Université de Montréal

# Propriété d'universalité de la fonction zêta de Riemann

par

Jean-Philippe Samson

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en mathématiques

mars 2003

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

# Propriété d'universalité de la fonction zêta de Riemann

présenté par

## Jean-Philippe Samson

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

*Hidemitsu Sayeki*

(président-rapporteur)

*Paul M. Gauthier*

(directeur de recherche)

*Andrew Granville*

(membre du jury)

Mémoire accepté le:

# SOMMAIRE

Ce document traite d'une fonction importante en analyse complexe et en théorie analytique des nombres. Nous verrons que la fonction zêta de Riemann peut fournir une bonne approximation sur la répartition des nombres premiers. Cette approximation sera utilisée pour montrer que la fonction zêta possède une propriété intéressante en théorie de l'approximation : la propriété d'universalité.

**Mots clés :** Série de Dirichlet, hypothèse de Riemann, nombres premiers et universalité.

# ABSTRACT

This document treats of an important function in complex analysis and in analytic number theory. We will see that the Riemann zeta function can give a good approximation of the distribution of prime numbers. This approximation will be used to show that the zeta function has an interesting property in approximation theory : the universality property.

**Keywords :** Dirichlet series, Riemann's hypothesis, prime numbers and universality property.

# REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier mon directeur de maîtrise Paul M. Gauthier. Les cours et les séminaires qu'il a donnés ont été très instructifs. Ses conseils et ses explications m'ont beaucoup aidé lors de la rédaction de ce mémoire. Je me souviendrai de sa grande disponibilité et de son ouverture d'esprit.

Je remercie mes parents pour leurs encouragements. Je remercie ma copine Andréanne qui a été une véritable source d'inspiration et de motivation durant ce travail. Finalement, je remercie tous mes amis, surtout Marc, Sébastien et Nabil.

# Table des matières

# INTRODUCTION

C'est dans son article *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse* publié en 1859 que Bernhard Riemann a influencé plusieurs générations de mathématiciens. La fonction zêta de Riemann prit alors toute son importance en théorie des nombres. La conjecture de Riemann sur l'emplacement des zéros de cette fonction est encore aujourd'hui un problème ouvert. Plusieurs résultats sur la fonction zêta de Riemann ont vu le jour dans l'espoir de répondre à cette conjecture. Voronin montra aux alentours des années 1970 que la fonction zêta a son importance dans un autre domaine des mathématiques : la théorie de l'approximation. La fonction zêta possèderait la propriété d'universalité sur un disque du plan complexe. La propriété est la suivante :

*Soit $r \in \,]0, 1/4[$ et $f$ une fonction holomorphe sur $D(0,r)$, continue et ne s'annulant pas sur $\overline{D(0,r)}$. Alors, pour tout $\epsilon > 0$ il existe un nombre réel $T$ tel que*

$$\max_{|z|\leq r}\left|f(z)-\zeta\left(z+\frac{3}{4}+iT\right)\right|<\epsilon.$$

Un exemple d'une telle fonction est rare malgré le fait qu'il y en ait une infinité.

Les séries de Dirichlet seront à l'étude dans le premier chapitre. La fonction zêta de Riemann étant elle-même une série de Dirichlet, il est pertinent pour ce mémoire de s'attarder aux propriétés de telles séries. Il sera question de convergence, de convergence absolue et de convergence uniforme de ces séries. Nous verrons aussi quelques approximations de séries à l'aide des séries de Dirichlet.

Le deuxième chapitre sera entièrement consacré à la fonction zêta de Riemann. Le prolongement méromorphe au plan complexe de cette fonction est le premier pas. Ensuite, nous nous intéressons à ses zéros. L'hypothèse de Riemann sera citée. Nous verrons quelques théorèmes approximant le nombre de ces zéros dans un rectangle d'une région donnée. Nous terminerons ce chapitre en voyant que l'étude des zéros nous fournit un estimé de $\pi(x)$, le nombre de nombres premiers inférieurs ou égals à x. L'approximation est :

$$\pi(x) \sim \int_2^x \frac{1}{\log(t)} dt.$$

Cet estimé sera utilisé au troisième chapitre.

Le but ultime de ce mémoire est la preuve de la propriété d'universalité de la fonction zêta de Riemann. C'est dans le dernier chapitre qu'elle sera faite.

# PRÉLIMINAIRES

Ces notations seront utilisées dans ce mémoire.

• $D(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} \| z - z_0| < r\}$, où $z_0$ est un nombre complexe et $r > 0$

• $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, ...\}$, $\mathbb{P} :=$ l'ensemble des nombres premiers

• Si $E$ est un sous-ensemble de nombres complexes, alors $\overline{E}$ désigne sa fermeture, $Int(E)$ désigne son intérieur et $mes(E)$ est sa mesure de Lebesgue s'il est mesurable

• Une fonction $f$ est holomorphe sur sous-ensemble fermé $E$ non-vide si elle l'est sur un sous-ensemble ouvert contenant $E$

• Si $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{P}$, alors $v_p(n) :=$ plus petit entier positif $m$ tel que $p^m$ divise $n$.

• $[x] :=$ partie entière de $x$ et $\{x\} :=$ partie fractionnaire de $x$

• $\{\rho_n\}_{n=1}^{\infty}$ est la suite des zéros non-triviaux de la fonction zêta de Riemann

Ce chapitre a pour but de rappeler des notions élémentaires d'analyse complexe. Le lecteur pourra consulter les livres $[SZ]$ et $[L1]$ s'il veut voir les détails.

La fonction gamma sera très importante dans l'étude de la fonction zêta de Riemann. Elle sera utilisée entre autres dans l'exposition d'une formule explicite du prolongement méromorphe de la fonction zêta de Riemann. La fonction $\Gamma$ est définie par le produit infini

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}},$$

où $\gamma = \lim_{n\to\infty} \left( \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n \right)$ est la constante d'Euler. La fonction $\Gamma$ est une fonction méromorphe. Ses seules singularités sont des pôles simples aux entiers négatifs $0, -1, -2, \ldots$

La plus connue des représentations de la fonction $\Gamma$ est celle sous forme d'intégrale impropre dans le demi-plan $Re(z) > 0$. En fait, sur ce demi-plan, elle est donnée par

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt.$$

Dans ce demi-plan, la fonction $\Gamma$ est une fonction définie à l'aide d'une intégrale impropre. Dans ce mémoire, il sera question de l'holomorphie de telles fonctions. Pour une fonction définie à l'aide d'une intégrale sur une courbe de $\mathbb{C}$, nous avons le théorème suivant :

**Théorème 0.0.1.** *Soit $f$ une fonction continue sur $\Omega \times C$, où $\Omega$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{C}$ et $C$ est une courbe continûment différentiable par morceaux de $\mathbb{C}$. Si $f(\cdot, \xi)$ est holomorphe sur $\Omega$ pour tout $\xi \in C$ fixé, alors la fonction $F(z) = \int_C f(z,\xi)d\xi$ est holomorphe sur $\Omega$ et*

$$F'(z) = \int_C f_z(z,\xi)d\xi.$$

La généralisation de ce théorème aux intégrales impropres existe, mais il faut cependant y ajouter des hypothèses. D'abord, une courbe infinie est une fonction injective $\xi : [a, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{C}$ continûment différentiable par morceaux sur $[a, +\infty[$. On note par $C$ l'image de $\xi$ par $[a, +\infty[$. Soit $f$ une fonction définie et intégrable sur $C$. Cela implique que pour tout $T > a$,

$$F(T) := \int_a^T f(\xi(t))\xi'(t)dt \text{ existe.}$$

On dit que

$$\int_C f(\xi)d\xi \text{ converge si } \lim_{T\to+\infty} F(T) \text{ existe.}$$

Maintenant, considérons des intégrales impropres de la forme

$$\int_C f(z,\xi)d\xi,$$

où $z$ est une variable complexe. La fonction $\Gamma$ est de cette forme avec l'intervalle $[0, +\infty[$ comme domaine d'intégration. Nous établirons un critère sur l'holomorphie de telles fonctions. Ce critère nécessite la notion de convergence uniforme pour ces intégrales impropres.

Soit $C$ une courbe infinie et $E$ un sous-ensemble de $\mathbb{C}$. Soit $f : E \times C \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction telle que $f(z, \cdot)$ est intégrable sur $C$ pour $z \in E$ fixé. On dit que $\int_C f(z,\xi)d\xi$ **converge uniformément sur $E$ vers** $F(z)$ si, en définissant

$$F(z,T) := \int_a^T f(z,\xi(t))\xi'(t)dt \text{ pour tout } z \in E \text{ et } T > a,$$

on a que $\lim_{T \to +\infty} F(z,T) = F(z)$ uniformément sur $E$.
Le théorème suivant est un critère très important permettant de conclure la convergence uniforme d'une intégrale impropre.

**Théorème 0.0.2.** *Soit $f$ une fonction telle que décrite dans la définition précédente. Soit $M$, une fonction réelle positive sur $[a, +\infty[$ telle que :*
1) $\int_a^\infty M(t)dt$ *converge*
2) $|f(z,\xi(t))\xi'(t)| \leq M(t)$ *pour tout* $t \geq a$ *et* $z \in E$.
*Alors, l'intégrale impropre $\int_C f(z,\xi)d\xi$ converge uniformément sur $E$.*

Voici un théorème qui nous permettra de conclure sur l'holomorphie de fonctions définies à l'aide d'intégrales impropres. Ce théorème sera utile pour la suite de ce mémoire.

**Théorème 0.0.3.** *Soit $f$ une fonction continue sur $\Omega \times C$, où $\Omega$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{C}$ et $C$ est une courbe infinie. Si*
1) $f(\cdot, \xi)$ *est holomorphe sur* $\Omega$ *pour tout* $\xi \in C$ *fixé*
2) $\int_C f(z,\xi)d\xi$ *converge uniformément sur les compacts de* $\Omega$,
*alors la fonction $F(z) = \int_C f(z,\xi)d\xi$ est holomorphe sur $\Omega$ et*

$$F'(z) = \int_C f_z(z,\xi)d\xi.$$

La représentation de la fonction gamma sous forme d'intégrale dans le demi-plan $Re(z) > 0$ permet de déduire les prochaines propriétés de cette fonction.

**Proposition 0.0.1.** *Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $Re(z) > 0$. Alors,*
1) $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$
2) $\Gamma(1) = 1$
3) $\Gamma(n+1) = n!$ *si* $n \in \mathbb{N}$.

La première propriété est parfois appelée l'équation fonctionnelle de la fonction $\Gamma$. La troisième propriété nous dit que la fonction $\Gamma$ est une généralisation de la factorielle $n!$. Les prochains théorèmes seront très utiles par la suite.

**Formule de réflexion :** *La fonction $\Gamma$ satisfait l'équation fonctionnelle :*
$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$
**Formule de duplication de Legendre :** *La fonction $\Gamma$ satisfait l'équation fonctionnelle :*
$$\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right) = \sqrt{\pi}2^{1-z}\Gamma(z).$$
**Formule de Stirling :** *Pour tout $z$ tel que $Arg(z) \in [-\pi+\delta, \pi-\delta]$, on a*
$$\log\Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right)\log(z) - z + \log\sqrt{2\pi} + O(|z|^{-1}).$$
*lorsque $|z|$ tend vers l'infini.*

**Corollaire 0.0.1.** *Pour tout $z$ tel que $|Arg(z)| < \pi$, on a l'approximation*
$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \log(z) + O\left(\frac{1}{|z|}\right)$$
*lorsque $|z|$ tend vers l'infini.*

Le concept d'ordre d'une fonction entière sera utilisé à la section 2.6 de ce mémoire. Pour une fonction entière $f$ et $r > 0$, notons

$$M(f;r) := \max_{|z|=r} |f(z)|$$

le module maximum de $f(z)$ sur le cercle $|z| = r$. Une fonction entière est **d'ordre fini** s'il existe une constante $A > 0$ et un $r_0 > 0$ tels que

$$M(f;r) \leq e^{r^A} \text{ pour tout } r > r_0.$$

Dans ce cas, **l'ordre de f**, noté $e(f)$, sera

$$e(f) := \inf\{A > 0 | \exists r_0 > 0 \ \forall r > r_0 \ M(r;f) \leq e^{r^A}\}.$$

Si une fonction entière n'est pas d'ordre fini, alors on dira qu'elle est **d'ordre infini** et on convient que $e(f) = +\infty$. Voici des définitions équivalentes d'une fonction d'ordre fini.

1) Il existe une constante $A > 0$ et un $r_0 > 0$ tels que

$$M(r;f) \leq e^{r^A} \text{ pour tout } r > r_0.$$

2) Il existe des constantes $A > 0$, $B > 0$ et un $r_0 > 0$ tels que

$$M(r;f) \leq Be^{r^A} \text{ pour tout } r > r_0.$$

3) Il existe des constantes $A > 0$, $B > 0$ et un $r_0 > 0$ tels que

$$M(r;f) \leq e^{Br^A} \text{ pour tout } r > r_0.$$

En particulier, une fonction entière $f$ est dite **de type exponentiel** s'il existe une constante $A > 0$ et un $r_0 > 0$ tels que $M(f;r) \leq e^{Ar}$ pour tout $r > r_0$. Le **type** d'une telle fonction est égal à $\inf\{A > 0 | \exists r_0 > 0 \ \forall r > r_0 \ M(f;r) \leq e^{Ar}\}$. On remarque qu'une fonction de type exponentiel est d'ordre plus petit ou égal à un. Pour $A \geq 0$, une fonction entière de type exponentiel est **de classe** $E^A$ si son type est plus petit ou égal à $A$. Il existe une formule explicite permettant de déterminer l'ordre d'une fonction entière qu'elle soit d'ordre fini ou non. Pour toute fonction entière $f$,

$$e(f) = \limsup_{r\to\infty} \left( \frac{\log(\log(M(r;f)))}{\log r} \right).$$

Soit $f_1$ et $f_2$ des fonctions entières. Alors,

1) Si $e(f_1) < e(f_2)$, alors $e(f_1 + f_2) = e(f_2)$.

2) Si $e(f_1) \leq e(f_2)$, alors $e(f_1 f_2) = e(f_2)$.

3) Si P est un polynôme de degré plus grand ou égal à 1, alors $e(f_1/P) = e(f_1)$.

4) L'ordre de $f_1$ et l'ordre de sa dérivée coïncident.

**Exemple 0.0.1.** *L'ordre d'un polynôme est* 0.

**Exemple 0.0.2.** *Si $P$ est un polynôme de degré $m$, alors $e(e^P) = m$.*

**Exemple 0.0.3.** *La fonction* $1/\Gamma$ *étant une fonction entière, la formule de Stirling nous permet de conclure que son ordre est* 1.

# Chapitre 1

## SÉRIES DE DIRICHLET

Les références pour ce chapitre sont $[M], [T1], [SZ], [V]$ et $[MR]$.

### 1.1. Introduction

Une série de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$ où $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite de nombres complexes et $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite de nombres réels telle que :

1) $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$

2) $\lim_{n \to +\infty} \lambda_n = +\infty$

est dite **série de Dirichlet**. Ce chapitre est consacré entièrement aux séries de Dirichlet.

**Exemple 1.1.1.** *Dans un cadre plus particulier, le deuxième chapitre de ce mémoire sera entièrement consacré à cette série de Dirichlet : la fonction* ***zêta de Riemann***

$$\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}.$$

*Remarquons que* $n^{-z} = e^{-z log(n)}$, *donc que* $a_n = 1$ *et* $\lambda_n = \log(n)$. *La suite* $\{\log(n)\}_{n=1}^{\infty}$ *est une suite de nombres réels croissants satisfaisant les conditions* 1) *et* 2) *de la définition de série de Dirichlet.*

## 1.2. Le domaine de convergence

La première étape est de savoir où cette série converge. Le domaine de convergence d'une série de Dirichlet est le plus grand ouvert connexe où cette série converge. Par exemple, pour une série de Taylor, le domaine de convergence est soit tout le plan complexe, soit un disque ouvert ou soit l'ensemble vide. Avant de discuter du domaine de convergence d'une série de Dirichlet, voyons quelques exemples.

**Exemple 1.2.1.** *Considérons la fonction $\zeta$.*
*Pour tout $z$ tel que $Re(z) = x$, on a que $|n^{-z}| = |n^{-x}|$ et la série $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-x}$ converge si $x > 1$ et diverge si $x \leq 1$. Par le critère de comparaison pour les séries, on conclut que le domaine de convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ est le demi-plan $Re(z) > 1$.*

**Exemple 1.2.2.** *On considère une série de Taylor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n w^n$ avec un rayon de convergence $R > 0$, où $R^{-1} = \limsup_{n\to\infty} \mid a_n \mid^{1/n}$. On remarque que la fonction représentée par cette série de Taylor est une fonction holomorphe sur le disque ouvert $D(0, R)$ avec un zéro d'ordre supérieur ou égal à 1 à l'origine. On applique la transformation $w = e^{-z}$ à cette série. La série obtenue est de la forme :*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nz}.$$

*C'est une série de Dirichlet où $\lambda_n = n$. Cette série converge lorsque $|e^{-z}| < R$. Le domaine de convergence de la série est donc le demi-plan $Re(z) > \log(R^{-1})$. En utilisant la formule du rayon de convergence, le domaine de convergence de cette série est le demi-plan $Re(z) > \limsup_{n\to\infty} \frac{log|a_n|}{n}$.*

Dans ces deux exemples, le domaine de convergence est un demi-plan à droite. En fait, le domaine de convergence d'une série de Dirichlet est soit un demi-plan à droite, soit tout le plan ou soit l'ensemble vide. Énonçons ce théorème.

**Théorème 1.2.1.** *Pour toute série de Dirichlet, il existe un* $\sigma \in [-\infty, +\infty]$ *tel que la série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$ *converge dans le demi-plan* $Re(z) > \sigma$ *et diverge dans le demi-plan* $Re(z) < \sigma$.

Le nombre $\sigma$ de ce théorème, noté $\sigma_c$, est **l'abscisse de convergence** de la série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$. La droite $x = \sigma_c$ est son **axe de convergence**. Démontrons un lemme dont découle immédiatement le théorème 1.2.1. De plus, ce lemme implique l'holomorphie des séries de Dirichlet sur leur demi-plan de convergence.

**Lemme 1.2.1.** *Si la série de Dirichlet* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$ *converge en un point* $z_0$, *alors celle-ci converge uniformément dans tout cône fermé* $|\arg(z - z_0)| \leq \gamma$, *où* $\gamma \in [0, \pi/2[$.

Démonstration. Soit $\gamma \in [0, \frac{\pi}{2}[$ et son cône fermé

$$C_\gamma := \{z \in \mathbb{C} \big| |\arg(z - z_0)| \leq \gamma\}.$$

Montrons que la suite de fonctions $\left\{ \sum_{n=1}^{k} a_n e^{-\lambda_n z} \right\}_{k=1}^{\infty}$ est une suite de Cauchy uniformément sur $C_\gamma$, c'est-à-dire que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier $N_\epsilon > 2$ tel que pour tous entiers $q, p > N_\epsilon$ et pour tout $z \in C_\gamma$ on a que $\left| \sum_{p \leq n \leq q} a_n e^{-\lambda_n z} \right| < \epsilon$. Soit $\epsilon > 0$ et $z \in C_\gamma$ tel que $z = z_0 + z_1$, où $z_1 = x_1 + iy_1$ et $x_1 > 0$. Par hypothèse, $|\arg(z_1)| \leq \gamma$ et alors $\tan(\arg(z_1)) = \frac{y_1}{x_1} \leq M$, où $M := \tan(\gamma)$. Posons

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k e^{-\lambda_k z_0}.$$

On sait par hypothèse que $\lim_{n \to \infty} S_n = S$. Pour $q$ et $p$ des nombres entiers tels que $q > p \geq 2$, nous avons ces inégalités :

$$\left| \sum_{p \leq n \leq q} a_n e^{-\lambda_n z} \right| = \left| \sum_{p \leq n \leq q} (S_n - S_{n-1})\, e^{-\lambda_n z_1} \right|$$

$$= \left| \sum_{p \leq n \leq q} ((S_n - S) - (S_{n-1} - S)) e^{-\lambda_n z_1} \right|$$

$$= \left| \sum_{p\le n\le q-1} (S_n - S)(e^{-\lambda_n z_1} - e^{-\lambda_{n+1} z_1}) - (S_{p-1} - S)e^{-\lambda_p z_1} + (S_q - S)e^{-\lambda_q z_1} \right|$$

$$\le \left( \sup_{p\le n\le q-1} |S_n - S| \right) \sum_{p\le n\le q-1} |e^{-\lambda_n z_1} - e^{-\lambda_{n+1} z_1}| + |S_{p-1} - S \mid e^{-\lambda_p x_1} + |S_q - S| e^{-\lambda_q x_1}$$

$$\le \left( \sup_{p\le n\le q-1} |S_n - S| \right) \sum_{p\le n\le q-1} |e^{-\lambda_n z_1} - e^{-\lambda_{n+1} z_1}| + |S_{p-1} - S| + |S_q - S|.$$

Il existe un entier $N_\epsilon > 2$ tel que $|S_n - S| < \frac{\epsilon}{2+\sqrt{(1+M^2)}}$ pour tout $n > N_\epsilon$. Pour $q - 1 \ge n \ge p$, on a les inégalités suivantes :

$$|e^{-\lambda_n z_1} - e^{-\lambda_{n+1} z_1}| = |z_1| \left| \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-uz_1} du \right| \le |z_1| \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-ux_1} du$$

$$= \frac{|z_1|}{x_1}(e^{-\lambda_n x_1} - e^{-\lambda_{n+1} x_1}) \le \sqrt{1+M^2}\, (e^{-\lambda_n x_1} - e^{-\lambda_{n+1} x_1}).$$

Il en découle l'inégalité

$$\left| \sum_{p\le n\le q} a_n e^{-\lambda_n z} \right| < \frac{\epsilon}{2+\sqrt{1+M^2}} \left( \sqrt{1+M^2} \sum_{p\le n\le q-1} (e^{-\lambda_n x_1} - e^{-\lambda_{n+1} x_1}) + 2 \right)$$

pour tout entier $p \ge N_\epsilon$. On remarque que

$$\sum_{p\le n\le q-1} (e^{-\lambda_n x_1} - e^{-\lambda_{n+1} x_1}) = e^{-\lambda_p x_1} - e^{-\lambda_q x_1} < 1.$$

On conclut que $\left| \sum\limits_{p\le n\le q} a_n e^{-\lambda_n z} \right| < \epsilon$ pour tout entier $p \ge N_\epsilon$. Ce qui termine la preuve.

$\square$

On peut maintenant prouver le théorème 1.2.1 à partir de ce lemme.

DÉMONSTRATION. Si la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$ ne converge en aucun point du plan, alors on pose $\sigma = +\infty$. Par le lemme 1.2.1, si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$ converge en un point $z_1 = x_1 + iy_1$, alors la série converge dans le demi-plan $Re(z) > x_1$. Il suffit donc de poser : $\sigma := \inf \left\{ Re(z) \middle| \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z} < \infty \right\}$.

$\square$

De ce lemme et de ce théorème suit ce corollaire.

**Corollaire 1.2.1.** *Soit $D$, le domaine de convergence de la série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$. Si $D$ est non-vide, alors la fonction $f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$ est définie et est holomorphe sur $D$.*

DÉMONSTRATION. Montrons que $f$ est holomorphe sur $D$. Soit $z_0 \in D$. Il existe un disque ouvert $V_0$ autour de $z_0$ de rayon $r$ contenu dans le domaine $D$. Soit le point $z_1 = z_0 - r = x_1 + iy_1$. Il s'agit du point de $\overline{V_0}$ le plus près de l'axe de convergence de la série. On considère le point $w_1 = z_1 - \left(\frac{x_1 - \sigma_c}{2}\right)$, un point entre $\overline{V_0}$ et l'axe de convergence. On peut trouver un $\gamma \in [0, \frac{\pi}{2}[$ assez grand pour que le cône fermé $|\arg(z - w_1)| \leq \gamma$ contienne le disque fermé $\overline{V_0}$. Par le lemme 1.2.1, la série converge uniformément sur le cône fermé $|\arg(z - w_1)| \leq \gamma$, donc sur le disque $V_0$. La série de fonctions holomorphes $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$ converge uniformément vers $f$ sur $V_0$. Donc, $f$ est holomorphe sur $V_0$. Puisque $V_0$ est un ouvert arbitraire de $D$, on peut conclure que $f$ est holomorphe sur $D$.

□

## 1.3. Le demi-plan de convergence absolue

On sait que les séries qui convergent absolument ont la propriété que tous leurs réarrangements convergent vers la même valeur. Une série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$ converge absolument en $z_0 = x_0 + iy_0$ si et seulement si la série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n x_0}$ converge. En ce qui concerne les séries de Taylor, le domaine de convergence absolue et le domaine de convergence se confondent. Pour les séries de Dirichlet, ce n'est pas toujours le cas.

**Théorème 1.3.1.** *Pour toute série de Dirichlet, il existe un $\sigma \in [-\infty, +\infty]$ tel que la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$ converge absolument dans le demi-plan $Re(z) > \sigma$ et ne converge pas absolument dans le demi-plan $Re(z) < \sigma$.*

Démonstration. On considère la série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|e^{-\lambda_n z}$ et le résultat découle directement du théorème 1.2.1.

□

Le nombre $\sigma$ de ce théorème, noté $\sigma_a$, est **l'abscisse de convergence absolue** de la série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$. La droite $x = \sigma_a$ est son **axe de convergence absolue**. L'abscisse de convergence absolue est plus grande ou égale à l'abscisse de convergence, car une série qui converge absolument est une série qui converge. Cet exemple montre qu'il n'y a pas toujours égalité entre les deux abscisses.

**Exemple 1.3.1.** *La série de Dirichlet* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^z}$ *converge dans le demi-plan à droite* $Re(z) > 0$ *(La série réelle* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ *converge si* $x > 0$ *et diverge si* $x \leq 0$*). Mais, comme nous l'avons vu à l'exemple* 1.2.1, *son abscisse de convergence absolue est égal à* 1. *De plus,*

$$\zeta(z)(1 - 2^{1-z}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n)^z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^z}.$$

*La fonction* $(1 - 2^{1-z})^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^z}$ *est un prolongement méromorphe de la fonction* $\zeta$ *au demi-plan* $Re(z) > 0$.

Il existe des formules explicites pour $\sigma_c$ et $\sigma_a$. Malheureusement, ces formules ne sont pas aussi élégantes que celle du rayon de convergence pour une série de Taylor. Cependant, pour certaines séries de Dirichlet, une formule nous assure que $\sigma_c = \sigma_a$.

**Théorème 1.3.2.** *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$ *est une série de Dirichlet telle que*

$$\limsup_{n \to +\infty} \frac{n}{\lambda_n} < +\infty,$$

*alors*

$$\sigma_c = \sigma_a = \limsup_{n \to \infty} \frac{\log |a_n|}{\lambda_n}.$$

Démonstration. Soit $a := \limsup_{n\to\infty} \frac{\log|a_n|}{\lambda_n}$. Montrons que $\sigma_a \leq a$ et $\sigma_c \geq a$.

$\sigma_a \leq a$ : Il suffit de vérifier que la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n x}$ converge absolument sur l'intervalle $]a, +\infty[$. Soit $z$ un point de cet intervalle. Soit $b$ un nombre réel tel que $x > b > a$. Par hypothèse, il existe un $L > 0$ tel que $nL \leq \lambda_n$ pour tout $n \geq 1$. Il existe un entier $n_b$ tel que $\log|a_n| \leq b\lambda_n$ pour tout $n > n_b$. Si $x > b$, alors :

$$|a_n|e^{-\lambda_n x} \leq e^{-\lambda_n (x-b)} \leq e^{-nL(x-b)} \text{ pour tout } n > n_b.$$

La série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|e^{-\lambda_n x}$ converge. On conclut que $\sigma_a \leq a$.

$\sigma_c \geq a$ : Il suffit de vérifier que la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$ diverge pour z tel que $Re(z) < a$. Il existe un nombre réel $b$ tel que $x < b < a$. Soit une sous-suite $\left\{\frac{\log|a_{n_k}|}{\lambda_{n_k}}\right\}_{k=1}^{\infty}$ telle que $b\lambda_{n_k} < \log|a_{n_k}|$ pour tout $k \geq 1$. Pour les éléments de cette sous-suite,

$$|a_{n_k}|e^{-\lambda_{n_k} x} \geq e^{\lambda_{n_k}(b-x)} > 1.$$

La série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$ diverge. On conclut que $\sigma_c \geq a$. L'égalité $\sigma_c = \sigma_a = a$ est démontrée, car $\sigma_a \geq \sigma_c$.

□

Pour toute série de Dirichlet, il y a une borne supérieure sur la distance entre $\sigma_c$ et $\sigma_a$. De plus, cette borne ne dépend pas des coefficients $a_n$. Aussi, citons des formules nous permettant de déduire $\sigma_c$ et $\sigma_a$. Les références pour ces formules sont $[V]$ et $[SZ]$.

**Théorème 1.3.3.** *Pour toute série de Dirichlet* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$, $\sigma_a - \sigma_c \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{\log(n)}{\lambda_n}$.

**Théorème 1.3.4.** 1) *Si* $\sigma_c > 0$, *alors*

$$\sigma_c = \limsup_{n\to\infty} \left( \frac{\log\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right|}{\lambda_n} \right).$$

2) *Si* $\sigma_c < 0$, *alors*

$$\sigma_c = \limsup_{n\to\infty} \left( \frac{\log \left| \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k \right|}{\lambda_n} \right).$$

3) *Si* $\sigma_a > 0$, *alors*

$$\sigma_a = \limsup_{n\to\infty} \left( \frac{\log \sum\limits_{k=1}^{n} \mid a_k \mid}{\lambda_n} \right).$$

4) *Si* $\sigma_a < 0$, *alors*

$$\sigma_a = \limsup_{n\to\infty} \left( \frac{\log \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \mid a_k \mid}{\lambda_n} \right).$$

## 1.4. Le demi-plan de convergence uniforme

Nous avons vu qu'une série de Dirichlet converge uniformément sur tous les cônes fermés de son demi-plan de convergence (voir le lemme 1.2.1). Intéressons-nous maintenant aux points $z_0 = x_0 + iy_0$ du demi-plan de convergence tels que la série de Dirichlet converge uniformément dans tout demi-plan fermé $Re(z) \geq x$, où $x > x_0$.

**Théorème 1.4.1.** *Pour toute série de Dirichlet, il existe un* $\sigma \in [-\infty, \infty]$ *tel que la série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$ *converge uniformément dans tout demi-plan fermé* $Re(z) \geq \sigma_0$*, où* $\sigma < \sigma_0$.

Démonstration. Il y a deux cas à distinguer.

1)S'il existe au moins un $\sigma_1$ tel que la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$ converge uniformément dans tout demi-plan $Re(z) \geq \sigma_0$, où $\sigma_1 < \sigma_0$, alors on pose $\sigma$ comme étant égal à l'infimum de ces $\sigma_1$.

2)Au contraire, s'il n'existe pas de tel $\sigma_1$, alors on pose $\sigma$ comme étant égal à $+\infty$.

□

Le nombre $\sigma$ de ce théorème, noté $\sigma_u$, est **l'abscisse de convergence uniforme** de la série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$. La droite $x = \sigma_u$ est son **axe de convergence uniforme**. On peut situer cette nouvelle abscisse de convergence par rapport aux abscisses $\sigma_c$ et $\sigma_a$.

**Théorème 1.4.2.** *Pour toute série de Dirichlet, l'inégalité $\sigma_c \leq \sigma_u \leq \sigma_a$ est satisfaite.*

DÉMONSTRATION. Il est clair que $\sigma_c \leq \sigma_u$, car la convergence uniforme implique la convergence simple. Montrons que $\sigma_u \leq \sigma_a$, c'est-à-dire que, pour tout $a > 0$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$ converge uniformément dans le demi-plan fermé $Re(z) \geq \sigma_a + a$. Nous savons que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n(\sigma_a + a)}$ converge. Soit $\epsilon > 0$. Il existe un $N_\epsilon > 0$ tel que $\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| e^{-\lambda_k(\sigma_a+a)} < \epsilon$ pour tout $n > N_\epsilon$. Soit $z$ tel que $Re(z) = x \geq \sigma_a + a$. Alors,

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k z} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| e^{-\lambda_k x} \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n(\sigma_a+a)} < \epsilon,$$

pour tout $n > N_\epsilon$ et quel que soit $z$ tel que $Re(z) \geq \sigma_a + a$.

□

## 1.5. Formule de la moyenne et approximation de série finie

Dans cette section, nous énoncerons un théorème concernant la moyenne d'une fonction zêta généralisée sur une droite verticale du demi-plan de convergence.

Une série de Dirichlet de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z}$ est appelée une **fonction zêta généralisée**. Ce théorème sera utilisé dans la preuve de la propriété d'universalité au chapitre 3. Ensuite, on utilisera les séries de Dirichlet pour approximer des séries finies. D'abord, les séries de Dirichlet possèdent une propriété de la valeur moyenne dans leur demi-plan de convergence uniforme.

**Théorème 1.5.1.** *Soit $f$ une fonction zêta généralisée telle que $\sigma_a < \infty$. Soit $a$ un nombre réel tel que $a > \sigma_a$. Alors,*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(a+iy)|^2 dy = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n^{2a}}.$$

Démonstration. Pour tout $y$ réel, la valeur absolue de la fonction zêta généralisée au carré est

$$|f(a+iy)|^2 = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{a+iy}} \right|^2 = \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} a_{n_1} \overline{a_{n_2}} n_1^{-a-iy} n_2^{-a+iy}.$$

Puisque la fonction zêta généralisée converge uniformément sur la droite $x = a$, on intègre cette série terme à terme sur cette droite. On calcule que :

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} n_2^{iy} n_1^{-iy} dy = \begin{cases} \frac{n_2^{Ti} n_1^{-Ti} - n_2^{-iT} n_1^{iT}}{2Ti(\log(n_2) - \log(n_1))} & \text{si } n_2 \neq n_1 \\ 1 & \text{si } n_2 = n_1. \end{cases}$$

La formule de la moyenne est obtenue lorsque $T$ tend vers l'infini.

$\square$

Il existe une formule de la moyenne dans le demi-plan de convergence. Il y a certaines conditions pour que cette formule soit valide. Entre autres, il faut que la série de Dirichlet soit **d'ordre fini dans le demi-plan** $Re(z) \geq a$. Définissons cette condition qu'il ne faut pas confondre avec la définition d'ordre d'une fonction entière vue dans le chapitre préliminaire. Soit $f$ une fonction holomorphe sur le demi-plan fermé $Re(z) \geq a$. On dit que $f$ est d'ordre fini dans le demi-plan

$Re(z) \geq a$ s'il existe un nombre réel $A$ et un $y_0 > 0$ tel que

$$\sup_{x \geq a} |f(x+iy)| \leq |y|^A$$

pour tout $y > y_0$. Si la fonction $f$ est d'ordre fini dans le demi-plan $Re(z) \geq a$, alors **l'ordre de f dans le demi-plan** $Re(z) \geq a$ est

$$\inf\{A \in \mathbb{R} | \exists y_0 > 0 \, \forall y > y_0 \sup_{x \geq a} |f(x+iy)| \leq |y|^A\}.$$

Si $f$ n'est pas d'ordre fini dans le demi-plan $Re(z) \geq a$, alors on convient que l'ordre de $f$ dans le demi-plan $Re(z) \geq a$ est $+\infty$. Remarquons que l'ordre dans le demi-plan $Re(z) \geq a$ peut être $-\infty$. Cet ordre est donné par la formule explicite

$$\limsup_{y \to +\infty} \frac{\log\left(\sup_{x \geq a} |f(x+iy)|\right)}{\log|y|}.$$

Voyons un exemple qui sera pertinent à la preuve de la propriété d'universalité.

**Exemple 1.5.1.** *La série de Dirichlet* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^z}$ *est d'ordre fini dans tout demi-plan* $Re(z) \geq a$*, où* $a > 0$*. Cette série converge dans le demi-plan* $Re(z) > 0$*, mais elle ne converge absolument que dans le demi-plan* $Re(z) > 1$*. On peut supposer que* $a \in ]0,1[$*. La série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{a/2}}$ *converge. Soit*

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^{a/2}}$$

*la suite des sommes partielles de cette série convergente et soit* $A := \sup_{n \geq 1} |S_n|$*. Soit* $z = a/2 + x + iy$ *un point du demi-plan* $Re(z) \geq a$*, où* $x \geq a/2$*. Soit* $N$ *et* $M$ *des entiers positifs tels que* $N > M$*. Sur le demi-plan* $Re(z) \geq a$*, on sépare la série*

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{n^z} = \sum_{n=1}^{M} \frac{(-1)^{n+1}}{n^z} + \sum_{n=M+1}^{N} (S_n - S_{n-1}) \frac{1}{n^{x+iy}}$$

$$= \sum_{n=1}^{M} \frac{(-1)^{n+1}}{n^z} + \sum_{n=M+1}^{N-1} S_n \left(\frac{1}{n^{x+iy}} - \frac{1}{(n+1)^{x+iy}}\right) - \frac{S_M}{(M+1)^{x+iy}} + \frac{S_N}{N^{x+iy}}.$$

*En laissant tendre* $N$ *vers l'infini, on obtient que*

$$|f(z)| \leq \sum_{n=1}^{M} \frac{1}{n^{a/2+x}} + A \sum_{n=M+1}^{\infty} \left|\frac{1}{n^{x+iy}} - \frac{1}{(n+1)^{x+iy}}\right| + \frac{A}{(M+1)^x}.$$

*Estimons les trois derniers termes de cette dernière équation. Le premier est borné, car $x \geq a/2$. Il en est de même pour le dernier terme. Estimons le terme du milieu :*

$$A\sum_{n=M+1}^{\infty}\left|\frac{1}{n^{x+iy}}-\frac{1}{(n+1)^{x+iy}}\right| = A\sum_{n=M+1}^{\infty}\left|(x+iy)\int_{n}^{n+1}\frac{1}{t^{x+iy+1}}dt\right|$$

$$\leq A|x+iy|\int_{M+1}^{\infty}\frac{1}{t^{x+1}}dt = \frac{A|x+iy|}{x(M+1)^{x}}$$

$$\leq \frac{A}{(M+1)^{a/2}}\left(1+\frac{4y^2}{a^2}\right)^{1/2} \leq \frac{A}{(M+1)^{a/2}}\left(1+\frac{4}{a^2}\right)^{1/2}|y|$$

*pour $|y|$ assez grand. Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour $|y|$ assez grand, $|f(z)| \leq C|y|$.*

On peut aussi montrer que toute fonction zêta généralisée est d'ordre fini dans tout demi-plan fermé à l'intérieur du demi-plan de convergence (voir [$T1$] et [$V$]). Voici un théorème de la moyenne pour les fonctions zêta généralisées d'ordre fini dans un demi-plan fermé.

**Théorème 1.5.2.** *Soit $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^z}$ une fonction zêta généralisée d'ordre fini dans un demi-plan $Re(z) \geq a$, où $a > \sigma_c$. Si $\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(a+iy)|^2dy$ est bornée lorsque $T$ tend vers l'infini, alors*

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(x+iy)|^2dy = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|^2}{n^{2x}}$$

*uniformément sur tout intervalle compact $[a_1, a_2]$ de $]a, +\infty[$.*

La preuve de ce théorème est faite dans [$T1$]. On peut approximer la valeur d'une série finie $\sum_{n\leq x} a_n$ par une intégrale faisant intervenir la série de Dirichlet qui lui est associée $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^z}$. L'approximation d'une série finie à l'aide d'une fonction zêta généralisée sera utilisée au chapitre 2. Pour le reste de cette section, on suppose que $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite quelconque de nombres complexes. Notons $\Phi(x) := \sum_{n\leq x} a_n$ la série finie associée à la suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ et $f(z) := \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^z}$ la fonction zêta généralisée associée à la suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Voici le théorème d'approximation.

**Théorème 1.5.3.** *Soit $f$ une fonction zêta généralisée telle que $0 < \sigma_u < \infty$. Alors, pour tout $c > \sigma_u$ et pour tout $x$ qui n'est pas un entier*

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(z)\frac{x^z}{z}dz := \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} f(z)\frac{x^z}{z}dz.$$

Pour $x > 0$, on définit

$$\delta(x) := \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{x^z}{z}dz \text{ et } I(x,T) := \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}\frac{x^z}{z}dz.$$

On suppose que $c$ est un nombre réel strictement positif fixé.

**Lemme 1.5.1.** *La théorie des résidus nous permet de calculer que pour tout $x > 0$ et pour tout $T > 0$*

$$|I(x,T) - \delta(x)| < \begin{cases} x^c T^{-1}|\log x|^{-1} & \text{si } 0 < x < 1 \text{ ou } x > 1 \\ cT^{-1} & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

*De plus,*

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1/2 & \text{si } x = 1 \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Démonstration. Supposons que $0 < x < 1$. On considère la courbe rectangulaire $\Gamma$ aux sommets $c \pm iT$ et $U \pm iT$, où $U > c$. Par le théorème de Cauchy, l'intégrale $\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{x^z}{z}dz$ est égale à 0. Regardons l'intégrale sur chaque côté de $\Gamma$. Sur le segment $[c+iT, U+iT]$,

$$\left|\int_U^c \frac{x^{t+iT}}{t+iT}dt\right| \leq \frac{1}{T}\int_c^U x^t dt = \frac{x^U}{T\log x} - \frac{x^c}{T\log x}.$$

Cette dernière expression tend vers $x^cT^{-1}|\log x|^{-1}$ lorsque $U$ tend vers l'infini. Il en est de même pour l'intégrale sur le segment $[U-iT, c-iT]$. Sur le segment $[U+iT, U-iT]$,

$$\left|\int_{-T}^{T} \frac{x^{U+it}}{U+it} idt\right| \leq x^U \int_{-T}^{T} \frac{1}{(U^2+t^2)^{1/2}} dt = x^U \int_{-T/U}^{T/U} \frac{1}{(1+t^2)^{1/2}} dt.$$

Cette dernière expression tend vers 0 lorsque $U$ tend vers l'infini. Le théorème de Cauchy implique que

$$|I(x,T) - \delta(x)| < x^cT^{-1}|\log x|^{-1}.$$

Supposons que $x > 1$. On considère la courbe rectangulaire $\Gamma$ aux sommets $c \pm iT$ et $-U \pm iT$, où $U > 0$. Par le théorème des résidus, l'intégrale $\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{x^z}{z}dz$ est égale à 1. Regardons l'intégrale sur chaque côté de $\Gamma$. D'abord, sur le segment $[c+iT, -U+iT]$,

$$\left|\int_{c}^{-U} \frac{x^{t+iT}}{t+iT} dt\right| \leq \frac{1}{T}\int_{-U}^{c} x^t dt = \frac{x^c}{T\log x} - \frac{x^{-U}}{T\log x}.$$

Cette dernière expression tend vers $x^cT^{-1}|\log x|^{-1}$ lorsque $U$ tend vers l'infini. Il en est de même pour l'intégrale sur le segment $[-U-iT, c-iT]$. Sur le segment $[-U+iT, -U-iT]$,

$$\left|\int_{T}^{-T} \frac{x^{-U+it}}{-U+it} idt\right| \leq x^{-U} \int_{-T}^{T} \frac{1}{(U^2+t^2)^{1/2}} dt = x^{-U} \int_{-T/U}^{T/U} \frac{1}{(1+t^2)^{1/2}} dt.$$

Cette dernière expression tend vers 0 lorsque $U$ tend vers l'infini. Le théorème des résidus implique que

$$|I(x,T) - \delta(x)| < x^cT^{-1}|\log x|^{-1}.$$

On peut évaluer $\delta(x)$ dans ces deux cas suivant les mêmes calculs, mais en remplaçant $U$ par $T$ et en laissant $T$ tendre vers l'infini. Finalement, supposons que $x = 1$. On calcule directement que

$$I(1,T) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} \frac{1}{z} dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{-T}^{T} \frac{i}{c+it} dt$$

$$= \frac{c}{2\pi}\int_{-T}^{T} \frac{1}{c^2+t^2} dt - \frac{i}{2\pi}\int_{-T}^{T} \frac{t}{c^2+t^2} dt = \frac{1}{\pi}\arctan(T/c).$$

L'intégrale $I(1,T)$ tend vers $1/2$ lorsque $T$ tend vers l'infini. On conclut que $\delta(1) = 1/2$. On peut évaluer

$$|I(1,T) - \delta(1)| = \left|\frac{1}{\pi}\int_{T/c}^{\infty}\frac{1}{1+t^2}dt\right| \leq \int_{T/c}^{\infty}\frac{1}{t^2}dt = \frac{c}{T}.$$

Ceci complète la preuve de ce lemme.

□

Nous pouvons maintenant prouver le théorème 1.5.3.

DÉMONSTRATION. Étant donné que $c > \sigma_u$, on intègre la série terme à terme

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(z)\frac{x^z}{z}dz = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{(x/n)^z}{z}dz = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\delta(x/n) = \sum_{n\leq x} a_n.$$

□

Nous pouvons maintenant approximer une série finie en approximant une intégrale impropre. Comme nous allons le voir plus tard, des approximations de la forme

$$\sum_{n\leq x} a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} f(z)\frac{x^z}{z}dz + O(\text{une fonction en x et en T})$$

seront très utiles. L'inégalité du lemme 1.5.1 sera utilisée pour de telles approximations. Certains problèmes (parfois ouverts) sont de trouver une belle fonction à l'intérieur du grand $O$. Par exemple, la célèbre hypothèse de Riemann est une conjecture équivalente à montrer que

$$\sum_{n\leq x}\Lambda(n) = x + O(x^{1/2}(\log x)^2),$$

où $\Lambda$ est la fonction de Von Mangoldt et la fonction $\Psi(x) := \sum_{n\leq x}\Lambda(n)$ est la fonction de Chebyshev (voir $[MR]$). Ces deux dernières fonctions seront des sujets du prochain chapitre.

# Chapitre 2

## FONCTION ZÊTA DE RIEMANN

La fonction zêta de Riemann est la série de Dirichlet

$$\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

définie ainsi dans le demi-plan $Re(z) > 1$. Ce chapitre sera consacré à cette fonction. Nous verrons d'abord diverses représentations de la fonction zêta de Riemann dans des régions du plan complexe. Entre autres, la fonction zêta possède un prolongement méromorphe au plan complexe. Il sera aussi question de l'équation fonctionnelle de cette fonction. Ensuite, des fonctions arithmétiques reliées à la théorie des nombres seront introduites. Elles nous fourniront des propriétés sur les zéros de la fonction zêta. La table sera mise pour citer la célèbre hypothèse de Riemann. Nous parlerons de la fonction entière $\xi$ définie par

$$\xi(z) := \frac{1}{2} z(z-1)\pi^{-z/2}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z)$$

dont les zéros correspondent à des zéros de la fonction zêta de Riemann. Le théorème de factorisation d'Hadamard sera utilisé à ce moment. Nous pousserons un peu plus loin dans cette voie en montrant l'existence de certaines régions où la fonction zêta ne s'annule pas. Aussi, on calculera une approximation du nombre de zéros de la fonction zêta dans une région du plan complexe. Pour finir, nous rassemblerons plusieurs résultats de cette section pour montrer une approximation de la répartition des nombres premiers. Les références pour ce chapitre sont $[KV]$, $[MR]$, $[E]$, $[SZ]$, $[T1]$, $[T2]$, $[B1]$ et $[R]$.

## 2.1. Formule de $\zeta$ avec les nombres premiers

Cette représentation, dite de Euler, est le premier lien entre la fonction $\zeta$ et les nombres premiers. Elle sera utilisée au chapitre suivant.

**Théorème 2.1.1.** *Sur le demi-plan $Re(z) > 1$, la fonction $\zeta$ possède la factorisation*

$$\zeta(z) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^z}\right)^{-1}.$$

Démonstration. On considère les produits partiels

$$P_k(z) := \prod_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_j^z}\right)^{-1}.$$

Pour tout nombre premier $p$, la série géométrique $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{p^{mz}}$ est égale à $\left(1 - \frac{1}{p^z}\right)^{-1}$, car $|p^{-z}| = p^{-x} < 1$. La convergence absolue de ces séries nous permet de réarranger ce produit de séries :

$$\prod_{j=1}^{k} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{p_j^{mz}}\right) = \sum_{(m_1,\ldots,m_n) \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \frac{1}{(p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_k^{m_k})^z}.$$

Par le théorème fondamental de l'arithmétique, chaque entier positif plus grand ou égal à deux est décomposable en un produit de puissances de nombres premiers. On écrit le produit de cette façon :

$$\prod_{j=1}^{k} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{p_j^{mz}}\right) = \sum_{\forall i > k \;\; v_{p_i}(m) = 0} \frac{1}{m^z}.$$

On a que $\zeta(z) = \lim_{k \to \infty} (P_k(z) + Q_k(z))$, où

$$P_k(z) := \sum_{\forall i > k \;\; v_{p_i}(m) = 0} \frac{1}{m^z} \text{ et } Q_k(z) := \sum_{\exists i > k \;\; v_{p_i}(m) \neq 0} \frac{1}{m^z}.$$

On remarque que $\lim_{k \to \infty} Q_k(z) = 0$ sur le demi-plan $Re(z) > 1$. Ceci termine la preuve du théorème.

$\square$

## 2.2. Prolongement méromorphe de $\zeta$ au plan complexe

Pour obtenir le prolongement méromorphe de cette fonction, il nous faut utiliser la fonction gamma. La définition et les propriétés de cette fonction sont rappelées dans le chapitre préliminaire de ce mémoire. Rappelons que $1/\Gamma$ est une fonction entière avec des zéros simples en $0, -1, -2, \ldots$

**Lemme 2.2.1.** *Sur le demi-plan $Re(z) > 1$, la fonction $\zeta$ a cette représentation*

$$\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt.$$

Démonstration. La représentation intégrale de la fonction gamma dans le demi-plan $Re(z) > 1$ est donnée par $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} u^{z-1} e^{-u} du$. Le changement de variable $u = tn$ nous donne que

$$\int_0^{\infty} u^{z-1} e^{-u} du = n^z \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-nt} dt.$$

On additionne les termes pour $n = 1, \ldots, N$ et on obtient que

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^z} = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{+\infty} t^{z-1} \left( \sum_{n=1}^{N} e^{-nt} \right) dt = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{+\infty} t^{z-1} \left( \frac{1 - e^{-Nt}}{e^t - 1} \right) dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt - \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{z-1} e^{-Nt}}{e^t - 1} dt.$$

Ces deux intégrales existent, car

$$\left| \int_0^{+\infty} \frac{t^{z-1} e^{-Nt}}{e^t - 1} dt \right| \leq \int_0^{+\infty} t^{x-2} e^{-Nt} dt < +\infty$$

pour tout $N = 0, 1, 2, \ldots$ Il suffit de montrer que la deuxième intégrale tend vers 0 lorsque $N$ tend vers l'infini. Soit $\delta \in ]0, 1[$. On sépare cette intégrale

$$\left| \int_0^{+\infty} \frac{t^{z-1} e^{-Nt}}{e^t - 1} dt \right| \leq \int_0^{\delta} \frac{t^{x-1} e^{-Nt}}{e^t - 1} dt + \int_{\delta}^{+\infty} \frac{t^{x-1} e^{-Nt}}{e^t - 1} dt$$

$$\leq \int_0^{\delta} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt + e^{-N\delta} \int_{\delta}^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt.$$

La première de ces deux intégrales tend vers 0 lorsque $\delta$ décroît vers 0. Pour $\delta$ fixé, la deuxième intégrale tend vers 0 lorsque $N$ tend vers l'infini.

$\square$

Nous ne pouvons conclure que cette représentation de la fonction $\zeta$ est un prolongement méromorphe au plan complexe. Cependant, cette représentation sera utile pour montrer qu'elle possède effectivement un prolongement méromorphe au plan complexe.

Pour ce faire, considérons la fonction

$$f(z) := \frac{z}{e^z - 1}.$$

Soit $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ le développement en série de Taylor de f autour de l'origine. Cette fonction est holomorphe partout sauf aux multiples non-nuls de $2\pi i$. Le rayon de convergence de cette série de Taylor est donc $2\pi$. Pour $|z| < 2\pi$, l'équation

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n \right) \cdot \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \right) = z$$

nous fournit une relation pertinente sur les coefficients $a_n$ du développement. Comme ces deux séries convergent absolument dans le disque $D(0, 2\pi)$, on peut les multiplier terme à terme pour obtenir la relation

$$\frac{a_0}{n!0!} + \frac{a_1}{(n-1)!1!} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{1!(n-1)!} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n > 1. \end{cases}$$

Nous pouvons calculer, par récurrence, les coefficients $a_n$. Voici les premiers d'entre eux :

$$a_0 = 1, a_1 = -\frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{6}, a_3 = 0, a_4 = -\frac{1}{30}, a_5 = 0, a_6 = \frac{1}{42}, \ldots$$

La fonction f(z) + $z/2$ étant une fonction paire, les coefficients $a_{2k+1}$ sont nuls pour tout k > 0. On appelle les $|a_n|$ **nombres de Bernoulli** et nous les notons par $B_n$. Il existe une formule explicite des nombres de Bernoulli non-nuls

$$B_{2n} = \frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}}$$

pour tout $n \geq 1$. Cela revient à dire que

$$\zeta(2n) = \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} B_{2n}$$

pour tout $n \geq 1$. Les références sur les nombres de Bernoulli sont [$SZ$] et [$E$]. Utilisons ces nombres pour montrer que la fonction $\zeta$ se prolonge méromorphiquement au plan complexe.

**Théorème 2.2.1.** *La fonction $\zeta$ se prolonge méromorphiquement au plan complexe avec comme seule singularité un pôle simple en* 1*. De plus, le residu en ce pôle est* 1 *et la fonction $\zeta$ possède des zéros aux entiers négatifs pairs* $-2, -4, -6, \ldots$

DÉMONSTRATION. D'après le lemme précédent,

$$\zeta(z)\Gamma(z) = \int_0^1 \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt + \int_1^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt$$

sur le demi-plan $Re(z) > 1$. Soit

$$P(z) := \int_0^1 \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt \text{ et } Q(z) := \int_1^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt.$$

Si $z \in \overline{D(0, N)}$, où $N$ est un entier positif, et si $t \in [1, +\infty[$, alors

$$\left| \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} \right| \leq \frac{t^{N-1}}{t^{N+1}/(N+1)!} = \frac{(N+1)!}{t^2} \text{ et } \int_1^\infty \frac{1}{t^2} dt < \infty.$$

Par les théorèmes 0.0.2 et 0.0.3, la fonction $Q(z)$ est entière. Montrons que la fonction $P(z)$ est méromorphe avec comme seule singularité un pôle simple en 1. Par ce qui a été discuté précédemment, pour $0 \leq t \leq 1$,

$$\frac{t^{z-1}}{e^t - 1} = t^{z-2} - \frac{t^{z-1}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(-1)^{n-1} B_{2n}}{(2n)!} \right) t^{z+2n-2}.$$

La série de cette équation converge uniformément sur $[0, 1]$, car le rayon de convergence de la série de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} B_{2n}}{(2n)!} z^{2n}$ est $2\pi$. Donc, nous pouvons intégrer la série terme à terme. Sur le demi-plan fermé $Re(z) \geq 2$,

$$P(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{2z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} B_{2n}}{(2n)!} \left( \frac{1}{z + 2n - 1} \right).$$

Appelons $H(z)$ le côté droit de cette équation. Montrons que $H(z)$ est une fonction méromorphe ayant des pôles simples en $1, 0, -1, -3, -5, -7, -9, \ldots$. Soit $R > 2$

tel que $R$ ne soit pas un entier. Soit $n_0$ le plus petit entier positif $n$ tel que $|2n-1| > R$. On sépare la série de $H(z)$ en deux parties

$$H(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{2z} + \sum_{n=1}^{n_0-1} \frac{(-1)^{n-1}B_{2n}}{(2n)!}\left(\frac{1}{z+2n-1}\right)$$

$$+\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}B_{2n}}{(2n)!}\left(\frac{1}{z+2n-1}\right).$$

Vérifions que $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}B_{2n}}{(2n)!}\left(\frac{1}{z+2n-1}\right)$ converge uniformément sur le disque fermé $\overline{D(0,R)}$. Ainsi, cette dernière série sera une fonction holomorphe sur le disque ouvert $D(0,R)$ et $H(z)$ sera méromorphe sur ce même disque ouvert avec des pôles simples en $1, 0, -1, ..., -2n_0+3$. Si $z \in \overline{D(0,R)}$ et $n \geq n_0$, alors $\left|\frac{1}{z+2n-1}\right| \leq \frac{1}{2n_0-1-R}$. Pour $n$ assez grand,

$$\left|\frac{(-1)^{n-1}B_{2n}}{(2n)!}\left(\frac{1}{z+2n-1}\right)\right| \leq \left|\frac{B_{2n}}{(2n)!}\right| \frac{1}{2m_0-R-1} \leq \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{2n} \frac{1}{2m_0-R-1},$$

car le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}B_{2n}}{(2n)!} z^{2n}$ est $2\pi$. Aussi, la série $\sum_{n=m_0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{2n}$ converge. Le test M de Weierstrass implique la convergence uniforme sur $\overline{D(0,R)}$. La fonction $H(z)$ est méromorphe sur $D(0,R)$ avec des pôles en $1, 0, -1, -3, ..., -2n_0+3$. Comme $R$ est arbitraire, la fonction $H(z)$ est méromorphe avec des pôles simples aux entiers $1, 0, -1, -3, ...$ La fonction $H(z)$ est le prolongement méromorphe de $P(z)$.

Nous savions que $\zeta(z) = \frac{Q(z)}{\Gamma(z)} + \frac{H(z)}{\Gamma(z)}$ dans le demi-plan $Re(z) > 1$. La fonction $1/\Gamma$ est une fonction entière avec des zéros simples en $0, -1, -2, -3, ...$ Ceci nous permet de conclure que la fonction zêta se prolonge à une fonction méromorphe ayant comme seule singularité un pôle simple en 1. De plus, ce prolongement possède des zéros simples aux entiers négatifs pairs $-2, -4, -6, ...$ Le développement en série de Laurent de $\frac{Q(z)}{\Gamma(z)} + \frac{H(z)}{\Gamma(z)}$ autour de 1 nous assure que le résidu de la fonction $\zeta$ en 1 est 1.

$\square$

La fonction $\zeta$ de Riemann possède donc des zéros aux entiers négatifs pairs. Ce sont les zéros **triviaux** de la fonction $\zeta$. Il existe une **formule explicite du prolongement méromorphe de la fonction $\zeta$**

$$\zeta(z) = \frac{\Gamma(1-z)}{2\pi i} \int_{H_r} \frac{(-w)^z}{(e^w - 1)w} dw,$$

où $H_r$ est le contour de Hanckel avec $r < 2\pi$ tel qu'illustré sur la figure 2.

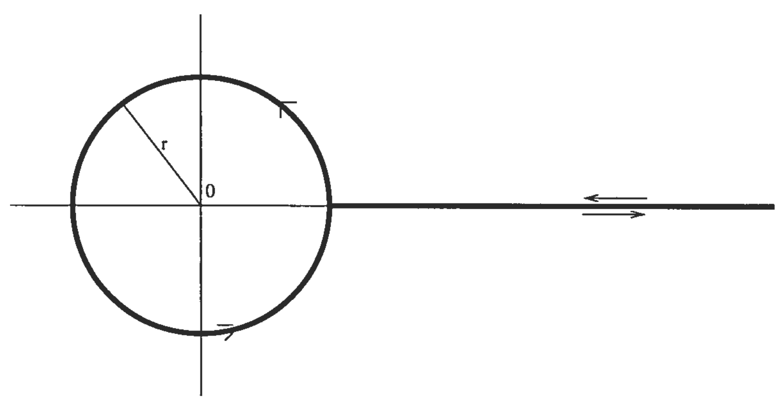


FIG. 1. Contour de Hanckel

Il faut expliquer cette intégrale, car la fonction $(-w)^z$ est multivoque sur l'axe réel positif. En fait,

$$\int_{H_r} \frac{(-w)^z}{(e^w-1)w} dw := \int_{+\infty}^{r} \frac{e^{z(\log(t)-\pi i)}}{(e^t-1)t} dt + \int_{C_r} \frac{e^{z\log(-w)}}{(e^w-1)w} dw + \int_{r}^{+\infty} \frac{e^{z(\log(t)+\pi i)}}{(e^t-1)t} dt,$$

où $C_r$ est le cercle centré à l'origine et de rayon $r$. Appelons cette intégrale $I_r(z)$. Rappelons que l'argument du logarithme est pris dans la branche principale. Il y a trois étapes à vérifier :

1) $\lim\limits_{r \searrow 0} I_r(z) = 2\pi i \zeta(z)/\Gamma(1-z)$ sur le demi-plan $Re(z) > 1$.

2) Pour tous $r, s \in \,]0, 2\pi[$ les fonctions $I_r$ et $I_s$ sont égales sur $Re(z) > 1$.

3) Pour tout $r \in \,]0, 2\pi[$ la fonction $I_r$ est entière.

1) Soit $z = x + iy$ tel que $x > 1$. Alors,

$$I_r(z) = e^{-z\pi i}\int_{+\infty}^{r}\frac{e^{z\log(t)}}{(e^t-1)t}dt + e^{z\pi i}\int_{r}^{+\infty}\frac{e^{z\log(t)}}{(e^t-1)t}dt + \int_{C_r}\frac{e^{z\log(-w)}}{(e^w-1)w}dw$$

$$= 2i\sin(\pi z)\int_{r}^{+\infty}\frac{t^{z-1}}{e^t-1}dt + \int_{C_r}\frac{e^{z\log(-w)}}{(e^w-1)w}dw, \tag{1}$$

où $C_r$ est le cercle de rayon $r$ positivement orienté. Vérifions que l'intégrale $\int_{C_r}\frac{e^{z\log(-w)}}{(e^w-1)w}dw$ tend vers 0 lorsque $r$ tend vers 0. Utilisons l'inégalité

$$\left|\int_{C_r}\frac{e^{z\log(-w)}}{(e^w-1)w}dw\right| \leq 2\pi\max_{\theta\in[0,2\pi]}\left|\frac{e^{z\log(re^{i(\theta-\pi)})}}{e^{re^{i\theta}}-1}\right|.$$

La fonction $\frac{w}{e^w-1}$ tend vers 1 lorsque $w$ tend vers 0. Si $r$ est assez petit, alors

$$\max_{\theta\in[0,2\pi]}\left|\frac{1}{e^{re^{i\theta}}-1}\right| \leq \frac{2}{r}.$$

Par cette inégalité,

$$\left|\frac{e^{z\log(re^{i(\theta-\pi)})}}{e^{re^{i\theta}}-1}\right| \leq 2\frac{|e^{x\log(r)}e^{-yArg(e^{i(\theta-\pi)})}|}{r} = 2r^{x-1}|e^{-yArg(e^{i(\theta-\pi)})}|.$$

En prenant le maximum sur les $\theta$ de cette expression et en tenant compte du fait que $x > 1$, ce terme tend vers 0 lorsque $r$ tend vers 0. En laissant tendre $r$ vers 0 dans (1) et en utilisant la formule de réflexion de la fonction $\Gamma$, nous avons vérifié que $I_r(z)$ tend vers $2\pi i\zeta(z)/\Gamma(1-z)$ sur $Re(z) > 1$ lorsque $r$ tend vers 0.

2) Soit $r, s \in\ ]0, 2\pi[$ tel que $s < r$. Calculons $I_r(z) - I_s(z)$ sur le demi-plan $Re(z) > 1$. Cette expression est une somme d'intégrales sur le contour de la figure 2.

On calcule les intégrales suivant ces courbes

$$I_r(z) - I_s(z) = \int_{C_r}\frac{e^{z\log(-w)}}{(e^w-1)w}dw + \int_{s}^{r}\frac{e^{z(\log(t)-i\pi)}}{(e^t-1)t}dt + \int_{A}^{B}\frac{e^{z\log(-w)}}{(e^w-1)w}dw$$

$$+\int_{B}^{A}\frac{e^{z\log(-w)}}{(e^w-1)w}dw + \int_{-C_s}\frac{e^{z\log(-w)}}{(e^w-1)w}dw + \int_{r}^{s}\frac{e^{z(\log(t)+i\pi)}}{(e^t-1)t}dt.$$

On considère la courbe fermée $\Gamma_1$ qui va du point $r$ jusqu'au point $A$ sur $C_r$, du point $A$ jusqu'au point $B$, du point $B$ jusqu'au point $s$ sur $-C_s$ et, finalement, $s$ à $r$. La courbe fermée $\Gamma_2$ va du point $r$ au point $s$, du point $s$ au point $B$ sur

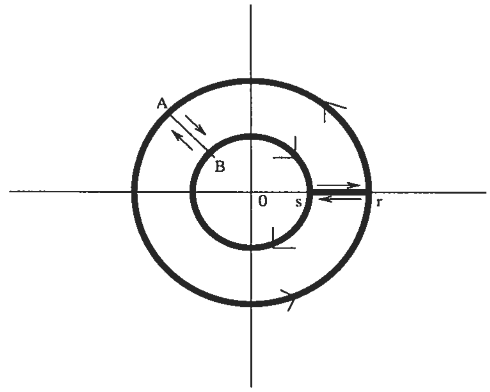


FIG. 2. Contour de $I_r - I_s$

$-C_s$, du point $B$ jusqu'au point $A$ et, finalement, du point $A$ jusqu'au point $r$ sur $C_r$. Alors,

$$I_r(z) \;-\; I_s(z) \;=\; \int_{\Gamma_1} \frac{e^{z\log_*(-w)}}{(e^w-1)w}dw \;+\; \int_{\Gamma_2} \frac{e^{z\log_{**}(-w)}}{(e^w-1)w}dw,$$

où le logarithme $\log_*$ est pris suivant la branche de l'argument $]-\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ et le logarithme $\log_{**}$ est pris suivant la branche de l'argument $]-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$. Par le théorème de Cauchy, ces deux intégrales sont nulles. Donc, la deuxième partie est prouvée. On peut dire que le prolongement holomorphe de la fonction $\zeta$ ne dépend pas du choix de r pourvu que celui-ci soit strictement plus petit que $2\pi$. Donc, pour tout $r \in ]0,2\pi[$ nous avons que $I_r(z) = 2\pi i(\Gamma(1-z))^{-1}\zeta(z)$.

3) Vérifions que $I_r$ est une fonction entière. Par le théorème 2.2.1, la fonction $\zeta$ est holomorphe partout sauf en 1 où elle a un pôle simple. La fonction $(\Gamma(1-z))^{-1}$ est une fonction entière possèdant un zéro simple en 1. Donc, $I_r$ est une fonction entière. La formule explicite du prolongement méromorphe de la fonction $\zeta$ est ainsi prouvée.

Pour les sections à venir, une **formule intégrale de la fonction $\zeta$ dans le demi-plan** $Re(z) > 0$ sera très pratique. Pour $z \neq 1$ sur le demi-plan $Re(z) > 0$,

$$\zeta(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{z-1} + z\int_1^\infty \frac{\rho(t)}{t^{z+1}}dt \tag{2}$$

où $\rho(t) = t - [t] - 1/2$.

Cette formule provient du théorème de sommation d'Euler et elle nécessite l'intégrale de Stieltjes (Voir l'annexe de [$KV$]).

**Formule de sommation :** *Soit $f \in C^1[a,b]$ à valeurs complexes. Alors,*

$$\sum_{a<n\leq b} f(n) \;=\; \int_a^b f(t)dt \;+\; \int_a^b \rho(t)f'(t)dt \;+\; \rho(a)f(a) \;-\; \rho(b)f(b).$$

Soit z tel que $Re(z) > 0$ et $z \neq 1$. Appliquons la formule de sommation à la fonction

$$f(t) = \frac{1}{t^z}$$

sur l'intervalle $[1, N]$, où $N$ est un entier positif. La formule de sommation entraîne que

$$1 + \sum_{1<n\leq N} \frac{1}{n^z} = 1 + \int_1^N \frac{1}{t^z}dt - z\int_1^N \frac{\rho(t)}{t^{z+1}}dt - \frac{1}{2} + \frac{N^{-z}}{2}$$

$$= 1 + \frac{N^{1-z}-1}{1-z} - z\int_1^N \frac{\rho(t)}{t^{z+1}}dt - \frac{1}{2} + \frac{N^{-z}}{2}.$$

En laissant N tendre vers l'infini, on a montré que la fonction $\zeta$ et la fonction $\frac{1}{2} + \frac{1}{z-1} + z\int_1^\infty \frac{\rho(t)}{t^{z+1}}dt$ coïncident. Par le théorème 0.0.2, on sait que l'intégrale converge uniformément dans le demi-plan $Re(z) > 0$.

## 2.3. L'ÉQUATION FONCTIONNELLE DE LA FONCTION $\zeta$

Une formule explicite du prolongement méromorphe de la fonction $\zeta$ de Riemann nous informe que cette fonction satisfait une certaine équation. Il s'agit de **l'équation fonctionnelle** de la fonction $\zeta$. Cette équation nous fournira, comme nous le verrons plus loin, de l'information sur les zéros de $\zeta$.

Considérons tout d'abord l'intégrale $I_{R_N}(z)$ telle que définie à la section précédente. Soit $R_N = 2\pi(N + 1/2)$, où $N$ est un entier positif. Soit $r \in\, ]0, 2\pi[$.

La soustraction de $I_r(z)$ à $I_{R_N}$(z) est une somme d'intégrales sur la courbe de la figure 2. En utilisant le théorème des résidus,

$$\frac{\Gamma(1-z)}{2\pi i}\left(I_{R_N}(z)-I_r(z)\right)=\Gamma(1-z)\sum_{n=1}^{N}Res\left(\frac{e^{z\log_*(-w)}}{(e^w-1)w},2\pi ni\right)$$

$$+\Gamma(1-z)\sum_{n=1}^{N}Res\left(\frac{e^{z\log_{**}(-w)}}{(e^w-1)w},-2\pi ni\right)$$

$$=\Gamma(1-z)\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{e^{z\log_*(-2\pi ni)}}{2\pi ni}-\frac{e^{z\log_{**}(2\pi ni)}}{2\pi ni}\right)$$

$$=\Gamma(1-z)\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{(2\pi n)^z e^{-iz\pi/2}-(2\pi n)^z e^{iz\pi/2}}{2\pi ni}\right)$$

$$=-\Gamma(1-z)(2\pi)^{z-1}2\sin\left(\frac{\pi z}{2}\right)\sum_{n=1}^{N}n^{z-1}.$$

Les branches de logarithmes $\log_*$ et $\log_{**}$ sont définies à la section précédente. Par la formule du prolongement méromorphe de la fonction $\zeta$,

$$\frac{\Gamma(1-z)}{2\pi i}I_{R_N}(z)=\zeta(z)-\Gamma(1-z)(2\pi)^{z-1}2\sin\left(\frac{\pi z}{2}\right)\sum_{n=1}^{N}n^{z-1}.$$

Montrons que $I_{R_N}(z)$ tend vers 0 lorsque $N$ tend vers l'infini. Pour cela, il suffit de le vérifier sur l'axe réel négatif. Soit $x<0$ et $\epsilon\in\,]0,\frac{\pi}{2}[$. Considérons les disques ouverts $D(2\pi ni,\epsilon)$. Il existe une constante $C_\epsilon>0$ ne dépendant que de $\epsilon$ telle que $|e^w-1|\geq C_\epsilon$ sur $\mathbb{C}\setminus\left(\underset{n\in\mathbb{Z}}{\cup}D(2\pi ni,\epsilon)\right)$. Donc,

$$\left|\int_{C_{R_N}}\frac{e^{x\log(w)}}{(e^w-1)w}dw\right|\leq\int_0^{2\pi}\frac{R_N^x}{C_\epsilon}dw=\frac{2\pi R_N^x}{C_\epsilon}.$$

Cette dernière expression tend vers 0 lorsque $N$ tend vers l'infini. Pour $x<0$, on obtient que

$$\zeta(x)=2(2\pi)^{x-1}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\Gamma(1-x)\zeta(1-x).$$

Cette équation fonctionnelle est vraie dans tout le plan complexe, car chaque côté de cette équation est une fonction méromorphe. En substituant $z$ par $1-z$, l'équation obtenue

$$\zeta(1-z)=2(2\pi)^{-z}\cos\left(\frac{\pi z}{2}\right)\Gamma(z)\zeta(z)$$

est une autre forme de l'équation fonctionnelle. En utilisant le principe de réflexion de la fonction $\Gamma$ et la formule de duplication de Legendre, on écrit l'équation fonctionnelle sous sa forme symétrique : $\boxed{\pi^{-z/2}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z) = \pi^{-(1-z)/2}\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)\zeta(1-z)}$.

Sachant que $\zeta(2n) = \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!}B_{2n}$ pour tout entier positif $n$, on déduit de l'équation fonctionnelle que

$$\zeta(-2n+1) = \frac{(-1)^n}{2n}B_{2n}$$

pour tout $n \geq 1$.

## 2.4. Fonctions arithmétiques reliées à la fonction $\zeta$

Les fonctions arithmétiques sont les fonctions qui à chaque entier strictement positif associent un nombre complexe. Certaines de ces fonctions sont reliées à l'étude de la fonction $\zeta$.

Pour tout entier $n \geq 2$, il existe une unique factorisation de $n$ en un produit de puissances de nombres premiers. On note cette factorisation de $n$ par $\prod_{j=1}^{r} p_{i_j}^{k_j}$, où $k_1, ..., k_r$ sont des entiers strictement positifs. On définit la **fonction de Möbius** par

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ (-1)^r & \text{si } n > 1 \text{ et } k_1 = ... = k_r = 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette fonction est intéressante à cause de la **formule d'inversion de Möbius**.

**Formule d'inversion de Möbius :** *Soit $f, g$ des fonctions arithmétiques. Alors,*

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d)$$

*si et seulement si*

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right).$$

Pour montrer ce théorème, nous aurons besoin d'une propriété sur la fonction de

Möbius.

**Lemme 2.4.1.** *Si* $n > 1$, *alors* $\sum_{d|n} \mu(d) = 0$.

DÉMONSTRATION. Supposons que $n$ s'écrit sous la forme $p_{i_1}^{k_1}...p_{i_r}^{k_r}$, où $k_1, ..., k_r$ sont des entiers strictement positifs. Si $d > 1$ est un diviseur de $n$ tel que $\mu(d) \neq 0$, alors $d$ est un produit de nombres premiers $p_{j_1}p_{j_2}...p_{j_m}$, où $\{j_1, ..., j_m\} \subseteq \{i_1, ..., i_r\}$. Dans ce cas, on voit que $\mu(d) = (-1)^m$. Pour tout $m = 1, 2, ..., r$, il y a $\binom{r}{m}$ choix de $j_1, j_2, ..., j_m$ possibles. La formule du binôme nous permet de conclure que

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \mu(1) + \binom{r}{1}(-1) + \binom{r}{2}(-1)^2 + ... + \binom{r}{r}(-1)^r = (1-1)^r = 0.$$

□

Définissons une opération sur l'ensemble des fonctions arithmétiques par

$$(f * g)(n) := \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right).$$

C'est le **produit de Dirichlet** de $f$ et de $g$. Le produit de Dirichlet de $f$ et de $g$ est une fonction arithmétique. De plus, cette opération est associative et commutative. Les fonctions arithmétiques $f$ telles que $f(1) \neq 0$ forment un groupe où l'élément neutre est

$$e(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

et l'inverse d'un élément est défini par construction. On définit la fonction arithmétique

$$\mathbb{I}(n) := 1.$$

Le lemme 2.4.1 affirme que $\mu * \mathbb{I} = e$. On peut énoncer la formule d'inversion de Möbius avec le produit de Dirichlet

$$g = f * \mathbb{I} \Longleftrightarrow f = g * \mu.$$

DÉMONSTRATION. ($\Rightarrow$) Si on suppose que $g = f * \mathbb{I}$, alors $g * \mu = (f * \mathbb{I}) * \mu = f * (\mu * \mathbb{I}) = f * e = f$.

($\Leftarrow$) Si on suppose que $f = g * \mu$, alors $\mathbb{I} * f = \mathbb{I} * (g * \mu) = (\mathbb{I} * \mu) * g = e * g = g$.

□

Une fonction zêta généralisée peut s'exprimer sous la forme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^z},$$

où f est une fonction arithmétique. En particulier, la fonction zêta de Riemann s'écrit

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{I}(n)}{n^z}.$$

Le produit de Dirichlet entre deux fonctions arithmétiques permet d'écrire sous forme de fonction zêta généralisée la multiplication de deux fonctions zêta généralisées. Une représentation de la dérivée logarithmique de la fonction $\zeta$ dans le demi-plan $Re(z) > 1$ découlera de ce théorème.

**Théorème 2.4.1.** *Soit* $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^z}$ *et* $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^z}$ *deux fonctions zêta généralisées qui convergent absolument dans le demi-plan* $Re(z) > \sigma_a$. *Alors,*

$$f(z)g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f * g)(n)}{n^z}$$

*sur le demi-plan* $Re(z) > \sigma_a$.

DÉMONSTRATION. Sur le demi-plan $Re(z) > \sigma_a$,

$$f(z)g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f(n)g(m)}{n^z m^z} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{rs=n} \frac{f(r)g(s)}{n^z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f * g)(n)}{n^z}.$$

□

Voici une application de ce théorème à la fonction zêta de Riemann.

**Corollaire 2.4.1.** *La fonction zêta de Riemann n'a pas de zéros dans le demi-plan $Re(z) > 1$ (Ce corollaire se montre aussi avec le théorème* 2.1.1*).*

DÉMONSTRATION. Considérons la fonction zêta généralisée

$$f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^z}.$$

Cette série de Dirichlet converge absolument dans le demi-plan $Re(z) > 1$, car $|\mu(n)| \leq 1$ pour tout $n \geq 1$. Par le théorème précédent, on multiplie les séries de Dirichlet $f(z)$ et $\zeta(z)$ et on obtient que

$$f(z)\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mu * \mathbb{I})(n)}{n^z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e(n)}{n^z} = 1.$$

sur le demi-plan $Re(z) > 1$. On conclut que l'inverse de $\zeta(z)$ existe et donc $\zeta(z) \neq 0$ dans ce demi-plan.

$\square$

Considérons la fonction arithmétique

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log(p) & \text{s'il existe des entiers } m \geq 1 \text{ et } p \in \mathbb{P} \text{ tels que } n = p^m \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette fonction est connue sous le nom de **fonction de Von Mangoldt**. Cette fonction a un lien très intéressant avec la dérivée logarithmique de la fonction $\zeta$. D'abord, voici un lemme très pratique exprimant la fonction $\Lambda$ sous forme de produit de Dirichlet :

**Lemme 2.4.2.** *Pour tout entier positif $n$, $\Lambda(n) = (\mu * \log)(n)$.*

DÉMONSTRATION. Considérons la fonction $g(n) := \sum_{d|n} \Lambda(d)$. Remarquons que $g(1) = 0$. Si n s'écrit sous la forme $p_{i_1}^{k_1} p_{i_2}^{k_2} ... p_{i_r}^{k_r}$, alors

$$g(n) = \sum_{j=1}^{r} k_j \log(p_{i_j}) = \log\left(p_{i_1}^{k_1} p_{i_2}^{k_2} ... p_{i_r}^{k_r}\right) = \log(n).$$

Par la formule d'inversion de Möbius, on conclut que

$$\Lambda(n) = (\log * \mu)(n).$$

□

Le prochain théorème est une conséquence immédiate du théorème 2.1.1. Montrons-le à l'aide des fonctions arithmétiques.

**Théorème 2.4.2.** *La dérivée logarithmique de la fonction $\zeta$ est donnée par*

$$\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^z}$$

*dans le demi-plan $Re(z) > 1$.*

Démonstration. Considérons la fonction zêta généralisée

$$f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^z}.$$

Par la preuve du corollaire 2.4.1, on a que $f(z)\zeta(z) = 1$. En dérivant cette dernière équation, on obtient que $\zeta'(z)f(z) + \zeta(z)f'(z) = 0$. En substituant $f(z) = 1/\zeta(z)$ dans cette dernière équation, la dérivée logarithmique est égale à

$$\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = -\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}\right) \cdot \left(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)\log(n)}{n^z}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mathbb{I} * (\mu \log))(n)}{n^z}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \log(n) - \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \log(d)\right) \frac{1}{n^z}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (\log(n)(\mu * 1)(n) - (\mu * \log)(n)) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^z}$$

en utilisant le lemme précédent et le fait que $\mu * \mathbb{I} = e$.

□

## 2.5. Énoncé de l'hypothèse de Riemann

Nous avons vu que la fonction zêta de Riemann possède des zéros aux entiers négatifs pairs. Dans cette section, nous nous intéresserons aux zéros non-triviaux de la fonction $\zeta$. Nous verrons certaines de leurs propriétés. Nous terminerons cette section en citant l'hypothèse de Riemann.

**Propriété 1 :** *La fonction $\zeta$ n'a pas de zéros réels strictement positifs.*

Nous avons vu à l'exemple 1.3.1 que $\zeta(z) = (1-2^{1-z})^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^z}$ dans le demi-plan $Re(z) > 0$. Si $x > 0$, alors la série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^x} = \left(1-\frac{1}{2^x}\right) + \left(\frac{1}{3^x}-\frac{1}{4^x}\right) + \ldots$$

converge vers un nombre réel strictement positif. Ceci justifie la propriété 1.

Pour poursuivre notre étude de la fonction $\zeta$ de Riemann, considérons la fonction $\xi$ définie par

$$\xi(z) := \frac{1}{2}z(z-1)\pi^{-z/2}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z).$$

La fonction $z\Gamma(z/2)$ est méromorphe. Ses seules singularités sont des pôles simples en $-2, -4, -6, \ldots$. La fonction $(z-1)\zeta(z)$ est entière et possède des zéros simples en $-2, -4, -6, \ldots$ En multipliant ces deux fonctions, on obtient une fonction entière. On conclut que la fonction $\xi$ est entière. L'équation fonctionnelle de la fonction $\zeta$ nous fournit cette propriété de la fonction $\xi$.

**Propriété 2 :** *La fonction $\xi$ est symétrique par rapport à l'axe $x = 1/2$, c'est-à-dire $\xi(z) = \xi(1-z)$ pour tout nombre complexe $z$. Il en découle que la fonction $\xi$ prend toutes ses valeurs dans le demi-plan $Re(z) \geq 1/2$.*

Pour obtenir la valeur de $\xi(0)$, il suffit d'obtenir la valeur de $\xi(1)$. Par la représentation de la fonction $\zeta$ dans le demi-plan $Re(z) > 0$,

$$\lim_{z\to 1}(z-1)\zeta(z) = \lim_{z\to 1}\left(\frac{z-1}{2} + 1 + z(z-1)\int_1^{\infty}\frac{\rho(t)}{t^{z+1}}dt\right) = 1.$$

Étant donné que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, la fonction $\xi$ est égale à $1/2$ en $z = 1$. La propriété 2 nous dit que $\xi(0) = 1/2$. En utilisant la représentation de la fonction $\Gamma$ en un produit infini de fonctions et par la définition de la fonction $\xi$,

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}.$$

Poursuivons notre étude des zéros de la fonction $\zeta$ sur l'axe réel. Utilisons la propriété précédente. Pour $x < 0$, on peut écrire

$$\zeta(x) = \frac{\xi(1-x)}{\frac{1}{2}x(x-1)\pi^{-\frac{x}{2}}\Gamma(\frac{x}{2})} = \pi^{-1/2+x}\Gamma\left(\frac{1-x}{2}\right)\left(\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\right)^{-1}\zeta(1-x).$$

Par la propriété 1, on conclut que la fonction $\zeta$ ne s'annule pas sur l'axe réel négatif sauf s'il s'agit d'un entier négatif pair. Cette discussion se résume par cette propriété.

**Propriété 3 :** *Les zéros triviaux de la fonction $\zeta$ sont ses seuls zéros réels.*

La fonction $\frac{1}{2}z(z-1)\pi^{-z/2}\Gamma(z/2)$ ne s'annule pas sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Ce qui donne la quatrième propriété.

**Propriété 4 :** *Les zéros non-triviaux de la fonction $\zeta$ sont exactement les zéros de la fonction $\xi$.*

Il est donc très pertinent d'étudier la fonction $\xi$. Voici une autre propriété de la fonction $\xi$ :

**Propriété 5 :** *Dans la bande verticale $0 \leq Re(z) \leq 1$, la fonction $\xi$ est symétrique par rapport à l'axe réel, c'est-à-dire $\overline{\xi(z)} = \xi(\overline{z})$ sur cette bande verticale.*

Montrons cette propriété. Remarquons que pour tout $z$ dans cette bande verticale

$$\overline{\Gamma(z)} = \overline{\left(ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}\right)^{-1}} = \Gamma(\overline{z}).$$

Il suffit de vérifier que $\overline{\zeta(z)} = \zeta(\overline{z})$ sur cette bande. Pour $0 < Re(z) \leq 1$ et $z \neq 1$, nous avons que

$$\overline{\zeta(z)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\overline{z}-1} + \overline{z}\int_1^{\infty} \frac{\rho(t)}{t^{\overline{z}+1}}dt = \zeta(\overline{z}).$$

Par continuité de la fonction $\zeta$, l'égalité $\overline{\zeta(z)} = \zeta(\overline{z})$ est vraie sur l'axe $Re(z) = 0$ et sur l'axe $Re(z) = 1$ (sauf en 1 !). La propriété 5 est démontrée.

Utilisons maintenant un résultat de la dernière section pour pousser un peu plus loin notre étude des zéros de la fonction $\zeta$. Voici la propriété que l'on veut démontrer.

**Propriété 6 :** *La fonction $\zeta$ n'a pas de zéros sur les axes $Re(z) = 1$ et $Re(z) = 0$.*

D'abord, montrons ce lemme.

**Lemme 2.5.1.** *La fonction $\zeta$ satisfait la relation*

$$3\left(\frac{\zeta'(x)}{\zeta(x)}\right) + 4Re\left(\frac{\zeta'(x+yi)}{\zeta(x+yi)}\right) + Re\left(\frac{\zeta'(x+2yi)}{\zeta(x+2yi)}\right) \leq 0.$$

*pour tout $x > 1$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$.*

Démonstration. Soit $z = x + iy$ tel que $x > 1$ et $y \in \mathbb{R}$. Par le théorème 2.4.2, nous avons que

$$Re\left(\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} Re\left(\frac{\Lambda(n)}{n^z}\right).$$

Si $n = p^m$, où $m \geq 1$ et $p$ est un nombre premier, alors

$$Re\left(\frac{\Lambda(n)}{p^{mz}}\right) = Re\left(\frac{\log(p)}{p^{mz}}\right) = \frac{\log(p)\cos(my\log(p))}{p^{mx}}.$$

On conclut que

$$Re\left(\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\right) = -\sum_{p\in\mathbb{P}}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\log(p)\cos(my\log(p))}{p^{mx}}.$$

L'identité

$$3 + 4\cos(\theta) + \cos(2\theta) = 2\left(\frac{3}{2} + 2\cos(\theta) + -\frac{1}{2} + (\cos(\theta))^2\right)$$

$$= 2(1+\cos(\theta))^2 \geq 0,$$

entraîne que

$$3\left(\frac{\zeta'(x)}{\zeta(x)}\right) + 4Re\left(\frac{\zeta'(x+yi)}{\zeta(x+yi)}\right) + Re\left(\frac{\zeta'(x+2yi)}{\zeta(x+2yi)}\right)$$

$$= -\sum_{p\in\mathbb{P}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\log(p)}{p^{mx}}\right)(3+4\cos(my\log(p))+\cos(2my\log(p))) \leq 0.$$

$\square$

Maintenant, nous pouvons montrer la propriété 6.

DÉMONSTRATION. Supposons qu'il existe un $y_0 \in \mathbb{R}$ tel que $1+iy_0$ est un zéro de la fonction $\zeta$. Notons que $y_0 \neq 0$, car 1 est le pôle simple de la fonction $\zeta$. Considérons la fonction

$$f(z) := (\zeta(z))^3(\zeta(z+iy_0))^4\zeta(z+i2y_0).$$

Puisque la fonction $(\zeta(z))^3$ a un pôle d'ordre 3 en 1, la fonction $(\zeta(z+iy_0))^4$ a un zéro d'ordre au moins 4 en 1 et la fonction $\zeta(z+i2y_0)$ n'a pas de pôle en 1, alors $f$ a un zéro d'ordre $n$ en 1, où $n \geq 1$. Il existe une fonction holomorphe $g$ dans un voisinage de 1 et ne s'annulant pas en 1 telle que $f(z) = (z-1)^n g(z)$. On considère la dérivée logarithmique de $f$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{(z-1)} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

On constate que $\liminf_{x\searrow 1} Re\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right) = \infty$. On calcule la dérivée logarithmique de $f$ suivant la définition

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = 3\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} + 4\frac{\zeta'(z+iy_0)}{\zeta(z+iy_0)} + \frac{\zeta'(z+i2y_0)}{\zeta(z+i2y_0)}.$$

Par le lemme 2.5.1, on voit que $\liminf_{x\searrow 1} Re\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right) \leq 0$, d'où la contradiction. La fonction $\zeta$ n'a pas de zéros sur l'axe $Re(z) = 1$. Comme les zéros non-triviaux sont symétriques par rapport à l'axe $Re(z) = 1/2$, la fonction $\zeta$ n'a pas de zéros sur l'axe $Re(z) = 0$.

$\square$

Voici un théorème regroupant ces propriétés.

**Théorème 2.5.1.** *Les zéros non-triviaux de la fonction $\zeta$ sont dans la bande verticale $0 < Re(z) < 1$ et ils sont distribués d'une façon symétrique par rapport aux axes $Im(z) = 0$ et $Re(z) = 1/2$.*

On dit que la bande $0 \leq Re(z) \leq 1$ est la **bande critique** de la fonction $\zeta$ et la droite $Re(z) = 1/2$ est la **droite critique** de la fonction $\zeta$. Maintenant, nous pouvons citer l'hypothèse de Riemann sur les zéros de la fonction $\zeta$.

**Hypothèse de Riemann** : *Les zéros non-triviaux de la fonction $\zeta$ sont tous sur la droite critique.*

## 2.6. Factorisation de la fonction $\xi$

Cette section a pour but d'exprimer la fonction entière $\xi$ sous la forme d'un produit infini de fonctions. Il s'agit en fait d'une application du théorème de factorisation d'Hadamard. Nous montrons ensuite que la fonction $\zeta$ a une infinité de zéros non-triviaux. Rappelons le théorème de factorisation d'Hadamard. Nous utilisons la notion d'ordre d'une fonction entière vue dans le chapitre préliminaire.

**Théorème de factorisation d'Hadamard :** *Soit $F$ une fonction entière d'ordre un telle que $F(0) \neq 0$. Soit $\{z_n\}_{n\in E}$, où $E \subseteq \mathbb{N}$, les zéros de $F$ tels que $0 < |z_1| \leq |z_2| \leq ... \leq |z_n| \leq ....$ Alors, il existe des constantes $A$ et $B$ tels que :*

$$F(z) = e^{A+Bz} \prod_{n\in E} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{z/z_n}.$$

Vous trouverez des explications supplémentaires sur ce théorème dans les livres $[L1]$ et $[SZ]$.

**Théorème 2.6.1.** *La fonction $\xi$ est d'ordre 1.*

Démonstration. Montrons qu'il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tout $|z|$ assez grand, $|\xi(z)| \leq e^{c|z|\log|z|}$. Par la propriété 2 de la section 2.5, il suffit de montrer que cette propriété est vraie sur le demi-plan $Re(z) \geq 1/2$. Par la formule de Stirling, il existe une constante $c_1 > 0$ telle que

$$\left|\frac{1}{2}z(z-1)\pi^{-z/2}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\right| \leq e^{c_1|z|\log|z|}$$

pour tout $|z|$ assez grand. Par la formule intégrale de la fonction $\zeta$ vue à la section 2.2, il existe une constante $c_2 > 0$ telle que

$$|\zeta(z)| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{|z-1|} + |z|\int_1^{\infty} \frac{2}{t^{3/2}}dt \leq e^{c_2|z|\log|z|}$$

pour $|z|$ assez grand. Nous avons montré qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $|\xi(z)| \leq e^{c|z|\log|z|}$ pour tout $|z|$ assez grand. On sait que $\log|z| \leq |z|^a$ quel que soit $a > 0$. En somme, l'ordre de la fonction $\xi$ est plus petit ou égal à 1. Remarquons que $\lim_{x\to+\infty} \zeta(x) = 1$, car

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^x} \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x}dt = \frac{1}{x-1}.$$

Ceci implique que $\zeta(x) > 1/2$ pour $x$ assez grand. Par la formule de Stirling,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log|\Gamma(x)|}{x\log x} = 1.$$

Pour $x$ assez grand, on a que $\log|\Gamma(x)| \geq \frac{1}{2}x\log(x)$. Il existe alors une constante $c > 0$ telle que $|\xi(x)| > e^{cx\log x}$ pour $x$ assez grand. L'ordre de la fonction $\xi$ est alors égal à 1.

□

**Corollaire 2.6.1.** *La fonction $\zeta$ a une infinité de zéros non-triviaux.*

Démonstration. Supposons que la fonction $\xi$ a un nombre fini de zéros non-triviaux $z_1, ..., z_N$ répétés selon leurs multiplicités (voir la propriété 4 de la section 2.5). Posons

$$g(z) := \frac{\xi(z)}{\prod_{n=1}^{N}(z-z_n)}.$$

Cette fonction est entière et sans zéro. D'après les propriétés sur l'ordre vues au chapitre préliminaire, la fonction $g$ est d'ordre 1. D'après le théorème de factorisation d'Hadamard, il existe des constantes $A$ et $B$ telles que $g(z) = e^{A+Bz}$. La fonction $\xi$ est égale à $e^{A+Bz}\prod_{n=1}^{N}(z-z_N)$ pour tout nombre complexe z. D'après la propriété 2 de la section 2.5, on a l'égalité

$$e^{B}e^{-Bz}\prod_{n=1}^{N}(z-(1-z_n)) = e^{-\pi i}e^{Bz}\prod_{n=1}^{N}(z-z_n).$$

On sait que les zéros non-triviaux sont symétriques par rapport à l'axe $x = 1/2$. En simplifiant les produits, on conclut que pour tout nombre complexe $z$ il existe un entier $k$ tel que $2Bz = B + (2k+1)\pi i$. Ceci est une contradiction, car $B$ est une constante qui ne dépend pas de $z$.

□

Notons $\{\rho_n\}_{n=1}^{\infty}$ la **suite des zéros non-triviaux de la fonction** $\zeta$, où chaque $\rho_n$ est égal à $\beta_n + i\gamma_n$. On suppose que la suite de ces zéros est ordonnée telle que

$$|\rho_1| \leq |\rho_2| \leq \ldots \leq |\rho_n| \leq \ldots$$

La fonction $\xi$ étant d'ordre 1, on peut la factoriser en un produit infini de fonctions. Cette factorisation nous sera très utile pour montrer des théorèmes concernant le nombre de zéros non-triviaux dans un rectangle de la bande critique.

**Factorisation de la fonction $\xi$ :** *Pour tout nombre complexe z,*

$$\xi(z) = e^{A+Bz}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\rho_n}\right)e^{z/\rho_n},$$

*où* $A = -\log 2$ *et* $B = -\gamma/2 - 1 + \log\sqrt{4\pi}$.

La détermination des constantes $A$ et $B$ est faite dans le livre $[MR]$. En prenant la dérivée logarithmique de ce produit de fonctions, on montre ces représentations de $\zeta/\zeta'$ qui seront très utiles.

**Théorème 2.6.2.** *La dérivée logarithmique de la fonction $\zeta$ est donnée par*

$$\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = -\frac{1}{z} - \frac{1}{z-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-\rho_n} + \frac{1}{\rho_n}\right) + B + \frac{\log \pi}{2} - \frac{\Gamma'(z/2)}{2\Gamma(z/2)}.$$

*En considérant la dérivée logarithmique du produit de fonctions $1/\Gamma$, il existe une constante $c$ telle que*

$$\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = -\frac{1}{z-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-\rho_n} + \frac{1}{\rho_n}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+2n} - \frac{1}{2n}\right) + c.$$

## 2.7. Théorèmes concernant les zéros non-triviaux de la fonction $\zeta$

Cette section sera consacrée à la répartition des zéros non-triviaux de la fonction $\zeta$ dans la bande critique. Les théorèmes de la Vallée-Poussin en sont des exemples. Ce théorème sera fort utile pour donner une approximation de la distribution des nombres premiers. Nous verrons aussi une formule donnant une approximation du nombre de zéros non-triviaux dans un rectangle de la bande critique.

Commençons par des théorèmes de la Vallée-Poussin. Ceux-ci montrent l'existence d'une région de la bande critique qui ne contient aucun zéro de la fonction $\zeta$. Les prochains lemmes serviront à la preuve de ces théorèmes.

**Lemme 2.7.1.** *Il existe une constante $c_1 > 0$ telle que*

$$-\frac{\zeta'(x)}{\zeta(x)} < \frac{1}{x-1} + c_1$$

*pour tout $x \in ]1, 2[$.*

Démonstration. Considérons la fonction $f(z) := (z-1)\zeta(z)$. Cette fonction est entière et ne s'annule pas dans le demi-plan $Re(z) \geq 1$. Le quotient de fonctions

$f'/f$ est holomorphe sur un ouvert contenant ce demi-plan fermé et

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-1} + \frac{\zeta'(x)}{\zeta(x)}.$$

En posant

$$c_1 := 1 + \max_{x\in[1,2]} \left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right|,$$

le lemme est ainsi prouvé.

□

**Lemme 2.7.2.** *Il existe une constante $c_2 > 0$ telle que pour tout $x \in [1,2]$ et pour tout $|y| \geq 2$*

1) $-Re\left(\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\right) < c_2 \log|y| - \sum_{n=1}^{\infty} Re\left(\frac{1}{z-\rho_n} + \frac{1}{\rho_n}\right)$

2) $-Re\left(\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\right) < c_2 \log|y|$

3) *Si $\rho_n = \beta_n + i\gamma_n$ est un zéro non-trivial de la fonction $\zeta$, alors* $-Re\left(\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\right) < c_2 \log|y| - \frac{1}{x-\beta_n}$.

Démonstration. Par le corollaire 2.6.2, la dérivée logarithmique de la fonction $\zeta$ est donnée par

$$-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} - \frac{\log(\pi)}{2} - B + \frac{\Gamma'(z/2)}{2\Gamma(z/2)} - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-\rho_n} + \frac{1}{\rho_n}\right).$$

Le corollaire 0.0.1 entraîne qu'il existe des constantes $B_1 > 0$ et $r > 2$ telles que

$$Re\left(\frac{\Gamma'(z/2)}{\Gamma(z/2)}\right) \leq \log\left|\frac{z}{2}\right| + B_1$$

pour tout $|y| > r$ et $x \in [1,2]$. La fonction $Re\left(\frac{\Gamma'(z/2)}{\Gamma(z/2)}\right)$ est bornée sur l'ensemble des $z \in \overline{D(0,r)}$ tels que $x \in [1,2]$ et $2 \leq |y| \leq r$. Le fait que $x \in [1,2]$ implique que $\log|z| = \frac{1}{2}\log(x^2 + y^2) \leq \frac{1}{2}\log(4+y^2) \leq \frac{1}{2}\log(2y^2)$. Il existe une constante $A_1 > 0$ telle que

$$Re\left(\frac{\Gamma'(z/2)}{\Gamma(z/2)}\right) \leq A_1 \log|y|$$

pour tout $x \in [1,2]$ et pour tout $|y| \geq 2$. On remarque que

$$Re\left(\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z}\right) = \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2} + \frac{x}{x^2+y^2} = O\left(\frac{1}{y^2}\right)$$

lorsque $y$ tend vers l'infini. Il existe alors une constante $c_2 > 0$ telle que

$$-Re\left(\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\right) < c_2\log(y) - \sum_{n=1}^{\infty} Re\left(\frac{1}{z-\rho_n} + \frac{1}{\rho_n}\right).$$

Ceci prouve 1). Pour 2) et 3), il suffit de remarquer que

$$Re\left(\frac{1}{z-\rho_n} + \frac{1}{\rho_n}\right) = \frac{x-\beta_n}{|z-\rho_n|^2} + \frac{\beta_n}{|\rho_n|^2} \geq 0$$

pour tout zéro non-trivial $\rho_n = \beta_n + i\gamma_n$ de la fonction $\zeta$.

□

Voici une première version du théorème de la Vallée-Poussin.

**Théorème de la Vallée-Poussin (version 1) :** *Il existe une constante $c_3 > 0$ telle que la fonction $\zeta$ n'a pas de zéro dans l'ensemble décrit par les $x+iy$ obéissant à ces relations :*

$$x \geq 1 - \frac{c_3}{\log|y|} \text{ et } |y| \geq 2.$$

DÉMONSTRATION. Soit $\rho_n = \beta_n + i\gamma_n$ un zéro non-trivial de la fonction $\zeta$. Par les deux lemmes précédents, il existe des constantes strictement positives $c_1$ et $c_2$ telles que

$$-Re\left(\frac{\zeta'(x)}{\zeta(x)}\right) < c_1 + \frac{1}{x-1},$$

$$-Re\left(\frac{\zeta'(x+iy)}{\zeta(x+iy)}\right) < c_2\log|y| - \frac{1}{x-\beta_n}$$

et

$$-Re\left(\frac{\zeta'(x+i2y)}{\zeta(x+i2y)}\right) < c_2\log|y|$$

pour tout $1 < x < 2$ et $|y| \geq 2$. Par le lemme 2.5.1, il existe une constante $A > 0$ telle que

$$\frac{4}{x-\beta_n} < \frac{3}{x-1} + A\log|y|$$

pour tout $1 < x < 2$ et $|y| \geq 2$. Posons $x := 1 + \frac{\delta}{\log|y|}$, où $\delta > 0$ est suffisamment petit pour que $1 < x < 2$ quel que soit $|y| \geq 2$. En remplaçant $x$ dans la relation ci-dessus, on obtient l'inégalité

$$\beta_n < 1 - \frac{\left(\frac{4\delta}{3+A\delta} - \delta\right)}{\log|y|}$$

pour tout $|y| \geq 2$. En prenant $\delta$ suffisamment petit, le théorème est montré en posant $c_3 = \frac{4\delta}{3+A\delta} - \delta$.

□

**Théorème de la Vallée-Poussin (version 2) :** *Il existe une constante $c_4 > 0$ telle que la fonction $\zeta$ n'a pas de zéro $\beta_n + i\gamma_n$ tel que*

$$\beta_n > 1 - \frac{c_4}{\log(|\gamma_n| + 2)}.$$

DÉMONSTRATION. La fonction $\zeta$ n'a pas de zéro dans l'ensemble des $x + iy$ tels que $x \geq 1$ et $|y| \leq 2$. Remarquons que

1) la fonction $\zeta$ est continue et ne s'annule pas en $1 + iy$ tel que $y \in [-2, 0[\cup]0, 2]$.

2) la fonction $\zeta$ a un pôle en 1.

Il existe alors une constante $C_1 > 0$ telle que la fonction $\zeta$ n'a pas de zéro dans dans l'ensemble des $x + iy$ tels que $x \geq 1 - C_1$ et $|y| \leq 2$. Le théorème précédent nous dit que la fonction $\zeta$ n'a pas de zéro dans l'ensemble des $x + iy$ tels que $x \geq 1 - \frac{c_3}{\log|y|}$ et $|y| \geq 2$. Il suffit de trouver une constante $c_4 > 0$ telle que

$$1 - \frac{c_3}{\log|y|} \leq 1 - \frac{c_4}{\log(|y| + 2)} \text{ pour tout } |y| \geq 2$$

et

$$1 - \frac{C_1}{\log(|y| + 2)} \leq 1 - \frac{c_4}{\log(|y| + 2)} \text{ pour tout } |y| \leq 2.$$

On pose $c_4 := \min\{c_3, C_1 \log(2)\}$ et le théorème est prouvé.

□

On sait que les zéros non-triviaux de la fonction $\zeta$ sont tous dans la bande critique. Il est très pertinent de s'intéresser au nombre de ces zéros dans un rectangle de la bande critique. Désignons par $N_\zeta(T)$ le **nombre de zéros de la fonction** $\zeta$ dans le rectangle $0 < Re(z) < 1$ et $0 < Im(z) < T$ en comptant les multiplicités.

**Théorème 2.7.1.** *Il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+(T-\gamma_n)^2} \leq C\log(T)$$

*pour tout $T \geq 2$. De plus, le nombre de zéros non-triviaux $\rho_n = \beta_n + i\gamma_n$ tels que $0 < \beta_n < 1$ et $T \leq \gamma_n \leq T+1$ est plus petit ou égal à $2C\log(T)$.*

DÉMONSTRATION. En considérant $z = 2 + iT$ dans le lemme 2.7.2, nous avons que

$$-Re\left(\frac{\zeta'(2+iT)}{\zeta(2+iT)}\right) < c_2\log(T) - \sum_{n=1}^{\infty} Re\left(\frac{1}{2+iT-\rho_n} + \frac{1}{\rho_n}\right).$$

Le rapport $\left|\frac{\zeta'(2+iT)}{\zeta(2+iT)}\right|$ est borné par $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^2}$. Il existe une constante $A_1 > 0$ telle que

$$\sum_{n=1}^{\infty} Re\left(\frac{1}{2+iT-\rho_n} + \frac{1}{\rho_n}\right) < A_1\log(T).$$

Soit $\rho_n = \beta_n + i\gamma_n$ un zéro non-trivial de la fonction $\zeta$. On calcule que

$$Re\left(\frac{1}{2+iT-\rho_n}\right) = \frac{2-\beta_n}{(2-\beta_n)^2+(T-\gamma_n)^2} \geq \frac{1}{4+(T-\gamma_n)^2} \geq \frac{1}{4(1+(T-\gamma_n)^2)}$$

et

$$Re\left(\frac{1}{\rho_n}\right) = \frac{\beta_n}{|\rho_n|^2} \geq 0.$$

Il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+(T-\gamma_n)^2} \leq C\log(T).$$

Pour la deuxième partie, soit $A_T$ l'ensemble des zéros $\rho_n$ non-triviaux de la fonction $\zeta$ tels que $T \leq Im(\rho_n) \leq T+1$. On a que $(T-\gamma_n)^2 + 1 \leq 2$ pour tout $\rho_n = \beta_n + i\gamma_n \in A_T$. En sommant sur tous les éléments de $A_T$, nous avons que

$$2^{-1}\sum_{\rho_n\in A_T} 1 \leq \sum_{\rho_n\in A_T} \frac{1}{(T-\rho_n)^2+1}.$$

En utilisant la première partie, la seconde est montrée.

□

Le prochain lemme sera utile pour démontrer une approximation de $N_\zeta(T)$.

**Lemme 2.7.3.** *Pour $-1 \le x \le 2$, nous avons l'approximation suivante*

$$\frac{\zeta'(x+iy)}{\zeta(x+iy)} = \sum_{|y-\gamma_n|<1} \frac{1}{x+iy-\rho_n} + O(\log|y|)$$

*lorsque $|y|$ tend vers l'infini.*

DÉMONSTRATION. Par le théorème 2.6.2, la dérivée logarithmique de la fonction $\zeta$ est égale à

$$\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = -\frac{1}{z} - \frac{1}{z-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-\rho_n} + \frac{1}{\rho_n}\right) + B + \frac{\log \pi}{2} - \frac{\Gamma'(z/2)}{2\Gamma(z/2)}.$$

En utilisant le corollaire 0.0.1 comme au lemme 2.7.2, il existe une constante $a_1 > 0$ telle que

$$\left|\frac{\Gamma'(z/2)}{2\Gamma(z/2)}\right| < a_1 \log|y|$$

pour tout $-1 \le x \le 2$ et $|y|$ assez grand. On estime la dérivée logarithmique de la fonction $\zeta$ par

$$\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-\rho_n} + \frac{1}{\rho_n}\right) + O(\log|y|) \tag{3}$$

lorsque $|y|$ tend vers l'infini. Posons $z = 2+iy$ dans cette dernière équation. On obtient alors que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2+iy-\rho_n} + \frac{1}{\rho_n}\right) = O(\log|y|), \tag{4}$$

lorsque $|y|$ tend vers l'infini, car $\left|\frac{\zeta'(2+iy)}{\zeta(2+iy)}\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^2}$. On additionne les équations (3) et (4)

$$\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-\rho_n} - \frac{1}{2+iy-\rho_n}\right) + O(\log|y|)$$

lorsque $|y|$ tend vers l'infini. Si $\rho_n = \beta_n + i\gamma_n$ est un zéro non-trivial de la fonction $\zeta$ tel que $|y - \gamma_n| \geq 1$, alors

$$\left|\frac{1}{z-\rho_n} - \frac{1}{2+iy-\rho_n}\right| \leq \frac{2-x}{|y-\gamma_n|^2} \leq \frac{3}{|y-\gamma_n|^2}.$$

Par la première partie du théorème 2.7.1,

$$\sum_{|y-\gamma_n|\geq 1} \frac{3}{|y-\gamma_n|^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{1+|y-\gamma_n|^2} = O(\log|y|)$$

lorsque $|y|$ tend vers l'infini. Finalement, la deuxième partie du théorème 2.7.1 implique que

$$\sum_{|y-\gamma_n|<1} \frac{1}{|2+iy-\rho_n|^2} \leq \sum_{|y-\gamma_n|<1} 1 = O(\log|y|)$$

lorsque $|y|$ tend vers l'infini. En regroupant ces résultats, le théorème est prouvé.

□

Le prochain théorème est une approximation de $N_\zeta(T)$. Ce théorème utilise la **variation de l'argument** de la fonction $\xi$ sur une courbe fermée. La variation de l'argument d'une fonction $f$ sur une courbe $C$ est notée par $\Delta_C \arg(f(z))$. Étant donné $z_i$ et $z_f$ les points initial et final respectivement de la courbe $C$,

$$\Delta_C \arg(f(z)) = \operatorname{Arg}(f(z_f)) - \operatorname{Arg}(f(z_i)) + 2\pi N$$

où $N$ est le nombre de tours autour de l'origine que fait la courbe $f(C)$ pour relier $f(x_i)$ et $f(x_f)$. Notons que Arg est l'argument inclus dans l'intervalle $]-\pi,\pi]$. La définition de la variation de l'argument dépend du choix de la branche de l'argument.

**Principe de l'argument :** *Soit $C$ une simple courbe fermée continûment différentiable par morceaux et orientée positivement. Soit $f$ une fonction holomorphe dans et sur la courbe $C$ sauf possiblement en un nombre fini de pôles à l'intérieur de $C$. Si $f$ ne s'annule pas sur $C$, alors*

$$\Delta_C \arg(f(z)) = 2\pi(N_C(f) - P_C(f)),$$

*où $N_{\mathcal{C}}(f)$ et $P_{\mathcal{C}}(f)$ sont le nombre de zéros et de pôles respectivement de $f$ à l'intérieur de $\mathcal{C}$ en comptant les multiplicités.*

Ce théorème est vrai pour n'importe quelle branche de l'argument, car la courbe $\mathcal{C}$ est fermée. La variation de l'argument sera en fait le nombre de tours que fait la courbe fermé $f(\mathcal{C})$ autour de l'origine. La référence pour ce théorème est $[B1]$. Dans ce qui vient, nous appliquerons le principe de l'argument à la fonction entière $\xi$. Ceci nous permettra d'approximer $N_\zeta(T)$.

**Lemme 2.7.4.** *Soit $\mathcal{L}$ l'union des segments $[2, 2+iT]$ et $[2+iT, (1/2)+iT]$. Alors,*

1) $\Delta_{\mathcal{L}} \arg(z-1) = \frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{T}\right)$ *lorsque $T$ tend vers l'infini*

2) $\Delta_{\mathcal{L}} \arg(\pi^{-z/2}) = \frac{-T\log(\pi)}{2}$

3) $\Delta_{\mathcal{L}} \arg\left(\Gamma\left(\frac{z}{2}+1\right)\right) = \frac{T}{2}\log\frac{T}{2} - \frac{T}{2} + \frac{3\pi}{8} + O\left(\frac{1}{T}\right)$ *lorsque $T$ tend vers l'infini.*

DÉMONSTRATION. 1) Par définition, la variation de l'argument est

$$\Delta_{\mathcal{L}} \arg(z-1) = Arg\left(iT - \frac{1}{2}\right) - Arg(2) = \frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{1+4T^2}}\right).$$

À l'aide de la règle de l'Hospital, on calcule que $\lim_{x\to 0} \dfrac{\arcsin(x)}{x} = 1$. En utilisant cette limite, 1) est prouvé.

2) On calcule directement que

$$\Delta_{\mathcal{L}} \arg(\pi^{-z/2}) = Arg(\pi^{-1}\pi^{-iT/2}) - Arg(\pi^{-1}) = \frac{-T\log(\pi)}{2}.$$

3) Par la formule de Stirling,

$$\Delta_{\mathcal{L}} \arg(\Gamma((z/2)+1)) = Arg\left(\Gamma\left(\frac{5}{4}+\frac{iT}{2}\right)\right) - Arg(\Gamma(2)) = Im\left(\log\Gamma\left(\frac{5}{4}+\frac{iT}{2}\right)\right)$$

$$= Im\left(\left(\frac{3}{4}+\frac{iT}{2}\right)\log\left(\frac{5}{4}+\frac{iT}{2}\right) - \frac{5}{4} - \frac{iT}{2} + \frac{\log(2\pi)}{2} + O\left(\frac{1}{T}\right)\right).$$

Un calcul nous permet de conclure que $\Delta_{\mathcal{L}} \arg(\Gamma((z/2)+1)) = \frac{T}{2}\log\frac{T}{2} - \frac{T}{2} + \frac{3\pi}{8} + O(1/T)$ lorsque $T$ tend vers l'infini.

$\square$

Cette approximation de $N_\zeta(T)$ sera utilisée à la prochaine section.

**Théorème 2.7.2.** *En utilisant le principe de l'argument, on a l'approximation*

$$N_\zeta(T) = \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + \frac{7}{8} + S(T) + O\left(\frac{1}{T}\right)$$

*lorsque $T$ tend vers l'infini, où $\pi S(T) = \Delta_{\mathcal{L}} \arg(\zeta(s))$ et $\mathcal{L}$ est la courbe du lemme précédent. De plus, $S(T) = O(\log T)$ lorsque $T$ tend vers l'infini.*

Démonstration. Soit $R$ la courbe rectangulaire reliant les sommets $2, 2 + iT, -1 + iT$ et $-1$. On suppose que la courbe est orientée positivement. Le principe de l'argument nous dit que $2\pi N_\zeta(T) = \Delta_{\mathcal{R}} \arg(\xi(s))$. Par la propriété 2 de la section 2.5, la variation de l'argument de la fonction $\xi$ sur la courbe rectangulaire $R$ est égale à $2\Delta_{\mathcal{L}\cup[1/2,2]} \arg(\xi(s)) = 2\Delta_{\mathcal{L}} \arg(\xi(s))$. Par définition de $\xi$, on sait que $\arg(\xi(z)) = \arg(z-1) + \arg(\pi^{-z/2}) + \arg(\Gamma((z/2)+1)) + \arg(\zeta(z))$. Les variations de l'argument ont été calculées au lemme précédent. Ces calculs entraînent que

$$N_\zeta(T) = \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + \frac{7}{8} + S(T) + O\left(\frac{1}{T}\right)$$

lorsque $T$ tend vers l'infini. Il reste à vérifier que $S(T) = O(\log(T))$ lorsque $T$ tend vers l'infini. Sur le segment $[2, 2+iT]$, la variation $\Delta_{[2,2+iT]} \arg(\zeta(s))$ est bornée, car la fonction $\log(\zeta(z))$ est bornée sur l'axe $Re(z) = 2$. En effet, par le théorème 2.1.1,

$$\log(\zeta(2+iy)) = -\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 - \frac{1}{p_n^{2+iy}}\right)$$

(Si $Re(z) > 0$ et $Re(w) > 0$, alors $\mathrm{Arg}(wz) = \mathrm{Arg}(w) + \mathrm{Arg}(z)$ et si $Re(z) > 0$, alors $\mathrm{Arg}(z^{-1}) = -\mathrm{Arg}(z)$). En utilisant le fait que $-\log(1-z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^j}{j}$ pour $|z| < 1$, on a que

$$\left|\log\left(1 - \frac{1}{p_n^{2+iy}}\right)\right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}\frac{1}{p_n^{2j}} = \log\left(1 - \frac{1}{p_n^2}\right)^{-1}.$$

On peut alors dire que

$$|\log(\zeta(2+iy))| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 - \frac{1}{p_n^2}\right)^{-1} = \log\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{p_n^2}\right)^{-1} = \log(\zeta(2)).$$

Cela entraîne que la fonction $\log(\zeta(z))$ est bornée sur l'axe $Re(z) = 2$. Ceci implique que $\Delta_{[2,2+iT]} \arg(\zeta(z)) = O(\log(T))$ lorsque $T$ tend vers l'infini. Calculons la variation de l'argument de $\zeta$ sur le segment de $\mathcal{L}$,

$$\Delta_{[2+iT,1/2+iT]} \arg(\zeta(z)) = Arg(\zeta(1/2+iT)) - Arg(\zeta(2+iT))$$

$$= Im(\log(\zeta(1/2+iT))) - Im(\log(\zeta(2+iT))) = -\int_{1/2+iT}^{2+iT} Im\left(\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\right) dz.$$

Par le lemme 2.7.3 et le théorème 2.7.1, pour $T$ tendant vers l'infini, on estime la dernière intégrale

$$\int_{1/2+iT}^{2+iT} Im\left(\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\right) dz = \sum_{|T-\gamma_n|<1} \int_{1/2+iT}^{2+iT} Im\left(\frac{1}{s-\rho_n}\right) ds + O(\log(T))$$

$$= \sum_{|T-\gamma_n|<1} \Delta_{[2+iT,1/2+iT]} \arg(z-\rho_n) + O(\log(T)) \leq \sum_{|T-\gamma|<1} \pi + O(\log(T)) = O(\log(T)).$$

En somme, nous avons montré que $S(T) = O(\log(T))$ lorsque $T$ tend vers l'infini.

$\square$

## 2.8. Distribution des nombres premiers

Nous sommes maintenant arrivés au point où nous pouvons approximer le nombre de nombres premiers inférieurs à une valeur donnée. La **distribution des nombres premiers** est définie par

$$\pi(x) := \sum_{p\in\mathbb{P}, p\leq x} 1.$$

Nous ne travaillerons pas directement sur la fonction $\pi$, mais plutôt sur la **fonction de Chebyshev**. La fonction de Chebyshev, notée par $\Psi$, est définie sur les nombres réels positifs , par

$$\Psi(x) := \sum_{n\leq x} \Lambda(n).$$

Une approximation de cette fonction nous en fournira une sur la distribution des nombres premiers. Approximons la fonction $\Psi$ par une intégrale comme il a été question à la section 1.5. Considérons la fonction zêta généralisée $f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^z}$. Cette série de Dirichlet a une abscisse de convergence uniforme plus petite ou égale à 1, car son abscisse de convergence absolue est 1. Soit $x > 0$. Par les théorèmes 1.5.3 et 2.4.2, la fonction $\Psi$ est représentée par

$$\Psi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left(-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\right)\frac{x^z}{z}dz,$$

où $c > 1$. On peut approximer cette intégrale impropre par une intégrale sur le segment $[c - iT, c + iT]$.

**Théorème 2.8.1.** *Pour tout $x > 1$ et $T$ assez grand, la fonction $\Psi$ peut être approximée par une intégrale*

$$\Psi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}\left(-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\right)\frac{x^z}{z}dz + O\left(\frac{x(\log(x))^2}{T}\right)$$

*lorsque $x$ tend vers l'infini et $c := 1 + (\log(x))^{-1}$.*

Voyons d'abord un lemme qui nous sera utile pour la preuve de ce théorème. Notons $\|x\|$ la distance entre $x$ et l'entier le plus près de $x$.

**Lemme 2.8.1.** *Si $x > 1$ n'est pas un entier, alors*

$$\sum_{\frac{x}{2}<n<2x}\left|\log\left(\frac{x}{n}\right)\right|^{-1} = O\left(\frac{x}{\|x\|}\log(x)\right)$$

*lorsque $x$ tend vers l'infini.*

Démonstration. Soit $N := [x]$. On divise la somme en trois parties

$$\sum_{\frac{x}{2}<n<2x}\left|\log\left(\frac{x}{n}\right)\right|^{-1} = \sum_{\frac{x}{2}<n<N}\left|\log\left(\frac{x}{n}\right)\right|^{-1} + \left|\log\left(\frac{x}{N}\right)\right|^{-1} + \sum_{N<n<2x}\left|\log\left(\frac{x}{n}\right)\right|^{-1}$$

Si $n$ est un entier positif plus petit que $N$, alors

$$\log\left(\frac{x}{n}\right) \geq \log\left(\frac{N}{n}\right) = -\log\left(1 - \frac{(N-n)}{N}\right) > \frac{(N-n)}{N}.$$

Cette inégalité implique que

$$\sum_{\frac{x}{2}<n<N}\left|\log\left(\frac{x}{n}\right)\right|^{-1} \leq \sum_{\frac{x}{2}<n<N}\frac{N}{(N-n)} \leq \sum_{v=1}^{[x]}\frac{N}{v} \leq N + N\int_1^x \frac{1}{t}dt = O(x\log(x))$$

lorsque $x$ tend vers l'infini. Si $n = N$, alors

$$\log\left(\frac{x}{N}\right) = -\log\left(\frac{x - \{x\}}{x}\right) \geq \frac{\{x\}}{x} \geq \frac{\|x\|}{x}.$$

Ceci entraîne que $\left|\log\left(\frac{x}{N}\right)\right|^{-1} = O\left(\frac{x}{\|x\|}\log(x)\right)$ lorsque $x$ tend vers l'infini. Le dernier terme où l'on somme sur les entiers $n$ tels que $N < n < 2x$ se traite similairement au cas où l'on somme sur les entiers $n$ tels que $x/2 < n < N$.

□

Nous pouvons maintenant montrer le théorème 2.8.1.

DÉMONSTRATION. On peut supposer sans perte de généralité que $x - 1/4$ est un entier. En utilisant la notation du lemme 1.5.1, $\Psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)\delta\left(\frac{x}{n}\right)$ et $\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}\left(-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\right)\frac{x^z}{z}dz = \sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)I\left(\frac{x}{n}, T\right)$. Par le lemme 1.5.1,

$$\left|\Psi(x) - \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}\left(-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\right)\frac{x^z}{z}dz\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)\left|I\left(\frac{x}{n}, T\right) - \delta\left(\frac{x}{n}\right)\right|$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)\left(\frac{x}{n}\right)^c T^{-1}\left|\log\left(\frac{x}{n}\right)\right|^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^c}xeT^{-1}\left|\log\left(\frac{x}{n}\right)\right|^{-1}.$$

Il suffit de montrer que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^c}xeT^{-1}\left|\log\left(\frac{x}{n}\right)\right|^{-1} = O\left(\frac{x(\log(x))^2}{T}\right)$ lorsque $x$ tend vers l'infini. On sépare la série en deux parties. L'une somme sur les entiers positifs tels que $x/2 > n$ ou $n > 2x$ et l'autre sur les entiers positifs tels que $x/2 < n < 2x$. Si $x/2 > n$ ou $n > 2x$, alors $\left|\log\left(\frac{x}{n}\right)\right|^{-1}$ est borné par $(\log 2)^{-1}$. Dans ce cas, nous avons que

$$\left|\sum_{x/2>n \text{ ou } n>2x}\frac{\Lambda(n)}{n^c}xeT^{-1}\left|\log\left(\frac{x}{n}\right)\right|^{-1}\right| \leq \frac{ex}{T\log(2)}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^c} \leq \frac{ex}{T\log(2)}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\log(n)}{n^c}.$$

La fonction $f(t) = t^{-c}\log(t)$ est décroissante sur l'intervalle $[e^{1/c}, +\infty[$. Utilisons ce fait pour majorer la série $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^c}$ par une intégrale. Lorsque $x$ tend vers l'infini, nous avons

$$\frac{ex}{T\log(2)}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\log(n)}{n^c} \leq \frac{ex}{T\log(2)}\left(\frac{\log(2)}{2}+\frac{\log(3)}{3}+\int_3^{+\infty}\frac{\log(t)}{t^c}dt\right)$$

$$= \frac{ex}{T\log(2)}\left(\frac{\log(2)}{2}+\frac{\log(3)}{3}+\frac{\log(3)\log(x)}{3^{(\log(x))^{-1}}}+\frac{(\log(x))^2}{3^{(\log(x))^{-1}}}\right) = O\left(\frac{x(\log(x))^2}{T}\right)$$

lorsque $x$ tend vers l'infini. Si $x/2 < n < 2x$, alors $\Lambda(n) \leq \log(n) \leq \log(2x)$ et

$$n^c > \left(\frac{x}{2}\right)^c \geq \frac{xe}{2 \cdot 2^{(\log(x))^{-1}}} \geq \left(\frac{xe}{2 \cdot 2^{(\log(3/2))^{-1}}}\right).$$

Ceci implique, en utilisant le lemme précédent, que

$$\left|\sum_{x/2<n<2x}\frac{\Lambda(n)}{n^c}xeT^{-1}\left|\log\left(\frac{x}{n}\right)\right|^{-1}\right| \leq xeT^{-1}\sum_{x/2<n<2x}\frac{\Lambda(n)}{n^c}\left|\log\left(\frac{x}{n}\right)\right|^{-1}$$

$$\leq xeT^{-1}\log(2x)\left(\frac{2\cdot 2^{(\log(3/2))^{-1}}}{ex}\right)\sum_{x/2<n<2x}\left|\log\left(\frac{x}{n}\right)\right|^{-1} = O\left(\frac{x(\log(x))^2}{T}\right)$$

lorsque $x$ tend vers l'infini. Le théorème est prouvé.

$\square$

Énonçons maintenant une formule très explicite de la fonction $\Psi$. Par la suite, nous approximerons cette formule.

**Formule explicite de $\Psi$ :** *Pour tout $x > 0$,*

$$\Psi(x) = x - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{\rho_n}}{\rho_n} - \frac{1}{2}\log(1-x^{-2}).$$

Nous allons prouver cette formule. D'abord, voici quelques lemmes qui seront utiles pour arriver à nos fins.

**Lemme 2.8.2.** *Soit $T > 0$. Il existe un $T_1 \in [T, T+1]$ et une constante $A > 0$ tels que tout zéro non-trivial $\rho_n = \beta_n + i\gamma_n$ de $\zeta$ a la propriété que si $|\gamma_n - T_1| < 1$, alors $|\gamma - T_1| \geq A(\log(T))^{-1}$.*

DÉMONSTRATION. Montrons ce lemme par contradiction. Supposons que pour tout $y \in [T, T+1]$ et pour tout $A > 0$ il existe un zéro non-trivial $\rho_n$ de $\zeta$ tel que $|\gamma_n - y| < 1$ et $|\gamma_n - y| \leq A(\log T)^{-1}$. Par le théorème 2.7.1, le nombre de zéros de la fonction $\zeta$ dans le rectangle $0 < Re(z) < 1$ et $T \leq Im(z) \leq T+1$ est plus petit ou égal à $2C \log T$. Soit $N := [2C\log(T)] + 5$. Considérons une partition $T = y_0 < y_1 < ... < y_{N-1} < y_N = T+1$ de $[T, T+1]$, où $y_j - y_{j-1} < 1/N$ pour tout $j = 1, ..., N$. Soit $A = \log(T)/(2N)$. Pour tout $j = 1, ..., N-1$ il existe un zéro non-trivial $\rho_{n_j} = \beta_{n_j} + i\gamma_{n_j}$ tel que

$$|\gamma_{n_j} - y_j| \leq \frac{\log T}{2N \log T} = \frac{1}{2N}.$$

Il y a au moins $N-1$ zéros non-triviaux distincts dans le rectangle $0 < Re(z) < 1$ et $T \leq Im(z) \leq T+1$. Ceci est une contradiction, car le théorème 2.7.1 affirme qu'il y a au plus $N-5$ zéros non-triviaux dans ce rectangle.

$\square$

**Lemme 2.8.3.** *Soit $P$ un entier positif impair et $r > 0$. Alors, il existe une constante $c > 0$ telle que*

$$\left|\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\right| \leq c \log(2|z|)$$

*sur* $(-P \leq Re(z) \leq -1) \setminus \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} D(-2n, r) \right)$.

DÉMONSTRATION. On déduit de l'équation fonctionnelle de la fonction $\zeta$ que $\zeta(1-z) = 2^{1-z}\pi^{-z}\cos(\pi z/2)\Gamma(z)\zeta(z)$. La dérivée logarithmique de cette équation est

$$-\frac{\zeta'(1-z)}{\zeta(1-z)} = -\log(2\pi) - \frac{\pi}{2}\tan\left(\frac{\pi z}{2}\right) + \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} + \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}.$$

Pour montrer ce lemme, il suffit de le montrer avec $1-z$ au lieu de $z$ dans l'énoncé et sur $S := (Re(z) \geq 2) \setminus \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} D(2n+1, r) \right)$, où $r > 0$ est fixé.

1) La fonction $\tan(\pi z/2)$ est bornée sur $S$.

2) Par le corollaire 0.0.1, lorsque $|z|$ tend vers l'infini, nous avons que

$$\left|\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right| = O(\log(2|z-1|)),$$

car $|z-1| \geq x-1 \geq 1$ implique que $\log|z| \leq \log(|z-1|+1) \leq \log(2|z-1|)$.

3) On sait que

$$\left|\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^2}.$$

En réunissant ces faits, le lemme est prouvé.

$\square$

Montrons la formule explicite de la fonction $\Psi$.

DÉMONSTRATION. On peut supposer que $x - 1/2 \in \mathbb{Z}$. Par le théorème 2.8.1,

$$\Psi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \left(-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\right) \frac{x^z}{z} dz + O\left(\frac{x(\log(x))^2}{T}\right)$$

lorsque $x$ tend vers l'infini, où $c = 1 + (\log x)^{-1}$. Soit $C$ la courbe rectangulaire aux sommets $c \pm iT$ et $-P \pm iT$, où $P$ est un entier positif impair. Calculons l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \left(-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\right) \frac{x^z}{z} dz.$$

Les singularités de $\left(-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\right) \frac{x^z}{z}$ sont 0, 1, les zéros triviaux et non-triviaux de la fonction $\zeta$ à l'intérieur de $C$. Par le théorème des résidus, l'intégrale est

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C} \left(-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\right) \frac{x^z}{z} dz = x - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \sum_{|\gamma_n|<T} \frac{x^{\rho_n}}{\rho_n} - \sum_{0<2m<P} \frac{x^{-2m}}{2m}$$

(On peut utiliser le théorème 2.6.2 pour calculer les résidus). Considérons les intégrales

$$I_T^{(1)} := \frac{1}{2\pi i} \int_{c+iT}^{-P+iT} \left(-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\right) \frac{x^z}{z} dz, \ I_T^{(2)} := \frac{1}{2\pi i} \int_{-P-iT}^{c-iT} \left(-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\right) \frac{x^z}{z} dz$$

$$\text{et } I_P := \frac{1}{2\pi i} \int_{-P+iT}^{-P-iT} \left(-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\right) \frac{x^z}{z} dz.$$

On peut dire que

$$\Psi(x) = x - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \sum_{|\gamma_n|<T} \frac{x^{\rho_n}}{\rho_n} - \sum_{0<2m<P} \frac{x^{-2m}}{2m} - I_T^{(1)} - I_T^{(2)} - I_P + O\left(\frac{x(\log(x))^2}{T}\right)$$

lorsque $x$ tend vers l'infini. Par le lemme 2.7.3, pour tout $x \in [-1, 2]$

$$\frac{\zeta'(x+iy)}{\zeta(x+iy)} = \sum_{|y-\gamma_n|<1} \frac{1}{x+iy-\rho_n} + O(\log|y|)$$

lorsque $|y|$ tend vers l'infini. Par le lemme 2.8.2, il existe un $T_1 \in [T, T+1]$ et une constante $A > 0$ tels que si $\rho_n = \beta_n + i\gamma_n$ est un zéro non-trivial de $\zeta$ où $|\gamma_n - T_1| < 1$, alors $|\gamma_n - T_1| \geq A(\log(T))^{-1}$. La deuxième partie du théorème 2.7.1 implique qu'il existe une constante $A_1 > 0$ telle que

$$\sum_{|T_1-\gamma_n|<1} \frac{1}{|x+iT_1-\rho_n|} \leq \sum_{|T_1-\gamma_n|<1} \frac{1}{|T_1-\gamma_n|} \leq A_1(\log(T))^2$$

pour $T$ suffisamment grand. On conclut qu'il existe une constante $B > 0$ telle que $\left|\frac{\zeta'(x+iy)}{\zeta(x+iy)}\right| \leq B(\log(T))^2$ pour tout $x \in [-1, 2]$ et $y \in [-T, T]$. Cette inégalité sera utilisée pour estimer $I_T^{(1)}, I_T^{(2)}$ et $I_P$.

Estimons $I_T^{(1)}$. Si $x$ est suffisamment grand pour que $c \in [-1, 2]$, alors

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{c+iT}^{-1+iT}\left(-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\right)\frac{x^z}{z}dz\right| &\leq \frac{B(\log(T))^2}{2\pi T}\int_{-1}^{c} x^t dt \\ &= \frac{B(\log(T))^2}{2\pi T\log(x)}\left(xe - \frac{1}{x}\right) \leq \frac{Cx(\log(T))^2}{T\log(x)}.\end{aligned}$$

Par le lemme 2.8.3, on majore $I_T^{(1)}$ par

$$|I_T^{(1)}| \leq \frac{Cx(\log(T))^2}{T\log(x)} + \frac{1}{2\pi}\int_{-P}^{-1} c\log(2|t+iT|)\frac{x^t}{|t+iT|}dt.$$

La fonction $f(x) = \log(2x)/x$ est une fonction décroissante. Elle nous permet d'écrire que

$$\begin{aligned}|I_T^{(1)}| &\leq \frac{Cx(\log(T))^2}{T\log(x)} + \frac{c\log(2T)}{2\pi T}\int_{-P}^{-1} x^t dt \\ &= \frac{Cx(\log(T))^2}{T\log(x)} + \frac{c\log(2T)}{2\pi T\log(x)}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^P}\right).\end{aligned}$$

Pour T assez grand, l'inégalité $\frac{\log(2T)}{x} \leq x(\log T)^2$ est vérifiée. En laissant tendre $P$ vers l'infini, on obtient l'estimation

$$I_T^{(1)} = O\left(\frac{x(\log(T))^2}{T\log(x)}\right)$$

lorsque $x$ tend vers l'infini. Cette estimation est aussi vraie pour l'intégrale $I_T^{(2)}$. Il ne reste l'intégrale $I_P$ à estimer. En utilisant le lemme 2.8.3 et la fonction décroissante $f$, on estime l'intégrale $I_P$ par

$$\begin{aligned} |I_P| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\left|\frac{\zeta'(-P+it)}{\zeta(-P+it)}\right|\frac{x^{-P}}{|-P+it|}dt \\ &\leq \frac{c\log(2P)}{2\pi P}\int_{-T}^{T}x^{-P}dt \leq \frac{cT\log(2P)}{\pi P x^P}. \end{aligned}$$

L'intégrale $I_P$ tend vers 0 lorsque $P$ tend vers l'infini. De plus, la série $\displaystyle\sum_{0<2m<P}\frac{x^{-2m}}{2m}$ tend vers le développement en série de Taylor de $-\frac{1}{2}\log(1-x^{-2})$ lorsque $P$ tend vers l'infini. On a l'approximation de la fonction $\Psi$

$$\Psi(x) = x - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \sum_{|\gamma_n|<T}\frac{x^{\rho_n}}{\rho_n} - \frac{1}{2}\log(1-x^{-2}) + O\left(\frac{x(\log(x))^2}{T} + \frac{x(\log(T))^2}{T\log(x)}\right).$$

En laissant tendre $T$ vers l'infini, la formule explicite de $\Psi$ est prouvée.

□

Dans le chapitre 3, nous utiliserons une approximation de la répartition des nombres premiers. Énonçons cette approximation.

**Approximation de $\pi(x)$ :** *Il existe une constante $c>0$ telle que*

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{1}{\log(t)}dt + O(xe^{-c\sqrt{\log x}}),$$

*lorsque $x$ tend vers l'infini.*

Une approximation de la fonction $\Psi$ sera nécessaire pour montrer cette approximation de la fonction $\pi$.

**Théorème 2.8.2.** *Il existe une constante $c_1 > 0$ telle que*

$$\Psi(x) = x + O(xe^{-c_1\sqrt{\log x}}),$$

*lorsque $x$ tend vers l'infini.*

DÉMONSTRATION. Dans la preuve de la formule explicite de $\Psi$, la fonction a été approximée par

$$\Psi(x) = x - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \sum_{|\gamma_n|<T} \frac{x^{\rho_n}}{\rho_n} - \frac{1}{2}\log(1-x^{-2}) + O\left(\frac{x(\log(x))^2}{T} + \frac{x(\log(T))^2}{T\log(x)}\right)$$

lorsque $x$ tend vers l'infini. Par le théorème de la Vallée-Poussin (version 2), pour $T \geq 2$, si $\rho_n = \beta_n + i\gamma_n$ est un zéro non-trivial de la fonction $\zeta$ tel que $|\gamma_n| < T$, alors il existe une constante $a > 0$ telle que

$$\beta_n < 1 - \frac{a}{\log(T)}.$$

Cette inégalité entraîne que

$$\left|\sum_{|\gamma_n|<T} \frac{x^{\rho_n}}{\rho_n}\right| \leq \sum_{|\gamma_n|<T} \frac{x^{\beta_n}}{|\rho_n|} < xe^{-a\left(\frac{\log x}{\log T}\right)} \sum_{|\gamma_n|<T} \frac{1}{|\rho_n|}.$$

Montrons que $\displaystyle\sum_{|\gamma_n|<T} \frac{1}{|\rho_n|} = O((\log T)^2)$ lorsque $T$ tend vers l'infini. Rappelons que le nombre de zéros non-triviaux dans le rectangle $0 < Re(z) < 1$ et $0 < Im(z) < T$ est désigné par $N_\zeta(T)$. Pour un $T$ fixé, ordonnons les parties imaginaires des $\rho_n$ dans le rectangle par $0 < |\gamma_{n_1}| \leq |\gamma_{n_2}| \leq \ldots \leq |\gamma_{n_m}| < T$. Alors,

$$\sum_{|\gamma_n|<T} \frac{1}{|\rho_n|} \leq \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{|\gamma_{n_i}|} = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{|\gamma_{n_i}|}(N_\zeta(|\gamma_{n_{i+1}}|) - N_\zeta(|\gamma_{n_i}|)).$$

Transformons cette série en intégrale de Stieltjes (Voir [R])

$$\sum_{|\gamma_n|<T} \frac{1}{|\rho_n|} \leq \int_{|\gamma_{n_1}|}^{1} \frac{1}{t} dN_\zeta(t) + \int_1^T \frac{1}{t} dN_\zeta(t) = A + \int_1^T \frac{1}{t} dN_\zeta(t),$$

où $A$ est une constante positive. En intégrant par parties,

$$\int_1^T \frac{1}{t} dN_\zeta(t) = \frac{N_\zeta(T)}{T} - N_\zeta(1) + \int_1^T \frac{N_\zeta(t)}{t^2} dt.$$

Par le théorème 2.7.2, il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\frac{N_\zeta(T)}{T} \leq \frac{1}{2\pi}\log\left(\frac{T}{2\pi}\right) - \frac{1}{2\pi} + \frac{7}{8T} + \frac{c\log T}{T} + \frac{c}{T^2}$$

et

$$\int_1^T \frac{N_\zeta(t)}{t^2} dt \leq \int_1^T \left(\frac{1}{2\pi t}\log\left(\frac{t}{2\pi}\right) - \frac{1}{2\pi t} + \frac{7}{8t^2} + \frac{c\log t}{t^2} + \frac{c}{t^3}\right) dt.$$

Il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\int_1^T \frac{1}{t} dN_\zeta(t) \leq C(\log T)^2$$

pour $T$ assez grand. En somme, nous avons montré que $\sum_{|\gamma_n|<T} \frac{1}{|\rho_n|} = O((\log(T))^2)$ lorsque $T$ tend vers l'infini. Il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\left| \sum_{|\gamma_n|<T} \frac{x^{\rho_n}}{\rho_n} \right| \leq Cxe^{-a\left(\frac{\log x}{\log T}\right)}(\log T)^2.$$

Posons $T$ et $b > 0$ telle que

$$\log T = b\sqrt{\log x} \text{ et } \frac{a}{2} < b^2 < a.$$

Le nombre $T$ dépend de $x$. Avec ces choix, on a que

$$\left| \sum_{|\gamma_n|<T} \frac{x^{\rho_n}}{\rho_n} \right| < Cxe^{-\frac{a}{b}\sqrt{\log x}} b\sqrt{\log x} < Cxe^{-(\frac{a}{b}-b)\sqrt{\log x}}$$

pour $x$ assez grand. Posons $c_1 := \frac{a}{b} - b$. On peut vérifier que $\Psi(x) = x + O(xe^{-c_1\sqrt{\log x}})$ lorsque $x$ tend vers l'infini. La fonction $\log(1 - x^{-2})$ est bornée sur $[1, +\infty[$. Substituons le choix de $T$ dans $\frac{x(\log(x))^2}{T}$ et $\frac{x(\log(T))^2}{T\log(x)}$. L'hypothèse que $2b^2 \geq a$ nous permet de conclure qu'il existe des constantes positives $M_1$ et $M_2$ telles que

$$\frac{x(\log(x))^2}{Te^{-c_1\sqrt{\log x}}} = \frac{x(\log(x))^2}{e^{(b-c_1)\sqrt{\log x}}} \leq M_1$$

et

$$\frac{x(\log(T))^2}{T\log(x)e^{-c_1\sqrt{\log x}}} = \frac{xb^2\log(x)}{\log(x)e^{(b-c_1)\sqrt{\log x}}} \leq M_2$$

lorsque $x$ est assez grand. Le théorème est prouvé.

$\square$

Nous pouvons maintenant montrer l'approximation de la répartition des nombres premiers.

DÉMONSTRATION. Considérons la fonction

$$S(x) := \sum_{1<n\leq x} \frac{\Lambda(n)}{\log(n)}.$$

On remarque que

$$S(x) = \pi(x) + \sum_{p^k\leq x, p\in\mathbb{P}, k\geq 2} \frac{\Lambda(p^k)}{\log(p^k)} = \pi(x) + \sum_{p^k\leq x, p\in\mathbb{P}, k\geq 2} \frac{1}{k}.$$

Montrons que $\displaystyle\sum_{p^k\leq x, p\in\mathbb{P}, k\geq 2} \frac{1}{k} \leq (\log 2)^{-1}\sqrt{x}\log(x)$. Soit $p_1$, $p_2$, ..., $p_m$ les nombres premiers tels que $p_j^2 \leq x$ pour tout $j = 1, ..., m$. Soit $k_1, k_2, ..., k_m$ les entiers tels que $p_j^{k_j} \leq x < p_j^{k_j+1}$ pour tout $j = 1, ..., m$. Remarquons que $m \leq \sqrt{x}$. En effet, si un nombre premier p est tel que $p^2 \leq x$, alors $p \leq \sqrt{x}$. Le nombre de nombres premiers tels que p $\leq \sqrt{x}$ est plus petit ou égal à $\sqrt{x}$. De plus, il découle de l'inégalité $2^{k_j} \leq p^{k_j} \leq x$ que $k_j \leq (\log 2)^{-1}\log(x)$. Alors,

$$\sum_{p^k\leq x, p\in\mathbb{P}, k\geq 2} \frac{1}{k} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{k_j} \frac{1}{k} \leq \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{k_j} 1 \leq (\log 2)^{-1}\sqrt{x}\log(x).$$

Cela implique que $S(x) = \pi(x) + O(\sqrt{x}\log x)$ lorsque $x$ tend vers l'infini.

En modifiant la définition de $S(x)$ avec l'intégrale de Stieltjes, on obtient

$$S(x) = \frac{1}{\log(2)}(\Psi(2) - \Psi(2-\epsilon)) + \sum_{2<n<[x]} \frac{1}{\log(n)}(\Psi(n) - \Psi(n-1))$$

$$= \int_{2-\epsilon}^{2} \frac{1}{\log(t)}d\Psi(t) + \sum_{1<n\leq[x]} \int_{n-1}^{n} \frac{1}{\log(t)}d\Psi(t) = \int_{2-\epsilon}^{x} \frac{1}{\log(t)}d\Psi(t),$$

où $\epsilon \in ]0,1[$. L'intégration par parties pour les intégrales de Stieltjes implique que

$$S(x) = \int_2^x \frac{\Psi(t)}{t(\log t)^2}dt + \frac{\Psi(x)}{\log x}.$$

Par l'approximation de la fonction $\Psi$ vue au théorème 2.8.2, on a que

$$S(x) = \int_2^x \frac{1}{(\log t)^2}dt + \frac{x}{\log x} + R(x),$$

où

$$R(x) \leq C\left(\int_2^x \frac{e^{-c\sqrt{\log t}}}{(\log t)^2}dt + \frac{xe^{-c\sqrt{\log x}}}{\log(x)}\right) \leq C\left(\frac{e^{-c\sqrt{\log 2}}}{(\log 2)^2}(x-2) + \frac{xe^{-c\sqrt{\log x}}}{\log(2)}\right)$$

pour $x \geq 2$. Donc, $R(x) = O(xe^{-c\sqrt{\log x}})$ lorsque $x$ tend vers l'infini. On fait le calcul

$$\int_2^x \frac{1}{(\log t)^2} dt \; + \; \frac{x}{\log x} \; = \; \int_2^x t\left(-\frac{1}{\log t}\right)' dt \; + \; \frac{x}{\log x}$$
$$= \left(-\frac{t}{\log t}\Big|_2^x\right) + \int_2^x \frac{1}{\log t} dt \; + \; \frac{x}{\log x} = \int_2^x \frac{1}{\log t} dt \; + \; \frac{2}{\log 2}$$

et l'approximation de $\pi$ est prouvée.

$\square$

Cette approximation sera utilisée dans le chapitre 3 qui traitera de la propriété d'universalité de la fonction $\zeta$.

# Chapitre 3

# UNIVERSALITÉ DE LA FONCTION ZÊTA DE RIEMANN

En plus de son lien avec la théorie des nombres, la fonction zêta de Riemann possède une propriété qui la rend intéressante en analyse complexe. La fonction $\zeta$ est une fonction universelle sur le disque ouvert centré en $3/4$ et de rayon $r$, où $r < 1/4$.

**Propriété d'universalité :** *Soit $f$ une fonction holomorphe sur $D(0,r)$, continue et ne s'annulant pas sur $\overline{D(0,r)}$. Alors, pour tout $\epsilon > 0$ il existe un nombre réel $T$ tel que*

$$\max_{|z|\leq r} \left| f(z) - \zeta\left(z + \frac{3}{4} + iT\right) \right| < \epsilon.$$

Le but de ce chapitre est la preuve de cette propriété. C'est-à-dire que si $f$ est une fonction holomorphe sur le disque ouvert $D(0,r)$, continue et sans zéros sur le disque fermé $\overline{D(0,r)}$, alors il existe une suite de nombres réels $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ telle que la suite de fonctions $\{\zeta(z + 3/4 + it_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformément sur le disque fermé $\overline{D(0,r)}$ vers $f$.

D'abord, on note $\overline{X} = (X_p)_{p\in\mathbb{P}}$ une famille de variables réelles indexées par un nombre premier. On convient que $\overline{\theta_0} = (\theta_p^{(0)})_{p\in\mathbb{P}}$, où $\theta_p^{(0)}$ est égal à $j/4$ si $p$ est le $j$-ième nombre premier. On convient aussi que $\overline{0} := (0,0,0,...)$. On définit les fonctions $\zeta_M$ par :

$$\zeta_M(z,\overline{X}) \ := \ \prod_{p\in M}\left(1-\frac{e^{-2\pi i X_p}}{p^z}\right)^{-1},$$

où $M$ est un sous-ensemble fini de nombres premiers et $z$ est une variable complexe. On convient aussi que $\zeta_M(z) := \zeta_M(z,\overline{0})$. Étant donné que la fonction $\zeta_M$ ne tient compte que des variables de $\overline{X}$ indexées par un élément de $M$, la fonction $\zeta_M$ est simplement écrite $\zeta_M(z,(X_p)_{p\in M})$. Si $M$ et $N$ sont des sous-ensembles finis de nombres premiers tels que $M \subseteq N$, alors on convient que $\zeta_M(z,(X_p)_{p\in N}) := \zeta_M(z,(X_p)_{p\in M})$.

La première section de ce chapitre aura pour but de montrer que certaines séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ d'un espace de Hilbert réel $\mathbb{H}$ ont la propriété que :

*"Pour tout élément $h$ de $\mathbb{H}$ il existe un réarrangement de la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qui converge vers $h$."*

Une telle série apparaîtra dans la preuve du lemme fondamental.

**Lemme fondamental :** *Soit $r \in ]0,1/4[$. Soit $f$ une fonction holomorphe, continue et ne s'annulant pas sur le disque fermé $\overline{D(0,r)}$. Alors, pour tout $\epsilon > 0$ et pour tout $y_0 > 0$ il existe un sous-ensemble fini $M$ de nombres premiers tel que $\{p \in \mathbb{P} | p \leq y_0\} \subseteq M$ et $\max_{|z|\leq r} |f(z) - \zeta_M(z+3/4,\overline{\theta_0})| < \epsilon$.*

La preuve de ce lemme est le sujet de la deuxième section. La troisième section portera sur l'approximation de l'intégrale d'une fonction sur un ouvert de $[0,1]^N$ par des valeurs moyennes de cette fonction le long d'une courbe. Il s'agit d'approximation de Kronecker. Finalement, c'est dans la dernière section que sera faite la preuve de la propriété de la fonction $\zeta$. Les références pour ce chapitre sont $[KV], [VS], [T2], [N], [BH], [B2], [C], [CK], [F], [H]$ et $[L2]$.

## 3.1. Séries conditionnellement convergentes dans un espace de Hilbert réel

Un espace de Hilbert réel est un espace vectoriel $\mathbb{H}$ sur $\mathbb{R}$ muni d'un produit scalaire réel $(\cdot, \cdot) : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{R}$. De plus, on exige que $\mathbb{H}$ soit un espace normé complet avec la norme induite du produit scalaire. Dans cette section, $\mathbb{H}$ sera toujours un espace de Hilbert réel et $\|\cdot\|$ sera la norme induite de $\mathbb{H}$.

On sait qu'une série réelle $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qui converge conditionnellement possède la propriété suivante :

**Propriété :** *Pour tout nombre réel $a$, il existe un réarrangement de la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qui converge vers $a$.*

Le but de cette section est de montrer que certaines séries de l'espace de Hilbert réel $\mathbb{H}$ possèdent cette propriété. Énonçons le résultat voulu.

**Théorème 3.1.1.** *Soit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ une série de $\mathbb{H}$ telle que :*

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\|^2 < \infty$

2) *Pour tout $h \in \mathbb{H}$ tel que $\|h\| = 1$, il existe un réarrangement de la série $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n, h)$ qui converge conditionnellement dans $\mathbb{R}$.*

*Alors, pour tout $h \in \mathbb{H}$, il existe un réarrangement de la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qui converge vers $h$.*

Le reste de cette section a pour but la preuve de ce théorème. Nous avons besoin d'un théorème de séparation bien connu en analyse fonctionnelle. La référence pour ce théorème est $[BH]$.

**Théorème de séparation :** *Soit $\mathbb{X}$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathbb{X}}$. Si $E$ est un sous-ensemble strict de $\mathbb{X}$ convexe et fermé (avec la topologie de* *la norme $\|\cdot\|_{\mathbb{X}}$), alors pour tout $x_0 \in \mathbb{X}\setminus E$, il existe un $\epsilon > 0$ et une fonctionnelle linéaire continue $f \in \mathbb{X}'$ tels que*

$$f(x) \leq f(x_0) - \epsilon \text{ pour tout } x \in E.$$

Un corollaire découle de ce théorème. Ce corollaire utilise le théorème de représentation de Riesz. Le théorème de représentation de Riesz est aussi discuté dans $[BH]$.

**Corollaire 3.1.1.** *Soit $E$ un ensemble convexe et fermé de $\mathbb{H}$ (dans la topologie de la norme $\|\cdot\|$). Si $E \neq \mathbb{H}$, alors il existe un $e \in \mathbb{H}$ tel que $\|e\| = 1$ et* $\sup_{x \in E}(x, e) < \infty$.

DÉMONSTRATION. Soit $a$ un élément de $\mathbb{H}$ tel que $a \notin E$. Par le théorème de séparation, il existe un nombre réel $\epsilon > 0$ et une fonctionnelle linéaire continue $f \in H'$ tels que $f(x) \leq f(a) - \epsilon$ pour tout $x \in E$. La fonctionnelle $f$ ne peut être nulle, car sinon $0 \leq -\epsilon$. Par le théorème de représentation de Riesz, il existe un $e_* \in \mathbb{H}$ tel que $f(x) = (x, e_*)$ pour tout $x \in \mathbb{H}$. On remarque que $e_* \neq 0$. Donc, pour tout $x \in E$

$$\left(x, \frac{e_*}{\| e_* \|}\right) \leq \frac{f(a) - \epsilon}{\| e_* \|}.$$

□

Voici un lemme d'approximation dans l'espace de Hilbert réel $\mathbb{H}$.

**Lemme 3.1.1.** *Soit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ une série de $\mathbb{H}$ vérifiant les mêmes hypothèses que le théorème 3.1.1. Alors, pour tout $h \in \mathbb{H}$ et pour tout $\epsilon > 0$, il existe des entiers $\epsilon_1, ..., \epsilon_N \in \{0, 1\}$ tels que*

$$\left\| h - \sum_{n=1}^{N} \epsilon_n a_n \right\| < \epsilon.$$

DÉMONSTRATION. Soit $h \in \mathbb{H}$ et $\epsilon > 0$. Par l'hypothèse 1), il existe un entier $m > 0$ tel que $\sum_{n=m}^{\infty} \|a_n\|^2 < \epsilon^2/4$. Soit

$$P_m := \left\{ \sum_{n=m}^{N} \lambda_n a_n \middle| N \in \{m, m+1, ...\} \text{ et } \lambda_n \in [0,1] \right\}.$$

L'ensemble $\overline{P_m}$ est convexe et fermé. Montrons que $\overline{P_m} = \mathbb{H}$. Par contradiction, supposons que $\overline{P_m} \neq \mathbb{H}$. Par le corollaire précédent, il existe un $e \in \mathbb{H}$ tel que $\|e\| = 1$ et $\sup_{x \in P_m} (x, e) < \infty$. Par l'hypothèse 2), il existe un réarrangement de la série $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n, e)$ qui converge conditionnellement dans $\mathbb{R}$. Soit $\{(a_{n_k}, e)\}_{k=1}^{\infty}$ une sous-suite des $(a_n, e)$ positifs telle que la série $\sum_{k=1}^{\infty} (a_{n_k}, e)$ diverge. Pour tout $\epsilon > 0$ il existe un entier $N > 0$ tel que $\sum_{k=m}^{N} (a_{n_k}, e) > \epsilon$. On remarque que

$$\sum_{k=m}^{N} (a_{n_k}, e) = \left( \sum_{n=m}^{n_N} \lambda_n a_n, e \right),$$

où $\lambda_n$ est égal à 1 si $n = n_k$ et 0 sinon. La série finie $\sum_{n=m}^{n_N} \lambda_n a_n$ est un élément de $P_m$. Il s'agit d'une contradiction, car $\sup_{x \in P_m} (x, e) < \infty$. Puisque $\overline{P_m} = \mathbb{H}$, il existe un entier $N \in \{m, m+1, ..., N\}$ et des $\lambda_1, ...., \lambda_N \in [0,1]$ tels que

$$\left\| h - \sum_{n=1}^{N} \lambda_n a_n \right\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Montrons par induction sur N que si les $\lambda_m, ..., \lambda_N \in [0,1]$ sont donnés, alors il existe des $\epsilon_m, ..., \epsilon_N \in \{0,1\}$ tels que

$$\left\| \sum_{n=m}^{N} \lambda_n a_n - \sum_{n=m}^{N} \epsilon_n a_n \right\|^2 < \sum_{n=m}^{N} \|a_n\|^2.$$

Pour le cas où N = 1 il suffit de poser $\epsilon_1 \in \{0,1\}$ tel que $|\lambda_1 - \epsilon_1| < 1$. Supposons que les nombres $\lambda_1, ..., \lambda_N, \lambda_{N+1} \in [0,1]$ soient donnés. Par l'hypothèse d'induction, il existe des $\epsilon_m, ..., \epsilon_N \in \{0,1\}$ tels que

$$\left\| \sum_{n=m}^{N} \lambda_n a_n - \sum_{n=m}^{N} \epsilon_n a_n \right\|^2 < \sum_{n=m}^{N} \|a_n\|^2.$$

Il reste à déterminer $\epsilon_{N+1} \in \{0,1\}$. Posons $\epsilon_{N+1} \in \{0,1\}$ tel que

$$(\lambda_{N+1} - \epsilon_{N+1}) \left( \sum_{n=m}^{N} (\lambda_n - \epsilon_n) a_n, a_{N+1} \right) \leq 0.$$

Avec ce choix de $\epsilon_{N+1}$ et en tenant compte du fait que $(\lambda_{N+1} - \epsilon_{N+1})^2 \leq 1$, on vérifie que

$$\left\| \sum_{n=m}^{N} (\lambda_n - \epsilon_n) a_n + (\lambda_{N+1} - \epsilon_{N+1}) a_{N+1} \right\|^2 = \left\| \sum_{n=m}^{N} (\lambda_n - \epsilon_n) a_n \right\|^2 +$$

$$2 \left( \sum_{n=m}^{N} (\lambda_n - \epsilon_n) a_n, (\lambda_{N+1} - \epsilon_{N+1}) a_{N+1} \right) + (\lambda_{N+1} - \epsilon_{N+1})^2 \|a_{N+1}\|^2$$

$$\leq \sum_{n=m}^{N} \|a_n\|^2 + \|a_{N+1}\|^2 \leq \sum_{n=m}^{N+1} \|a_n\|^2.$$

Ceci termine cette preuve par induction. Donc, il existe des $\epsilon_1, ..., \epsilon_N \in \{0,1\}$ tels que

$$\left\| h - \sum_{n=m}^{N} \epsilon_n a_n \right\| \leq \left\| h - \sum_{n=m}^{N} \lambda_n a_n \right\| + \left\| \sum_{n=m}^{N} \epsilon_n a_n - \sum_{n=m}^{N} \lambda_n a_n \right\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

□

**Lemme 3.1.2.** *Soit* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *une série de* $\mathbb{H}$ *vérifiant les mêmes hypothèses que le théorème* 3.1.1. *Alors, pour tout* $h \in \mathbb{H}$ *il existe une permutation* $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ *des entiers naturels telle qu'il existe une sous-suite des sommes partielles de la série* $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ *qui converge vers* $h$.

Démonstration. Soit $h \in \mathbb{H}$. Construisons la suite $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$. Posons $n_1 := 1$. Par le lemme précédent en considérant la série $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$, il existe un sous-ensemble fini $T_1$ de $\{2, 3, ...\}$ tel que

$$\left\| h - a_1 - \sum_{n \in T_1} a_n \right\| < \frac{1}{2}.$$

Si $2 \notin T_1$, alors on ajoute 2 à $T_1$. Notons $N_1 := \max\{n | n \in T_1\}$ et $T_1 := \{n_2, ..., n_{m_1}\}$. En utilisant encore une fois le lemme précédent en considérant la série $\sum_{n=N_1+1}^{\infty} a_n$, il existe un sous-ensemble fini $T_2$ de $\{N_1+1, N_1+2, ...\}$ tel que

$$\left\| h - a_1 - \sum_{n \in T_1} a_n - \sum_{n \in T_2} a_n \right\| < \frac{1}{2^2}.$$

Si $3 \notin T_1 \cup T_2$, alors on ajoute 3 à $T_2$. Notons $N_2 := \max\{n | n \in T_2\}$ et $T_2 := \{n_{m_1+1}, ..., n_{m_2}\}$. De la même façon, on détermine $T_3$ et ainsi de suite.

□

**Lemme 3.1.3.** 1) *Si $h_1, ..., h_N$ sont des éléments de $\mathbb{H}$ tels que $h_1 + ... + h_N = 0$, alors il existe une permutation $\{n_1, ..., n_N\}$ de $\{1, ..., N\}$ telle que*

$$\max_{1 \le m \le N} \left\| \sum_{k=1}^{m} h_{n_k} \right\| \le \left( \sum_{n=1}^{N} \|h_n\|^2 \right)^{1/2}.$$

2) *Si $h_1, ..., h_N$ sont des éléments de $\mathbb{H}$, alors il existe une permutation $\{n_1, ..., n_N\}$ de $\{1, ..., N\}$ telle que*

$$\max_{1 \le m \le N} \left\| \sum_{k=1}^{m} h_{n_k} \right\| \le \left( \sum_{n=1}^{N} \|h_n\|^2 \right)^{1/2} + 2 \left\| \sum_{k=1}^{N} h_k \right\|.$$

Démonstration. 1) Construisons $\{n_1, ..., n_N\}$ par induction. Posons $n_1 = 1$. Supposons que l'on a choisi $n_1, ..., n_p$, où $1 \le p \le N-1$, tels que

$$\max_{1 \le m \le p} \left\| \sum_{k=1}^{m} h_{n_k} \right\| \le \left( \sum_{k=1}^{p} \|h_{n_k}\|^2 \right)^{1/2}.$$

Déterminons un $n_{p+1} \notin \{n_1, ..., n_p\}$ tel que

$$\max_{1 \le m \le p+1} \left\| \sum_{k=1}^{m} h_{n_k} \right\| \le \left( \sum_{k=1}^{p+1} \|h_{n_k}\|^2 \right)^{1/2}.$$

Par hypothèse d'induction, il suffit de choisir un $n_{p+1} \notin \{n_1, ..., n_p\}$ tel que $\left\|\sum_{k=1}^{p+1} h_{n_k}\right\|^2 \leq \sum_{k=1}^{p+1} \|h_{n_k}\|^2$. Choisissons n'importe quel $n_{p+1}$ tel que

$$\left(\sum_{k=1}^{p} h_{n_k}, h_{n_{p+1}}\right) \leq 0.$$

Un tel $n_{p+1}$ existe. Sinon, pour tout $n \notin \{n_1, ..., n_p\}$ on a que $\left(\sum_{k=1}^{p} h_{n_k}, h_n\right) > 0$. On additionne les produits scalaires et on obtient que

$$0 < \left(\sum_{k=1}^{p} h_{n_k}, \sum_{n_k \notin \{n_1,...,n_p\}} h_n\right) = \left(\sum_{k=1}^{p} h_{n_k}, -\sum_{k=1}^{p} h_{n_k}\right) = -\left\|\sum_{k=1}^{p} h_{n_k}\right\|^2.$$

C'est une contradiction. Avec un tel choix de $n_{p+1}$ et en utilisant l'hypothèse d'induction,

$$\left\|\sum_{k=1}^{p+1} h_{n_k}\right\|^2 = \left\|\sum_{k=1}^{p} h_{n_k}\right\|^2 + 2\left(\sum_{k=1}^{p} h_{n_k}, h_{n_{p+1}}\right) + \left\|h_{n_{p+1}}\right\|^2 \leq \sum_{k=1}^{p+1} \|h_{n_k}\|^2.$$

2) Posons $h_{N+1} := -\sum_{n=1}^{N} h_n$. Par 1), il existe une permutation $\{n_1^*, ..., n_{N+1}^*\}$ de $\{1, ..., N, N+1\}$ telle que

$$\max_{1 \leq m \leq N+1} \left\|\sum_{k=1}^{m} h_{n_k^*}\right\| \leq \left(\sum_{n=1}^{N+1} \|h_n\|^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{n=1}^{N} \|h_n\|^2\right)^{1/2} + \|h_{N+1}\|$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{N} \|h_n\|^2\right)^{1/2} + \left\|\sum_{n=1}^{N} h_n\right\|.$$

Supposons que $h_{N+1}$ soit égal à $h_{n_j^*}$. On enlève $h_{N+1}$ à l'ensemble $\{h_{n_1^*}, ..., h_{n_{N+1}^*}\}$. On obtient la permutation $\{h_{n_1^{**}}, ..., h_{n_{N+1}^{**}}\}$ de l'ensemble $\{h_1, ..., h_N\}$, où $n_k^{**}$ est égal à $n_k^*$ si $k < j$ et $n_k^{**}$ est égal à $n_{k+1}^*$ si $k > j$. Avec cette permutation,

$$\max_{1 \leq m \leq N} \left\|\sum_{k=1}^{m} h_{n_k^{**}}\right\| \leq \max_{1 \leq m \leq N+1} \left\|\sum_{k=1}^{m} h_{n_k^*}\right\| + \|h_{n_{N+1}^*}\| \leq \left(\sum_{k=1}^{N} \|h_k\|^2\right)^2 + 2\left\|\sum_{k=1}^{N} h_n\right\|.$$

□

Le prochain lemme sera crucial pour la preuve du théorème 3.1.1.

**Lemme 3.1.4.** *Soit* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *une série de* $\mathbb{H}$ *telle que :*

*1)* $\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\|^2 < \infty$

*2) Il existe une sous-suite des sommes partielles de la série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *qui converge vers* $h \in \mathbb{H}$.

*Alors, il existe un réarrangement de la série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *qui converge vers* $h$.

Démonstration. Soit $S_n := \sum_{j=1}^{n} a_j$ la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ et $S_{n_k} := \sum_{j=1}^{n_k} a_j$ une sous-suite des $S_n$ qui converge vers $h$. En appliquant le lemme précédent à l'ensemble $\{a_{n_k+1}, ..., a_{n_{k+1}}\}$, il existe une permutation $\{a^*_{n_k+1}, ..., a^*_{n_{k+1}}\}$ telle que

$$\max_{1\leq m\leq n_{k+1}-n_k} \left\| \sum_{j=n_k+1}^{n_k+m} a_j^* \right\| \leq \left( \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} \|a_j\|^2 \right)^{1/2} + 2 \left\| \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} a_j \right\|$$

$$\leq \left( \sum_{j=n_k+1}^{\infty} \|a_j\|^2 \right)^{1/2} + 2\|S_{n_{k+1}} - S_{n_k}\|.$$

Cette dernière expression tend vers 0 lorsque k tend vers l'infini, car la sous-suite des $S_{n_k}$ converge et la série $\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\|^2$ converge. Montrons que la série $\sum_{j=1}^{\infty} a_j^*$ converge vers h. Soit $k_0$ suffisamment grand pour que

$$\max_{1\leq m\leq n_{k+1}-n_k} \left\| \sum_{j=n_k+1}^{n_k+m} a_j^* \right\| < \frac{\epsilon}{2} \text{ et } \|S_{n_k} - h\| < \frac{\epsilon}{2}$$

pour tout $k \geq k_0$. Soit $N$ un entier plus grand que $n_{k_0}$. Si $n_{k+1} \geq N > n_k \geq n_{k_0}$, alors

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} a_n^* - h \right\| \leq \left\| \sum_{n=1}^{N} a_n^* - S_{n_k} \right\| + \|S_{n_k} - h\| < \max_{1\leq m\leq n_{k+1}-n_k} \left\| \sum_{j=n_k+1}^{n_k+m} a_j^* \right\| + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Donc, la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^*$ converge vers $h$.

□

Nous pouvons maintenant montrer le théorème 3.1.1.

Démonstration. Soit $h \in \mathbb{H}$. Par le lemme 3.1.2, il existe une permutation $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ des entiers naturels telle qu'il existe une sous-suite des sommes partielles de la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ qui converge vers $h$. Par le lemme 3.1.4, il existe un réarrangement de la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qui converge vers $h$.

□

## 3.2. Preuve du lemme fondamental

Cette section est consacrée entièrement à la preuve de ce lemme. Il s'agit d'une application très puissante du théorème 3.1.1. De plus, l'approximation sur la répartition des nombres premiers y sera utilisée. Rappelons le lemme fondamental.

**Lemme fondamental :** *Soit $r \in ]0, 1/4[$. Soit $f$ une fonction holomorphe, continue et ne s'annulant pas sur le disque fermé $\overline{D(0,r)}$. Alors, pour tout $\epsilon > 0$ et pour tout $y_0 > 0$ il existe un sous-ensemble fini $M$ de nombres premiers tel que $\{p \in \mathbb{P} | p \leq y_0\} \subseteq M$ et $\max_{|z|\leq r} |f(z) - \zeta_M(z + 3/4, \overline{\theta_0})| < \epsilon$.*

Fixons $\epsilon > 0$ et $y_0 > 0$. La continuité de $f$ sur le disque fermé $\overline{D(0,r)}$ implique qu'il existe un nombre $\gamma > 1$ tel que :

$$\gamma^2 r < 1/4 \text{ et } \max_{|z|\leq r} \left| f(z) - f\left(\frac{z}{\gamma^2}\right) \right| < \epsilon.$$

En effet, $f$ étant uniformément continue sur l'ensemble compact $\overline{D(0,r)}$, il existe un $\delta \in ]0, r[$ tel que $|f(z) - f(w)| < \epsilon$ pour tout $z, w \in \overline{D(0,r)}$ tel que $|z - w| < \delta$. En considérant un $\gamma$ tel que $\gamma^2 < \frac{r}{r-\delta}$, on remarque que $|z - z/\gamma| < \delta$ pour tout $z \in \overline{D(0,r)}$. Il suffit de considérer n'importe quel $\gamma$ tel que

$$\gamma^2 \in \left] 1, \min\left\{\frac{1}{4r}, \frac{r}{r-\delta}\right\} \right[.$$

Considérons la fonction $f_1(z) := f(z/\gamma^2)$. Par les hypothèses sur $f$, la fonction $f_1$

est holomorphe, continue et ne s'annule pas sur le disque fermé $\overline{D(0,\gamma^2 r)}$. Il existe une fonction holomorphe $g$ sur le disque ouvert $D(0,\gamma^2 r)$ telle que $f_1(z) = e^{g(z)}$ sur ce disque.

Posons $R := \gamma r$. Soit $A_2(D(0,R))$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur le disque ouvert $D(0,R)$ telles que $\|f\|_{A_2} < \infty$, où $\|\cdot\|_{A_2}$ est la norme

$$\|f\|_{A_2} := \left(\lim_{R' \nearrow R} \iint_{|z| \leq R'} |f(z)|^2 dxdy\right)^{1/2}.$$

Muni de cette norme, cet espace vectoriel normé est complet. C'est un **espace de Bergman**. De plus, c'est un espace de Hilbert réel car la norme est induite du produit scalaire réel

$$(f,g)_{A_2} := \lim_{R' \nearrow R} \left(Re\left(\int\int_{|z|\leq R'} f(z)\overline{g(z)}dxdy\right)\right),$$

où $f, g \in A_2(D(0,R))$.

Voici un théorème reliant la convergence dans l'espace $A_2(D(0,R))$ et la convergence uniforme sur les compacts du disque $D(0,R)$.

**Théorème 3.2.1.** *Si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite de fonctions de $A_2(D(0,R))$ qui converge vers $f \in A_2(D(0,R))$ dans la norme $\|\cdot\|_{A_2}$, alors cette suite converge uniformément sur les compacts de $D(0,R)$ vers $f$. Réciproquement, si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite de fonctions holomorphes qui converge uniformément sur le disque $D(0,R)$ vers $f$, alors la suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge vers $f$ avec la norme $\|\cdot\|_{A_2}$.*

La preuve de ce théorème est faite dans les premières pages de $[H]$. Remarquons que la fonction $g$ restreinte au disque $D(0,R)$ est un élément de $A_2(D(0,R))$.

Soit la série $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$, où $u_k(z) := -\log\left(1 - \frac{e^{-\pi \imath k/2}}{p_k^{z+3/4}}\right)$ où l'argument du logarithme est pris dans la branche principale. On sait que

$$-\log(1-w) = w + \frac{w^2}{2} + \frac{w^3}{3} + \ldots$$

pour tout $w \in D(0,1)$. Par le théorème ci-dessus, s'il existe un réarrangement $\sum_{j=1}^{\infty} u_{k_j}(z)$ de la série $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ qui converge vers $g(z)$ dans $A_2(D(0,R))$, alors le réarrangement $\sum_{j=1}^{\infty} u_{k_j}(z)$ converge uniformément sur les compacts de $D(0,R)$ vers $g(z)$. Ceci implique que

$$f_1(z) = \lim_{m\to\infty} \prod_{j=1}^{m} \left(1 - \frac{e^{-\pi k_j i/2}}{p_{k_j}^{z+3/4}}\right)^{-1}.$$

uniformément sur les compacts de $D(0,R)$. En particulier, la convergence est uniforme sur le compact $\overline{D(0,r)}$. Il existe un entier positif $m$ assez grand tel que $\{p_{k_j}\}_{j=1}^{m} \supseteq \{p \in \mathbb{P} | p \leq y_0\}$ et

$$\max_{|z|\leq r} \left| f_1(z) - \prod_{j=1}^{m} \left(1 - \frac{e^{-\pi i k_j/2}}{p_{k_j}^{z+3/4}}\right)^{-1} \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

La preuve du lemme fondamental serait terminée. Nous n'appliquerons pas le théorème 3.1.1 maintenant. Nous allons plutôt considérer la série de $A_2(D(0,R))$

$$\sum_{k=1}^{\infty} h_k(z),$$

où

$$h_k(z) = \frac{e^{-\pi i k/2}}{p_k^{z+3/4}}.$$

Vérifions que la différence $h(z) := \sum_{k=1}^{\infty} u_k(z) - \sum_{k=1}^{\infty} h_k(z)$ est une série qui converge vers une fonction de $A(D(0,R))$. Comme le stipule le théorème 3.2.1, il faut montrer que cette série converge uniformément sur le disque $D(0,R)$. Les termes de cette série sont de la forme $-\log(1-w) - w = w^2(1/2 + w/3 + ...)$ où $w$ est égal à $h_k(z)$. Si $z \in D(0,R)$, alors

$$|h_k(z)|^2 \leq \frac{1}{p_k^{2(x+3/4)}} \leq \frac{1}{p_1^{2(-R+3/4)}} \text{ et } |h_k(z)| \leq \frac{1}{p_1^{1/2}} = \lambda < 1.$$

La fonction $1/2 + w/3 + ... = -w^{-2}(\log(1-w) + w)$ est bornée par une constante $M$ dans le disque $D(0,\lambda)$. En somme, nous avons que

$$|u_k(z) - h_k(z)| \leq \frac{M}{p_1^{2(-R+3/4)}}$$

sur le disque $D(0,R)$. Par le test-M de Weierstrass, la série $\sum_{k=1}^{\infty}(u_k(z)-h_k(z))$ converge absolument et uniformément sur le disque $D(0,R)$.

Pour montrer qu'il existe un réarrangement de la série $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ qui converge vers $g(z)$ dans $A_2(D(0,R))$, il suffit de montrer qu'il existe un réarrangement de la série $\sum_{k=1}^{\infty} h_k(z)$ qui converge vers $g(z)-h(z)$ dans $A_2(D(0,R))$. Montrons que pour toute fonction $G$ de $A_2(D(0,R))$ il existe un réarrangement de la série $\sum_{k=1}^{\infty} h_k(z)$ qui converge vers $G$ dans $A_2(D(0,R))$. Il suffit de vérifier que la série $\sum_{k=1}^{\infty} h_k(z)$ satisfait aux hypothèses du théorème 3.1.1. En ce qui concerne la première condition, on remarque que

$$\|h_k\|_{A_2}^2 \le \lim_{R'\nearrow R}\left(\iint_{|z|\le R'}\left(\frac{1}{p_k^{x+3/4}}\right)^2 dxdy\right) \le \lim_{R'\nearrow R}\left(\pi R'^2 \max_{|z|\le R'}\left(\frac{1}{p_k^{x+3/4}}\right)^2\right)$$

$$= \lim_{R'\nearrow R}\left(\pi R'^2\left(\frac{1}{p_k^{-R'+3/4}}\right)^2\right) = \pi R^2\left(\frac{1}{p_k^{-R+3/4}}\right)^2$$

et alors

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|h_k\|_{A_2}^2 \le \pi R^2 \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{p_k^{-2R+3/2}} < \infty.$$

Il faut montrer que la série $\sum_{k=1}^{\infty} h_k(z)$ satisfait la deuxième condition du théorème 3.1.1. C'est-à-dire que, pour tout $\varphi \in A_2(D(0,R))$ tel que $\|\varphi\|_{A_2}=1$, il existe un réarrangement de la série $\sum_{k=1}^{\infty}(h_k,\varphi)_{A_2}$ qui converge conditionnellement dans $\mathbb{R}$. Le reste de cette section sera entièrement consacré à la vérification de cette deuxième condition. Cette vérification est séparée en 5 étapes. Nous utiliserons le critère des séries alternées.

**Critère des séries alternées :** *Soit* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *une série réelle. Il existe un réarrangement de cette série qui converge conditionnellement si et seulement si le terme général* $a_n$ *de la série tend vers 0 lorsque* $n$ *tend vers l'infini et s'il existe* *deux sous-séries de* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*, l'une tendant vers* $+\infty$*, l'autre vers* $-\infty$*.*

Soit $\varphi \in A_2(D(0,R))$ tel que $\|\varphi\|_{A_2} = 1$.

**Étape 1 :** Calculons la série $\sum_{k=1}^{\infty}(h_k, \varphi)_{A_2}$.

Commençons par le terme général de la série

$$(h_k, \varphi)_{A_2} = \lim_{R' \nearrow R} \left( Re \left( \iint_{|z| \leq R'} e^{-\pi i k/2} p_k^{-(z+3/4)} \overline{\varphi(z)} dxdy \right) \right)$$
$$= \lim_{R' \nearrow R} \left( Re \left( e^{-\pi i k/2} \iint_{|z| \leq R'} p_k^{-(z+3/4)} \overline{\varphi(z)} dxdy \right) \right).$$

Posons

$$\Delta_{R'}(t) := e^{-3t/4} \iint_{|z| \leq R'} e^{-zt} \overline{\varphi(z)} dxdy,$$

où t > 0. On remarque que

$$(h_k, \varphi)_{A_2} = \lim_{R' \nearrow R} \left( Re(e^{-\pi i k/2} \Delta_{R'}(\log p_k)) \right).$$

La fonction $\varphi$ est holomorphe sur le disque ouvert centré en 0 et de rayon $R$. Supposons que

$$\varphi(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

soit sa représentation en série de Taylor sur ce disque. Substituons cette représentation en série de $\varphi$ et celle de $e^{-zt}$ dans la définition de $\Delta_{R'}(t)$,

$$\Delta_{R'}(t) = e^{-3t/4} \iint_{|z| \leq R'} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-zt)^n}{n!} \right) \overline{\left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right)} dxdy$$
$$= e^{-3t/4} \iint_{|z| \leq R'} \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n_1} t^{n_1} \overline{a_{n_2}}}{n_1!} z^{n_1} \overline{z}^{n_2} dxdy.$$

Les séries $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-zt)^n}{n!}$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n z^n}$ convergent uniformément et absolument dans tout disque centré en 0 et de rayon $R'$. On intègre la série double terme à terme

$$\Delta_{R'}(t) = e^{-3t/4} \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n_1} t^{n_1} \overline{a_{n_2}}}{n_1!} \iint_{|z| \leq R'} z^{n_1} \overline{z}^{n_2} dxdy.$$

Un calcul permet d'évaluer les intégrales de chaque terme de la somme

$$\iint_{|z|\leq R'} z^{n_1}\overline{z}^{n_2}dxdy = \begin{cases} \frac{\pi R'^{2n_1+2}}{n_1+1} & \text{si } n_1 = n_2 \\ 0 & \text{si } n_1 \neq n_2 \end{cases}$$

et d'écrire $\Delta_{R'}(t)$ sous forme de série simple

$$\Delta_{R'}(t) = \pi R'^2 e^{-3t/4} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \overline{a_m} R'^{2m}}{(m+1)!} t^m.$$

Fixons un $t > 0$ pour l'instant. Considérons la série de Taylor $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \overline{a_m} t^m}{(m+1)!} w^m$.

Le rayon de convergence de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est plus grand ou égal à $R$, c'est-à-dire $\limsup_{m\to\infty} |a_m|^{1/m} \leq R^{-1}$. Il en découle que le rayon de convergence de la série de Taylor $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \overline{a_m} t^m}{(m+1)!} w^m$ est l'infini, car

$$\limsup_{m\to\infty} \left| \frac{(-1)^m \overline{a_m} t^m}{(m+1)!} \right|^{1/m} \leq \frac{t}{R} \limsup_{m\to\infty} \left( \frac{1}{(m+1)!} \right)^{1/m} = 0.$$

On conclut que cette série de Taylor est une fonction entière. Pour $t > 0$ fixé, $\Delta_{R'}(t)$ tend vers $\Delta_R(t)$ lorsque $R'$ croît vers $R$. Soit

$$\Delta(t) := \pi R^2 e^{-3t/4} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \overline{a_m} R^{2m}}{(m+1)!} t^m$$

Posons

$$\beta_m := \frac{(-1)^m R^m \overline{a_m}}{m+1}$$

et alors

$$\Delta(t) = \pi R^2 e^{-3t/4} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\beta_m}{m!} (tR)^m.$$

On sait par hypothèse que

$$\lim_{R'\nearrow R} \left( \iint_{|z|\leq R'} |\varphi(z)|^2 dxdy \right) = 1.$$

Si on calcule $|\varphi(z)|^2$ avec la représentation en série de Taylor de $\varphi$, alors on obtient

$$|\varphi(z)|^2 = \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) \cdot \overline{\left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right)} = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} a_{n_1} \overline{a_{n_2}} z^{n_1} \overline{z}^{n_2}.$$

On a pu réarranger la série double de cette façon car la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge absolument dans le disque $D(0,R)$. De plus, la série converge uniformément sur le disque fermé $\overline{D(0,R')}$ et alors

$$\iint_{|z|\leq R'} |\varphi(z)|^2 dxdy = \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty} a_{n_1}\overline{a_{n_2}} \iint_{|z|\leq R'} z^{n_1}\overline{z}^{n_2} dxdy.$$

D'après les calculs précédents,

$$\iint_{|z|\leq R'} |\varphi(z)|^2 dxdy = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \overline{a_m} \frac{R'^{2m+2}\pi}{m+1}$$

et alors

$$\lim_{R'\nearrow R} \left( \pi R'^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|a_m|^2 R'^{2m}}{m+1} \right) = 1.$$

Vérifions que $\lim_{R'\nearrow R} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|a_m|^2}{m+1} R'^{2m} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|a_m|^2}{m+1} R^{2m}$. Pour cela, nous aurons besoin du théorème de convergence monotone. La référence pour ce théorème est [$L2$].

**Théorème de convergence monotone :** *Soit $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite monotone de fonctions à valeurs réelles de $L_1([0,+\infty[)$ telle que la suite $\left\{ \int_0^{+\infty} f_n(x)dx \right\}_{n=1}^{\infty}$ est bornée. Alors, la suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge vers $f$ presque partout et dans la norme de $L_1([0,+\infty[)$.*

Soit $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite croissante de nombres réels positifs tendant vers $R$. Considérons la suite de fonctions définies par

$$f_{R_n}(x) := \frac{|a_m|}{m+1} R_n^{2m} \text{ si } m \leq x < m+1.$$

Cette suite de fonctions est monotone. Transformons la série des $f_{R_n}$ en intégrale de Lebesgue

$$\sum_{m=0}^{\infty} f_{R_n}(m) = \sum_{m=0}^{\infty} \int_m^{m+1} f_{R_n}(x)dx = \int_0^{+\infty} f_{R_n}(x)dx.$$

Il existe un nombre réel $R_0 > 0$ tel que pour tout $R_n > R_0$ la série $\sum_{m=1}^{\infty} f_{R_n}(m)$ est bornée par $(\pi R_0^2)^{-1}(1+\epsilon)$. Ceci est dû au fait que $\lim_{R' \nearrow R} \left( \pi R'^2 \sum_{m=1}^{\infty} f_{R'}(m) \right) = 1$. La suite $\left\{ \int_0^{\infty} f_{R_n}(x) dx \right\}_{n=1}^{\infty}$ est bornée. Les hypothèses du théorème de convergence monotone sont satisfaites. Ce théorème nous dit qu'il existe une fonction $f \in L_1([0, +\infty[)$ telle que

$$\lim_{n \to +\infty} f_{R_n}(x) = f(x) \text{ presque partout sur } [0, +\infty[$$

et

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} f_{R_n}(x) dx = \int_0^{+\infty} f(x) dx.$$

On sait $\lim_{n \to +\infty} f_{R_n}(x) = f_R(x)$ sur $[0, +\infty[$. On conclut que

$$\lim_{R' \nearrow R} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|a_m|^2}{m+1} R'^{2m} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|a_m|^2}{m+1} R^{2m}.$$

Utilisons les $\beta_m$ définis précédemment. On remarque que

$$|\beta_m|^2 \; = \; \beta_m \overline{\beta_m} \; = \; \frac{R^{2m} |a_m|^2}{(m+1)^2}.$$

On a donc que

$$\pi R^2 \sum_{m=0}^{\infty} |\beta_m|^2 (m+1) \; = \; 1.$$

Ces calculs nous permettent de conclure que

$$0 < \sum_{m=0}^{\infty} |\beta_m|^2 \leq 1 \text{ et } |\beta_m| \; \leq \; 1 \text{ pour tout m } \; \geq \; 0.$$

Finalement, on peut conclure cette étape en disant que

$$\sum_{k=1}^{\infty} (h_k, \varphi)_{A_2} = \sum_{k=1}^{\infty} Re(e^{-\pi i k/2} \Delta(\log(p_k)))$$

où

$$\Delta(t) \; = \; \pi R^2 e^{-3t/4} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\beta_m}{m!} (tR)^m$$

avec la propriété que $|\beta_m| \leq 1$ pour tout entier $m$.

On voit que $Re(e^{-\pi i k/2} \Delta(\log p_k))$ tend vers 0 lorsque $k$ tend vers l'infini. Il ne reste qu'à construire les deux sous-séries du critère des séries alternées.

Considérons maintenant la fonction

$$F(u) \;:=\; \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\beta_m}{m!} u^m.$$

La fonction $F$ est entière, car $|\beta_m| \leq 1$ pour tout $m \geq 1$. Nous avons besoin d'un lemme concernant cette fonction $F$.

**Étape 2 :** Montrons que pour tout $\delta > 0$, il existe une suite $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ croissante tendant vers $+\infty$ telle que $|F(u_j)| \;>\; e^{-(1+2\delta)u_j}$ pour tout $j \geq 1$.

Supposons qu'il existe un $\delta > 0$ tel que $|F(u_j)| \;\leq\; e^{-(1+2\delta)u_j}$ pour toute suite $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ croissante tendant vers $+\infty$. On peut supposer sans perte de généralité que $\delta \in \,]0,1[$. On peut dire que

$$|e^{(1+\delta)u} F(u)| \leq e^{-\delta u}.$$

pour tout $u > 0$. Si $u \leq 0$, alors

$$|e^{(1+\delta)u} F(u)| \leq e^{(1+\delta)u} \left| \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\beta_m}{m!} u^m \right| \leq e^{(1+\delta)u} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|\beta_m|}{m!} |u|^m$$

$$\leq \; e^{(1+\delta)u} e^{|u|} \;=\; e^{-\delta|u|} e^{u+|u|} = e^{-\delta|u|}.$$

Considérons la fonction

$$G(u) := e^{(1+\delta)u} F(u).$$

Par ce qui a été démontré,

$$|G(u)| \leq e^{-\delta|u|} \text{ pour tout } u \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Nous utiliserons le théorème de Paley-Weiner concernant les transformées de Fourier dans $L_2(\mathbb{R})$. Les références pour ce théorème sont $[B2]$ et $[CK]$. Il y a des rappels sur les fonctions de type exponentiel dans le chapitre préliminaire.

**Théorème de Paley-Weiner** : *Soit $0 < A < \infty$. Alors, $G \in L_2(\mathbb{R})$ et $G$ peut être holomorphiquement prolongée à une fonction de type exponentiel de classe $E^A$ si et seulement s'il existe une fonction $g \in L_2(]-A, A[)$ telle que*

$$G(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{A} g(x) e^{ixu} dx$$

*pour tout $x \in \mathbb{R}$. De plus, si $g$ n'est pas identiquement nulle presque partout dans tout intervalle ouvert autour de $A$ ou $-A$, alors $G$ est de type exponentiel $A$.*

Vérifions que la fonction $G(u)$ définie plus haut satisfait aux conditions du théorème de Paley-Weiner. La fonction $G$ est dans $L_2(\mathbb{R})$, car par (5),

$$\int_{-\infty}^{\infty} |G(u)|^2 du \leq \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\delta|u|} du < +\infty.$$

La fonction $G(z)$ est de type exponentiel plus petit ou égal à $2+\delta$, car

$$|G(z)| = |e^{(1+\delta)z} F(z)| \leq e^{(1+\delta)|z|} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|\beta_m|}{m!} |z|^m \leq e^{(2+\delta)|z|}.$$

En particulier, $G$ est de classe $E^3$. Donc, il existe une fonction $g \in L_2(]-3, 3[)$ telle que

$$G(u) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-3}^{3} g(x) e^{ixu} dx.$$

Le théorème de Paley-Weiner nous dit même que

$$g(z) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G(u) e^{-izu} du.$$

On peut montrer que la fonction $g$ est holomorphe dans une bande horizontale contenant l'axe réel. En effet, on considère la bande horizontale $Im(z) < \delta$. Utilisons les théorèmes 0.0.2 et 0.0.3 du chapitre préliminaire. La fonction $G(u)e^{-izu}$ est entière par rapport à $z$ pour tout $u$ fixé. Vérifions que l'intégrale converge uniformément sur la bande horizontale $Im(z) \leq r$, où $r < \delta$. Par (5),

$$|G(u)e^{-izu}| \leq |G(u)| e^{|u|r} \text{ et } \int_{-\infty}^{\infty} |G(u)| e^{|u|r} du \leq \int_{-\infty}^{\infty} e^{(r-\delta)u} du < \infty$$

sur la bande horizontale $Im(z) \leq r$. La convergence uniforme sur $Im(z) \leq r$ pour tout $r < \delta$ implique l'holomorphie de $g$ sur une bande horizontale contenant l'axe réel. Étant donné que $g$ n'est pas identiquement nulle presque partout sur cette bande, la fonction $G$ est de type exponentiel 3. C'est une contradiction car $G$ est de type exponentiel plus petit ou égal à $2+\delta$. Ce qui prouve l'étape 2.

Soit un $\delta > 0$ qui sera déterminé plus tard. Soit une suite $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ avec les propriétés de l'étape 2. Posons

$$x_j \ := \ u_j/R.$$

On peut supposer que $x_j > 1$ pour tout $j \geq 1$ et que $|x_j - x_i| > 2$ pour tout $i \neq j$. Considérons la famille d'intervalles $\{[x_j - 1, x_j + 1]\}_{j=1}^{\infty}$. Par les propriétés de la suite $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$, il existe une constante $c > 0$ telle que

$$|\Delta(x_j)| = |\pi R^2 e^{-3x_j/4} F(x_j R)| \geq \pi R^2 e^{-3x_j/4} e^{-(1+2\delta)(x_j R)} \geq c e^{-x_j(3/4+(1+2\delta)R)}.$$

Soit $\delta_0 > 0$ tel que $R + 2\delta_0 R + 3/4 < 1 - \delta_0$. Un tel $\delta_0$ existe. Il suffit de prendre n'importe quel $\delta_0$ tel que $0 < \delta_0 < (1/4 - R)/(1+2R)$. On peut choisir $\delta_0$ encore plus petit pour que

$$|\Delta(x_j)| > e^{-x_j(1-\delta_0)}.$$

pour tout $j \geq 1$.

**Étape 3 :** Montrons que pour tout $j \geq 1$, il existe un polynôme $p_j(x)$ de degré plus petit ou égal à $N^4 = ([x_j] + 1)^4$ tel que pour tout $x \in [x_j - 1, x_j + 1]$

$$\Delta(x) = p_j(x) + o(e^{-x_j})$$

lorsque $j$ tend vers l'infini.

Soit $x \in [x_j - 1, x_j + 1]$. Nous approximons $\Delta(x)$ sur l'intervalle $[x_j - 1, x_j + 1]$ par le polynôme

$$p_j(x) := \pi R^2 \left( \sum_{m=0}^{N^2} \frac{(-3x/4)^m}{m!} \right) \left( \sum_{m=0}^{N^2} \frac{\beta_m}{m!} (xR)^m \right).$$

Faisons quelques approximations pour montrer que la différence $|\Delta(x) - p_j(x)|$ est plus petite que $Ce^{-x_j}$ pour $j$ assez grand. Bien sûr, il ne faut pas que la constante $C$ dépende de $j$. Remarquons que $x \leq x_j + 1 \leq N + 1 \leq N^2 + 1$ et $R \in ]0, 1/4[$.

Sur $[x_j - 1, x_j + 1]$, nous avons que

$$\left|\sum_{m=N^2+1}^{\infty} \frac{\beta_m}{m!}(xR)^m\right| \leq \sum_{m=N^2+1}^{\infty} \frac{(xR)^m}{m!} \leq \frac{(xR)^{N^2}}{(N^2)!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(xR)^m}{m!}$$

$$= \frac{(xR)^{N^2}}{(N^2)!} e^{xR} \leq e\frac{(xR)^{N^2} e^N}{(N^2)!} \leq e\frac{N^{N^2} e^N}{(N^2)!}.$$

La dernière inégalité provient du fait que

$$(xR)^{N^2} \leq ((N+1)R)^{N^2} \leq (2RN)^{N^2} \leq N^{N^2}.$$

On sait que

$$e^{N^2}(N^2)! \geq \frac{(N^2)^{N^2}}{(N^2)!}(N^2)! = N^{2N^2}.$$

Pour $j$ assez grand, nous avons la majoration

$$\left|\sum_{m=N^2+1}^{\infty} \frac{\beta_m}{m!}(xR)^m\right| \leq e\frac{e^{N^2+N}}{N^{N^2}} \leq ee^{-2N} \leq ee^{-2x_j}. \tag{6}$$

Pour tout $x$ dans l'intervalle $[x_j - 1, x_j - 1]$,

$$\left|\sum_{m=N^2+1}^{\infty} \frac{1}{m!}(-3x/4)^m\right| \leq \sum_{m=N^2+1}^{\infty} \frac{(3x/4)^m}{m!} \leq \frac{(3x/4)^{N^2}}{(N^2)!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(3x/4)^m}{m!}.$$

Comme à l'inégalité (6), il existe une constante positive $a_2$ telle que

$$\left|\sum_{m=N^2+1}^{\infty} \frac{1}{m!}(-3x/4)^m\right| \leq a_2 e^{-2x_j}. \tag{7}$$

De plus,

$$\left|\sum_{m=0}^{N^2} \frac{\beta_m}{m!}(xR)^m\right| \leq e^{xR}. \tag{8}$$

En utilisant (6), (7) et (8), pour $j$ assez grand

$$|\Delta(x) - p_j(x)| \leq \pi R^2 \left| e^{-3x/4} \sum_{m=N^2+1}^{\infty} \frac{\beta_m}{m!}(xR)^m - \sum_{m=N^2+1}^{\infty} \frac{(-3x/4)^m}{m!} \sum_{m=0}^{N^2} \frac{\beta_m}{m!}(xR)^m \right|$$

$$\leq \pi R^2 a_1 e^{-3x/4} e^{-2x_j} + \pi R^2 a_2 e^{xR} e^{-2x_j} \leq Ce^{-x_j}$$

pour tout $x \in [x_j - 1, x_j + 1]$. L'étape 3 est prouvée.

**Étape 4 :** Il existe des constantes $A$ et $C > 0$ telles que pour tout $j$ assez grand l'intervalle $[x_j - 1, x_j + 1]$ contient un sous-intervalle $\tau_j$ de longueur plus grande ou égale à $C/N^8$ tel que

$$|Re(\Delta(x))| \geq Ae^{-(1-\delta_0)x_j} \text{ pour tout } x \in \tau_j$$

ou

$$|Im(\Delta(x))| \geq Ae^{-(1-\delta_0)x_j} \text{ pour tout } x \in \tau_j.$$

Soit l'intervalle $[x_j - 1, x_j + 1]$. Nous avons vu que $|\Delta(x_j)| > e^{-(1-\delta_0)x_j}$. Il y a deux possibilités :

$$|Re(\Delta(x_j))| > \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-(1-\delta_0)x_j} \text{ ou } |Im(\Delta(x_j))| > \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-(1-\delta_0)x_j}.$$

Supposons sans perte de généralité que $|Re(\Delta(x_j))| > \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-(1-\delta_0)x_j}$. Par l'étape 3, on sait qu'il existe une constante $C \in ]0, 1/\sqrt{2}[$ telle que pour tout $j$ assez grand

$$\max_{x \in [x_j - 1, x_j + 1]} |p_j(x) - \Delta(x)| \ < \ Ce^{-x_j}.$$

Donc, pour $j$ assez grand

$$|Re(p_j(x_j))| \geq |Re(\Delta(x_j))| - |Re(\Delta(x_j)) - Re(p_j(x_j))| \geq C^* e^{-(1-\delta_0)x_j}$$

où $C^* := (1/\sqrt{2}) - C$.

Montrons l'étape 4 pour le polynôme $p_j$, c'est-à-dire, il existe un sous-intervalle $\tau_j$ de $[x_j - 1, x_j + 1]$ tel que $|Re(p_j(x))| \geq C_1 e^{-(1-\delta_0)x_j}$ sur $\tau_j$ et la longueur de $\tau_j$ est plus grande ou égale à $C_2/N^8$. Les constantes $C_1$ et $C_2$ ne doivent pas dépendre de $j$. Soit

$$M_j := \max_{x \in [x_j - 1, x_j + 1]} |Re(p_j(x))|$$

et

$$x_j^* \text{ tel que } |Re(p_j(x_j^*))| = M_j.$$

On sait que $M_j \geq C^* e^{-(1-\delta_0)x_j}$ pour tout $j$ assez grand. Soit $x$ un élément de l'intervalle $[x_j^* - b_j/2, x_j^* + b_j/2]$, où le choix de $b_j$ reste à déterminer. Sans perte de généralité, on suppose que $x \geq x_j^*$. Un tel $x$ satisfait à

$$|Re(p_j(x))| \geq |Re(p_j(x_j^*))| - |Re(p_j(x)) - Re(p_j(x_j^*))|.$$

Approximons $|Re(p_j(x)) - Re(p_j(x_j^*))|$ à l'aide d'un résultat de la théorie de l'approximation. Ce théorème découle de la qualité des approximations des polynômes de Chebyshev. La référence pour ce théorème est le livre $[C]$.

**Inégalité de Markov :** *Soit $P$ un polynôme de degré $n$ à coefficients réels. Alors,*

$$\max_{x\in[x_0-1,x_0+1]} |P'(x)| \;\leq\; n^2 \max_{x\in[x_0-1,x_0+1]} |P(x)|.$$

Cette inégalité nous permet d'écrire que

$$|Re(p_j(x)) - Re(p_j(x_j^*))| \leq \int_{x_j^*}^{x} |(Re(p_j))'(t)|dt \leq \int_{x_j^*}^{x} (N^4)^2 M_j dt \leq \frac{b_j}{2} N^8 M_j.$$

Donc,

$$|Re(p_j(x))| \geq M_j - \frac{b_j}{2} N^8 M_j = \left(1 - \frac{b_j}{2} N^8\right) M_j.$$

En posant $b_j = 2(1 - C^*)N^{-8}$, on obtient que $|Re(p_j(x))| \geq C^* e^{-(1-\delta_0)x_j}$ sur $[x_j^* - b_j/2, x_j^* + b_j/2]$.

Maintenant on peut montrer l'étape 4. Par l'étape 3, pour $j$ assez grand,

$$\max_{x\in[x_j-1,x_j+1]} |p_j(x) - \Delta(x)| < Ce^{-(1-\delta_0)x_j}$$

où $C < C^*$. Alors, $|Re(\Delta(x))| \geq (C^* - C)e^{-(1-\delta_0)x_j}$ sur $\tau_j$ pour $j$ assez grand. La démarche est la même si $|Im(\Delta(x))| > Ae^{-(1-\delta_0)x_j}$. L'étape 4 est prouvée.

**Étape 5 :** Déterminons une sous-série de $\sum_{k=1}^{\infty} Re(e^{-i\pi k/2}\Delta(\log(p_k)))$ tendant vers $+\infty$ et une autre tendant vers $-\infty$.

Considérons l'ensemble des entiers positifs $k$ tels que $\log(p_k) \in \tau_j$ pour un certain $j$. Notons cet ensemble $A$. Soit $A_+$ l'ensemble des $k \in A$ tels que $k \equiv 0 \bmod 4$ si $Re(\Delta(x)) > Ae^{-(1-\delta_0)x_j}$ sur $\tau_j$ ou $k \equiv 1 \bmod 4$ si $Im(\Delta(x)) > Ae^{-(1-\delta_0)x_j}$ sur

$\tau_j$. Soit $A_-$ l'ensemble des $k \in A$ tels que $k \equiv 2 \bmod 4$ si $Re(\Delta(x)) > Ae^{-(1-\delta_0)x_j}$ sur $\tau_j$ ou $k \equiv 3 \bmod 4$ si $Im(\Delta(x)) > Ae^{-(1-\delta_0)x_j}$ sur $\tau_j$. Il faut montrer que $\sum_{k\in A_+} Re(e^{-i\pi k/2}\Delta(\log(p_k))) = +\infty$ et $\sum_{k\in A_-} Re(e^{-i\pi k/2}\Delta(\log(p_k))) = -\infty$.

Montrons que $\sum_{k\in A_+} Re(e^{-i\pi k/2}\Delta(\log(p_k))) = +\infty$. Par l'étape précédente, on remarque que pour j assez grand et pour $k \in A_+$ tel que $\log(p_k) \in \tau_j$

$$Re(e^{-i\pi k/2}\Delta(\log(p_k))) > Ae^{-(1-\delta_0)x_j}$$

et alors

$$\sum_{k\in A_+} Re(e^{-i\pi k/2}\Delta(\log(p_k))) \geq \sum_j \sum_{k\in A_+, \log(p_k)\in\tau_j} Ae^{-(1-\delta_0)x_j}.$$

Estimons le nombre de nombres premiers $p_k$ tels que $\log(p_k) \in \tau_j$ et $k \equiv n \bmod 4$ $(n = 0, 1, 2, 3)$. Le nombre à estimer est égal à $\frac{1}{4}(\pi(e^{\alpha+\beta}) - \pi(e^\alpha))$. Supposons que $\tau_j$ est de la forme $[\alpha, \alpha+\beta]$. Par l'approximation sur la répartition des nombres premiers vue au chapitre 2,

$$\begin{aligned}
\pi(e^{\alpha+\beta}) - \pi(e^\alpha) &= \int_{e^\alpha}^{e^{\alpha+\beta}} \frac{1}{\log t} dt + O\left(e^{\alpha+\beta}e^{-c\sqrt{\alpha}}\right) \\
&\geq (e^{\alpha+\beta} - e^\alpha)\frac{1}{\alpha+\beta} + O\left(\frac{e^\alpha e^\beta}{e^{c\sqrt{\alpha}}}\right).
\end{aligned}$$

Il existe une constante $c_1 > 0$ telle que

$$\pi(e^{\alpha+\beta}) - \pi(e^\alpha) \geq \frac{e^\alpha(e^\beta - 1)}{\alpha+\beta} + c_1\frac{e^\alpha e^\beta}{e^{c\sqrt{\alpha}}}.$$

On sait que $e^\beta \geq e^\beta - 1 \geq \beta$. L'étape 4 nous dit que $\beta$, qui est la longueur de $\tau_j$, est plus grand que $C_2 x_j^{-8}$ pour $j$ assez grand. De plus, $\alpha \geq x_j - 1$ implique que $e^\alpha \geq e^{x_j}e^{-1}$. En réunissant ces inégalités, on obtient que

$$\begin{aligned}
\pi(e^{\alpha+\beta}) - \pi(e^\alpha) &\geq B\frac{e^{x_j}}{x_j^8}\left(\frac{1}{\alpha+\beta} + \frac{1}{e^{c\sqrt{\alpha}}}\right) \geq B\frac{e^{x_j}}{x_j^8}\left(\frac{1}{\alpha+\beta}\right) \\
&\geq B\frac{e^{x_j}}{x_j^8}\left(\frac{1}{x_j+1}\right) \geq B\frac{e^{x_j}}{x_j^8}\left(\frac{1}{x_j+x_j}\right) = \frac{B}{2}\frac{e^{x_j}}{x_j^8}\left(\frac{1}{x_j}\right).
\end{aligned}$$

Donc,

$$\sum_{k\in A_+} Re(e^{-i\pi k/2}\Delta(\log(p_k))) \geq \sum_j Ae^{-(1-\delta_0)x_j}\frac{B}{8}\frac{e^{x_j}}{x_j^9} \geq \sum_j C\frac{e^{\delta_0 x_j}}{x_j^9}.$$

Cette série tend vers $+\infty$. Donc, la série $\sum_{k\in A_+} Re(e^{-i\pi k/2}\Delta(\log(p_k))) = +\infty$ et on montre de la même façon que $\sum_{k\in A_-} Re(e^{-i\pi k/2}\Delta(\log(p_k))) = -\infty$. Ce qui prouve l'étape 5.

La série $\sum_{k=1}^{\infty}(h_k, \phi)_{A_2}$ converge conditionnellement. Ceci termine la preuve du lemme fondamental.

## 3.3. Approximation de Kronecker

Cette section concerne les courbes $\gamma : [0, \infty[ \longrightarrow \mathbb{R}^N$ qui approximent toute intégrale $\int_C F(x_1, ..., x_N)dx_1...dx_N$, où $C = [0,1]^N$ désigne l'hypercube de $\mathbb{R}^N$, par des valeurs moyennes de $F\circ\gamma$ sur $[0, \infty[$. C'est-à-dire, existe-t-il des courbes $\gamma : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^N$ telles que

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T F(\gamma(t))dt = \int_C F(x_1, ..., x_N)dx_1...dx_N$$

pour toute fonction $F$ intégrable de Riemann sur $C$ et périodique de période 1 en chaque variable ? Un théorème répondant à cette question sera utilisé dans la preuve de la propriété d'universalité de la fonction $\zeta$ à la section suivante.

Pour $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$ et $E$ un sous-ensemble non-vide de $\mathbb{R}^N$, on dit que $\vec{x}$ **appartient à E modulo 1** s'il existe un $\vec{y} \in \mathbb{Z}^N$ tel que $\vec{x} - \vec{y} \in E$. On note cette relation par $\vec{x} \in E\text{mod}1$.

**Théorème 3.3.1.** *Soit $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N$ des nombres réels $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants. Soit la courbe $\gamma : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^N$ définie par*

$$\gamma(t) = t\vec{\alpha},$$

*où $\vec{\alpha} := (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N)$. Pour toute fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ périodique de période 1 en chaque variable,*

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(\gamma(t))dt = \int_C f(\vec{x})dx_1...dx_N.$$

Pour montrer ce théorème, exprimons $f$ sous forme de série de Fourier. Rappelons que la **série de Fourier** d'une fonction $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ est donnée par

$$\sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} \ldots \sum_{n_N=-\infty}^{+\infty} c_{\vec{n}} e^{i\vec{n}\cdot\vec{x}}$$

où $\vec{x} = (x_1, ..., x_N), \vec{n} = (n_1, ..., n_N)$ et $\vec{n}\cdot\vec{x} = \sum_{j=1}^{N} n_j x_j$ est le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^N$. De plus, si la série de Fourier converge vers $f$, alors les coefficients sont donnés par

$$c_{\vec{n}} = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} f(\vec{x}) e^{-i\vec{n}\cdot\vec{x}} dx_1 \ldots dx_N.$$

Rappelons un théorème sur la convergence d'une série de Fourier vers f. Les références sont $[T]$.

**Convergence des séries de Fourier :** *La série de Fourier d'une fonction $f$ continûment différentiable par morceaux de période $2\pi$ en chaque variable converge uniformément et absolument vers $f$.*

Montrons le théorème 3.3.1.

DÉMONSTRATION. Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ périodique de période 1 en chaque variable. La fonction $f\left(\frac{1}{2\pi}\vec{x}\right)$ satisfait aux hypothèses du théorème de convergence des séries de Fourier. La série de Fourier de $f$ est

$$f(\vec{x}) = \sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} \ldots \sum_{n_N=-\infty}^{+\infty} c_{\vec{n}} e^{2\pi i\vec{n}\cdot\vec{x}},$$

où

$$c_{\vec{n}} = \int_0^1 \ldots \int_0^1 f(\vec{x}) e^{-2\pi i\vec{n}\cdot\vec{x}} dx_1 \ldots dx_N.$$

La convergence uniforme de la série de Fourier nous permet cette intégration terme à terme

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(\gamma(t))dt = c_{\vec{0}} + \sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^N\setminus\{\vec{0}\}} c_{\vec{n}}\frac{1}{T}\int_0^T e^{2\pi i\vec{n}\cdot\gamma(t)}dt.$$

Les nombres $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N$ sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants. Ceci nous assure que $\vec{n}\cdot\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ si $\vec{n} \neq \vec{0}$. On calcule l'intégrale lorsque $\vec{n} \neq \vec{0}$

$$\frac{1}{T}\int_0^T e^{2\pi i\vec{n}\cdot\gamma(t)}dt = \frac{e^{2\pi iT\vec{n}\cdot\vec{\gamma}} - 1}{2\pi Ti\vec{n}\cdot\vec{\gamma}}.$$

Cette valeur moyenne tend vers 0 lorsque $T$ tend vers l'infini. Le théorème est prouvé, car

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(\gamma(t))dt = c_{\vec{0}} = \int_C f(\vec{x})dx_1...dx_N.$$

$\square$

Ce théorème ne répond pas à la question posée au début de cette section. Il le fait pour des fonctions de classe $C^\infty$. Nous voudrions un théorème semblable pour des fonctions intégrables de Riemann seulement. Le prochain théorème sera utile à la prochaine section.

**Théorème 3.3.2.** *Soit $\gamma$ une courbe définie comme au théorème* 3.3.1. *Soit $D$ un sous-ensemble connexe et mesurable au sens de Jordan de $\mathbb{R}^N$ tel que $D \subset C$. Soit $\Gamma$ le volume de Jordan de $D$. Définissons*

$$E_T := \{t \in ]0, T[ \,|\, \gamma(t) \in D mod 1\}.$$

*Alors,*

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}mes(E_T) = \Gamma.$$

Expliquons ce qu'on veut dire par mesurable au sens de Jordan. Soit $E$ un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}^N$. Un parallélépipède ouvert $P = ]a_1, b_1[\times...\times]a_N, b_N[$ a un volume égale au produit $\prod_{i=1}^{N}(b_i - a_i)$. Notons $V(P)$ le volume de $P$. On peut aussi calculer le volume d'une famille finie de parallélépipèdes ouverts $\{P_i\}_{i=1}^{n}$ et on note ce volume $V\left(\bigcup_{i=1}^{n} P_i\right)$. L'ensemble $E$ est **mesurable au sens de Jordan** si

$$\inf\left\{V\left(\bigcup_{i=1}^{n} P_i\right) \middle| \bigcup_{i=1}^{n} P_i \supseteq E\right\} = \sup\left\{V\left(\bigcup_{i=1}^{n} P_i\right) \middle| \bigcup_{i=1}^{n} P_i \subseteq E\right\} = m < +\infty$$

Dans ce cas, le nombre $m$ est le **volume de Jordan**. Voici une caractérisation des ensembles mesurables au sens de Jordan qui sera utilisée.

**Caractérisation :** *Soit $E$ un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}^N$. Alors, $E$ est mesurable au sens de Jordan si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$ il existe deux familles de parallélépipèdes ouverts $\{P_i\}_{i=1}^{n}$ et $\{P_i'\}_{i=1}^{m}$ telles que*

$$\bigcup_{i=1}^{n} P_i \subset Int(E) \subset \overline{E} \subset \bigcup_{i=1}^{m} P_i' \text{ et } V\left(\bigcup_{i=1}^{m} P_i' \setminus \bigcup_{i=1}^{n} P_i\right) < \epsilon.$$

Les références pour cette caractérisation sont $[N]$ et $[F]$. Nous pouvons montrer le théorème 3.3.2.

DÉMONSTRATION. Soit un nombre $\epsilon > 0$ arbitraire. Il existe deux familles de parallélépèdes ouverts $\{P_j'\}_{j\in J'}$ et $\{P_j''\}_{j\in J''}$ telles que

$$\overline{\bigcup_{j\in J'} P_j'} \subset Int(D) \subset \overline{D} \subset \overline{\bigcup_{j\in J''} P_j''} \subset\, ]-1,1[^N \text{ et } V\left(\bigcup_{j\in J''} P_j'' \setminus \bigcup_{j\in J'} P_j'\right) < \epsilon.$$

Posons $A := \bigcup_{j\in J'} P_j'$ et $B := \bigcup_{j\in J''} P_j''$. On sait qu'il existe des fonctions $\chi_1$ et $\chi_2$ de classe $C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ telles que $0 \leq \chi_1 \leq 1$, $0 \leq \chi_2 \leq 1$, $\chi_1(\vec{x})$ est égale à 1 si $\vec{x} \in A$ mod1, 0 si $\vec{x} \in C \setminus D$ mod1 et $\chi_2(\vec{x})$ est égale à 1 si $\vec{x} \in D$ mod1, 0 si $\vec{x} \in C \setminus B$ mod1 (voir les partitions de l'unité dans $[L2]$). Soit la fonction $\chi$ définie par $\chi(\vec{x})$ est égale à 1 si $\vec{x} \in D$ mod1 et 0 sinon. On voit que $0 \leq \chi_1 \leq \chi \leq \chi_2 \leq 1$ sur $\mathbb{R}^N$.

Remarquons que

$$mes(E_T) = \int_0^T \chi(\gamma(t))dt.$$

Par le théorème 3.3.1 et le fait que $V(B \setminus A) < \epsilon$,

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \chi_1(\gamma(t))dt = \int_C \chi_1(\vec{x})dx_1...dx_N \geq \int_A \chi_1(\vec{x})dx_1...dx_N$$

$$= \int_C \chi(\vec{x})dx_1...dx_N - \int_{D\setminus A} \chi(\vec{x})dx_1...dx_N \geq \int_C \chi(\vec{x})dx_1...dx_N - \epsilon$$

et

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \chi_2(\gamma(t))dt = \int_C \chi_2(\vec{x})dx_1...dx_N = \int_B \chi_2(\vec{x})dx_1...dx_N$$

$$= \int_{B\setminus D} \chi_2(\vec{x})dx_1...dx_N + \int_D \chi_2(\vec{x})dx_1...dx_N < \int_C \chi(\vec{x})dx_1...dx_N + \epsilon.$$

Comme $\chi_1 \leq \chi \leq \chi_2$, il en est de même pour les valeurs moyennes

$$\frac{1}{T}\int_0^T \chi_1(\gamma(t))dt \leq \frac{1}{T}mes(E_T) \leq \frac{1}{T}\int_0^T \chi_2(\gamma(t))dt.$$

En laissant T tendre vers l'infini, on a que

$$\left|\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}mes(E_T) - \int_C \chi(\vec{x})dx_1...dx_N\right| < \epsilon.$$

Le nombre $\epsilon$ étant arbitraire, le théorème est prouvé.

$\square$

Voici un théorème répondant à la question posée au début de cette section. Les références pour ce théorème sont $[HE]$ et $[KV]$.

**Théorème 3.3.3.** *Soit $\gamma$ une courbe définie comme au théorème* 3.3.1. *Alors,*

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T F(\gamma(t))dt = \int_C F(\vec{x})dx_1...dx_N$$

*pour toute fonction $F$ intégrable de Riemann sur $C$ et périodique de période* 1 *en chaque variable.*

Le dernier théorème de cette section est une généralisation du théorème 3.3.1 aux familles de fonctions. Nous vérifions que la limite de ce théorème est vraie uniformément par rapport à une famille de fonctions. Cependant, certaines conditions s'imposent sur cette famille de fonctions. Rappelons quelques définitions concernant les familles de fonctions continues.

Soit $E$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}^N$ et $\Omega$ une famille de fonctions continues sur $E$ à valeurs complexes. La famille $\Omega$ est **équicontinue en** $\vec{x_0} \in E$ si pour tout $\epsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que $|f(\vec{x}) - f(\vec{x_0})| < \epsilon$ pour tout $f \in \Omega$ et pour tout $\vec{x} \in E$ satisfaisant $|\vec{x} - \vec{x_0}| < \delta$. La famille $\Omega$ est dite équicontinue sur E si elle l'est en chaque point de E. La famille $\Omega$ est **uniformément bornée sur E** s'il existe une constante M $>$ 0 telle que $|f(\vec{x})| \leq M$ pour tout $f \in \Omega$ et pour tout $\vec{x} \in E$. La famille $\Omega$ est **précompacte sur E** si pour tout $\epsilon > 0$ il existe un nombre fini de fonctions $f_1, ..., f_n$ de $\Omega$ telles que pour toute $f \in \Omega$ il y a au moins une fonction $f_j$ telle que $\sup\limits_{\vec{x} \in E} |f(\vec{x}) - f_j(\vec{x})| < \epsilon$. Nous pouvons relier ces définitions par un théorème.

**Théorème d'Arzéla-Ascoli :** *Soit $E$ un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^N$ et $\Omega$ une famille de fonctions continues sur $E$ à valeurs complexes. La famille $\Omega$ est précompacte sur $E$ si et seulement si elle est équicontinue et uniformément bornée sur $E$.*

La référence pour ce théorème est [$L2$]. Nous utiliserons ce théorème pour montrer une généralisation du théorème 3.3.1 aux familles de fonctions. Bien sûr, ce théorème sera utilisé dans la prochaine section.

**Théorème 3.3.4.** *Soit $\gamma$ une courbe définie comme au théorème* 3.3.1. *Soit $D$ un sous-ensemble fermé et mesurable au sens de Jordan de $\mathbb{R}^N$ tel que $D \subseteq C$. Soit $\Omega_D$ un ensemble de fonctions continues sur $D$ à valeurs complexes. Si la famille*

*$\Omega_D$ est uniformément bornée et équicontinue sur $D$, alors*

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{E_T} f(\gamma(t))dt = \int_D f(\vec{x})dx_1...dx_N$$

*uniformément par rapport à $f \in \Omega_D$.*

DÉMONSTRATION. Pour toute fonction $f \in \Omega_D$, on considère le prolongement périodique de $f$ donnée par $f(\vec{y}) = 0$ si $\vec{y} \in C \setminus D$ mod1 et $f(\vec{y}) = f(\vec{x})$ si $\vec{y} \in D$ mod1, où $\vec{x}$ est un élément de $D$ et $\vec{x} - \vec{y} \in \mathbb{Z}^N$. Par le théorème d'Arzéla-Ascoli, la famille $\Omega_D$ est précompacte. Montrons que pour tout $\epsilon > 0$ il existe un $T_0 > 0$ tel que

$$\left|\frac{1}{T}\int_{E_T} f(\gamma(t))dt - \int_D f(\vec{x})dx_1...dx_N\right| < \epsilon$$

pour tout $T > T_0$ et pour toute fonction $f \in \Omega_D$. Soit $\epsilon > 0$. Par définition de famille précompacte, soient $f_1, ..., f_n \in \Omega_D$ telles que pour toute $f \in \Omega_D$ il existe une $f_j$ telle que $\sup_{\vec{x}\in D}|f(\vec{x}) - f_j(\vec{x})| < \epsilon/3$. Par le théorème 3.3.3 appliqué à chacune des fonctions $f_1, ..., f_n$, il existe un $T_0 > 0$ tel que pour tout $T > T_0$ et pour tout $j = 1, ..., n$

$$\left|\int_D f_j(\vec{x})dx_1...dx_N - \frac{1}{T}\int_{E_T} f_j(\gamma(t))dt\right| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Vérifions que ce $T_0$ est bien celui recherché. Soit $f \in \Omega_D$. Si $f_j$ est telle que $\sup_{\vec{x}\in D}|f(\vec{x}) - f_j(\vec{x})| < \epsilon/3$, alors

$$\left|\int_D f(\vec{x})dx_1...dx_N - \frac{1}{T}\int_{E_T} f(\gamma(t))dt\right| \leq \int_D |f(\vec{x}) - f_j(\vec{x})|dx_1...dx_N$$

$$+\left|\int_D f_j(\vec{x})dx_1...dx_N - \frac{1}{T}\int_{E_T} f_j(\gamma(t))dt\right| + \left|\frac{1}{T}\int_{E_T} f_j(\gamma(t))dt - \frac{1}{T}\int_{E_T} f(\gamma(t))dt\right|$$

$$< \int_D \frac{\epsilon}{3}dx_1...dx_N + \frac{\epsilon}{3} + \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\epsilon}{3}dt = \epsilon.$$

Le théorème est prouvé.

$\square$

## 3.4. Preuve de la propriété d'universalité

Le but de ce chapitre est la preuve de cette propriété. Rappelons que $r$ est un nombre de $]0, 1/4[$.

**Propriété d'universalité :** *Soit $f$ une fonction holomorphe sur $D(0,r)$, continue et ne s'annulant pas sur $\overline{D(0,r)}$. Alors, pour tout $\epsilon > 0$ il existe un nombre réel $T$ tel que*

$$\max_{|z|\leq r}\left|f(z)-\zeta\left(z+\frac{3}{4}+iT\right)\right| < \epsilon.$$

Nous avons besoin d'un autre lemme pour la preuve de cette propriété. La preuve est faite dans $[T2]$.

**Lemme 3.4.1.** *Soit $f$ une fonction holomorphe sur le disque fermé $\overline{D(z_0,R)}$. Si*

$$\iint_{\overline{D(z_0,R)}} |f(z)|^2 dxdy = H,$$

*alors pour tout $R' \in\ ]0, R[$*

$$\max_{|z|\leq R'} |f(z)| \leq \frac{\sqrt{H}}{\sqrt{\pi}(R-R')}.$$

Soit $\epsilon > 0$. Comme à la section 3.2, il existe un nombre réel $\gamma > 1$ tel que :

$$\gamma^2 r < 1/4 \text{ et } \max_{|z|\leq r}\left|f(z)-f\left(\frac{z}{\gamma^2}\right)\right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Considérons la fonction $f_1(z) := f(z/\gamma^2)$. La fonction $f_1$ est holomorphe et ne s'annule pas sur le disque fermé $\overline{D(0,\gamma r)}$. On remarque que

$$\max_{|z|\leq r}|f(z)-\zeta(z+3/4+iT)| \leq \max_{|z|\leq r}|f(z)-f_1(z)| + \max_{|z|\leq r}|f_1(z)-\zeta(z+3/4+iT)|.$$

Le problème revient à montrer qu'il existe un $T \in \mathbb{R}$ tel que

$$\max_{|z|\leq r}\left|f_1(z)-\zeta\left(z+\frac{3}{4}+iT\right)\right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Si on montre qu'il existe un $T > 0$ tel que

$$\iint_{|z|\leq\gamma r} \left|f_1(z) - \zeta\left(z + \frac{3}{4} + iT\right)\right|^2 dxdy \;<\; \frac{\epsilon^2\pi r^2(\gamma-1)^2}{4} = \epsilon_1,$$

alors, par le lemme précédent,

$$\max_{|z|\leq r}\left|f_1(z) - \zeta\left(z + \frac{3}{4} + iT\right)\right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

En somme, la preuve sera terminée si on montre qu'il existe un $T > 0$ tel que

$$\iint_{|z|\leq\gamma r} \left|f_1(z) - \zeta\left(z + \frac{3}{4} + iT\right)\right|^2 dxdy < \epsilon_1.$$

Posons $R := \gamma r$. Par le lemme fondamental, il existe un sous-ensemble fini $M$ de nombres premiers tel que $\{p \in \mathbb{P} | p \leq y_0\} \subseteq M$ et

$$\max_{|z|\leq R}\left|f_1(z) - \zeta_M\left(z + \frac{3}{4}, \overline{\theta_0}\right)\right| < \frac{\sqrt{\epsilon_1}}{4R\sqrt{\pi}}.$$

Le nombre réel positif $y_0$ sera déterminé plus tard. La fonction $\zeta_M$ dépend des variables $z$ et $(X_p)_{p\in M}$. Soit $B := B((\theta_p^{(0)})_{p\in M}, 1/4)$ la boule ouverte de $\mathbb{R}^{|M|}$ centrée en $(\theta_p^{(0)})_{p\in M}$ et de rayon $1/4$. On remarque que la fonction $\zeta_M$ est continue sur $\overline{D(0,R)}\times\overline{B}$. Donc, la fonction $\zeta_M$ est uniformément continue sur cet ensemble. Il existe un $\delta \in ]0, 1/4[$ tel que tous les éléments $(z, (X_p)_{p\in M})$ et $(z', (X_p')_{p\in M})$ de $\overline{D(0,R)} \times \overline{B}$ satisfont

$$\left|\zeta_M\left(z + \frac{3}{4}, (X_p)_{p\in M}\right) - \zeta_M\left(z' + \frac{3}{4}, (X_p')_{p\in M}\right)\right| < \frac{\sqrt{\epsilon_1}}{4R\sqrt{\pi}}$$

si $|z - z'| < \delta$ et $|X_p - X_p'| < \delta$ pour tout $p \in M$. En utilisant ce fait et le lemme fondamental, on peut dire qu'il existe un $\delta \in ]0, 1/4[$ tel que

$$\max_{|z|\leq R}\left|f_1(z) - \zeta_M\left(z + \frac{3}{4}, (X_p)_{p\in M}\right)\right| < \frac{\sqrt{\epsilon_1}}{2R\sqrt{\pi}} \tag{9}$$

si $|X_p - \theta_p^{(0)}| < \delta$ pour tout $p \in M$. Soit $D$ l'ensemble des $(X_p)_{p\in M}$ tels que $|X_p - \theta_p^{(0)}| < \delta$ pour tout $p \in M$. Les éléments de $D$ satisfont l'équation (9).

On définit

$$\overline{\theta}(\tau) := \left(\frac{\tau}{2\pi}\log(p)\right)_{p\in\mathbb{P}} = (\theta_p(\tau))_{p\in\mathbb{P}}.$$

où $\tau$ est un nombre réel. On remarque que

$$\zeta_M\left(z + \frac{3}{4}, \overline{\theta}(\tau)\right) = \zeta_M\left(z + \frac{3}{4} + i\tau, \overline{0}\right).$$

Si $(\theta_p(\tau))_{p\in M} \in D\text{mod}1$, alors

$$\max_{|z|\le R}\left|f_1(z) - \zeta_M\left(z+\frac{3}{4},(\theta_p)_{p\in M}\right)\right| < \frac{\sqrt{\epsilon_1}}{2R\sqrt{\pi}}.$$

Utilisons l'inégalité $|a+b|^2 \le 2|a|^2+2|b|^2$, où $a$ et $b$ sont des nombres complexes. Cette inégalité est un cas particulier de l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{C}^2$ avec les vecteurs $(a,b)$ et $(1,1)$. Elle implique que

$$\iint_{|z|\le R}\left|f_1(z) - \zeta\left(z+\frac{3}{4}+i\tau\right)\right|^2 dxdy$$

$$< \frac{\epsilon_1}{2} + 2\iint_{|z|\le R}\left|\zeta_M\left(z+\frac{3}{4}+i\tau,\bar{0}\right) - \zeta\left(z+\frac{3}{4}+i\tau\right)\right|^2 dxdy.$$

On doit montrer qu'il existe un $T>0$ tel que

$$\iint_{|z|\le R}\left|\zeta_M\left(z+\frac{3}{4}+iT,\bar{0}\right) - \zeta\left(z+\frac{3}{4}+iT\right)\right|^2 dxdy < \frac{\epsilon_1}{4}.$$

Considérons

$$A_T := \frac{1}{T}\int_{E_T}\left(\iint_{|z|\le R}\left|\zeta_M\left(z+\frac{3}{4}+i\tau,\bar{0}\right) - \zeta\left(z+\frac{3}{4}+i\tau\right)\right|^2 dxdy\right)d\tau,$$

où

$$E_T := \left\{\tau \in \left]2,T\right[\,\middle|\,(\theta_p(\tau))_{p\in M} \in Dmod1\right\}.$$

Estimons $A_T$ lorsque $T$ tend vers l'infini. Soit $Q := \{p\in\mathbb{P} | p\le\alpha\}$, où $\alpha$ est un nombre réel à déterminer tel que $\alpha > \max M$.

Par le cas particulier de l'inégalité de Cauchy-Schwarz utilisé précédemment, on a que

$$A_T \le \frac{2}{T}\int_{E_T}\left(\iint_{|z|\le R}\left|\zeta_M\left(z+\frac{3}{4}+i\tau,\bar{0}\right) - \zeta_Q\left(z+\frac{3}{4}+i\tau,\bar{0}\right)\right|^2 dxdy\right)d\tau$$

$$+\frac{2}{T}\int_{E_T}\left(\iint_{|z|\le R}\left|\zeta_Q\left(z+\frac{3}{4}+i\tau,\bar{0}\right) - \zeta\left(z+\frac{3}{4}+i\tau\right)\right|^2 dxdy\right)d\tau.$$

Soit

$$S_1 := \frac{1}{T}\int_{E_T}\left(\iint_{|z|\le R}\left|\zeta_M\left(z+\frac{3}{4}+i\tau,\bar{0}\right) - \zeta_Q\left(z+\frac{3}{4}+i\tau,\bar{0}\right)\right|^2 dxdy\right)d\tau$$

et

$$S_2 := \frac{1}{T}\int_{E_T}\left(\iint_{|z|\leq R}\left|\zeta_Q\left(z+\frac{3}{4}+i\tau,\overline{0}\right)-\zeta\left(z+\frac{3}{4}+i\tau\right)\right|^2 dxdy\right)d\tau.$$

Donc, $A_T \leq 2S_1 + 2S_2$. Nous allons estimer $S_1$ et $S_2$.

Estimons $S_1$. Par le théorème de Tonelli-Fubini,

$$S_1 = \iint_{|z|\leq R}\left(\frac{1}{T}\int_{E_T}\left|\zeta_M\left(z+\frac{3}{4},\overline{\theta}(\tau)\right)-\zeta_Q\left(z+\frac{3}{4},\overline{\theta}(\tau)\right)\right|^2 d\tau\right)dxdy.$$

Appliquons le théorème 3.3.4 à l'intégrale entre les paranthèses. Soit la courbe

$$\gamma(\tau) := \left(\frac{\log(p_1)}{2\pi}\tau, \frac{\log(p_2)}{2\pi}\tau, ..., \frac{\log(p_{\pi(\alpha)})}{2\pi}\tau\right),$$

où $\tau$ est une variable réelle. Les nombres réels $\frac{\log(p_1)}{2\pi}, \frac{\log(p_2)}{2\pi}, \ldots, \frac{\log(p_{\pi(\alpha)})}{2\pi}$ sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants. Soit $D^*$ l'ensemble des variables $(X_p)_{p\in Q}$ telles que $|X_p - \theta_p^{(0)}| \leq \delta/2$ pour tout $p \in M$ et $X_p \in [0,1]$ pour tout $p \in Q \setminus M$. L'ensemble $D^*$ est un sous-ensemble fermé et mesurable au sens de Jordan de $\mathbb{R}^{\pi(\alpha)}$. On définit une famille de fonctions sur $D^*$ par

$$g_z((X_p)_{p\in Q}) := \left|\zeta_M\left(z+\frac{3}{4},(X_p)_{p\in Q}\right)-\zeta_Q\left(z+\frac{3}{4},(X_p)_{p\in Q}\right)\right|^2$$

pour tout $z \in \overline{D(0,R)}$. Appelons $\Omega$ cette famille de fonctions continues sur $D^*$ à valeurs complexes. Vérifions que la famille $\Omega$ satisfait aux hypothèses du théorème 3.3.4, c'est-à-dire qu'elle est uniformément bornée et équicontinue sur $D^*$.

La famille $\Omega$ est uniformément bornée sur $D^*$, car pour tout $g_z \in \Omega$ et pour tout $(X_p)_{p\in Q} \in D^*$

$$|g_z((X_p)_{p\in Q})| \leq \left|\prod_{p\in M}\left(1-\frac{e^{-2\pi i X_p}}{p^{z+3/4}}\right)^{-1} - \prod_{p\in Q}\left(1-\frac{e^{-2\pi i X_p}}{p^{z+3/4}}\right)^{-1}\right|^2$$

$$\leq \left(\prod_{p\in M}\left(1-\frac{1}{p^{-R+3/4}}\right)^{-1} + \prod_{p\in Q}\left(1-\frac{1}{p^{-R+3/4}}\right)^{-1}\right)^2.$$

La famille $\Omega$ est équicontinue sur $D^*$, car la fonction $h(z,(X_p)_{p\in Q}) := g_z((X_p)_{p\in Q})$ est uniformément continue sur $\overline{D(0,R)} \times D^*$. Par le théorème 3.3.4,

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{E_T} g_z(\gamma(\tau))d\tau = \int \dots \int_{D^*} g_z((X_p)_{p\in Q})dX_{p_1}\dots dX_{p_{\pi(\alpha)}} \tag{10}$$

uniformément par rapport à z. On remarque que

$$\zeta_Q\left(z+\frac{3}{4},\overline{X}\right) = \zeta_M\left(z+\frac{3}{4},\overline{X}\right)\zeta_{Q\setminus M}\left(z+\frac{3}{4},\overline{X}\right).$$

Ceci implique que

$$\int \dots \int_{D^*}\left|\zeta_Q\left(z+\frac{3}{4},(X_p)_{p\in Q}\right)-\zeta_M\left(z+\frac{3}{4},(X_p)_{p\in Q}\right)\right|^2 dX_{p_1}\dots dX_{p_{\pi(\alpha)}}$$

$$= \int \dots \int_{D^*}\left|\zeta_M\left(z+\frac{3}{4},(X_p)_{p\in Q}\right)\right|^2\left|\zeta_{Q\setminus M}\left(z+\frac{3}{4},(X_p)_{p\in Q}\right)-1\right|^2 dX_{p_1}\dots dX_{p_{\pi(\alpha)}}.$$

Par l'équation (9), il existe une constante $c>0$ telle que

$$\left|\zeta_M\left(z+\frac{3}{4},(X_p)_{p\in Q}\right)\right|^2 \le \left|\max_{|z|\le R}|f_1(z)|+c\epsilon\right|^2$$

pour tout $(X_p)_{p\in Q}\in D^*$. On obtient l'inégalité

$$\int \dots \int_{D^*}\left|\zeta_Q\left(z+\frac{3}{4},(X_p)_{p\in Q}\right)-\zeta_M\left(z+\frac{3}{4},(X_p)_{p\in Q}\right)\right|^2 dX_{p_1}\dots dX_{p_{\pi(\alpha)}}$$

$$\le \left|\max_{|z|\le R}|f_1(z)|+c\epsilon\right|^2\int \dots \int_{D^*}\left|\zeta_{Q\setminus M}\left(z+\frac{3}{4},(X_p)_{p\in Q}\right)-1\right|^2 dX_{p_1}\dots dX_{p_{\pi(\alpha)}}.$$

Remarquons que la fonction $\zeta_{Q\setminus M}\left(z+\frac{3}{4},(X_p)_{p\in Q}\right)-1$ est une série de Dirichlet à plusieurs variables. En effet, si $Q\setminus M=\{p_{i_1},\dots,p_{i_q}\}$, alors

$$\zeta_{Q\setminus M}\left(z+\frac{3}{4},(X_p)_{p\in Q}\right)-1 = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{n_1+\dots+n_q=n}\frac{e^{-2\pi i(n_1X_{p_{i_1}}+\dots+n_qX_{p_{i_q}})}}{(p_{i_1}^{n_1}\dots p_{i_q}^{n_q})^{z+3/4}}\right)$$

et

$$\left|\zeta_{Q\setminus M}\left(z+\frac{3}{4},(X_p)_{p\in Q}\right)-1\right|^2 = \sum_{\vec{n},\vec{m}\in(\mathbb{Z}^{\ge 0})^q\setminus\{\vec{0}\}}\frac{e^{-2\pi i((n_1-m_1)X_{p_{i_1}}+\dots+(n_q-m_q)X_{p_{i_q}})}}{(p_{i_1}^{n_1}\dots p_{i_q}^{n_q})^{z+3/4}(p_{i_1}^{m_1}\dots p_{i_q}^{m_q})^{\overline{z}+3/4}}.$$

Cette série de Dirichlet à plusieurs variables ne dépend que de $X_{p_{i_1}}\dots X_{p_{i_q}}$ et alors

$$\int \dots \int_{D^*}\left|\zeta_{Q\setminus M}\left(z+\frac{3}{4},(X_p)_{p\in Q}\right)-1\right|^2 dX_{p_1}\dots dX_{p_{\pi(z)}}$$

$$= \delta^{|M|}\int_0^1 .. \int_0^1 \left|\zeta_{Q\setminus M}\left(z+\frac{3}{4},(X_p)_{p\in Q}\right)-1\right|^2 dX_{p_{i_1}}\dots dX_{p_{i_q}}. \tag{11}$$

On calcule que

$$\int_0^1 e^{-2\pi i(n_j-m_j)X_{p_{i_j}}}\,dX_{p_{i_j}} = \begin{cases} 1 & \text{si } n_j = m_j \\ 0 & \text{si } n_j \neq m_j. \end{cases}$$

En intervertissant les sommes et les intégrales dans l'équation (11), on a que

$$\delta^{|M|}\int_0^1 ..\int_0^1 \left|\zeta_{Q\setminus M}\left(z+\frac{3}{4},(X_p)_{p\in Q}\right)-1\right|^2 dX_{p_{i_1}}...dX_{p_{i_q}}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{n_1+\ldots+n_q=n}\frac{1}{(p_{i_1}^{n_1}...p_{i_q}^{n_q})^{2x+3/2}}\right)\leq\sum_{n\geq y_0}\frac{1}{n^{2x+3/2}}\leq\sum_{n\geq y_0}\frac{1}{n^{-2R+3/2}}$$

$$\leq\int_{y_0}^{\infty}\frac{1}{t^{-2R+3/2}}dt=\frac{1}{y_0^{-2R+1/2}(1/2-2R)}.$$

Finalement,

$$\int\cdots\int_{D^*}\left|\zeta_Q\left(z+\frac{3}{4},(X_p)_{p\in Q}\right)-\zeta_M\left(z+\frac{3}{4},(X_p)_{p\in Q}\right)\right|^2 dX_{p_1}...dX_{p_{\pi(\alpha)}}$$

$$\leq\delta^{|M|}\left|\max_{|z|\leq R}|f_1(z)|+c\epsilon\right|^2\frac{1}{y_0^{-2R+1/2}(1/2-2R)}.$$

Par (10), nous avons l'estimé

$$S_1=O\left(\delta^{|M|}\frac{1}{y_0^{-2R+1/2}}\right)$$

lorsque $T$ tend vers l'infini. Fixons $y_0$ de sorte que

$$2S_1\leq\frac{1}{8}\delta^{|M|}\epsilon_1$$

pour $T$ assez grand.

Estimons $S_2$. Par le théorème de Tonelli-Fubini,

$$S_2=\iint_{|z|\leq R}\left(\frac{1}{T}\int_{E_T}\left|\zeta\left(z+\frac{3}{4}+i\tau\right)-\zeta_Q\left(z+\frac{3}{4}+i\tau,\overline{0}\right)\right|^2 d\tau\right)dxdy.$$

Fixons un point $z_1=x_1+iy_1$ du disque fermé $\overline{D(0,R)}$. Estimons l'intégrale entre les parenthèses. D'abord, en faisant le changement de variable $\tau_1=\tau+y_1$,

$$\frac{1}{T}\int_{E_T}\left|\zeta\left(z_1+\frac{3}{4}+i\tau\right)-\zeta_Q\left(z_1+\frac{3}{4}+i\tau,\overline{0}\right)\right|^2 d\tau$$

$$\leq\frac{1}{T}\int_2^T\left|\zeta\left(z_1+\frac{3}{4}+i\tau\right)-\zeta_Q\left(z_1+\frac{3}{4}+i\tau,\overline{0}\right)\right|^2 d\tau$$

$$= \frac{1}{T}\int_{y_1+2}^{y_1+T}\left|\zeta\left(x_1+\frac{3}{4}+i\tau_1\right)-\zeta_Q\left(x_1+\frac{3}{4}+i\tau_1,\overline{0}\right)\right|^2 d\tau_1.$$

Par la formule explicite de la fonction $\zeta$ dans le demi-plan $Re(z) > 0$ vue à la section 2.2, la fonction $\zeta$ est symétrique par rapport à l'axe réel dans la bande critique, c'est-à-dire que $\zeta(\overline{w}) = \overline{\zeta(w)}$ dans la bande critique. Il en est de même pour la fonction $\zeta_Q(w, \overline{0})$. Cette propriété implique que

$$\frac{1}{T}\int_{y_1+2}^{y_1+T}\left|\zeta\left(x_1+\frac{3}{4}+i\tau_1\right)-\zeta_Q\left(x_1+\frac{3}{4}+i\tau_1,\overline{0}\right)\right|^2 d\tau_1$$

$$\leq \frac{1}{2T}\int_{-y_1-T}^{y_1+T}\left|\zeta\left(x_1+\frac{3}{4}+i\tau_1\right)-\zeta_Q\left(x_1+\frac{3}{4}+i\tau_1,\overline{0}\right)\right|^2 d\tau_1$$

$$= \frac{2(y_1+T)}{T}\frac{1}{2(y_1+T)}\int_{-y_1-T}^{y_1+T}\left|\zeta\left(x_1+\frac{3}{4}+i\tau_1\right)-\zeta_Q\left(x_1+\frac{3}{4}+i\tau_1,\overline{0}\right)\right|^2 d\tau_1.$$

Il existe une constante $C > 0$ qui ne dépend que de $R$ telle que

$$|1-2^{1-(x_1+i\tau_1+3/4)}|^2 \geq C^{-1}.$$

En introduisant cette dernière inégalité dans l'intégrale, on obtient que

$$\frac{1}{2(y_1+T)}\int_{-y_1-T}^{y_1+T}\left|\zeta\left(x_1+\frac{3}{4}+i\tau_1\right)-\zeta_Q\left(x_1+\frac{3}{4}+i\tau_1,\overline{0}\right)\right|^2 d\tau_1 \leq$$

$$\frac{C}{2(y_1+T)}\int_{-y_1-T}^{y_1+T}\left|1-\frac{2}{2^{(x_1+\frac{3}{4}+i\tau_1)}}\right|^2\left|\zeta\left(x_1+\frac{3}{4}+i\tau_1\right)-\zeta_Q\left(x_1+\frac{3}{4}+i\tau_1,\overline{0}\right)\right|^2 d\tau_1.$$

En se référant à l'exemple 1.3.1, la fonction $(1-2^{1-w})\zeta(w)$ est égale à la série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^w}$ dans le demi-plan $Re(w) > 0$. Calculons $(1-2^{1-w})\zeta_Q(w,\overline{0})$ sur ce même demi-plan. Nous avons que

$$(1-2^{1-w})\zeta_Q(w,\overline{0}) = (1-2^{1-w})\prod_{j=1}^{\pi(\alpha)}\left(1-\frac{1}{p_j^w}\right)^{-1} = (1-2^{1-w})\sum_{\forall j>\pi(\alpha)\ v_{p_j}(n)=0}\frac{1}{n^w}$$

$$= \sum_{\forall j>\pi(\alpha)\ v_{p_j}(n)=0}\frac{1}{n^w} - \sum_{\forall j>\pi(\alpha)\ v_{p_j}(n)=0}\frac{2}{(2n)^w} = \sum_{\forall j>\pi(\alpha)\ v_{p_j}(n)=0}\frac{(-1)^{n+1}}{n^w}.$$

En somme,

$$(1-2^{1-(x_1+\frac{3}{4}+i\tau_1)})\left(\zeta\left(x_1+\frac{3}{4}+i\tau_1\right)-\zeta_Q\left(x_1+\frac{3}{4}+i\tau_1,\overline{0}\right)\right).$$

$$= \sum_{\exists j>\pi(\alpha)\ v_{p_j}(n)\neq 0}\frac{(-1)^{n+1}}{n^{x_1+3/4+i\tau_1}}.$$

Considérons la série de Dirichlet $\sum_{\exists j>\pi(\alpha)\ v_{p_j}(n)\neq 0} \frac{(-1)^{n+1}}{n^z}$. Cette série définit une fonction holomorphe dans le demi-plan $Re(z) > 0$. Par l'exemple 1.5.1, elle est d'ordre fini dans le demi-plan fermé $Re(z) \geq a$, où $1/2 < a < x_1 + 3/4$. De plus,

$$\frac{1}{2(T+y_1)} \int_{-y_1-T}^{y_1+T} \left|(1-2^{1-(a+i\tau_1)}) \left(\zeta(a+i\tau_1) - \zeta_Q(a+i\tau_1, \bar{0})\right)\right|^2 d\tau_1$$

$$= \frac{1}{2(T+y_1)} \int_{-y_1-T}^{y_1+T} \left( \sum_{\exists j>\pi(\alpha)\ v_{p_j}(n_1)\neq 0} \frac{(-1)^{n_1+1}}{n_1^{a+i\tau_1}} \right) \cdot \left( \sum_{\exists j>\pi(\alpha)\ v_{p_j}(n_2)\neq 0} \frac{(-1)^{n_2+1}}{n_2^{a-i\tau_1}} \right) d\tau_1. \tag{12}$$

On calcule que

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2(T+y_1)} \int_{-y_1-T}^{y_1+T} \frac{(-1)^{n_1+n_2+2}}{n_1^{a+i\tau_1} n_2^{a-i\tau_1}} d\tau_1 = \begin{cases} 0 & \text{si } n_1 \neq n_2 \\ \frac{1}{n^{2a}} & \text{si } n_1 = n_2 = n \end{cases}$$

La limite lorsque $T$ tend vers l'infini de (12) est la série convergente

$$\sum_{\exists j>\pi(\alpha)\ v_{p_j}(n_1)\neq 0} \frac{1}{n^{2a}}.$$

Par le théorème 1.5.2, la valeur moyenne

$$\frac{1}{2(y_1+T)} \int_{-y_1-T}^{y_1+T} \left|1 - \frac{2}{2^{(x_1+3/4+i\tau_1)}}\right|^2 \left|\zeta\left(x_1 + \frac{3}{4} + i\tau_1\right) - \zeta_Q\left(x_1 + \frac{3}{4} + i\tau_1, \bar{0}\right)\right|^2 d\tau_1$$

tend vers

$$\sum_{\exists j>\pi(\alpha)\ v_{p_j}(n_1)\neq 0} \frac{1}{n^{2(x_1+3/4)}} \leq \sum_{\exists j>\pi(\alpha)\ v_{p_j}(n_1)\neq 0} \frac{1}{n^{2(-R+3/4)}}$$

lorsque $T$ tend vers l'infini. Pour $T$ assez grand,

$$\frac{C}{2T} \int_{-T}^{T} \left|1 - \frac{2}{2^{(z_1+\frac{3}{4}+i\tau)}}\right|^2 \left|\zeta\left(z_1 + \frac{3}{4} + i\tau\right) - \zeta_Q\left(z_1 + \frac{3}{4} + i\tau, \bar{0}\right)\right|^2 d\tau$$

$$< C \sum_{\exists j>\pi(\alpha)\ v_{p_j}(n)\neq 0} \frac{1}{n^{2(-R+3/4)}} + \frac{\delta^{|M|}}{\pi R^2} \frac{\epsilon_1}{32}.$$

On pose un $\alpha$ assez grand tel que

$$\sum_{\exists j>\pi(\alpha)\ v_{p_j}(n)\neq 0} \frac{1}{n^{2(-R+3/4)}} < \frac{\delta^{|M|}}{\pi R^2} \frac{\epsilon_1}{32C}.$$

Avec ce choix de $\alpha$,

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left|1-\frac{2}{2^{(z_1+\frac{3}{4}+i\tau)}}\right|^2\left|\zeta\left(z_1+\frac{3}{4}+i\tau\right)-\zeta_Q\left(z_1+\frac{3}{4}+i\tau,\overline{0}\right)\right|^2 d\tau$$

$$< \frac{\delta^{|M|}}{\pi R^2}\frac{\epsilon_1}{16}$$

quel que soit $z_1 \in \overline{D(0,R)}$. On conclut que

$$2S_2 \leq \delta^{|M|}\frac{\epsilon_1}{8}$$

pour un $T$ assez grand. En combinant les estimés de $S_1$ et $S_2$, pour $T$ assez grand, on a que

$$A_T \leq \delta^{|M|}\frac{\epsilon_1}{4}.$$

Par le théorème 3.3.2, $\lim\limits_{T\to+\infty}\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{E_T} d\tau = \delta^{|M|}$. Finalement, il existe un $T>0$ tel que

$$\iint_{|z|\leq R}\left|\zeta\left(z+\frac{3}{4}+iT\right)-\zeta_M\left(z+\frac{3}{4}+iT,\overline{0}\right)\right|^2 dxdy < \frac{\epsilon_1}{4}$$

et alors

$$\iint_{|z|\leq R}\left|f_1(z)-\zeta\left(z+\frac{3}{4}+iT\right)\right|^2 dxdy < \epsilon_1,$$

ce qui termine la preuve de la propriété d'universalité de la fonction $\zeta$.

# CONCLUSION

Nous avons montré que la fonction zêta de Riemann possède la propriété d'universalité sur un disque fermé de la bande critique. Peut-on en dire plus ? La réponse est oui. Bagchi a montré dans les années 80 que la fonction zêta de Riemann possède la propriété d'universalité dans n'importe quel sous-ensemble compact et simplement connexe de la bande verticale $1/2 < Re(z) < 1$. Il montre cette propriété pour une certaine classe de séries de Dirichlet. De plus, il y aurait un lien entre l'universalité et l'hypothèse de Riemann. Le lecteur qui veut en savoir plus peut consulter les références $[BB]$ et $[L]$.

Je crois qu'il est très pertinent de rechercher des séries de Dirichlet qui possèdent cette propriété. Les exemples de fonctions possédant une telle propriété sont plutôt rares.

# BIBLIOGRAPHIE


[B1] Ralph P. Boas, *Invitation to complex analysis*, Random House, New York, 1987.

[B2] Ralph P. Boas, *Entire functions*, Academic press, New York, 1954.

[BB] Bhaskar Bagchi, *A joint universality theorem for Dirichlet L-functions*, Mathematische Zeitschrift, 181, 319-334, 1982.

[BH] Haïm Brézis, *Analyse fonctionnelle : théorie et applications*, Masson, Paris, 1983.

[C] Elliot Ward Cheney, *Introduction to approximation theory 2nd edition*, Chelsea pub. co., New York, 1982.

[CK] Komaravolu Chandrasekharan, *Classical Fourier transforms*, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1989.

[E] Harold M. Edwards, *Riemann's zeta function*, Academic press, New York, 1974.

[F] Watson Fulks, *Advanced calculus : an introduction to analysis 3nd edition*, Wiley, Toronto-New York, 1978.

[H] Hedenmalm H., Korenblum B. et Zhu K., *Theory of Bergman Spaces*, Springer, New York, 2000.

[HE] Edmund Hlawka, *The theory of uniform distribution*, A B academic publishers, 1984.

[KV] A. A. Karatsuba et S. M. Voronin, *The Riemann Zeta-function*, Walter de Gruyler, Berlin-New York, 1992.

[L] Antanas Laurincikas, *Limit theorems for the Riemann zeta-function*, Kluwer Academic, Bordrecht, 1996.

[L1] Serge Lang, *Complex analysis*, Springer-Verlag, New York, 1985.

[L2] SERGE LANG, *Analysis 2*, Addison-Wesley, Don Mills, 1969.

[M] SZOLEM MANDELBROJT, *Séries de Dirichlet ; principes et méthodes*, Gauthier-Villards, Paris, 1969.

[MR] MARUTI RAM MURTY, *Problems in analytic number theory*, Springer-Verlag, New York, 2001.

[N] S.M. NIKOLSKY, *A course in mathematical analisys volume 2*, Mir Publishers, 1981.

[R] WALTER RUDIN, *Principes d'analyse mathématique*, Ediscience international, Paris, 1995.

[SZ] STANISLAW SAKS ET ANTONI ZYGMUND, *Analytic functions*, Elsevier, Amsterdam, 1971.

[T] GEORGI P. TOLSTOV, *Fourier series*, Dover Publications, Don Mills, 1976, 1962.

[T1] EDWARD CHARLES TITCHMARSH, *Theory of function 2nd edition*, Oxford University press, Toronto, 1939.

[T2] EDWARD CHARLES TITCHMARSH, *Theory of Riemann zeta-function 2nd edition*, Oxforfd University press, New York, 1986.

[V] GEORGES VALIRON, *Théorie générales des séries de Dirichlet*, Gauthier-Villars, Paris, 1926.

[VS] VORONIN S.M., *Theorem of the "universality" of the Riemann Zeta function*, Math. USSR Izvextija, Vol. 9 (1975) No. 3.