\omega_0) - \frac{a_2}{2}su\cos(\omega_0 L)f(i\omega_0) \\
&+ \frac{d_2}{2\omega_0}su\sin(\omega_0 L)f(i\omega_0) - \frac{a_2}{2}sv\sin(\omega_0 L)f(i\omega_0) - sv\frac{d_2}{2\omega_0}sv(1 - \cos(\omega_0 L))
\end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned}
& sa_2 f(i\omega_0) \sin(\omega_0 L) + stL \cos(\omega_0 L) + \frac{sd_2}{\omega_0} f(i\omega_0)(1 - \cos(\omega_0 L)) + \frac{stLd_1}{\omega} \sin(\omega_0 L) f(i\omega_0) = \\
& - \frac{a_3 s^3}{8\omega_0} f(i\omega_0) \sin(\omega_0 L) + \frac{d_3 s^3}{8\omega_0} f(i\omega_0)(1 - \cos(\omega_0 L)) - a_2 r s \sin(\omega_0 L) f(i\omega_0) \\
& + \frac{d_2 r s}{2\omega_0} (1 - \cos(\omega_0 L)) f(i\omega_0) - \frac{a_2}{2} s u \sin(\omega_0 L) f(i\omega_0) + \frac{d_2 s u}{2\omega_0} f(i\omega_0)(1 - \cos(\omega_0 L)) \\
& + \frac{a_2}{2} s v \cos(\omega_0 L) f(i\omega_0) - \frac{d_2 s v}{2\omega_0} \sin(\omega_0 L) f(i\omega_0)
\end{aligned}$$

En éliminant les termes en st nous obtenons :

$$\begin{aligned}
& s \left(a_2 - \frac{d_2}{\omega_0} (\sin(2\omega_0 L) - \sin(\omega_0 L)) + \frac{d_1 a_2}{\omega_0} f(i\omega_0) \sin(2\omega_0 L) + \frac{d_1 d_2}{\omega_0^2} (\cos(\omega_0 L) - 1) \right) \\
= & s^3 \left(\frac{-a_3}{8} - \frac{d_1 a_3}{8\omega_0} f(i\omega_0) \sin(2\omega_0 L) + \frac{d_3}{8\omega_0} \sin(\omega_0 L) + \frac{d_1 d_3}{8\omega_0^2} f(i\omega_0) (\cos(\omega_0 L) - \cos(2\omega_0 L)) \right) \\
& - a_2 \frac{r}{s^2} - \frac{d_1 a_2 r}{\omega_0 s^2} \sin(2\omega_0 L) f(i\omega_0) + \frac{d_2 r}{2\omega_0 s^2} \sin(\omega_0 L) + \frac{d_1 d_2 r}{\omega_0^2 s^2} f(i\omega_0) (\cos(\omega_0 L) - \cos(2\omega_0 L)) \\
& - \frac{a_2 u}{2s^2} - \frac{a_2 d_1 u}{2\omega_0 s^2} f(i\omega_0) \sin(2\omega_0 L) + \frac{d_2 u}{2\omega_0 s^2} \sin(\omega_0 L) + \frac{d_1 d_2 u}{2\omega_0^2 s^2} f(i\omega_0) (\cos(\omega_0 L) - \cos(2\omega_0 L)) \\
& + \frac{d_1 a_2}{2\omega_0 s^2} v f(i\omega_0) \cos(2\omega_0 L) + \frac{d_2 v}{2\omega_0 s^2} (1 - \cos(\omega_0 L)) - \frac{d_1 d_2 v}{2\omega_0^2 s^2} \sin(\omega_0 L)
\end{aligned}$$

Il ne reste qu'à isoler s et utiliser les valeurs de r , u et v obtenues précédemment.

Annexe B

PROGRAMME MATLAB UTILISÉ DANS LE CHAPITRE 5 :

Définition de la courbe de restitution

```
function a=a(t)
b=250-90 * exp(-t/45);
a=20+(b t^ 5.5)/(72 ^ (5.5)+t ^ (5.5));
```

Définition de la fonction d

```
function d=d(t);
c=0.0417-0.0135* exp(-(t-37)/18);
d=1./c;
```

Fonction trouvant le point de bifurcation pour la *ennième* valeur propre

```
function trouv=trouv(del,sig,n);
global SIG;
SIG=sig;
global DEL;
DEL=del;
global N;
N=n;
trouv=fzero(@glob,15,optimset('TolX',10^(-13)));
```

Fonction dont on cherche le zéro afin de trouver les longueurs critiques

```
function glob=glob(l)
glob=ff(s(l))*(a(ttt(l))-a(ttt(l)-0.01))/0.01-1;
```

Fonction donnant la valeur du point fixe en fonction de L

```
function ttt=ttt(l);
global L;
L=l;
ttt=fzero(@tt,340,optimset('MaxFunEvals',3000,'MaxIter',2000));
```

Fonction donnant la valeur propre au point critique

```
function s=s(l);
D=(d(ttt(l))-d(ttt(l-0.01)))/0.01;
global L;
L=l;
global dd;
dd=D;
global N;
s=fzero(@t,(2*N*pi+3.5)/L);
```

Fonction dont le zéro donne la valeur du point fixe en fonction de L

```
function tt=tt(x);
global L;
tt=L*d(x)-a(x)-x;
```

Fonction dont le zéro permet de trouver la valeur propre au point critique

```
function t=t(x);
global dd;
global L;
t=sin((x*L)/2)-(x/dd)*cos((x*L)/2);
```

Fonction calculant les solutions de l'équation caractéristique près d'une valeur donnée en entrée

```
function eqcarsol=eqcarsol(sig,del,l,inr,ini);
global L;
```

```

L=1;
global SIG ;
SIG=sig;
global DEL;
DEL=del;
tr=ttt(1);
aa=(a(tr)-a(tr-0.01))./0.01;
dd=(d(tr)-d(tr-0.01))./0.01;
global A;
A=aa;
global D;
D=dd;
eqcarsol=fminsearch(@eqcar,[inr,ini],optimset('MaxFunEvals',3000,'MaxIter',2000,'TolX'
13)));

```

fonction dont il faut trouver les zéros pour obtenir des solutions de l'équation caractéristique

```

function eqcar=eqcar(lam);
global L;
global DEL;
global SIG;
global A;
global D;
lambda=lam(1)+sqrt(-1)* lam(2);
rac=D-lambda-exp(-lambda*L)*(D+A*ffi(lambda)*lambda);
eqcar=abs(rac);

```

Fonction qui prend une solution de l'équation caractéristique et en effectue la continuation sur un intervalle donné

```

function conti=conti(n,sig,del,deb,fin,pas);
ll=trouv(del,sig,n);
l=ceil(ll)-pas * ceil((ceil(ll)-ll)/pas);
rr=round((l-deb)/pas);

```

```

ss=round((fin-1)/pas);
lami=s(1);
y=eqcarsol(sig,del,l,0,lami);
x(rr+1,1)=y(1);
x(rr+1,2)=y(2);
x(rr+1,3)=1;
for j=1 :ss
y=eqcarsol(sig,del,l+pas * j,x(rr+j,1),x(rr+j,2));
x(rr+j+1,1)=y(1);x(rr+j+1,2)=y(2);x(rr+j+1,3)=l+pas*j;
x(rr+j+1,4)=eqcar(y);
l+pas*j
end
for j=1 :rr
y=eqcarsol(sig,del,l-pas * j,x(rr-j+2,1),x(rr-j+2,2));
x(rr-j+1,1)=y(1);x(rr-j+1,2)=y(2);x(rr-j+1,3)=l-pas*j;
x(rr-j+1,4)=eqcar(y);
l-pas*j
end
conti=x;

```

Deux façons de calculer la fonction $f(\lambda)$

```

function ff=ff(w);
global W;
W=w;
global DEL;
global SIG;
F=quad(@f,-DEL,DEL,SIG* 10^(-12));
G=quad(@g,-DEL,DEL,SIG* 10^(-12));
ff=F/G;

function ffi=ffi(lambda)
global LAMBDA;

```

```

LAMBDA=lambda;
global DEL;
global SIG;
F=quad(@fi,-DEL,DEL);
G=quad(@g,-DEL,DEL);
ffi=F/G;

```

Trois fonctions auxiliaires utilisées dans le calcul des intégrales de la fonction f

```

function fi=fi(x)
global LAMBDA;
global SIG;
fi=exp((-x.^2./SIG)).* exp((LAMBDA.* x));

function g=g(x);
global SIG;
g=exp(-x.^2./SIG);

function f=f(x);
global W;
global SIG;
f=real(exp((-x.^2./SIG)).* exp((sqrt(-1). * W.*x)));

```

Fonction pour trouver le lieu ou les parties réelles des valeurs propres se croisent

```

function trouvcroi=trouvcroi(n1,n2,sig)
global N1;
N1=n1;
global N2;
N2=n2;
global SIG;
SIG=sig;
lin=trouv(0.1,sig,n2);
a=fzero(@auxi,lin,optimset('TolX',10^(-10)));

```

```
trouv croi=[a,lin-a,auxi(a)]
```

Fonction dont les zéros correspondent au lieu de croisement des parties réelles de valeurs propres

```
function auxi=auxi(l)
global N1 ;
global N2 ;
global SIG ;
Lami1=(3.5+2* pi * N1)/l;
Lamr1=log(((a(ttt(l))-a(ttt(l)-0.01))/0.01) * ff(Lami1))/l;
Lami2=(3.5+2 * pi * N2)/l;
Lamr2=log(((a(ttt(l))-a(ttt(l)-0.01))/0.01) * ff(Lami2))/l;
y1=eqcarsol(SIG,0.1,l,Lamr1,Lami1);
y2=eqcarsol(SIG,0.1,l,Lamr2,Lami2);
auxi=y1(1)-y2(1);
```

Fonction permettant d'effectuer des simulations numériques

```
function runsimul=runsimul(n1,n2,l,sig,iter,bruit,ini);
vbruit=bruit.* rand(n1+n2,1);
vect=ini+vbruit-bruit/2;
pas=1/n1;
const=0;
for k=1 :2 * n2
const=const+exp(-((n2-k)* pas)^ 2/sig);
end
A=0;
for k=1 :2 * n2
A=A+a(vect(k))*exp(-((n2-k)*pas)^2/sig);
end
A=A/const;
D=0;
for k=1 :n1;
D=D+d(vect(n2+k))*pas;
```

```
end
for k=1 :n1+n2;
runsimul(k)=vect(k);
end
runsimul(n1+n2+1)=D-A;
for j=n1+n2+2 :iter
runsimul(j)=runsimul(j-1)+A;
runsimul(j)=runsimul(j)+pas*(d(runsimul(j-1))-d(runsimul(j-n1))); A=0;
for k=1 :2* n2;
A=A+a(runsimul(j-n1-n2+k))* exp(-((n2-k) * pas) ^ 2/sig);
end
A=A/const;
runsimul(j)=runsimul(j)-A; end
```


BIBLIOGRAPHIE

- [1] Bélair, J. ; Campbell, S.A., *Analytical and asymptotically-assisted of Hopf bifurcation in delay differential equations*, Can. Appl. Math. Quart,3, pp. 137-154
- [2] Beuter, Anne ; Glass, Leon ; C. Mackey, Michael ; Michele S. Titcombe *Nonlinear Dynamics in Physiology and Medicine* N.Y. Springer, 2003
- [3] Comtois, Philippe ; Vinet, A., *Stability and bifurcation in an integral-delay model of cardiac reentry including spatial coupling in repolarization* Physical Review E 68, 051903 (2003)
- [4] Courtemanche, Marc ; Keener, James ; Glass, Leon *A delay equation representation of pulse circulation on a ring in excitable media* SIAM J.Appl. Math. 56 (1996) no1 119-142
- [5] Glass,Leon ; Hunter, Peter ; Mc Culloch, Andrew, *Theory of Heart* N.Y. Springer-Verlag, 1991
- [6] Guckenheimer, John ; Holmes, Philip, *Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcation of vector fields* N.Y. Springer Verlag 1983
- [7] Hale, Jack K., *Functional Differential equations*, N.Y. Springer 1971
- [8] Roberge, F.A. ; Vinet, A., *The dynamics of sustained reentry in a ring model of cardiac tissue*. Ann. of Biomed. Eng., 22 :568-591,1994
- [9] Vinet, A., *Quasi-periodic movement in a ring model of cardiac tissue : multi-stability and low dimensional equivalence*. Ann. Biomed Eng. 28 :704-720