

2n 11. 3176.4

Université de Montréal

Représentations analytiques  
des objets géométriques  
et  
contours actifs  
en imagerie

par

Mathieu Dehaes

Département de mathématiques et de statistique  
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures  
en vue de l'obtention du grade de  
Maître ès sciences (M.Sc.)  
en mathématiques

Orientation mathématiques appliquées

septembre 2004

© Mathieu Dehaes, 2004



QA

3

U54

2004

v. 013

**Direction des bibliothèques**

**AVIS**

L'auteur a autorisé l'Université de Montréal à reproduire et diffuser, en totalité ou en partie, par quelque moyen que ce soit et sur quelque support que ce soit, et exclusivement à des fins non lucratives d'enseignement et de recherche, des copies de ce mémoire ou de cette thèse.

L'auteur et les coauteurs le cas échéant conservent la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent ce document. Ni la thèse ou le mémoire, ni des extraits substantiels de ce document, ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans l'autorisation de l'auteur.

Afin de se conformer à la Loi canadienne sur la protection des renseignements personnels, quelques formulaires secondaires, coordonnées ou signatures intégrées au texte ont pu être enlevés de ce document. Bien que cela ait pu affecter la pagination, il n'y a aucun contenu manquant.

**NOTICE**

The author of this thesis or dissertation has granted a nonexclusive license allowing Université de Montréal to reproduce and publish the document, in part or in whole, and in any format, solely for noncommercial educational and research purposes.

The author and co-authors if applicable retain copyright ownership and moral rights in this document. Neither the whole thesis or dissertation, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms, contact information or signatures may have been removed from the document. While this may affect the document page count, it does not represent any loss of content from the document.

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

**Représentations analytiques  
des objets géométriques**

**et**

**contours actifs**

**en imagerie**

présenté par

**Mathieu Dehaes**

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

*Jacques Bélair*

---

(président-rapporteur)

*Michel Delfour*

---

(directeur de recherche)

*André Garon*

---

(membre du jury)

Mémoire accepté le:

*La date d'acceptation*

## SOMMAIRE

---

L'objet de ce mémoire est de présenter une rétrospective et de rassembler l'essentiel des informations reliées aux problèmes de segmentation d'images et à leurs formulations mathématiques. Le traitement d'images est un processus complexe multi-niveaux qui fait intervenir plusieurs domaines scientifiques tel que les sciences informatiques, l'intelligence artificielle, les mathématiques, le calcul scientifique, la géométrie des objets, les sciences cognitives et la psychologie. Dans ce contexte, une revue complète des traitements particuliers liés à la segmentation d'images permet au lecteur de s'initier aux terminologies et notations employées par les différentes communautés scientifiques. Dans ce genre de problèmes, l'une des premières difficultés est de choisir la représentation analytique des objets et de leurs contours. Alors, sous certaines considérations et hypothèses, différentes méthodes et techniques de segmentation d'images seront étudiées et analysées.

Le mémoire couvre les idées et méthodes informatiques et mathématiques de base qui proviennent de plusieurs des domaines scientifiques énumérés ci-haut. Le spectre de recherche associé au traitement des images est relativement large : il touche plusieurs champs d'applications comme, par exemple, l'imagerie médicale, la vision, la reconnaissance, la reconstruction et le modelage de forme, la détection des contours des objets d'une images, le "shape-from-shading", la recherche de géodésiques généralisées. On y fait une revue et une synthèse des problèmes de base en segmentation des images. Elle repose sur une riche bibliographie de plus de 120 insertions, dont une quantité importante est relativement récente, et peut servir de ressource bibliographique au lecteur.

Le mémoire comprend deux parties principales et le chapitre 1 comme introduction. La première partie, les chapitres 2 et 3, comprend les aspects théoriques

associés au traitement d'images. Entre autres, le chapitre 2 présente les différentes représentations des objets et des contours, paramétriques et intrinsèques, le filtrage, la régularisation et la détection des objets d'une image, la recherche de géodésiques par la minimisation de fonctions objectif définie sur les contours et de la fonction objectif de Mumford et Shah définie dans tout le cadre de l'image. Le chapitre 3 décrit et caractérise l'évolution des contours introduits au chapitre 2 sous forme d'équations différentielles obtenues à partir d'une version continue de la méthode de descente par gradient et de la méthode des vitesses. Il comprend également les notions de "snake", de *contours actif* ainsi que de *flots géodésiques*. La deuxième partie, le chapitre 4, expose l'expérimentation numérique d'une méthode dite de *modèle déformable* qui a servi de motivation à ce travail.

**Mots-clés** : détection d'objets, filtre, image régularisée, fonction objectif, minimisation, géodésique, représentations analytiques d'objets, fonction distance, fonction distance orientée, fonction caractéristique, snake, contour actif, flot géodésique, ensembles de niveau, équations d'évolutions, modèle déformable.

## SUMMARY

---

The object of this mémoire is to present a synthesis of and to gather the basic material on image segmentation problems and their mathematical formulations. Image processing is a multistage process related to many scientific areas such as computer sciences, artificial intelligence, mathematics, scientific calculus, geometry of objects, cognitive sciences and psychology. In that context, a complete review of specific processing in image segmentation provides the reader with an initiation to the terminology and the notation used by the various scientific communities. In this type of problems, one of the primary difficulties is to choose the analytic representation of objects and contours. Then, under certain considerations and assumptions, different methods and techniques of image segmentation will be studied and analyzed.

This mémoire covers the basic ideas and mathematical and computational methods that come from several of the above scientific areas. Image processing is a relatively broad field of research : it touches upon many applications areas such as medical imaging, computer vision, shape recovery, reconstruction and modeling, edges detection, “shape-from-shading”, generalized geodesics. We make a review and a synthesis of the basic problems in image segmentation. It is based on a rich bibliography of more than 120 entries, of which a large number are relatively recent, and it may be used as reference material for the reader.

This mémoire is divided in two main parts along with Chapter 1 as the introduction. The first part, Chapters 2 and 3, presents the theoretical aspects of image processing. Among other things, Chapter 2 presents different parameterized and intrinsic representations of objects and contours, filtering, smoothing of an image, objects detection, geodesics search by minimizing objective functions

defined on edges and the Mumford and Shah's objective function defined in the whole frame of the image. Chapter 3 describes and characterizes the evolution of contours introduced in Chapter 2 as differential equations obtained from a continuous version of the steepest gradient descent and the velocity method. It also includes the concepts of *snakes*, *active contours* and *geodesic flows*. The second part, Chapter 4, presents the numerical experiences for a "deformable model" that served as a motivation for this work.

**Key words** : edges detection, filter, smoothed image, objective function, minimization, geodesics, analytic representations of objects, distance function, oriented distance function, characteristic function, snake, active contour, geodesic flow, level sets, evolution equations, deformable model.

## Table des matières

---

<b>Sommaire</b> .....	iii
<b>Summary</b> .....	v
<b>Table des figures</b> .....	xi
<b>Liste des tableaux</b> .....	xiii
<b>Remerciements</b> .....	xiv
<b>Chapitre 1. Introduction</b> .....	1
<b>Chapitre 2. Représentations et détection des objets dans une image</b> .....	3
1. Orientation.....	3
2. Traitement automatique, vision, filtre et détecteur de contours.....	5
2.1. Traitement automatique d'une image.....	5
2.2. Exemples de filtres.....	7
2.2.1. Filtre directionnel.....	9
2.2.2. Filtre gaussien.....	9
2.3. Détecteur laplacien.....	12
3. Image régularisée par convolution et détecteur de contours.....	14
3.1. Construction de la convolée de $I$ .....	15
3.2. Relation d'incertitude espace-fréquence.....	19
3.3. Image régularisée sur une grille de pixels.....	24
3.4. Détecteur laplacien.....	27

4.	Fonctions objectif sur les contours et géodésiques généralisées . . . . .	30
5.	Représentations des objets et des contours . . . . .	32
5.1.	Représentations paramétrées des objets . . . . .	32
5.1.1.	Courbes et surfaces paramétrées . . . . .	32
5.1.2.	Paramétrisation par les nœuds, courbes et surfaces de Bézier . . . . .	33
5.2.	Représentation des objets par ensembles de niveau d'une fonction . . . . .	34
5.3.	Représentations intrinsèques des objets . . . . .	36
5.3.1.	Fonction distance . . . . .	37
5.3.2.	Fonction distance orientée . . . . .	37
5.3.3.	Fonction caractéristique . . . . .	42
6.	Fonction objectif de Mumford et Shah . . . . .	42
<b>Chapitre 3. Évolution des contours et images déformables . . . . .</b>		<b>46</b>
1.	Orientation . . . . .	46
2.	Snakes, contours actifs et ensembles de niveau . . . . .	47
2.1.	Contour actif géodésique . . . . .	49
2.2.	Flot géodésique représenté par les ensembles de niveau d'une fonction . . . . .	50
2.3.	Mouvement des ensembles de niveau par courbure moyenne . . . . .	52
3.	Évolution d'un ensemble sous l'action d'un champ de vitesses . . . . .	53
4.	Équation d'évolution des ensembles de niveau . . . . .	55
4.1.	Équation d'évolution et les hypothèses . . . . .	56
4.2.	Cas de la vitesse scalaire portée par la normale . . . . .	57
4.3.	Prolongement de l'équation des ensembles de niveau . . . . .	58
4.4.	Difficultés liées au prolongement . . . . .	60
5.	Équation d'évolution de la fonction caractéristique . . . . .	61
6.	Équation d'évolution de la fonction distance orientée . . . . .	64

7.	Évolution de contours paramétrés par des nœuds.....	67
7.1.	Contours linéaires par morceaux.....	69
7.2.	Méthode de descente du gradient en continu.....	72
7.3.	Contours Bézier par morceaux.....	73
<b>Chapitre 4. Expérimentation numérique.....</b>		<b>76</b>
1.	Orientation.....	76
2.	Exemple du canyon circulaire dans une image carrée.....	77
2.1.	Exemple académique : le canyon circulaire.....	77
2.2.	Étape d'initialisation.....	78
3.	Ballon de Gill.....	79
3.1.	Méthode du ballon en dimension deux.....	80
3.1.1.	Ballon déformable.....	80
3.1.2.	Problème de segmentation d'image.....	82
3.1.3.	Modèle du ballon déformable.....	82
3.1.4.	Modèle du ballon simplifié.....	86
4.	Mise en œuvre de quelques scénarios en dimension deux.....	86
4.1.	Nouvelles définitions des forces $f$ et $g$ .....	86
4.2.	Scénario A : modèle de Gill.....	87
4.2.1.	Schéma de discrétisation.....	88
4.2.2.	Résultats numériques.....	89
4.2.3.	Difficultés rencontrées.....	91
4.3.	Scénario B : modèle d'ordre deux.....	91
4.3.1.	Schéma de discrétisation.....	92
4.3.2.	Résultats numériques.....	92
4.3.3.	Difficultés rencontrées.....	93
4.4.	Scénario C : modèle d'ordre un.....	94
4.4.1.	Schéma de discrétisation.....	94

4.4.2. Résultats numériques.....	94
4.4.3. Difficultés rencontrées.....	95
5. Forces directement calculées à partir de la fonction objectif.....	95
<b>Annexe A. Courbes de Bézier.....</b>	<b>97</b>
1. Définitions et propriétés.....	97
<b>Bibliographie.....</b>	<b>100</b>
<b>Index.....</b>	<b>111</b>

## Table des figures

---

2.1	Image $I$ des objets et sa segmentation dans un cadre ouvert $D$ de dimension deux. ....	6
2.2	Image $I$ contenant des courbes noires ou des fissures dans un cadre blanc ouvert $D$ de dimension deux. ....	6
2.3	Dallage du cadre carré $D$ en pavés $P_{i,j}$ d'aire $\eta^2$ . ....	7
2.4	Pondération du noyau d'un filtre gaussien d'écart-type $\varepsilon = 1$ en dimension un. ....	10
2.5	Gaussienne avec ses deux parties exponentielles en $x_1$ et $x_2$ lorsque $\varepsilon = 3$ sur le carré $[-10, 10] \times [-10, 10]$ . ....	11
2.6	Graphes de différentes gaussiennes sur le carré $[-10, 10] \times [-10, 10]$ . ...	12
2.7	Transformation affine $T$ entre un pavé physique $P_{i,j}$ de l'image $I$ et le pavé de référence $\hat{P}$ . ....	26
2.8	$\Gamma$ comme frontière d'un domaine $\Omega$ . ....	33
3.1	Ensembles de niveau de la fonction $\varphi$ définie sur le sous-ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ . ....	56
4.1	Fonction polynomiale $p(x)$ définie par l'équation (2.1). ....	77
4.2	Fonction $p_{wh}^a(r)$ définie par l'équation (2.2) avec $0 < a - w < a + w < c$ . ....	78
4.3	Différentes vues de la densité $g(x_1, x_2)$ définie par (2.3). ....	79
4.4	Ballon au temps initial. ....	81
4.5	Évolution du ballon du temps initial au temps $t$ . ....	82
4.6	Force de tension superficielle au nœud $x_i$ . ....	84

4.7	Force de pression interne au nœud $x_i$ .....	85
4.8	Représentation des nouvelles forces de pression interne et de tension superficielle.....	88
4.9	Évolution de différents fronts initiaux avec le schéma numérique du modèle de Gill <i>et al.</i> [68] de l'équation (4.3).....	89
4.10	Évolution d'un front circulaire centré en $(0,0)$ de rayon 2, $Nb_{nod} = 20$ , $\Delta t = 0.01$ pour la 480-ième itération et plus.....	90
4.11	Évolution d'un front carré centré en $(0,0)$ de longueur 0.4, $Nb_{nod} = 20$ , $\Delta t = 0.025$ pour certains nombres d'itérations.....	91
4.12	Évolution de différents fronts initiaux avec le schéma numérique du modèle d'ordre deux de l'équation (4.5). ....	93
4.13	Évolution de différents fronts initiaux avec le schéma numérique de l'équation (4.7).....	95
A.1	Polynômes de Bernstein de degré $n = 3$ sur $[0, 1]$ . ....	98
A.2	Un segment de courbe cubique et sa <i>courbe de Bézier</i> $\mathcal{B}$ sur l'intervalle $[a, b]$ pour $t \in [0, 1]$ . ....	99

## Liste des tableaux

---

4.1	Différences entre les forces de pression interne et de tension superficielle de Gill et celles des équations (4.1) et (4.2).....	87
-----	--	----

## REMERCIEMENTS

---

Ce travail a été réalisé dans le cadre du projet CERCA “Design et contrôle des dispositifs médicaux” impliquant André Garon et Dominique Pelletier du département de génie mécanique de l’École Polytechnique de Montréal et Michel Delfour du département de mathématiques et statistique (DMS). Ce projet s’est prolongé sous la forme de la collaboration en cours entre les groupes d’André Garon et de Michel Delfour.

Je commence par remercier Michel Delfour non seulement pour avoir accepté de diriger ce travail, mais aussi pour le soutien moral, les encouragements constants et les discussions enrichissantes que nous avons eues tout au long du projet.

Je tiens aussi à remercier Messieurs Jacques Bélair et André Garon qui ont accepté de faire partie de mon jury. Je remercie également les professeurs de mathématiques de l’UQAC pour m’avoir aidé à découvrir plusieurs branches des mathématiques et les professeurs de l’UdeM qui me permettent de continuer à apprécier cette science.

Je ne peux conclure ces remerciements sans rappeler ceux et celles qui ont été présents pour me soutenir durant cette période. Entre autres, je remercie mes amis(es) de Chicoutimi jusqu’à Montréal, les gens du département et des autres départements, la “Maisonnée”, “Espèce de Banach”, et tout *spécialement* mes parents et Grand-papa, mes frères, mes copines et Éman, J-D, Little Cat et Ringo qui m’ont enduré et soutenu pendant ces deux années.

À Grand-maman, partie en octobre 2003. Merci !

# Chapitre 1

---

## INTRODUCTION

Ce travail est motivé par le traitement automatique d'images médicales dans le cadre du projet conjoint sur le "Design et contrôle des dispositifs médicaux" avec le groupe d'André Garon<sup>1</sup>. Le point de départ a été l'article de Gill, Ladak, Steinman et Fenster [68] intitulé "*Accuracy and variability assessment of a semiautomatic technique for segmentation of the carotid arteries from three-dimensional ultrasound images*". Dans cet article les auteurs construisent un ballon qui évolue à l'intérieur d'un profil à identifier et qui, sous l'action de forces déterminées par l'image brute, va se coller sur les contours de la région ciblée. Malheureusement la construction du modèle du ballon repose sur des hypothèses ad hoc et les premières simulations ont mis en évidence un comportement insatisfaisant. Enfin la modification du modèle est rendue difficile par un manque d'éléments théoriques adéquats et solides dans l'article.

Le mémoire a donc été orienté vers une revue et une synthèse des problèmes de base en segmentation d'image et de leurs principales formulations mathématiques : filtrage et régularisation d'une image, détection des contours des objets dans une image, recherche de géodésiques généralisées à partir de fonctions objectif ou d'énergie définies sur le contour recherché, et enfin la fonction objectif de Mumford et Shah définie dans tout le cadre de l'image.

L'une des difficultés dans ces problèmes est le choix de la représentation des contours. Initialement considérée comme une courbe régulière image de l'intervalle  $[0, 1]$ , cette approche limitée a évolué vers des représentations intrinsèques

---

<sup>1</sup>Département de Génie mécanique, École Polytechnique de Montréal.

comme celle des ensembles de niveau d'une fonction. La version en continu des itérations d'une méthode de gradient pour la minimisation d'une fonction objectif mène à l'introduction d'une équation d'évolution pour chacune des représentations des contours. Ceci comprend la théorie des contours actifs ou des modèles déformables.

Le mémoire comprend trois chapitres. Le premier porte sur la représentation et la détection des objets dans une image et le second sur l'évolution des contours et images déformables. Dans le dernier chapitre on donne le détail de quelques expériences numériques qui ont conduit à faire cette étude théorique afin de mieux éclairer les étapes suivantes au cours desquelles il faudra choisir la représentation des objets, le détecteur et/ou la fonction objectif, et, enfin, la méthode numérique et sa mise en œuvre.

## Chapitre 2

---

# REPRÉSENTATIONS ET DÉTECTION DES OBJETS DANS UNE IMAGE

### 1. ORIENTATION

Pour bien comprendre les enjeux des nouvelles techniques en traitement d'images, il est important de connaître les différentes formulations qui ont été présentées dans la littérature. Il devient alors plus facile et souvent immédiat de réaliser les avancés théoriques, techniques et technologiques nécessaires pour relever les nouveaux défis qui se présentent dans ce domaine.

Le traitement des images est un processus complexe multi-niveaux qui requiert une hiérarchie de traitements faisant appel à la psychologie, aux sciences cognitives, à l'intelligence artificielle et à l'informatique. Dans ce travail on se limitera au problème de recherche des contours saillants des objets et à la segmentation des images. Ce sont des traitements de premier ou bas niveau. On passera d'abord en revue en section 2 les filtres et les détecteurs de contours de Marr et Hildreth [89] en 1980 et Marr [88] en 1982. On précisera en section 3 les définitions mathématiques de l'image et de sa régularisée, des filtres et des échelles, le principe d'incertitude et le détecteur laplacien.

On passera ensuite dans la section 4 à l'approche dite des *snakes* ou *modèles à contours actifs* de Kass, Witkin et Terzopoulos [75] en 1988 où l'on remplace le détecteur par une *fonction objectif* définie sur le contour recherché qu'il faudra minimiser. Ils recherchent une courbe paramétrée qui minimise une fonction objectif (ou d'*énergie* dans leur terminologie). Cette dernière est composée d'un

terme lié à l'image et d'un autre lié à la courbe ou snake. Le premier terme peut, par exemple, contenir le gradient de l'image, alors que le second pourrait tout simplement être la longueur du snake. La terminologie *snake* et *modèle à contours actifs* tire son origine du fait qu'au cours des itérations de minimisation de la fonction d'énergie les courbes successives semblent se tordre comme de petits *serpents*. Ces travaux débouchent sur les *modèles déformables* de Terzopoulos, Witkin et Kass [120] en 1988. Comme le feront remarquer en 1997 Caselles, Kimmel et Shapiro [32], ces formulations peuvent être considérées comme la recherche d'une géodésique généralisée par rapport à une nouvelle métrique riemannienne de longueur spécifiée par la fonction objectif. Ils englobent donc la recherche de courbes de longueur minimale entre deux points fixes sur une hypersurface ou celle d'une courbe de longueur minimale contrainte à résider dans un canyon spécifié par le négatif de la norme du gradient de l'image. On peut mettre dans cette dernière catégorie les modèles de *ballons déformables* comme ceux de Cohen [37] en 1991 et Cohen et Cohen [41] en 1993, McInerney et Terzopoulos [91] et Malladi *et al.* [85] en 1996, et Gill *et al.* [68] en 2000 pour l'imagerie médicale.

La représentation paramétrée d'une courbe pour les snakes n'est cependant pas la seule et la meilleure représentation des contours d'un objet pour la détection et la segmentation tant du point de vue théorique que computationnel. En 1988 Osher et Sethian [101] introduisent la représentation d'un contour par l'ensemble de niveau zéro d'une fonction à partir de laquelle on peut calculer la normale et la courbure moyenne. Il s'en suit plusieurs articles sur les *modèles à contours actifs* de Caselles, Catté, Coll et Dibos [30] en 1993, Caselles [29] en 1995, Malladi *et al.* [85] en 1996, Caselles, Kimmel et Sapiro [32] et Cohen et Kimmel [42] en 1997.

La représentation par ensembles de niveau n'est cependant pas la seule pertinente pour les images ou, de façon plus générale pour les problèmes faisant intervenir la forme ou la géométrie d'un ensemble ou d'un domaine. On consacre donc la section 5 aux différentes représentations des objets géométriques : paramétrisations par image d'un intervalle ou d'une surface fixe, courbes de Bézier,

ensembles de niveau, fonction caractéristique, fonction distance, fonction distance orientée. Ces représentations seront utilisées au chapitre 3.

La section 6 est consacrée à une autre fonction objectif qui, à la différence des précédentes, est définie sur toute l'image et pas seulement sur les contours des objets de l'image. Elle a été introduite en 1985 par Mumford et Shah [96] suivi de l'article [97] plus élaboré en 1989. Ici on cherche à partitionner l'image en sous-régions et à trouver une fonction qui approxime l'image telle qu'elle soit relativement plate sur chaque sous-région. Le contour correspond alors à l'ensemble des points de discontinuité de la fonction.

## 2. TRAITEMENT AUTOMATIQUE, VISION, FILTRE ET DÉTECTEUR DE CONTOURS

### 2.1. Traitement automatique d'une image

La perception visuelle humaine ou vision est un processus extrêmement complexe qui marie des éléments de détection, d'analyse et d'interprétation à plusieurs niveaux. Il n'est donc pas surprenant que l'analyse automatique d'une image par un ordinateur soit une tâche délicate qui puisse faire appel à une combinaison de plusieurs niveaux de traitement de l'image par un processus cognitif élaboré. Le problème de la perception des formes linguistiques ou visuelles a été traité par plusieurs auteurs comme Blum [20] en 1967, Marr et Hildreth [89] en 1980 et Marr [88] en 1982. Il fait appel à des spécialistes de la psychologie et de l'intelligence artificielle et de l'expérimentation comme Hubel et Wiesel [73] en 1962 et Campbell et Robson [26] en 1968.

Le niveau de traitement premier d'une image consiste à identifier le contour de chaque objet qui s'y trouve. Dans le cas d'une *image* idéale  $I : D \rightarrow \mathbb{R}$  définie dans un cadre ouvert  $D$  du plan  $\mathbb{R}^2$  à valeur dans un interval continu de *niveaux de gris* allant du blanc au noir comme celle de la figure 2.1, le contour des objets correspond aux points de discontinuité de l'image  $I$  (cf. [89]). Ces contours sont appelés "step edges" dans [88].

Comme il est facile de le voir, les lieux de discontinuité de  $I$  ne révèlent pas tous les objets car l'un d'eux peut être partiellement caché par les autres. Dans ce cas d'autres niveaux de traitement seront nécessaires.

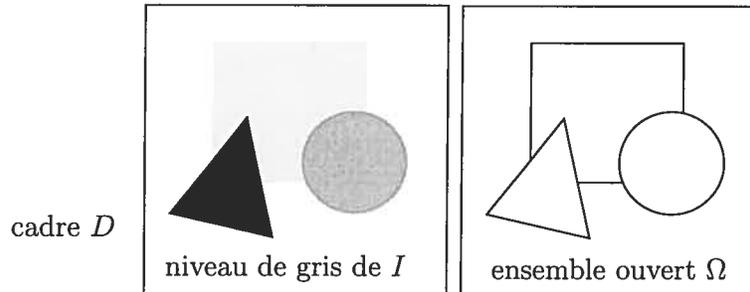


FIG. 2.1. Image  $I$  des objets et sa segmentation dans un cadre ouvert  $D$  de dimension deux.

Une situation plus difficile est celle de la détection de courbes noires dans un cadre blanc qui correspondent à des mesures dans le plan comme la masse de Dirac en dimension un ou à des fissures dans le cas du cadre  $D$  de dimension deux.

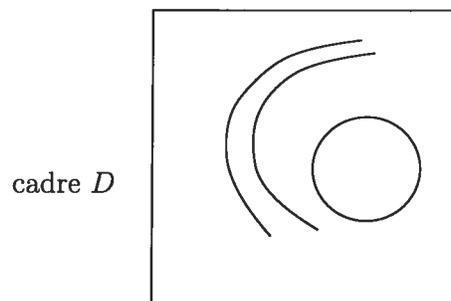


FIG. 2.2. Image  $I$  contenant des courbes noires ou des fissures dans un cadre blanc ouvert  $D$  de dimension deux.

En pratique, le cadre  $D$  de l'image est divisé en pavés (pixels) disposés régulièrement et la valeur du gris sur chaque pixel est constante et quantifiée en 256 niveaux de gris. Le pixel de base  $P$  doit former un dallage ou *remplissage périodique* du cadre comme ceux du célèbre Escher [59]. En pratique on pourra utiliser des petits carrés, losanges ou hexagones. La fonction  $I$  sera alors *constante par pavé* ou *par morceau* c'est-à-dire  $I \in L^\infty(D)$ . On ne peut donc plus espérer détecter les contours des objets de la figure 2.1 en cherchant les lieux de discontinuité de la fonction  $I$ . Il faudra d'abord *filtrer* ou *régulariser* l'image brute.

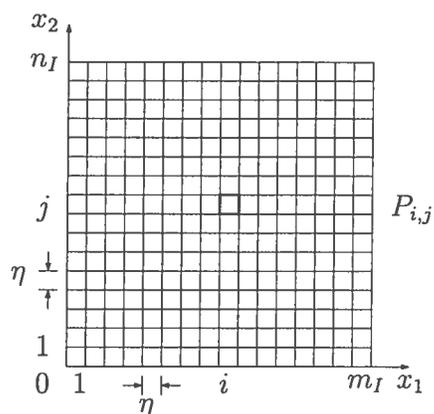


FIG. 2.3. Dallage du cadre carré  $D$  en pavés  $P_{i,j}$  d'aire  $\eta^2$ .

Enfin, dans tout problème qui fait intervenir des observations ou des mesures, il faut tenir compte des erreurs de mesure, des perturbations et du bruit. Le *bruit* est souvent caractérisé par une distribution statistique bien spécifique. Par exemple, l'amplitude de sa transformée de Fourier peut révéler que le bruit se trouve dans les hautes fréquences ou, dans une bande de fréquences déterminée. Par un choix judicieux du filtre appliqué à l'image on pourra alors filtrer l'effet du bruit. Voir par exemple les traitements liés à l'utilisation de filtres passe bande ("low pass filtering") dans [108, 123, 124].

Cette opération sera suivie et/ou combinée avec l'utilisation d'un *détecteur de contours* comme celui des passages par zéro du laplacien de l'image régularisée. Dans la littérature, on ne fait pas toujours la distinction entre un filtre qui régularise et nettoie le bruit, et un détecteur qui cherche les caractéristiques de l'image. La terminologie *filtre* s'applique souvent aux deux. Dans ce mémoire on distinguera filtre et détecteur.

## 2.2. Exemples de filtres

Si l'on suppose que le *cadre*  $D$  est carré et contient  $n_I$  par  $m_I$  petits carrés ou *pixels* et que l'on adopte une numérotation des *pavés* (pixels), on peut représenter

l'image à l'aide d'une matrice  $n_I \times m_I$  de la forme

$$\begin{bmatrix} I_{1,1} & I_{1,2} & & & \\ I_{2,1} & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & I_{n_I-1,m_I} & \\ & & I_{n_I,m_I-1} & I_{n_I,m_I} & \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

où chaque entrée correspond à l'intensité de gris du pavé (pixel).

Le *lissage* ("smoothing") crée un *effet de flou* qui s'obtient par exemple en calculant la moyenne de l'intensité de l'image (le niveau de gris) par rapport à un groupe de pixels dans un voisinage prédéterminé du pixel visité (largeur de bande et directions). Il y a de nombreux exemples de filtres dans la littérature des images possédant des propriétés régularisantes ("smoothing"). Ils font appel à des fonctions suffisamment différentiables.

Dans les exemples qui vont suivre le *filtrage* sera une opération linéaire sur l'image. Par exemple on utilisera souvent la convolée de l'image  $I$  par une fonction régularisante. Si l'on travaille avec une représentation matricielle du cadre  $D$ , le *filtre*  $K$  correspond à une matrice de dimension  $2n_K + 1$  par  $2n_K + 1$  que l'on appelle *noyau* ou "*kernel*", qui agira autour de chaque pixel  $(i, j)$ . La dimension  $n_K$  est choisie de façon à couvrir le support du filtre et certains éléments de  $K$  peuvent être nuls. Le nombre  $2n_K + 1$  est la taille du filtre qui représente la *bande de lissage*, i.e. le nombre maximal de pixels pouvant intervenir lors du lissage dans une *direction* donnée. L'image filtrée  $I'$  sera donnée par

$$(I')_{i,j} = \sum_{\substack{\ell, m = -n_K \\ 1 \leq j+m \leq n_I \\ 1 \leq i+\ell \leq m_I}}^{n_K} K_{\ell, m} I_{i+\ell, j+m}. \quad (2.2)$$

Beaucoup de filtres reposent sur le *principe de la moyenne pondérée*, c'est-à-dire que

$$\forall \ell, m, \quad K_{\ell, m} \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{\ell, m = -n_K}^{n_K} K_{\ell, m} = 1. \quad (2.3)$$

On procèdera des filtres les plus simples au plus complexes.

### 2.2.1. Filtre directionnel

Pour chaque pixel de l'image, on additionne les valeurs des pixels voisins et on divise la somme par le nombre de voisins. On remplace ensuite le pixel original par cette nouvelle valeur et on passe au pixel suivant. Prenons, par exemple en (2.4), l'image représentée par le noyau ou la matrice  $I$  de taille  $5 \times 5$  et le noyau  $K$  du filtre de taille  $3 \times 3$

$$I = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ \hline 3 & 6 & 3 & 2 & 0 \\ \hline 4 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ \hline 5 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}, \quad K = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Le pixel du centre de l'image  $I$  est celui qui va être remplacé après calculs. On utilise quatre voisins ce qui privilégie quatre directions. Plus le nombre de voisins est important, plus le flou sera prononcé. Le pixel central du bloc (chaque nombre entier est la valeur du niveau de gris du pixel) sera modifié de la façon suivante. On additionne les quatre voisins du pixel central et on divise le résultat par le nombre de voisins non-nuls selon la formule :

$$\frac{4 + 6 + 4 + 2}{4} = 4. \quad (2.5)$$

On remplace alors l'ancienne valeur par celle-ci et on recommence avec le pixel suivant. Pour augmenter l'intensité du flou, on peut procéder à plus d'un lissage. Ce processus (*filtre directionnel*) est simple à mettre en œuvre et très efficace malgré le nombre important d'opérations qu'il nécessite.

### 2.2.2. Filtre gaussien

Le *filtre gaussien* est un peu plus compliqué mais beaucoup plus efficace. On travaille par exemple avec un bloc de  $5 \times 5$  pixels. Chaque pixel du bloc est non nul et contribue au filtrage. On constate qu'un pixel éloigné a moins d'importance sur le résultat final qu'un pixel proche du centre du bloc. On représente le *poids* de chaque pixel par la valeur de l'élément du noyau. On attribue donc une *pondération* à chaque pixel du bloc sur lequel on travaille. La matrice (2.6) montre

que le pixel du centre possède un poids de  $41/273$  et, plus l'on s'éloigne du pixel central plus la pondération des autres pixels diminue

$$K = \frac{1}{273} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 26 & 16 & 4 \\ 7 & 26 & 41 & 26 & 7 \\ 4 & 16 & 26 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 7 & 4 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

L'algorithme fonctionne de la même façon que celui du paragraphe précédent en multipliant l'intensité de chaque pixel par le poids correspondant provenant du noyau. On applique aussi l'algorithme aux points du bord de l'image ainsi que dans une couronne de cinq pixels autour de l'image. Hors de l'image on prend zéro pour l'intensité des pixels extérieurs fictifs. L'image filtrée déborde donc légèrement de l'image originale d'un nombre de pixels déterminé par la largeur du filtre  $K$ .

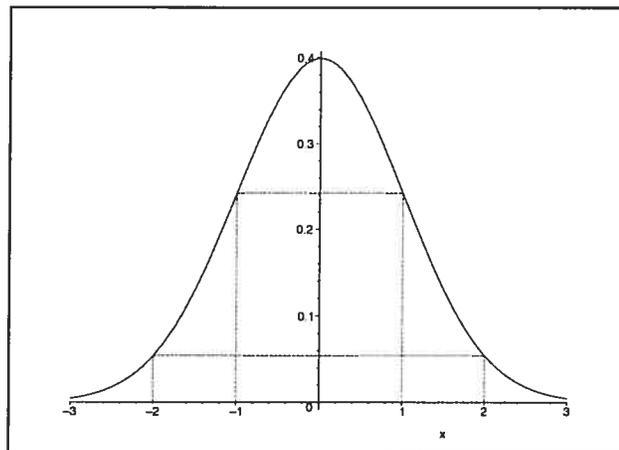


FIG. 2.4. Pondération du noyau d'un filtre gaussien d'écart-type  $\varepsilon = 1$  en dimension un.

Comme son nom l'indique, les valeurs de pondération de la matrice (2.6) du filtre gaussien proviennent d'une distribution statistique de Gauss (figure 2.5(a)). C'est la hauteur de la distribution prise à intervalles réguliers qui donne les poids relatifs pour un filtre. La situation en dimension un est représentée à la figure 2.4. Le pixel central est situé en  $x = 0$  et son poids est donné par la valeur au sommet

de la gaussienne <sup>1</sup> ( $G_1^1(0) = 1/\sqrt{2\pi}$ ) dont l'intégrale est normalisée à un (ce qui explique (2.3)). On raisonne de la même façon pour les voisins en  $x = -2, -1, 1, 2$  sur l'axe horizontal. Le concept se généralise en dimension  $N$ .

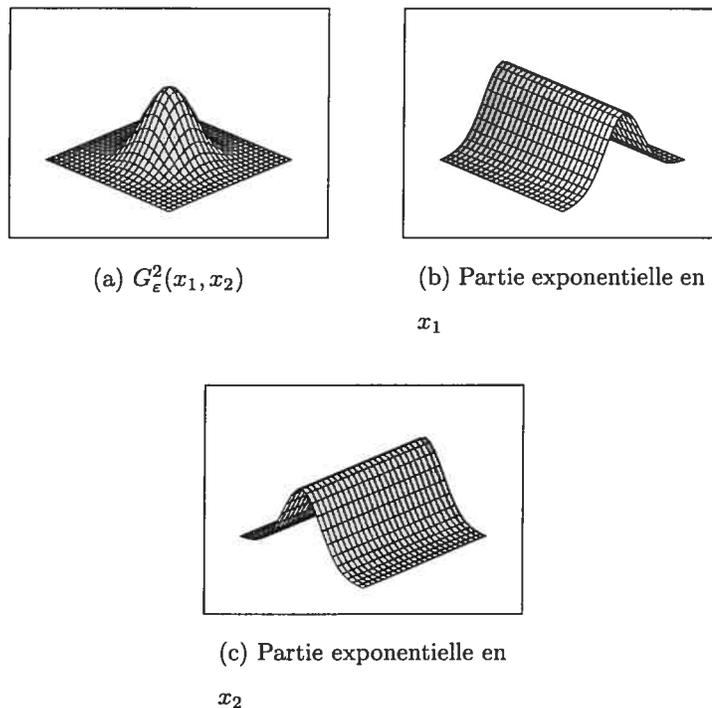


FIG. 2.5. Gaussienne avec ses deux parties exponentielles en  $x_1$  et  $x_2$  lorsque  $\epsilon = 3$  sur le carré  $[-10, 10] \times [-10, 10]$ .

Plus on s'éloigne du centre de la gaussienne plus les valeurs s'approchent de 0. Aussi, plus l'écart-type de la gaussienne est grand, plus la bosse s'aplatit et donc plus la taille de la matrice du filtre est grande (figure 2.6). Dans ce cas, l'effet de flou sera très important puisque la matrice fait usage des pixels proches et très éloignés du pixel central. En effet, puisque la bosse est aplatie, la variation de la pondération entre les pixels est moins brusque.

<sup>1</sup>La gaussienne normalisée d'écart-type  $\epsilon$  et son intégrale sont données par

$$G_\epsilon^N(x) = \frac{1}{\epsilon^N} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N} e^{-\frac{1}{2}|\frac{x}{\epsilon}|^2} \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}^N} G_\epsilon^N(x) dx = 1,$$

et reprises à l'équation (3.4) de la section 3.1.

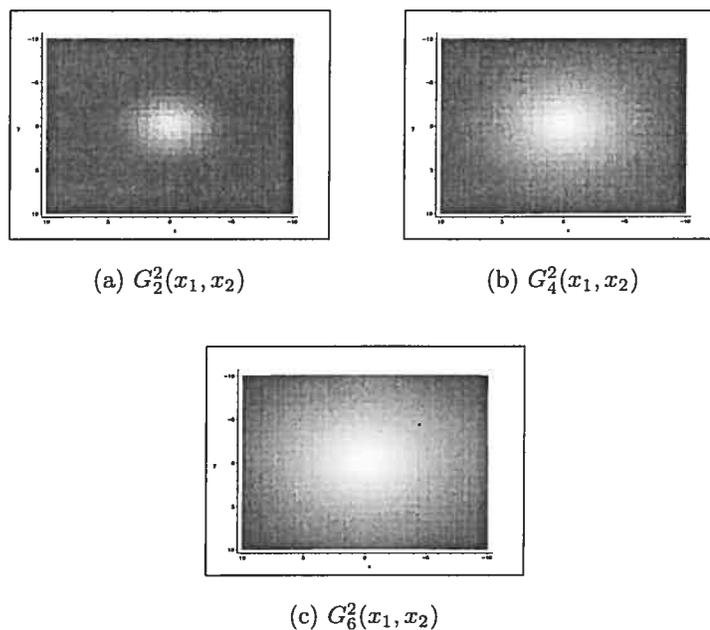


FIG. 2.6. Graphes de différentes gaussiennes sur le carré  $[-10, 10] \times [-10, 10]$ .

Le filtrage gaussien est assez lent même avec un noyau  $5 \times 5$ . Une des façons de réduire le nombre d'opérations est d'utiliser le fait que la gaussienne se décompose en une partie horizontale (figure 2.5(b)) et en une partie verticale (figure 2.5(c)). Il s'agit de garder les valeurs trouvées lors du passage horizontal et de les réutiliser lors du passage vertical. Cette technique diminue de moitié le nombre de multiplications et divisions.

### 2.3. Détecteur laplacien

Le *détecteur laplacien* est un *détecteur linéaire*. Il nécessite d'abord un lissage de l'image, par exemple par un filtre gaussien, avant de procéder à son application. Lorsque l'image a été régularisée, les lieux de discontinuité de l'image correspondent à des *maxima* locaux de la norme du gradient. Le détecteur laplacien est un bon *détecteur de contours*, mais il est par contre très sensible au *bruit*.

Comme pour le filtre gaussien, chaque pixel dans le voisinage du pixel à filtrer possède un certain poids. Par contre, la pondération des pixels provient d'approximations aux différences finies des dérivées secondes de l'image  $I$ . Par exemple, en

utilisant les opérateurs de différences centrées suivants

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} I(x_1, x_2) \simeq \frac{I_{i+1,j} - 2I_{i,j} + I_{i-1,j}}{(\Delta x_1)^2}; \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} I(x_1, x_2) \simeq \frac{I_{i,j+1} - 2I_{i,j} + I_{i,j-1}}{(\Delta x_2)^2}, \quad (2.8)$$

où  $\Delta x_1$ ,  $\Delta x_2$  sont les pas d'espace dans chaque direction. On définit le détecteur en utilisant la définition du *laplacien*

$$\Delta f(x_1, x_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f(x_1, x_2) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} f(x_1, x_2), \quad (2.9)$$

où  $f$  est une fonction continue au moins deux fois différentiables en chacune de ses variables. En prenant  $\Delta x_1 = \Delta x_2 = 1$  et en additionnant les équations (2.7) et (2.8) on a pour noyau du *filtre laplacien*

$$K_\ell = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Remarque 2.1.** *La somme des éléments du noyau du détecteur laplacien est nulle.*

Il existe d'autres détecteurs de type laplacien. Ils se démarquent par le choix de l'opérateur de différences, i.e. par la façon dont les dérivées secondes sont approchées. Par exemple, le *détecteur de White-Rohrer*  $K_{WR}$  [107] fait ressortir les contours dans quatre directions : nord, sud, est et ouest. On remarque qu'il n'emploie pas les voisins immédiats du pixel central mais plutôt les voisins des voisins  $i \pm 2$  et  $j \pm 2$ . Le *détecteur de Marr-Hildreth*  $K_{MH}$  (mentionné dans Haralick [72]) quant à lui, fait ressortir les contours dans toutes les directions du pixel central.

$$K_{WR} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad K_{MH} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & -4 - 2\sqrt{2} & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Il existe encore beaucoup d'autres types de détecteurs. Le *détecteur gradient*, par exemple, est défini de la même façon que le détecteur laplacien mais emploie une approximation de la dérivée première. Il n'agit alors que dans une direction. La direction peut être vers l'avant comme vers l'arrière, vers le haut comme vers le bas, etc.

### 3. IMAGE RÉGULARISÉE PAR CONVOLUTION ET DÉTECTEUR DE CONTOURS

Dans ce paragraphe on s'intéresse à la *régularisation* de l'image  $I$  par *convolution* avec une fonction suffisamment différentiable pour les besoins du traitement de l'image. En section 3.1 on introduit le *paramètre de "scaling"*  $\varepsilon > 0$  qui contrôle la taille de la zone d'influence de la convolution autour de chaque point de l'image. Il repose sur les travaux de Marr et Hildreth [89] en 1980. Cela permet un traitement de l'image en partant d'une échelle grossière vers une échelle plus fine et la possibilité de se concentrer sur certaines régions de l'image.

On revoit et généralise en section 3.2 le *principe d'incertitude* entre la localisation en espace et la localisation en fréquence qui dit que le produit des variances de l'image et de sa *transformée de Fourier par rapport à l'énergie* de l'image (mesurée dans la norme  $L^2(D)$ ) est toujours plus grand qu'une constante qui dépend de la dimension de l'espace dans lequel se trouve l'image. Comme la convolution agit à la fois comme régularisateur de l'image en espace et filtre de l'image en fréquence, il y a *conflit* entre les deux fonctions. Le filtre gaussien est optimal dans le sens qu'il réalise la borne inférieure sur le produit des variances. La section 3.3 donne l'expression du filtre sur une image qui se présente comme des niveaux de gris quantifiés sur une grille de pixels. Enfin on revoit le détecteur laplacien en section 3.4 et on généralise l'*hypothèse de linéarité* de [89] du cas de contours le long de lignes au cas de contours le long de courbes.

### 3.1. Construction de la convolée de $I$

On se donne une fonction suffisamment régulière  $\rho : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ , telle que  $\rho \geq 0$  et

$$\int_{\mathbb{R}^N} \rho(x) dx = 1,$$

et on associe à  $I$  et à un  $\varepsilon > 0$  la *convolée* ou l'*image régularisée*

$$I_\varepsilon(x) \stackrel{\text{déf}}{=} (I * \rho_\varepsilon)(x) = \frac{1}{\varepsilon^N} \int_{\mathbb{R}^N} I(y) \rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) dy, \quad (3.1)$$

où pour  $x \in \mathbb{R}^N$

$$\rho_\varepsilon(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{\varepsilon^N} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right). \quad (3.2)$$

On remarque que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon(x) dx = 1,$$

que  $\rho_\varepsilon$  joue le rôle d'une *densité de probabilité* et que  $\rho_\varepsilon(x) dx$  celui d'une *mesure de probabilité* qui est une *mesure de Radon*.

**Définition 3.1.** Soit  $X$  un ensemble et  $2^X$  la collection des sous-ensembles de  $X$ . Une application  $\mu : 2^X \rightarrow [0, \infty]$  est appelée une *mesure sur  $X$*  si

- (i)  $\mu(\emptyset) = 0$ , et
- (ii)  $\mu(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$  pour  $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ .

Un ensemble  $A \subset X$  est  $\mu$ -mesurable si pour chaque ensemble  $B \subset X$ ,

$$\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B - A).$$

**Définition 3.2.** Soit  $X$  un espace topologique localement compact. Alors,

- (i) une mesure  $\mu$  sur  $X$  est *régulière* si pour chaque ensemble  $A \subset X$ , il existe un ensemble  $\mu$ -mesurable  $B$  tel que  $A \subset B$  et  $\mu(A) = \mu(B)$ ;
- (ii) une mesure  $\mu$  sur  $\mathbb{R}^N$  est dite de *Borel* si chaque ensemble de Borel est  $\mu$ -mesurable;
- (iii) une mesure  $\mu$  sur  $\mathbb{R}^N$  est *Borel régulière* si  $\mu$  est Borel et pour chaque ensemble  $A \subset \mathbb{R}^N$ , il existe un ensemble de Borel  $B$  tel que  $A \subset B$  et  $\mu(A) = \mu(B)$ ;

(iv) une mesure  $\mu$  sur  $\mathbb{R}^N$  est une mesure de Radon si  $\mu$  est Borel régulière et  $\mu(K) < \infty$  pour chaque ensemble compact  $K \subset \mathbb{R}^N$ .

**Remarque 3.1.** Une mesure de Radon  $\nu$  sur  $X$  est une mesure qui est la différence de mesures de Radon finies  $\nu^+$  et  $\nu^-$  sur  $X$  telle que :

$$\nu = \nu^+ - \nu^-.$$

Pour la convergence de  $I_\varepsilon$  vers la fonction  $I$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , on utilise le théorème 3.1 (Evans et Gariépy [60], Théorème 1, p. 123), mais définissons tout d'abord la notion de *point de Lebesgue*.

**Définition 3.3.** Soit  $\mu$  une mesure de Radon sur  $\mathbb{R}^N$ ,  $1 \leq p < \infty$ , et  $f \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N, \mu)$ . Alors un point  $x$  est appelé un point de Lebesgue de  $f$  par rapport à  $\mu$  si

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(B(x, r))} \int_{B(x, r)} |f - f(x)|^p d\mu = 0$$

avec  $B(x, r)$  la boule ouverte centrée en  $x$  de rayon  $r$ .

**Théorème 3.1** ([60], Théorème 1, p. 123). Soient  $f \in L^1_{\text{loc}}(U)$ , la fonction

$$\rho(x) \stackrel{\text{déf}}{=} c \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right) & \text{si } |x| < 1; \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1, \end{cases}$$

avec  $c$  une constante telle que l'intégrale de  $\rho$  soit égale à un. Pour  $\varepsilon > 0$ , soient  $U_\varepsilon \stackrel{\text{déf}}{=} \{x \in U \mid d_{\partial U}(x) > \varepsilon\}$ <sup>2</sup>,  $\rho_\varepsilon$  donné par (3.2), et  $f_\varepsilon = f * \rho_\varepsilon$  la convolée de  $f$  par  $\rho_\varepsilon$ . Alors

- (i) pour chaque  $\varepsilon > 0$ ,  $f_\varepsilon \in C^\infty(U_\varepsilon)$ ;
- (ii) si  $f \in C(U)$ , alors

$$f_\varepsilon \rightarrow f$$

uniformément sur tout compact contenu dans  $U$ ;

<sup>2</sup>La fonction distance  $d_A(x)$  d'un point  $x$  à une partie non-vide  $A$  de  $\mathbb{R}^N$  est définie par

$$d_A(x) = \inf_{y \in A} |y - x|.$$

(iii) si  $f \in L^p_{\text{loc}}(U)$  pour  $1 \leq p < \infty$ , alors

$$f_\varepsilon \rightarrow f \text{ dans } L^p_{\text{loc}}(U);$$

(iv) de plus,  $f_\varepsilon(x) \rightarrow f(x)$  si  $x$  est un point de Lebesgue de  $f$  et, en particulier,

$$f_\varepsilon \rightarrow f \quad \text{m}_N \text{ p.p.};$$

(v) si  $f \in W^{1,p}_{\text{loc}}(U)$  pour  $1 \leq p \leq \infty$ , alors <sup>3</sup>

$$\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x_i} = \rho_\varepsilon * \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (i = 1, \dots, N)$$

sur  $U_\varepsilon$ ;

(vi) en particulier, si  $f \in W^{1,p}_{\text{loc}}(U)$  pour  $1 \leq p \leq \infty$ , alors

$$f_\varepsilon \rightarrow f \text{ dans } W^{1,p}_{\text{loc}}(U).$$

**Remarque 3.2.** Le théorème se généralise à des fonctions  $\rho \geq 0$  de classe  $C^\infty$  à support compact. Par contre, lorsque  $\rho$  n'est pas à support compact, la partie (ii) n'est pas vérifiée.

Alors, si  $I \in L^p(U)$  (resp.  $W^{1,p}(U)$ ), on a les convergences suivantes

$$I_\varepsilon = I * \rho_\varepsilon \rightarrow I \text{ dans } L^p(U) \text{ (resp. } W^{1,p}(U)) \text{ lorsque } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Pour un  $\varepsilon > 0$  assez petit, les lieux de discontinuité de la fonction  $I$  sont ainsi transformés en lieux de fortes variations du gradient de la convolée  $I_\varepsilon$ . Si  $\rho$  est au moins de classe  $C^2$  la *matrice hessienne*  $D^2 I_\varepsilon$  est continue et selon Gill *et al.* [68] et Malladi, Sethian et Vemuri [87], on peut alors chercher parmi les zéros de cette matrice hessienne ceux correspondant à des maxima locaux de  $|\nabla I_\varepsilon|$ .

Si  $\rho$  est à support compact, alors la convolution n'agit que localement dans le support d'ordre  $\varepsilon$  autour de chaque point de l'image, ce qui peut être avantageux

<sup>3</sup>Étant donné un sous-ensemble  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  non-vidé, un entier  $s \geq 0$  et un nombre réel  $p \geq 1$ , les *espaces de Sobolev* sont définis par

$$W^{s,p}(\Omega) \stackrel{\text{déf}}{=} \{f \in L^p(\Omega) : \partial^\alpha f \in L^p(\Omega), \forall \alpha, 0 \leq |\alpha| \leq s\},$$

où les dérivées de  $f$  sont prises au sens des *distributions*. Voir Adams [3] pour détails et prolongement de la définition dans le cas où  $s$  n'est pas un entier. La notation  $H^s(\Omega)$  est utilisée lorsque  $p = 2$ .

pour les calculs. Pour régulariser l'image, on pourrait choisir une fonction de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ , l'espace des fonctions infiniment différentiables dans  $\mathbb{R}^N$  dont le support est compact et inclus dans  $\mathbb{R}^N$ . Par exemple, la fonction suivante appartient à  $\mathcal{D}(B(0, 1))$ <sup>4</sup>

$$\psi(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right) & \text{si } x \in B(0, 1) \\ 0 & \text{si } x \notin B(0, 1), \end{cases} \quad (3.3)$$

où le support de cette fonction est la boule unité  $B(0, 1)$  de centre 0 dans  $\mathbb{R}^N$ .

Dans ce cas on prend

$$\rho(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\psi(x)}{\int_{\mathbb{R}^N} \psi(x) dx} \quad \text{et} \quad \rho_\varepsilon(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{\varepsilon^N} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}^N,$$

et on vérifie que  $\rho$  est à support compact dans la boule ouverte  $B(0, \varepsilon)$ . Comme les fonctions appartenant à  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$  ne sont pas nécessairement faciles à construire on peut, pour les besoins de l'application, se restreindre à des fonctions plus simples de classe  $C^2$ .

On pourrait également choisir la *gaussienne*  $G$  pour régulariser l'image  $I$ . C'est ce que font Gill *et al.* [68]. Bien que son support soit tout  $\mathbb{R}^N$ , il suffit de garder la gaussienne sur un support assez grand pour la convolution puisque l'image  $I$  est une fonction définie sur un domaine borné. Le paramètre  $\varepsilon$  coïncide avec l'écart-type dans la distribution de Gauss (voir figures 2.4 et 2.5). La *gaussienne* d'intégrale *normalisée* à un dans  $\mathbb{R}^N$  est définie par

$$G^N(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N} e^{-\frac{|x|^2}{2}} \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}^N} G^N(x) dx = 1,$$

et la *gaussienne normalisée d'écart-type*  $\varepsilon$  et son intégrale par

$$G_\varepsilon^N(x) = \frac{1}{\varepsilon^N} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N} e^{-\frac{1}{2}\left|\frac{x}{\varepsilon}\right|^2} \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}^N} G_\varepsilon^N(x) dx = 1. \quad (3.4)$$

En augmentant le paramètre  $\varepsilon$  du filtre gaussien, la fonction  $G_\varepsilon^2$  s'aplatit (voir figure 2.5(a)) ce qui a pour effet d'intensifier le niveau de flou de l'image  $I$ . On appellera ce procédé *régularisation gaussienne*. Comme le fait remarquer Alvarez,

<sup>4</sup>Pour un  $\Omega$  ouvert dans  $\mathbb{R}^N$ , on définit  $\mathcal{D}(\Omega)$  comme l'espace des fonctions infiniment différentiables à support compact dans  $\Omega$ .

Lions et Morel [5] en dimension  $N = 2$ , la fonction  $u(t) = G_{\sqrt{2t}}^2 * I$  est la solution de l'équation parabolique

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \Delta u(t, x), \quad u(0, x) = I(x),$$

où le laplacien  $\Delta u$  est un terme de régularisation de  $I$ .

### 3.2. Relation d'incertitude espace-fréquence

Il est intéressant de calculer la transformée de Fourier  $\mathcal{F}$  de  $G_\varepsilon^N$  pour  $x$  un vecteur de  $\mathbb{R}^N$  dans le but d'expliciter la relation existante entre les écarts-types de  $G_\varepsilon^N$  et de sa transformée de Fourier  $\mathcal{F}(G_\varepsilon^N)$ . Pour  $\omega$  un vecteur de  $\mathbb{R}^N$ , on définit la *transformée de Fourier* d'une fonction  $f$  par

$$\mathcal{F}(f)(\omega) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{-i\omega \cdot x}. \quad (3.5)$$

Par le théorème de Plancherel (voir W. Rudin [112]), on sait que si  $f \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$ , on a

$$\|f\|_{L^2} = \|\mathcal{F}(f)\|_{L^2}. \quad (3.6)$$

Dans les applications, l'intégrale du carré de  $f$  correspond souvent à l'*énergie*. On peut donc appeler la norme  $L^2$  de  $f$  la *norme de l'énergie* et la quantité  $f(x)^2$  la *densité d'énergie*.

On calcule premièrement la transformée de Fourier (équation (3.5)) de la gaussienne normalisée (équation (3.4)) comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(G_\varepsilon^N)(\omega) &\stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N} \int_{\mathbb{R}^N} G_\varepsilon^N(x) e^{-i\omega \cdot x} dx \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N} \frac{1}{\varepsilon^N} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{1}{2}|\frac{x}{\varepsilon}|^2} e^{-i\omega \cdot x} dx \\ &= \frac{1}{(2\pi \varepsilon)^N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{\varepsilon} - i\varepsilon\omega\right)^2 + (\varepsilon\omega)^2\right]} dx \\ &= \frac{1}{(2\pi \varepsilon)^N} e^{-\frac{1}{2}|\varepsilon\omega|^2} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{1}{2}\left|\frac{x}{\varepsilon} - i\varepsilon\omega\right|^2} dx. \end{aligned}$$

On procède au changement de variables

$$\boxed{u = \frac{x}{\varepsilon} - i\varepsilon\omega \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{\varepsilon^N} dx,}$$

ce qui entraîne que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(G_\varepsilon^N)(\omega) &= \frac{1}{(2\pi\varepsilon)^N} e^{-\frac{1}{2}|\varepsilon\omega|^2} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{1}{2}|u|^2} \varepsilon^N du \\ &= \frac{1}{(2\pi)^N} e^{-\frac{1}{2}|\varepsilon\omega|^2} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{1}{2}|u|^2} du.\end{aligned}$$

En utilisant le théorème de Fubini (cf. [122], Ex. 11, p. 97), on montre que

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{1}{2}|u|^2} du = (\sqrt{2\pi})^N,$$

et ainsi

$$\boxed{\mathcal{F}(G_\varepsilon^N)(\omega) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N} e^{-\frac{1}{2}|\varepsilon\omega|^2}.} \quad (3.7)$$

**Remarque 3.3.** La relation entre la gaussienne normalisée d'écart-type  $\varepsilon$

$$G_\varepsilon^N(x) = \frac{1}{\varepsilon^N} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N} e^{-\frac{1}{2}|\frac{x}{\varepsilon}|^2}$$

et sa transformée de Fourier

$$\mathcal{F}(G_\varepsilon^N)(\omega) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N} e^{-\frac{1}{2}|\varepsilon\omega|^2}$$

est alors donnée par

$$\boxed{\mathcal{F}(G_\varepsilon^N)(\omega) = \frac{1}{\varepsilon^N} G_{\frac{1}{\varepsilon}}^N(\omega).} \quad (3.8)$$

Marr et Hildreth [89] font la remarque qu'il existe une *relation d'incertitude* entre la variance de la densité d'énergie  $f(x)^2$  et la variance de la densité d'énergie  $\mathcal{F}(f)(\omega)^2$  de sa transformée de Fourier de la forme

$$(\text{var } f^2) (\text{var } \mathcal{F}(f)^2) \geq \frac{1}{2} \quad (3.9)$$

en dimension un en se basant sur un résultat de Bracewell [23] (pp. 160-161)<sup>5</sup>.

On est intéressé à généraliser la *relation d'incertitude* (3.9) à la dimension  $N$ . On doit tout d'abord définir les notions de *centroïde* et de *variance* par rapport à la densité d'énergie  $f(x)^2$ . On définit le *centroïde* par

$$\bar{x} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} x f(x)^2 dx}{\int_{\mathbb{R}^N} f(x)^2 dx} \quad (3.10)$$

<sup>5</sup>En fait Bracewell [23] utilise la constante  $1/(2\pi)$  au lieu de  $1/\sqrt{2\pi}$  dans la définition de la transformée de Fourier ce qui donne  $1/(4\pi)$  au lieu de  $1/2$  comme borne inférieure au produit des variances.

et la *variance* par

$$\begin{aligned}
 \langle \Delta x \rangle^2 &\stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |x - \bar{x}|^2 f(x)^2 dx}{\int_{\mathbb{R}^N} f(x)^2 dx} \\
 &= \frac{\int_{\mathbb{R}^N} [|\bar{x}|^2 - 2x \cdot \bar{x} + |x|^2] f(x)^2 dx}{\int_{\mathbb{R}^N} f(x)^2 dx} \\
 &= \frac{|\bar{x}|^2 \int_{\mathbb{R}^N} f(x)^2 dx - 2\bar{x} \cdot \int_{\mathbb{R}^N} x f(x)^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} |x|^2 f(x)^2 dx}{\int_{\mathbb{R}^N} f(x)^2 dx} \\
 &= \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |x|^2 f(x)^2 dx - |\bar{x}|^2 \int_{\mathbb{R}^N} f(x)^2 dx}{\int_{\mathbb{R}^N} f(x)^2 dx} \\
 &= \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |x|^2 f(x)^2 dx}{\int_{\mathbb{R}^N} f(x)^2 dx} - |\bar{x}|^2. \tag{3.11}
 \end{aligned}$$

Avant de faire le calcul de la variance de  $f = G_\varepsilon^N$  on fait le calcul auxiliaire suivant. Posons

$$g(a) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-a|x|^2} dx,$$

et appliquons le changement de variables

$$\boxed{u = \sqrt{2a} x \quad \Rightarrow \quad du = (\sqrt{2a})^N dx,}$$

ce qui implique que

$$g(a) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{1}{2}|u|^2} \frac{1}{(\sqrt{2a})^N} du = \frac{(\sqrt{2\pi})^N}{(\sqrt{2a})^N} = \left(\sqrt{\frac{\pi}{a}}\right)^N.$$

On prend ensuite la d\u00e9riv\u00e9e de  $g$  par rapport \u00e0  $a$ ,

$$\begin{aligned}
 g'(a) &= - \int_{\mathbb{R}^N} |x|^2 e^{-a|x|^2} dx = -N \left(\sqrt{\frac{\pi}{a}}\right)^{N-1} \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{a}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{-\pi}{a^2}\right) \\
 &\Rightarrow \boxed{\frac{\int_{\mathbb{R}^N} |x|^2 e^{-a|x|^2} dx}{\int_{\mathbb{R}^N} e^{-a|x|^2} dx} = \frac{g'(a)}{g(a)} = \frac{N}{2a}.}
 \end{aligned}$$

On retourne au calcul de chacune des int\u00e9grales de l'\u00e9quation (3.11) pour  $f = G_\varepsilon^N$  la gaussienne normalis\u00e9e (3.4) en proc\u00e9dant de la mani\u00e8re suivante. On remarque que le r\u00e9sultat pr\u00e9c\u00e9dent correspond au num\u00e9rateur du premier terme de la d\u00e9finition (3.11) de la variance pour la fonction  $g$  d\u00e9finie ci-haut en prenant  $a = \frac{1}{\varepsilon^2}$  car la constante  $\frac{1}{\varepsilon^N} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N}$  devant l'exponentielle s'\u00e9limine avec son homologue lors de la division dans le premier terme de la d\u00e9finition. De plus,

on remarque que le numérateur du deuxième terme est nul puisque l'intégrale est impaire, d'où

$$\langle \Delta x \rangle^2 \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |x|^2 f(x)^2 dx}{\int_{\mathbb{R}^N} f(x)^2 dx} - \left| \frac{\int_{\mathbb{R}^N} x f(x)^2 dx}{\int_{\mathbb{R}^N} f(x)^2 dx} \right|^2 = \frac{g'(a)}{g(a)} = \frac{N}{2a}.$$

On obtient donc pour

$$f(x) = G_\varepsilon^N(x) = \frac{1}{\varepsilon^N} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N} e^{-\frac{1}{2} \left| \frac{x}{\varepsilon} \right|^2} \Rightarrow \langle \Delta x \rangle^2 = \frac{N \varepsilon^2}{2}. \quad (3.12)$$

En utilisant le même processus d'intégration, on évalue la variance par rapport à la distribution d'énergie de  $f = \mathcal{F}(G_\varepsilon^N)$ , la transformée de Fourier de la gaussienne normalisée (3.7), et on trouve un résultat semblable, soit

$$f(\omega) = \mathcal{F}(G_\varepsilon^N)(\omega) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N} e^{-\frac{1}{2} \varepsilon \omega^2} \Rightarrow \langle \Delta \omega \rangle^2 = \frac{N}{2 \varepsilon^2}, \quad (3.13)$$

d'où le produit des variances

$$\langle \Delta x \rangle^2 \langle \Delta \omega \rangle^2 = \frac{N \varepsilon^2}{2} \frac{N}{2 \varepsilon^2} = \frac{N^2}{4}, \quad (3.14)$$

et la *relation d'incertitude* pour les écarts-types par rapport à la distribution d'énergie de la gaussienne normalisée et de sa transformée de Fourier est donnée par

$$\langle \Delta x \rangle \langle \Delta \omega \rangle = \frac{N}{2} \quad \text{pour } G_\varepsilon^N \text{ et } \mathcal{F}(G_\varepsilon^N). \quad (3.15)$$

La relation d'incertitude de Bracewell [23], p. 160, se généralise à la dimension  $N$ .

**Théorème 3.2.** (*Relation d'incertitude entre écarts-types par rapport à la distribution d'énergie*) Soit  $f \in W^{1,1}(\mathbb{R}^N) \cap W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$  telle que  $-ix f(x) \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$ . Alors

$$\langle \Delta x \rangle \langle \Delta \omega \rangle \geq \frac{N}{2}. \quad (3.16)$$

**Démonstration.** On peut, sans perte de généralité, supposer la *distribution d'énergie centrée* en 0, c'est-à-dire pour  $\bar{x} = 0$  et  $\bar{\omega} = 0$ . On doit donc calculer

$$\langle \Delta x \rangle^2 \langle \Delta \omega \rangle^2 \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |x f|^2 dx}{\int_{\mathbb{R}^N} |f|^2 dx} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\omega \mathcal{F}(f)|^2 dx}{\int_{\mathbb{R}^N} |\mathcal{F}(f)|^2 dx}.$$

Par le théorème de Plancherel [112], on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\mathcal{F}(f)|^2 dx.$$

La relation <sup>6</sup>  $\mathcal{F}(\nabla f) = i\omega \mathcal{F}(f)$  et l'utilisation du théorème de Plancherel pour le gradient de  $f$  entraîne que

$$\|\omega \mathcal{F}(f)\|_{L^2} = \|\mathcal{F}(\nabla f)\|_{L^2} = \|\nabla f\|_{L^2}. \quad (3.17)$$

Alors par l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour les intégrales <sup>7</sup>

$$\langle \Delta x \rangle^2 \langle \Delta \omega \rangle^2 = \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |x f|^2 dx \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla f|^2 dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |f|^2 dx\right)^2} \geq \frac{\left|\int_{\mathbb{R}^N} x f \cdot \nabla f dx\right|^2}{\left|\int_{\mathbb{R}^N} f^2 dx\right|^2}$$

et en regroupant les termes

$$\langle \Delta x \rangle^2 \langle \Delta \omega \rangle^2 \geq \frac{\left|\int_{\mathbb{R}^N} x \cdot (f \nabla f) dx\right|^2}{\left|\int_{\mathbb{R}^N} f^2 dx\right|^2} = \frac{\left|\int_{\mathbb{R}^N} x \cdot \frac{1}{2} \nabla |f|^2 dx\right|^2}{\left|\int_{\mathbb{R}^N} f^2 dx\right|^2},$$

car

$$\nabla |f|^2 = 2(f \nabla f).$$

Par ailleurs, on a

$$\sum_i^N x_i \partial_i |f|^2 = \sum_i^N \partial_i [x_i |f|^2] - |f|^2 \partial_i x_i = \operatorname{div} [x |f|^2] - |f|^2 N,$$

<sup>6</sup>Selon le Théorème 9.2 de Rudin [112], si  $-ix f(x) \in L^1$  alors la dérivée de la transformée de Fourier de  $f$  existe et est égale à la transformée de  $-ix f(x)$ . Voir aussi Khoan Vo-Khac [121].

<sup>7</sup>L'inégalité de Cauchy-Schwartz pour les intégrales est donnée par

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} f(x) g(x) dx\right|^2 \leq \left\{\int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^2 dx\right\} \left\{\int_{\mathbb{R}^N} |g(x)|^2 dx\right\}.$$

d'où

$$\begin{aligned} \langle \Delta x \rangle^2 \langle \Delta \omega \rangle^2 &\geq \frac{\left| \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} [\operatorname{div} [x |f|^2] - N |f|^2] dx \right|^2}{\left| \int_{\mathbb{R}^N} f^2 dx \right|^2} \\ &\geq \frac{N^2 \left| \int_{\mathbb{R}^N} -f^2 dx \right|^2}{4 \left| \int_{\mathbb{R}^N} f^2 dx \right|^2} \geq \frac{N^2}{4}, \end{aligned}$$

car

$$\int_{\mathbb{R}^N} \operatorname{div} [x |f|^2] dx = 0$$

en utilisant le théorème de Stokes et le fait que, par hypothèse sur  $f$ ,  $x f(x)^2$  tend vers zéro lorsque  $|x|$  tend vers l'infini.  $\square$

**Remarque 3.4.** *Cette démonstration nous permet donc d'affirmer que le filtre gaussien normalisé est bel et bien le filtre optimal car il réalise la borne inférieure dans toutes les dimensions comme l'affirmaient Marr et Hildreth [89] en dimension un en 1980. Dans le contexte de la mécanique quantique cette relation est l'analogie du principe d'incertitude d'Heisenberg.*

### 3.3. Image régularisée sur une grille de pixels

On veut trouver les variations brusques de niveau de gris qui sont uniquement associées à la présence de contours. Pour ce faire, on doit calculer la valeur de l'expression de la convolution de l'image  $I_\varepsilon$  (équation (3.1)). On désire faire une approximation numérique de celle-ci à partir de l'image  $I$  discrétisée en pavés carrés  $P_{i,j}$  de côtés égaux  $\eta$  pour  $0 \leq i \leq m_I$  et  $0 \leq j \leq n_I$  (voir figure 2.3). Chaque pavé correspond en général à un pixel où est spécifié le niveau de gris. Des pavés de formes plus complexes peuvent aussi être envisagés (par exemple des hexagones), mais le pavé choisi devra former un dallage du plan au sens de Escher [59].

Pour la détection de contours en dimension deux, on doit calculer numériquement  $I_\varepsilon$  et surtout son gradient  $\nabla I_\varepsilon$  défini par

$$\nabla I_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^3} \int_D I(y) \nabla \rho \left( \frac{x-y}{\varepsilon} \right) dy \quad (3.18)$$

où  $D$  représente le domaine de l'image  $I$ . Chaque pavé  $P_{i,j}$  de l'image possède une intensité (niveau de gris)  $I_{i,j}$  et on définit l'image  $I$  comme la fonction constante

par pavé

$$I(x) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \sum_{\substack{0 \leq i \leq m_I \\ 0 \leq j \leq n_I}} I_{i,j} \chi_{P_{i,j}}(x), \quad (3.19)$$

où  $\chi_{P_{i,j}}$  est la *fonction caract\u00e9ristique* d\u00e9finie par

$$\chi_{P_{i,j}}(x) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \begin{cases} 1, & \text{si } x \in P_{i,j}; \\ 0, & \text{autrement.} \end{cases}$$

En utilisant la d\u00e9finition de  $I$  donn\u00e9e par l'\u00e9quation (3.19),

$$I_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_D \sum_{\substack{0 \leq i \leq m_I \\ 0 \leq j \leq n_I}} I_{i,j} \chi_{P_{i,j}}(y) \rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) dy = \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{\substack{0 \leq i \leq m_I \\ 0 \leq j \leq n_I}} I_{i,j} \int_{P_{i,j}} \rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) dy, \quad (3.20)$$

et similairement le gradient de la convolution  $\nabla I_\varepsilon$  s'\u00e9crit

$$\nabla I_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^3} \sum_{\substack{0 \leq i \leq m_I \\ 0 \leq j \leq n_I}} I_{i,j} \int_{P_{i,j}} \nabla \rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) dy, \quad (3.21)$$

car

$$\nabla I_\varepsilon(x) = \int I(y) \nabla \rho_\varepsilon(x-y) dy = \int I(y) \nabla \rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) dy.$$

On remarque que chaque int\u00e9grale des \u00e9quations (3.20) et (3.21) est d\u00e9finie sur un pav\u00e9  $P_{i,j}$  particulier. On est int\u00e9ress\u00e9 \u00e0 travailler avec un *pav\u00e9 de r\u00e9f\u00e9rence*  $\widehat{P}$  fixe pour faciliter le calcul des int\u00e9grales. On introduit donc une *transformation affine*  $T$  d\u00e9finie entre les pav\u00e9s physiques  $P_{i,j}$  et le pav\u00e9 de r\u00e9f\u00e9rence  $\widehat{P} = ]0, 1[ \times ]0, 1[$  (voir figure 2.7). On aurait \u00e9galement pu choisir un pav\u00e9 de r\u00e9f\u00e9rence  $\widehat{P}$  d\u00e9fini sur une autre partie du plan.

Le changement de variables de l'\u00e9l\u00e9ment de r\u00e9f\u00e9rence  $\widehat{P}$  \u00e0 l'\u00e9l\u00e9ment physique est de la forme

$$\xi \mapsto y = T(\xi) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} x_{i,j} + \eta \xi : \widehat{P} \rightarrow P_{i,j}, \quad (3.22)$$

o\u00f9  $x_{i,j} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} (i\eta, j\eta)$  est le vecteur position d'un sommet du pav\u00e9 physique  $P_{i,j}$  pour  $0 \leq i \leq m_I$  et  $0 \leq j \leq n_I$ . Cette transformation affine est inversible et \u00e0 chaque

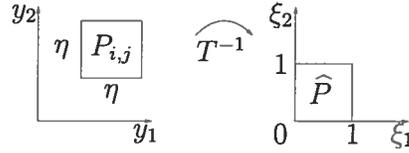


FIG. 2.7. Transformation affine  $T$  entre un pavé physique  $P_{i,j}$  de l'image  $I$  et le pavé de référence  $\hat{P}$ .

point  $\xi$  de l'élément de référence  $\hat{P}$  correspond un point  $y$  de l'élément  $P_{i,j}$  et réciproquement. La transformation inverse de  $T$  est alors

$$\boxed{y \mapsto \xi = T^{-1}(y) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{y - x_{i,j}}{\eta} : P_{i,j} \rightarrow \hat{P}.} \quad (3.23)$$

On peut également obtenir cette transformation en introduisant les *fonctions d'interpolation de Lagrange* sur l'élément de référence (voir Raviart et Thomas [103] ou Ciarlet [36]). Cette technique est très efficace pour l'intégration numérique de la convolution  $I_\varepsilon$  et de son gradient  $\nabla I_\varepsilon$ . Les intégrales des équations (3.20) et (3.21) subissent l'effet de la transformation  $T^{-1}$  et le changement de variables donne

$$\int_{P_{i,j}} dy = \int_{\hat{P}=T^{-1}(P_{i,j})} |\det DT^{-1}| d\xi,$$

où  $\det DT^{-1}$  est le déterminant de la *matrice jacobienne*  $DT^{-1}$  de la transformation  $T^{-1}$ . Puisque

$$|\det DT^{-1}| = \frac{1}{\eta^2},$$

les intégrales des équations (3.20) et (3.21) deviennent

$$I_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^2 \eta^2} \sum_{\substack{0 \leq i \leq m_I \\ 0 \leq j \leq n_I}} I_{i,j} \int_{\hat{P}} \rho \left( \frac{x - x_{i,j} - \eta \xi}{\varepsilon} \right) d\xi,$$

$$\nabla I_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^3 \eta^2} \sum_{\substack{0 \leq i \leq m_I \\ 0 \leq j \leq n_I}} I_{i,j} \int_{\hat{P}} \nabla \rho \left( \frac{x - x_{i,j} - \eta \xi}{\varepsilon} \right) d\xi.$$

On veut donner une interprétation à ces formules dans le même ordre d'idées que Gill *et al.* [68] et Malladi, Sethian et Vemuri [87] pour des filtres de type gaussien (équation (2.6)) ou les filtres de White-Rohrer [107] et de Marr-Hildreth

mentionnés dans [72] (équation (2.10)). Soit des points  $x_{k,\ell} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} (k\eta, \ell\eta)$  et  $x_{i,j} = (i\eta, j\eta)$ . Alors

$$I_\varepsilon(x_{k,\ell}) = \frac{1}{\varepsilon^2\eta^2} \sum_{\substack{0 \leq i \leq m_I \\ 0 \leq j \leq n_I}} I_{i,j} \int_{\widehat{\mathbb{P}}} \rho\left(\frac{\eta}{\varepsilon}((k-i, \ell-j) - \xi)\right) d\xi,$$

$$\nabla I_\varepsilon(x_{k,\ell}) = \frac{1}{\varepsilon^3\eta^2} \sum_{\substack{0 \leq i \leq m_I \\ 0 \leq j \leq n_I}} I_{i,j} \int_{\widehat{\mathbb{P}}} \nabla \rho\left(\frac{\eta}{\varepsilon}((k-i, \ell-j) - \xi)\right) d\xi.$$

Soit  $\alpha = k - i$  et  $\beta = \ell - j$  pour  $-m_I < \alpha < m_I$  et  $-n_I < \beta < n_I$  alors on d\u00e9finit les noyaux

$$K_{\alpha,\beta} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \int_{\widehat{\mathbb{P}}} \rho\left(\frac{\eta}{\varepsilon}((\alpha, \beta) - \xi)\right) d\xi,$$

$$K_{\alpha,\beta}^\nabla \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \int_{\widehat{\mathbb{P}}} \nabla \rho\left(\frac{\eta}{\varepsilon}((\alpha, \beta) - \xi)\right) d\xi$$

et ainsi les \u00e9quations (3.20) et (3.21) deviennent

$$I_\varepsilon(x_{k,\ell}) = \frac{1}{\varepsilon^2\eta^2} \sum_{\substack{0 \leq i \leq m_I \\ 0 \leq j \leq n_I}} I_{i,j} K_{\alpha,\beta},$$

$$\nabla I_\varepsilon(x_{k,\ell}) = \frac{1}{\varepsilon^3\eta^2} \sum_{\substack{0 \leq i \leq m_I \\ 0 \leq j \leq n_I}} I_{i,j} K_{\alpha,\beta}^\nabla. \tag{3.24}$$

### 3.4. D\u00e9tecteur laplacien

Ce d\u00e9tecteur laplacien part de l'image r\u00e9gularis\u00e9e par convolution  $I_\varepsilon$  qui poss\u00e8de des d\u00e9riv\u00e9es secondes continues au moins jusqu'au l'ordre 2. \u00c9tant donn\u00e9e une direction  $v$ ,  $|v| = 1$ , et un point  $x \in \mathbb{R}^2$  on cherche les maxima locaux de la d\u00e9riv\u00e9e directionnelle  $f(t) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \nabla I_\varepsilon(x + tv) \cdot v$ . Soit  $\hat{t}$  un point r\u00e9alisant le maximum. Alors on a la condition n\u00e9cessaire

$$D^2 I_\varepsilon(x + \hat{t}v) v \cdot v = 0.$$

Le point  $\hat{x} = x + \hat{t}v$  est un point dit de *passage \u00e0 z\u00e9ro* ("zero-crossing" selon la terminologie de Marr et Hildreth [89]) de la d\u00e9riv\u00e9e seconde directionnelle dans la direction  $v$ . On cherche donc des couples  $(\hat{x}, \hat{v})$  qui v\u00e9rifient la condition n\u00e9cessaire

$$D^2 I_\varepsilon(\hat{x}) \hat{v} \cdot \hat{v} = 0 \tag{3.25}$$

et, plus précisément, des lignes ou courbes  $\mathcal{C}$  tel que

$$\forall x \in \mathcal{C}, \exists v(x), |v(x)| = 1, \quad D^2 I_\varepsilon(x) v(x) \cdot v(x) = 0. \quad (3.26)$$

Cette condition est nécessaire pour que, en chaque point  $x \in \mathcal{C}$ , il existe une direction  $v(x)$  telle que  $\nabla I_\varepsilon(x) \cdot v$  soit extremum local.

Dans l'exemple donné par [89], il est supposé que  $\mathcal{C}$  est un segment de droite et il introduit sa *condition de variation linéaire*.

**Hypothèse 3.1.** *L'intensité  $I_\varepsilon$  dans un voisinage de lignes parallèles à  $\mathcal{C}$  est localement linéaire (affine).*

Supposons donc que  $\mathcal{C}$  soit un segment de droite contenu dans la frontière d'un demi-plan  $\Omega = \{y \in \mathbb{R}^2 : (y - c) \cdot e < 0\}$ , où  $c$  et  $e$  sont des vecteurs de  $\mathbb{R}^2$  et  $|e| = 1$ . Le segment  $\mathcal{C}$  est donc contenu dans la droite  $\Gamma = \{c + te : \forall t\}$ . Soit  $n(x)$  la normale extérieure à la frontière de  $\Omega$ . La ligne parallèle à distance (algébrique)  $s$  est donnée par  $\Gamma_s = \{c + te + sn : \forall t\}$ . Par hypothèse, on a que

$$I_\varepsilon(c + te + sn) = \alpha(s) + \beta(s)t \text{ dans un voisinage de } \mathcal{C}, \quad (3.27)$$

c'est-à-dire pour  $|s|$  petit avec  $\alpha$  et  $\beta$  des fonctions  $C^1$  de  $s$ .

**Hypothèse 3.2.** *Le passage à zéro se fait en tout point de  $\mathcal{C}$  dans la direction de la normale  $n$  au point, c'est-à-dire*

$$\boxed{D^2 I_\varepsilon(c + te) n \cdot n = 0 \text{ sur } \mathcal{C}.} \quad (3.28)$$

Le laplacien de  $I_\varepsilon$  sur  $\mathcal{C}$  se décompose comme suit (Delfour et Zolésio [54], p. 364)

$$\Delta I_\varepsilon = \operatorname{div}_\Gamma \nabla I_\varepsilon + D^2 I_\varepsilon n \cdot n,$$

où  $\operatorname{div}_\Gamma \nabla I_\varepsilon$  est la *divergence tangentielle* de  $\nabla I_\varepsilon$  qui peut être définie comme suit

$$\operatorname{div}_\Gamma \nabla I_\varepsilon = \operatorname{div}(\nabla I_\varepsilon \circ p_\mathcal{C})|_\mathcal{C}$$

et  $p_\mathcal{C}$  est la *projection* sur  $\mathcal{C}$ . De (3.27)

$$I_\varepsilon(c + te + sn) = \alpha(s) + \beta(s)t$$

$$\Rightarrow \quad \partial_s I_\varepsilon(c + te + sn) = \alpha'(s) + \beta'(s)t \text{ et } \partial_t I_\varepsilon(c + te + sn) = \beta(s).$$

Puisque  $p_{\mathcal{C}}(c + te + sn) = c + te$ , il vient

$$\partial_s I_{\varepsilon}(p_{\mathcal{C}}(c + te + sn)) = \alpha'(0) + \beta'(0)t \text{ et } \partial_t I_{\varepsilon}(p_{\mathcal{C}}(c + te + sn)) = \beta(0)$$

$$\partial_s(\partial_s I_{\varepsilon}(p_{\mathcal{C}}(c + te + sn))) = \partial_s(\alpha'(0) + \beta'(0)t) = 0$$

$$\partial_t(\partial_t I_{\varepsilon}(p_{\mathcal{C}}(c + te + sn))) = \partial_t(\beta(0)) = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{div}(\nabla I_{\varepsilon}(p_{\mathcal{C}})) = 0 \quad \Rightarrow \operatorname{div}_{\Gamma}(\nabla I_{\varepsilon}) = 0.$$

Sous l'hypothèse (3.27),  $\operatorname{div}_{\Gamma}(\nabla I_{\varepsilon}) = 0$  sur  $\mathcal{C}$  et, sous l'hypothèse 3.2,  $D^2 I_{\varepsilon}(c + te)n \cdot n = 0$ , on a donc

$$\Delta I_{\varepsilon} = \operatorname{div}_{\Gamma}(\nabla I_{\varepsilon}) + D^2 I_{\varepsilon} n \cdot n = 0 \text{ sur } \mathcal{C},$$

et on en conclut que, sous les hypothèses 3.1 et 3.2, la condition nécessaire est

$$\boxed{\Delta I_{\varepsilon} = 0 \text{ sur } \mathcal{C}.} \quad (3.29)$$

On a donc ramené le problème à la recherche des passages à zéro du laplacien de  $I_{\varepsilon}$ . Comme ce n'est qu'une condition nécessaire, on trouvera aussi d'autres points  $x$ , mais cette condition est beaucoup plus simple à vérifier que celle d'un couple  $(x, v)$ .

Ces considérations se généralisent immédiatement au cas où  $\mathcal{C}$  est contenue dans la frontière  $\Gamma$  d'un ensemble  $\Omega$  de classe  $C^2$  en modifiant l'hypothèse 3.1 comme suit.

**Hypothèse 3.3.** *La restriction du gradient de l'intensité  $I_{\varepsilon}$  à la courbe  $\mathcal{C}$  est égale à un vecteur constant.*

On peut alors décomposer le laplacien le long de  $\mathcal{C}$  de la manière suivante

$$\Delta I_{\varepsilon} = \operatorname{div}(\nabla I_{\varepsilon}) = \operatorname{div}_{\Gamma}(\nabla I_{\varepsilon}) + D^2 I_{\varepsilon} n \cdot n = 0 \text{ sur } \mathcal{C} \quad (3.30)$$

puisque par l'hypothèse 3.2,  $D^2 I_{\varepsilon} n \cdot n = 0$  sur  $\mathcal{C}$  et par l'hypothèse 3.3,  $\nabla I_{\varepsilon} = c$ ,  $c$  un vecteur constant, sur  $\mathcal{C}$  et que

$$\operatorname{div}_{\Gamma}(\nabla I_{\varepsilon}) = \operatorname{div}(\nabla I_{\varepsilon} \circ p_{\Gamma})|_{\Gamma} = \operatorname{div}(c)|_{\Gamma} = 0.$$

#### 4. FONCTIONS OBJECTIF SUR LES CONTOURS ET GÉODÉSQUES GÉNÉRALISÉES

Décrivons l'approche classique sous-jacente aux *snakes* (Kass *et al.* [75]) pour détecter les contours des objets contenus dans une image  $I$ . Étant donné un cadre  $D = ]0, a[ \times ]0, b[$  et une image convolée  $I : D \rightarrow \mathbb{R}$ , on cherche la courbe paramétrée par  $\mathcal{C} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  qui minimise la fonction objectif (d'énergie) qui consiste en un premier terme dépendant du gradient de l'image et un second terme qui dépend de la régularité souhaitée de la courbe (en général un terme de *pénalisation*)

$$E_1(\mathcal{C}) = - \int_0^1 |\nabla I(\mathcal{C}(q))| dq + \alpha \int_0^1 |\mathcal{C}'(q)|^2 dq + \beta \int_0^1 |\mathcal{C}''(q)|^2 dq, \quad (4.1)$$

pour  $\alpha, \beta > 0$ , où  $\mathcal{C}'$  et  $\mathcal{C}''$  sont les dérivées de la courbe  $\mathcal{C}$  par rapport au paramètre  $q$ . La fonction objectif  $E_1$  essaie de maximiser l'intégrale de  $|\nabla I(\mathcal{C}(q))|$  le long de la courbe  $\mathcal{C}$  tout en pénalisant les dérivées première et seconde de  $\mathcal{C}$ . Le premier terme de  $E_1$  est utilisé dans le but d'attirer le contour actif le long des frontières des objets contenus dans l'image (*énergie externe*) tandis que les deux derniers termes contrôlent la régularité du contour des frontières (*énergie interne*).

On peut évidemment relaxer le terme de pénalisation pour permettre une classe plus générale de courbes. Dans Caselles *et al.* [30], les auteurs considèrent une autre classe de contours où le *coefficient de rigidité*  $\beta$  est pris égal à zéro. Il y a deux raisons principales qui motivent le retrait du terme  $\mathcal{C}''$  d'ordre deux (Caselles, Kimmel et Sapiro [32]) :

- (i) ce choix permet d'introduire la relation entre les contours actifs et la géodésique via la représentation par ensembles de niveau (Caselles *et al.* section 2.2 [32]) ;
- (ii) la régularité du contour ne dépend plus de la courbure mais uniquement du terme en dérivée première dans l'équation (4.1).

En remplaçant le *détecteur de contours*  $-|\nabla I|$  par une fonction  $g(|\nabla I|)$  telle que  $g(r) \rightarrow 0$  lorsque  $r \rightarrow \infty$  et en choisissant  $\beta = 0$ , on obtient

$$E_2(\mathcal{C}) = \int_0^1 g(|\nabla I(\mathcal{C}(q))|) dq + \alpha \int_0^1 |\mathcal{C}'(q)|^2 dq. \quad (4.2)$$

**Remarque 4.1.** *Il faut noter tout d'abord que cette fonction objectif ne donne pas une formulation intrinsèque du problème puisque la fonction d'énergie dépend de la paramétrisation de la courbe  $\mathcal{C}$  et n'est pas uniquement liée à la géométrie des objets.*

Dans Caselles *et al.* [32], les auteurs précisent que les solutions minimisantes de cette fonction objectif peuvent changer arbitrairement de forme lorsque l'on change la paramétrisation. Dans [32], les auteurs suggère plutôt de minimiser la fonction objectif

$$\int_0^1 g(|\nabla I(\mathcal{C}(q))|) |\mathcal{C}'(q)| dq, \quad (4.3)$$

où le terme  $|\mathcal{C}'(q)| dq$  n'est autre que le différentiel de *longueur*  $d\ell$  le long de la courbe  $\mathcal{C}$ . On peut alors réécrire l'intégrale (4.3) sous forme intrinsèque, c-à-d. sous la forme d'une intégrale le long de la courbe  $\mathcal{C}$

$$\int_{\mathcal{C}} g(|\nabla I|) d\ell. \quad (4.4)$$

Sous la forme (4.4) il devient par exemple plus *naturel* de choisir comme terme de pénalisation la longueur de la courbe ou l'intégrale de la courbure moyenne.

Dans cette optique, on peut modifier la fonction objectif (4.1) de plusieurs façons. Étant donnée l'image convolée  $I_\epsilon$  (équation (3.1)), un cadre  $D = ]0, a[ \times ]0, b[$  et une image  $I : D \rightarrow \mathbb{R}$ , on cherche la courbe paramétrée  $\mathcal{C} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  qui minimise la fonction objectif pénalisée

$$E_\epsilon(\mathcal{C}) \stackrel{\text{def}}{=} - \int_{\mathcal{C}} |\nabla I_\epsilon| d\ell + \alpha \int_{\mathcal{C}} d\ell \quad (4.5)$$

pour  $\alpha > 0$ . La fonction objectif  $E_\epsilon$  maximise l'intégrale de  $|\nabla I_\epsilon|$  le long de la courbe  $\mathcal{C}$  tout en pénalisant la longueur totale de la courbe  $\mathcal{C}$ .  $E_\epsilon$  permet la présence de coins car il n'y a pas de terme de courbure. Lorsque le premier terme en  $\nabla I_\epsilon$  est absent on se retrouve avec un problème de recherche d'une courbe de longueur minimale entre deux points. Dans le cas général, le terme en  $\nabla I_\epsilon$  crée un potentiel en forme de *canyon* autour du contour où le gradient est grand. On cherche donc à placer la courbe dans ce canyon.

Une forme générale de fonction objectif serait

$$E(\mathcal{C}) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\mathcal{C}} g(I_\varepsilon) dl, \quad (4.6)$$

où  $g(I_\varepsilon)$  est une fonction de  $I_\varepsilon$ . Si on regarde  $g(I_\varepsilon) dl$  comme une nouvelle *métrique riemannienne*, la recherche d'une courbe minimisante revient à la recherche d'une géodésique pour cette métrique.

Dans le cas d'une courbe  $\mathcal{C}$  qui est la frontière  $\Gamma$  d'un domaine régulier  $\Omega$ , on verra au chapitre 3 que la fonction objectif  $E(\Omega)$  définie comme une intégrale sur la frontière de  $E(\Omega)$  possède une *semi-dérivée directionnelle*  $dE(\Omega; V)$  par rapport à un champ de vitesses  $V$  défini sur  $D$  (Delfour et Zolésio [54])

$$dE(\Omega; V) = \int_{\Gamma} \left[ Hg(I_\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial n} g(I_\varepsilon) \right] V \cdot n d\Gamma, \quad (4.7)$$

où  $n$  est le vecteur unitaire sortant de l'ensemble  $\Omega$ ,  $H$  est la courbure additive (deux fois la courbure moyenne pour l'équation (4.7)) et l'autre terme est la *dérivée normale*

$$\frac{\partial}{\partial n} g(I_\varepsilon) = \nabla g(I_\varepsilon) \cdot n. \quad (4.8)$$

C'est le gradient qui fera bouger les snakes et activera les contours.

## 5. REPRÉSENTATIONS DES OBJETS ET DES CONTOURS

L'originalité des problèmes d'imagerie repose sur le fait que la variable est une courbe, une surface, et plus généralement un objet géométrique auquel il est important de donner une *représentation analytique*. Cette représentation peut être paramétrique ou intrinsèque. En général l'intrinsèque permet de travailler avec des familles d'objets plus généraux et permet des changements topologiques.

### 5.1. Représentations paramétrées des objets

#### 5.1.1. Courbes et surfaces paramétrées

En dimension deux, une *courbe plane* (resp. *surface spatiale*) peut se représenter comme l'image de l'intervalle  $[0, 1]$  par une application injective continue  $\mathcal{C} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  (resp.  $\mathcal{S} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ). On dit que la courbe est *fermée* si elle est injective sur  $[0, 1[$  et que  $\mathcal{C}(0) = \mathcal{C}(1)$ .

En dimension trois, une *surface* peut se représenter comme l'image du carré  $[0, 1] \times [0, 1]$  par une application injective continue  $\mathcal{S} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ . On parlera en général d'une *surface avec bord* (l'image du bord de  $[0, 1] \times [0, 1]$ ). L'image de la sphère unité  $S(0, 1)$  de  $\mathbb{R}^3$  par une application injective continue  $\mathcal{S} : S(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^3$  donne une *surface sans bord*.

On constate facilement que ces représentations limitent la famille des courbes et des surfaces à des *objets homéomorphiques* à  $[0, 1]$  et  $S(0, 1)$ . C'est un cas particulier des familles d'images  $F(\Omega_0)$  d'un ensemble ouvert ou fermé  $\Omega_0$  par une famille de transformations bijectives et bicontinues ou des difféomorphismes  $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ .

### 5.1.2. Paramétrisation par les nœuds, courbes et surfaces de Bézier

On prend maintenant le point de vue qu'une courbe en dimension deux est spécifiée par un certain nombre de points reliés entre eux par une ligne ou une courbe prédéterminée. Par exemple, soient  $M$  points  $\{x_1, \dots, x_M\}$  dans  $\mathbb{R}^2$  et la *courbe linéaire par morceaux* définie par

$$\Gamma \stackrel{\text{déf}}{=} \bigcup_{i=1}^M [x_i, x_{i+1}],$$

où  $[a, b]$  représente le segment entre deux vecteurs  $a$  et  $b$  de  $\mathbb{R}^2$ . On dit que la courbe est fermée si et  $x_{M+1} = x_1$ . On suppose implicitement que  $\Gamma$  n'a pas de point d'intersection. On peut aussi supposer que  $\Gamma$  est la frontière d'un domaine ouvert connexe  $\Omega$ .

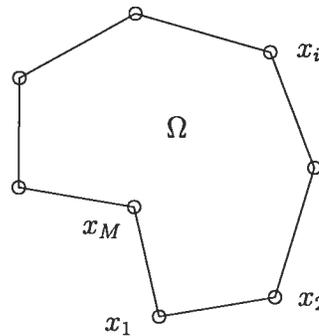


FIG. 2.8.  $\Gamma$  comme frontière d'un domaine  $\Omega$ .

On peut également choisir de faire passer des courbes entre chacun des nœuds en remplaçant les arêtes par des *courbes de Bézier* (voir annexe A). On peut aussi inclure dans la définition la possibilité d'avoir plusieurs lignes ou courbes non-connectées en introduisant une matrice de connectivité. Soit  $x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_M$  une suite de  $M$  points distincts dans  $\mathbb{R}^2$ ,  $A = \{a_{jk}\}$  une *matrice de connectivité*, et  $C_{jk}$  la ligne entre les points  $x_j$  et  $x_k$

$$a_{jk} \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} 1, & \text{si } x_j \text{ et } x_k \text{ sont connectés} \\ 0, & \text{si } x_j \text{ et } x_k \text{ ne sont pas connectés} \end{cases} \quad (5.1)$$

$$C_{jk} \stackrel{\text{déf}}{=} \{sx_j + (1-s)x_k : s \in [0, 1]\}, \quad \text{si } a_{jk} = 1. \quad (5.2)$$

Dans le cas de courbes de Bézier couramment utilisées en aéronautique, on ajoute à chaque paire de nœuds connectés  $x_j$  et  $x_k$  un *nœud de contrôle*  $u_{jk}$  et l'on modifie la définition des ensembles  $C_{jk}$  comme suit

$$C_{jk} \stackrel{\text{déf}}{=} \{s^2x_j + 2s(1-s)u_{jk} + (1-s)^2x_k : s \in [0, 1]\}, \quad \text{si } a_{jk} = 1,$$

où  $s = 0$  correspond au point  $x_k$  et  $s = 1$  au point  $x_j$ .

## 5.2. Représentation des objets par ensembles de niveau d'une fonction

On peut également représenter le contour par un autre genre de "paramétrisation" : les ensembles de niveau d'une fonction. L'approche fut développée en 1988 par Osher et Sethian [101]. On parle de *formulation eulérienne* qui fait référence à une représentation *intrinsèque* du contour. On utilisera aussi la terminologie *front* empruntée de l'optique géométrique pour le contour.

Décrivons tout d'abord les propriétés et caractéristiques des ensembles qui interviennent lors de l'utilisation de cette technique.

**Définition 5.1** ([54], Définition 3.1, p. 22). *Soit  $\Omega$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^N$  tel que  $\partial\Omega \neq \emptyset$ .*

(a)  $\Omega$  est de classe  $C^k$ ,  $0 \leq k \leq \infty$ , si pour chaque  $x \in \partial\Omega$  il existe

(i) un voisinage  $U(x)$  de  $x$ , et

(ii) une transformation bijective  $g_x : U(x) \rightarrow B$  avec les propriétés suivantes :

$$g_x \in C^k(U(x), B), \quad h_x \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} g_x^{-1} \in C^k(B, U(x)), \quad (5.3)$$

$$\text{int } \Omega \cap U(x) = h_x(B_+), \quad (5.4)$$

$$\Gamma_x \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \partial\Omega \cap U(x) = h_x(B_0), \quad B_0 = g_x(\Gamma_x). \quad (5.5)$$

où  $B$  est la boule unitaire ouverte avec

$$B_0 \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \{\zeta \in B : \zeta_N = 0\}; \quad (5.6)$$

$$B_+ \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \{\zeta \in B : \zeta_N > 0\}; \quad (5.7)$$

$$B_- \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \{\zeta \in B : \zeta_N < 0\}, \quad (5.8)$$

pour un point  $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_N)$  de  $\mathbb{R}^N$ .

(b)  $\Omega$  est  $(k, \ell)$ -h\u00f6lderien ou de classe  $C^{k, \ell}$ ,  $0 \leq k$ ,  $0 < \ell \leq 1$ , si les conditions de la partie (a) sont respect\u00e9es avec la transformation  $g_x \in C^{k, \ell}(U(x), B)$  et son inverse  $h_x = g_x^{-1} \in C^{k, \ell}(B, U(x))$ .

Pour ce type d'ensemble, on peut construire une fonction globale sur  $\mathbb{R}^N$  pour caract\u00e9riser l'ensemble  $\Omega$ .

**Th\u00e9or\u00e8me 5.1** ([54], Th\u00e9or\u00e8me 4.1, p. 28). *\u00c9tant donn\u00e9  $k \geq 1$ ,  $0 \leq \ell \leq 1$ , et un ensemble  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^N$  de classe  $C^{k, \ell}$  avec fronti\u00e8re compacte, il existe une fonction lipshitzienne continue  $\varphi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ , telle que*

$$\text{int } \Omega = \{x \in \mathbb{R}^N : \varphi(x) < 0\};$$

$$\text{ext } \Omega = \{x \in \mathbb{R}^N : \varphi(x) > 0\};$$

$$\partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N : \varphi(x) = 0\},$$

et un voisinage  $W$  de  $\partial\Omega$  tel que

$$\varphi \in C^{k, \ell} \text{ et } \nabla \varphi \neq 0 \text{ sur } W \text{ et } n = \frac{\nabla \varphi}{|\nabla \varphi|}, \quad (5.9)$$

où  $n$  est le vecteur unitaire normal sortant de l'ensemble  $\Omega$  sur  $\partial\Omega$ .

**Remarque 5.1.** Lorsque  $\Omega$  est de classe  $C^2$ , on peut obtenir la courbure moyenne sur  $\partial\Omega$  par la relation

$$H \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \operatorname{div}_\Gamma n = \operatorname{div}_\Gamma \left( \frac{\nabla \varphi}{|\nabla \varphi|} \right) = \operatorname{div} \left( \frac{\nabla \varphi}{|\nabla \varphi|} \right)$$

car sur  $\partial\Omega$

$$D \left( \frac{\nabla \varphi}{|\nabla \varphi|} \right) n \cdot n = D \left( \frac{\nabla \varphi}{|\nabla \varphi|} \right) \frac{\nabla \varphi}{|\nabla \varphi|} \cdot \frac{\nabla \varphi}{|\nabla \varphi|} = 0.$$

On doit par contre restreindre la fonction  $\varphi$  pour qu'elle poss\u00e8de une *fronti\u00e8re mince*, c-\u00e0-d. de *mesure nulle*.

**Th\u00e9or\u00e8me 5.2** ([54], Th\u00e9or\u00e8me 4.2, p. 30). Associons avec la fonction continue  $\varphi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ , l'ensemble

$$\Omega \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \{x \in \mathbb{R}^N : \varphi(x) < 0\}. \quad (5.10)$$

Supposons que

$$\varphi^{-1}\{0\} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \{x \in \mathbb{R}^N : \varphi(x) = 0\} \neq \emptyset \quad (5.11)$$

et qu'il existe un voisinage  $V$  de  $\varphi^{-1}(0)$  tel que  $\varphi \in C^{k,\ell}(V)$  pour  $k \geq 1$  et  $0 \leq \ell \leq 1$  et que le gradient  $\nabla \varphi \neq 0$  sur  $\varphi^{-1}\{0\}$ . Alors  $\Omega$  est un ensemble de classe  $C^{k,\ell}$ , et

$$\operatorname{int} \Omega = \Omega \quad \text{et} \quad \partial\Omega = \varphi^{-1}\{0\}. \quad (5.12)$$

**Remarque 5.2.** On remarque que si  $\varphi$  n'est pas au moins  $C^1$  et/ou que  $\nabla \varphi = 0$  sur  $\partial\Omega$ , on est dans l'incertitude sur la nature et la r\u00e9gularit\u00e9 de la fronti\u00e8re  $\partial\Omega$ . En effet, on peut se retrouver avec une fronti\u00e8re \u00e9paisse, c-\u00e0-d.  $\varphi^{-1}\{0\}$  de mesure non-nulle.

### 5.3. Repr\u00e9sentations intrins\u00e8ques des objets

Dans l'approche par ensembles de niveau, le choix de la fonction  $\varphi$  n'est pas unique. \u00c0 tout ensemble  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^N$  est associ\u00e9e une classe d'\u00e9quivalence  $[\varphi]_\Omega$  de fonctions  $\varphi$  d\u00e9terminant  $\Omega$ . On verra plus loin que dans cette classe il y a des fonctions plus *canoniques* que d'autres.

Dans ce paragraphe, on d\u00e9veloppe l'approche qui consiste \u00e0 identifier une classe d'\u00e9quivalence d'ensembles avec une fonction param\u00e9tr\u00e9e par ces ensembles.

On examine les cas de la fonction distance, de la fonction distance orientée et de la fonction caractéristique.

### 5.3.1. Fonction distance

Étant donné un sous-ensemble  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^N$ , la *fonction distance* de  $x$  à  $\Omega$  est définie par

$$d_\Omega(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} \inf_{y \in \Omega} |y - x|, & \Omega \neq \emptyset, \\ +\infty, & \Omega = \emptyset. \end{cases} \quad (5.13)$$

Pour  $\Omega \neq \emptyset$ , la classe d'équivalence correspondante à  $d_\Omega$  est

$$[\Omega]_d \stackrel{\text{déf}}{=} \{\Omega' : \overline{\Omega'} = \overline{\Omega}\}. \quad (5.14)$$

En général

$$d_{\overline{\Omega}} = d_\Omega \leq d_{\text{int } \Omega}.$$

La fonction distance  $d_\Omega$  ne donne pas une description adéquate de sa frontière  $\Gamma$ . De plus, même pour un ensemble de frontière très régulière son gradient est discontinu à la frontière  $\Gamma$  ce qui empêche la récolte d'information sur la régularité de  $\Omega$  à partir de la régularité de  $d_\Omega$  dans un voisinage de  $\Gamma$ . Pour contourner le problème, il est naturel d'ajouter la négative de la fonction distance au complément  $\mathbb{C}\Omega$ , ce qui élimine la discontinuité du gradient à la frontière dans le cas de frontières régulières.

### 5.3.2. Fonction distance orientée

Étant donné un sous-ensemble  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^N$ , la *fonction distance orientée* de  $x$  à  $\Omega$  est définie par

$$b_\Omega(x) \stackrel{\text{déf}}{=} d_\Omega(x) - d_{\mathbb{C}\Omega}(x) = \begin{cases} d_\Omega(x) = d_\Gamma(x), & x \in \text{int } \mathbb{C}\Omega, \\ 0, & x \in \Gamma, \\ -d_{\mathbb{C}\Omega}(x) = -d_\Gamma(x), & x \in \text{int } \Omega, \end{cases} \quad (5.15)$$

où  $d_{\Omega}(x)$  est la fonction distance d'un point  $x$  au complément  $\mathbb{C}\Omega$ . La classe d'équivalence correspondante à  $b_{\Omega}$  (pour  $\Omega \neq \emptyset$ ) est

$$[\Omega]_b \stackrel{\text{déf}}{=} \{\Omega' : \overline{\Omega'} = \overline{\Omega} \text{ et } \Gamma' = \Gamma\}. \quad (5.16)$$

En général

$$b_{\overline{\Omega}} \leq b_{\Omega} \leq b_{\text{int } \Omega}.$$

Pour les *convexes*, on a

$$b_{\overline{\Omega}} = b_{\Omega},$$

alors que pour les ensembles vérifiant la *propriété du segment uniforme*<sup>8</sup>, on a

$$b_{\overline{\Omega}} = b_{\Omega} = b_{\text{int } \Omega}.$$

Il est important de noter que, dans la littérature, la définition de la *distance signée* est restrictive et difficile à cerner. En effet, elle est définie pour une sous-variété régulière  $M$  de  $\mathbb{R}^N$  par

$$d_{M,\Omega}(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} -d_M(x), & \text{si } x \in \text{int } \Omega; \\ 0, & \text{si } x \in M; \\ +d_M(x), & \text{si } x \in \mathbb{C}\overline{\Omega} \end{cases} \quad (5.17)$$

pour un ensemble  $\Omega$  tel que  $\partial\Omega = M$ . Dans certaines situations, la définition est ambiguë puisque lorsqu'une sous-variété  $M$  a été spécifiée, il y a plusieurs choix d'ensembles ouverts  $\Omega$  ayant la *même frontière*  $\Gamma = M$  mais une fonction  $b_{\Omega}$  *complètement différente* (Delfour et Zolésio [56]) comme le montre l'exemple suivant.

**Exemple 5.1.** Pour la sphère unité  $M = S(0, 1)$  de centre 0 dans  $\mathbb{R}^N$ , il y a au moins deux choix d'ensembles  $\Omega$  tels que  $\partial\Omega = M$  :

$$\Omega_1 = B(0, 1) \quad \text{et} \quad \Omega_2 = \mathbb{R}^N \setminus B(0, 1),$$

<sup>8</sup> $\Omega$  satisfait la *propriété du segment uniforme* si

$$\exists r > 0, \exists \lambda > 0 \text{ tels que } \forall x \in \Gamma, \exists d \in \mathbb{R}^N, |d| = 1,$$

tels que pour tout  $y \in B(x, r) \cap \overline{\Omega}$ ,  $(y, y + \lambda d) \subset \text{int } \Omega$ .

où  $B(0, 1)$  est la boule ouverte unité de rayon 1 centrée en 0. Il n'y a pas unicité de l'ensemble  $\Omega$  et

$$b_{\Omega_1} \neq b_{\Omega_2}$$

malgré le fait que  $\partial\Omega_1 = \partial\Omega_2 = M$ . De plus,  $b_{\Omega_1}$  est  $C^\infty$  dans un voisinage de  $M$ , alors que  $\nabla b_{\Omega_2}$  est discontinu le long de  $M$ .

**Théorème 5.3.** Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  tel que  $\Gamma \neq \emptyset$ .

$$b_\Omega = d_\Omega \geq 0 \iff \text{int } \Omega = \emptyset.$$

En particulier si  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  et  $\dim \Omega < N$ ,  $\text{int } \Omega = \emptyset$  et  $b_\Omega = d_\Omega \geq 0$ .

**Démonstration.** Si  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  et  $\Gamma \neq \emptyset$  sont tels que

$$b_\Omega(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N,$$

alors <sup>9</sup>

$$\begin{aligned} 0 = b_\Omega^-(x) &= d_{\mathbb{C}\Omega}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \\ \Rightarrow \overline{\mathbb{C}\Omega} &= \mathbb{R}^N \Rightarrow \Gamma = \overline{\Omega} \cap \overline{\mathbb{C}\Omega} = \overline{\Omega} \text{ et } \text{int } \Omega = \mathbb{C}\overline{\mathbb{C}\Omega} = \emptyset. \end{aligned}$$

Réciproquement, si  $\text{int } \Omega = \emptyset$

$$\emptyset = \text{int } \Omega = \mathbb{C}\overline{\mathbb{C}\Omega} \Rightarrow \overline{\mathbb{C}\Omega} = \mathbb{R}^N \Rightarrow \overline{\Omega} = \Gamma \Rightarrow d_{\mathbb{C}\Omega} = 0,$$

d'où

$$b_\Omega(x) = d_\Omega(x) - d_{\mathbb{C}\Omega}(x) = d_\Omega(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

□

Enfin, la fonction  $b_\Omega$  est lipschitzienne continue de constante 1, son gradient  $\nabla b_\Omega$  existe et  $|\nabla b_\Omega| \leq 1$  presque partout dans  $\mathbb{R}^N$ . Donc  $b_\Omega \in W_{\text{loc}}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$  pour tout  $p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ . On remarque aussi que  $\nabla b_\Omega$  coïncide avec la normale extérieure à la frontière (lorsqu'elle existe).

On veut maintenant étudier la relation entre le gradient de  $b_\Omega$  et la projection d'un point sur la frontière  $\Gamma$ . Les points de  $\mathbb{R}^N$  où le gradient de  $b_\Omega$  n'existe pas se

<sup>9</sup>On a  $b_\Omega = b_\Omega^+ - b_\Omega^-$  avec  $b_\Omega^+ = d_\Omega$ ,  $b_\Omega^- = d_{\mathbb{C}\Omega}$ , et  $|b_\Omega| = d_\Gamma$ . De plus  $\chi_{\text{int } \Omega} = |\nabla d_{\mathbb{C}\Omega}|$ ,  $\chi_{\text{int } \mathbb{C}\Omega} = |\nabla d_\Omega|$ , et  $\chi_\Gamma = 1 - |\nabla d_\Gamma|$  presque partout dans  $\mathbb{R}^N$ .

divisent en deux ensembles : un pour les points de  $\mathbb{R}^N$  appartenant à la frontière  $\Gamma$  et l'autre pour les points de  $\mathbb{R}^N$  à l'extérieur de  $\Gamma$ . On relie également l'ensemble des singularités du gradient de  $b_\Omega$  ainsi que les notions de *squelette* ("skeleton") et d'ensemble de fissures ("set of cracks") au gradient de  $b_\Omega$ .

**Définition 5.2** ([54], Définition 3.1, p. 213). *Soit  $\Omega$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^N$  tel que  $\partial\Omega \neq \emptyset$ .*

(i) *L'ensemble des projections de  $x$  sur  $\partial\Omega$  est défini par*

$$\Pi_{\partial\Omega}(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \{z \in \partial\Omega : |z - x| = d_{\partial\Omega}(x) = |b_\Omega(x)|\}. \quad (5.18)$$

*Les éléments de  $\Pi_{\partial\Omega}(x)$  sont appelés les projections sur  $\partial\Omega$  et, lorsque la projection de  $x$  sur  $\partial\Omega$  est unique, elle est notée par  $p_{\partial\Omega}(x)$ .*

(ii) *L'ensemble des points  $x \in \mathbb{R}^N$  pour lesquels la projection sur  $\partial\Omega$  n'est pas unique,*

$$\text{Sk}(\Omega) \stackrel{\text{déf}}{=} \{x \in \mathbb{R}^N : \Pi_{\partial\Omega}(x) \text{ n'est pas un singleton}\}, \quad (5.19)$$

*est appelé le squelette de  $\Omega$ . Puisque  $\Pi_{\partial\Omega}(x)$  est un singleton pour tout  $x \in \partial\Omega$ , alors*

$$\text{Sk}(\Omega) \subset \mathbb{R}^N \setminus \partial\Omega.$$

(iii) *L'ensemble des fissures est défini par*

$$C(\Omega) \stackrel{\text{déf}}{=} \{x \in \mathbb{R}^N : \nabla b_\Omega^2(x) \text{ existe mais } \nabla b_\Omega(x) \text{ n'existe pas}\}. \quad (5.20)$$

**Remarque 5.3.** *La terminologie fissure ("crack") est utilisée dans un sens assez large et  $C(\Omega)$  peut contenir des sous-ensembles de codimension arbitraire (voir figure 2.2). En dimension deux, les coins ("corners") le long d'une frontière régulière par morceaux appartiennent à  $C(\Omega)$ .*

**Remarque 5.4.** *L'ensemble des singularités,  $\text{Sing}(\nabla b_\Omega)$ , de  $\nabla b_\Omega$  a une mesure de Lebesgue de dimension  $N$  nulle puisque  $b_\Omega$  est lipschitzienne continue et donc différentiable presque partout.*

Le théorème suivant nous donne les conditions de différentiabilité de la fonction distance orientée d'un sous-ensemble  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^N$ , son comportement sur la

frontière  $\Gamma$  ainsi que l'expression de la projection  $p_{\partial\Omega}$  sur la frontière en terme de  $\nabla b_{\Omega}^2$ .

**Théorème 5.4** ([56], Théorème 2.2). *Soit  $\Omega$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^N$  avec  $\Gamma = \partial\Omega \neq \emptyset$ .*

(i) *Pour tout  $x \in \Gamma$ ,*

$$\nabla b_{\Omega}^2(x) \text{ existe et } \nabla b_{\Omega}^2(x) = 0;$$

*pour tout  $x \notin \Gamma$ ,*

$$\nabla b_{\Omega}^2(x) \text{ existe} \iff \nabla b_{\Omega}(x) \text{ existe.}$$

*Donc  $\nabla b_{\Omega}(x)$  existe si et seulement si  $x \notin \text{Sk}(\Omega) \cup C(\Omega)$ . De plus,*

$$\boxed{\text{Sk}(\Omega) \stackrel{\text{déf}}{=} \{x \in \mathbb{R}^N : \nabla b_{\Omega}^2(x) \text{ n'existe pas}\}}, \quad (5.21)$$

*$\text{Sk}(\Omega) \subset \mathbb{R}^N \setminus \Gamma$  et  $C(\Omega) \subset \Gamma$  sont de  $m_N$ -mesure nulle.*

(ii) *La projection  $p_{\Gamma}(x)$  d'un point  $x \notin \text{Sk}(\Omega)$  sur la frontière  $\Gamma$  est donnée par*

$$\boxed{p_{\Gamma}(x) = x - \frac{1}{2} \nabla b_{\Omega}^2(x) = x - b_{\Omega}(x) \nabla b_{\Omega}(x)}. \quad (5.22)$$

(iii) *La semi-dérivée directionnelle au sens de Hadamard définie par*

$$d_H f(x; v) \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{t \searrow 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}, \quad (5.23)$$

*existe toujours pour  $b_{\Omega}^2$ , et*

$$\forall v \in \mathbb{R}^N, \quad d_H b_{\Omega}^2(x; v) = 2 \min_{z \in \Pi_{\Gamma}(x)} (x - z) \cdot v. \quad (5.24)$$

(iv) *Pour tout  $x \notin \Gamma$ , la semi-dérivée directionnelle au sens de Hadamard de  $b_{\Omega}$  existe et*

$$\forall v \in \mathbb{R}^N, \quad d_H b_{\Omega}(x; v) = \frac{1}{b_{\Omega}(x)} \min_{z \in \Pi_{\Gamma}(x)} (x - z) \cdot v. \quad (5.25)$$

*Pour tout  $x \in \Gamma$ ,  $d_H b_{\Omega}(x; v)$  existe si et seulement si*

$$\forall v \in \mathbb{R}^N, \quad \lim_{t \searrow 0} \frac{b_{\Omega}(x + tv)}{t} \text{ existe.} \quad (5.26)$$

### 5.3.3. Fonction caractéristique

La dernière représentation est moins intéressante en imagerie, mais on la rencontre fréquemment en mécanique des fluides et dans les problèmes de frontière libre. Elle donne un exemple d'une fonction de nature très différente paramétrée par un ensemble. On associe à un sous-ensemble  $\Omega$  mesurable au sens de Lebesgue sa *fonction caractéristique*

$$\chi_{\Omega}(x) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Omega; \\ 0 & \text{si } x \notin \Omega. \end{cases} \quad (5.27)$$

On identifie alors la fonction caractéristique de  $\Omega$  à la classe d'équivalence  $[\Omega]_X$  de sous-ensembles de  $\mathbb{R}^N$  presque partout égaux à  $\Omega$ . Considérons la famille de fonctions caractéristiques correspondante

$$X(\mathbb{R}^N) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \{\chi_{\Omega} : \forall \Omega \text{ mesurable dans } \mathbb{R}^N\}. \quad (5.28)$$

On remarque que  $X(\mathbb{R}^N) \subset L^{\infty}(\mathbb{R}^N)$  et pour  $p \geq 1$ ,  $X(\mathbb{R}^N) \subset L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ , où  $L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$  est l'ensemble de toutes les fonctions mesurables au sens de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^N$  qui appartient à  $L^p(D)$  pour tout sous-ensemble borné mesurable  $D$  de  $\mathbb{R}^N$ . On peut aussi associer à un ensemble mesurable non-vide  $D$  de  $\mathbb{R}^N$ , la famille

$$X(D) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \{\chi_{\Omega} : \forall \Omega \text{ mesurable dans } D\}. \quad (5.29)$$

Ceci induit une structure d'espace métrique complet sur  $X(D)$  via l'injection

$$[\Omega]_X \mapsto \chi_{\Omega} \in X(D) \subset L^p(D) \text{ (resp., } X(\mathbb{R}^N) \subset L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)\text{)}.$$

## 6. FONCTION OBJECTIF DE MUMFORD ET SHAH

La convolution n'est qu'un moyen de régulariser une image  $I \in L^2(D)$  définie dans un cadre  $D$ . On pourrait aussi, par exemple, utiliser la *régularisation de Tikhonov* : pour  $\varepsilon > 0$  donné, on cherche la fonction  $I_{\varepsilon} \in H^1(D)$  qui minimise la fonction

$$E(\varphi) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \frac{1}{2} \int_D \varepsilon |\nabla \varphi|^2 + |\varphi - I|^2 dx$$

ou selon le degré de régularité désiré on peut augmenter l'ordre du terme en  $\varepsilon$ . La fonction minimisante est solution de l'équation variationnelle suivante

$$\boxed{\forall \varphi \in H^1(D), \int_D \varepsilon \nabla I_\varepsilon \cdot \nabla \varphi + (I_\varepsilon - I) \varphi \, dx = 0.} \quad (6.1)$$

En fait, on peut faire beaucoup mieux et combiner la régularisation et la détection. En 1985 Mumford et Shah introduisent une nouvelle fonction objectif différente de celles définies le long des contours et qui réalise simultanément la régularisation de l'image et la détection des contours. Cette fonction objectif a reçu beaucoup d'attention auprès de la communauté mathématique.

On se donne une fonction objectif associée à la fonction  $I$  des niveaux de gris d'une image dans un cadre fixe ouvert et borné  $D$ , un sous-ensemble ouvert  $\Omega$  de  $D$  tel que sa frontière correspondra aux contours des objets contenus dans l'image (voir figure 2.1).

**Définition 6.1.** *Soit  $D$  un sous-ensemble ouvert et borné de  $\mathbb{R}^N$  tel que sa frontière soit lipschitzienne. Alors,*

- (i) *Une image contenue dans le cadre  $D$  est définie par une fonction  $I \in L^2(D)$ .*
- (ii) *On dit que  $\{\Omega_j\}_{j \in J}$  est une partition ouverte de  $D$  si  $\{\Omega_j\}_{j \in J}$  est une famille de sous-ensembles ouverts connexes et disjoints de  $D$  telle que*

$$m_N(\cup_{j \in J} \Omega_j) = m_N(D) \quad \text{et} \quad m_N(\partial \cup_{j \in J} \Omega_j) = 0.$$

*On note par  $\mathcal{P}(D)$  la famille de toutes les partitions ouvertes de  $D$ .*

On se donne une partition ouverte  $\{\Omega_j\}_{j \in J}$  de  $D$  associée à chaque  $j \in J$  et une suite de fonctions  $\varphi_j \in H^1(\Omega_j)$ . L'idée de Mumford et Shah [96, 97] est de trouver une partition ouverte  $P = \{\Omega_j\}_{j \in J}$  dans  $\mathcal{P}(D)$ , solution du problème de minimisation

$$\inf_{P \in \mathcal{P}(D)} \sum_{j \in J} \inf_{\varphi_j \in H^1(\Omega_j)} \int_{\Omega_j} \varepsilon |\nabla \varphi_j|^2 + |\varphi_j - I|^2 \, dx \quad (6.2)$$

pour une constante fixe  $\varepsilon > 0$ .

**Remarque 6.1.** *Notons que sans la condition  $m_N(\cup_{j \in J} \Omega_j) = m_N(D)$ , l'ensemble vide est une solution au problème de minimisation.*

La démonstration de l'existence nécessite une famille beaucoup plus spécifique de partitions ouvertes ou l'addition d'un *terme de pénalisation* sur la "longueur" des interfaces entre les  $\Omega_j$  de la partition. Par exemple, on pourrait utiliser la *mesure de Hausdorff* de dimension un dans le plan ou de dimension  $N-1$  dans  $\mathbb{R}^N$ . On pourrait aussi utiliser le périmètre de De Giorgi. Le problème de minimisation devient alors

$$\inf_{P \in \mathcal{P}(D)} \sum_{j \in J} \inf_{\varphi_j \in H^1(\Omega_j)} \int_{\Omega_j} \varepsilon |\nabla \varphi_j|^2 + |\varphi_j - I|^2 dx + cH_{N-1}(\partial \cup_{j \in J} \Omega_j) \quad (6.3)$$

pour une constante  $c > 0$ .

Pour bien comprendre la nature du problème d'existence, on rappelle d'abord la définition de la *mesure de Hausdorff de dimension  $d$*  et la notion d'*ensembles de Caccioppoli* ou d'*ensembles à périmètre fini*.

**Définition 6.2** ([54], Définition 3.1, p. 26). *Pour tout sous-ensemble  $S$  de  $\mathbb{R}^N$ , le diamètre de  $S$  est défini par*

$$\text{diam}(S) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \sup\{|x - y| : x, y \in S\}.$$

Soit  $\alpha_d$  la mesure de Lebesgue de la boule unit\u00e9 dans  $\mathbb{R}^d$ . La mesure de Hausdorff de dimension  $d$ ,  $H_d(A)$  d'un sous-ensemble  $A$  de  $\mathbb{R}^N$  est d\u00e9finie comme suit. Pour  $\delta$  petit, il s'agit de recouvrir efficacement  $A$  par une suite d\u00e9nombrable d'ensembles  $S_j$  tels que  $\text{diam}(S_j) \leq \delta$ , puis d'additionner tous les termes

$$\alpha_d \left( \frac{\text{diam}(S_j)}{2} \right)^d,$$

et de prendre la limite lorsque  $\delta \rightarrow 0$  :

$$H_d(A) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \lim_{\delta \searrow 0} \inf_{\substack{A \subset \cup S_j \\ \text{diam}(S_j) \leq \delta}} \sum_j \alpha_d \left( \frac{\text{diam}(S_j)}{2} \right)^d, \quad (6.4)$$

o\u00f9 l'infimum est pris sur tout le recouvrement  $\{S_j\}$  de  $A$  avec  $\text{diam}(S_j) \leq \delta$ .

**D\u00e9finition 6.3** ([54], D\u00e9finition 5.2, pp. 127, 128). *Soit  $\Omega$  une partie mesurable de  $\mathbb{R}^N$ .*

- (i) \u00c9tant donn\u00e9 un ensemble ouvert  $D$  de  $\mathbb{R}^N$ ,  $\Omega$  est \u00e0 p\u00e9rim\u00e8tre fini par rapport \u00e0  $D$  si  $\chi_\Omega \in BV(D)$ , l'espace des fonctions \u00e0 variation born\u00e9e

défini par

$$BV(D) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \{f \in L^1(D) : \nabla f \in M^1(D)^N\}$$

muni de la norme

$$\|f\|_{BV(D)} = \|f\|_{L^1(D)} + \|\nabla f\|_{M^1(D)^N}$$

où  $M^1(D)^N$  est l'espace des mesures (vectorielles) born\u00e9es et  $\nabla f$  est calcul\u00e9 au sens des distributions. Le p\u00e9rim\u00e8tre not\u00e9 par  $P_D(\Omega)$  est donn\u00e9 par la norme  $M^1$  du gradient

$$P_D(\Omega) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \|\nabla \chi_\Omega\|_{M^1(D)^N}. \quad (6.5)$$

La famille <sup>10</sup> de ces fonctions caract\u00e9ristiques est not\u00e9e par

$$BX(D) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \{\chi_\Omega \in X(D) : \chi_\Omega \in BV(D)\}.$$

(ii)  $\Omega$  est \u00e0 p\u00e9rim\u00e8tre localement fini si pour tout ouvert born\u00e9  $D$  de  $\mathbb{R}^N$ ,  $\chi_\Omega \in BV(D)$ , c'est-\u00e0-dire  $\chi_\Omega \in BV_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ .

(iii)  $\Omega$  est \u00e0 p\u00e9rim\u00e8tre fini de Caccioppoli si  $\chi_\Omega \in BV(\mathbb{R}^N)$ .

**Remarque 6.2.** L'espace des fonctions \u00e0 variation born\u00e9e  $BV(D)$  est un espace de Banach.

La mesure de Hausdorff n'a cependant pas la propri\u00e9t\u00e9 de semi-continuit\u00e9 inf\u00e9rieure qui permettrait de conclure \u00e0 l'existence d'une solution. D'autre part, le p\u00e9rim\u00e8tre de De Giorgi se r\u00e9duit au p\u00e9rim\u00e8tre du cadre  $D$  puisque la fonction caract\u00e9ristique de l'union  $\cup_{j \in J} \Omega_j$  est presque partout la fonction caract\u00e9ristique du cadre  $D$ .

Comme on le voit, le choix de la relaxation de la mesure de Hausdorff  $H_{N-1}$  de dimension  $(N-1)$ , est crucial. Il y a diff\u00e9rentes fa\u00e7ons de proc\u00e9der pour montrer l'existence de solutions. L'une d'entre elles est d'utiliser le p\u00e9rim\u00e8tre de densit\u00e9 de Bucur et Zol\u00e9sio [25].

<sup>10</sup>On rappelle la d\u00e9finition de la famille

$$X(D) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \{\chi_\Omega : \forall \Omega \text{ mesurable dans } D\},$$

donn\u00e9e par l'\u00e9quation (5.29).

# Chapitre 3

---

## ÉVOLUTION DES CONTOURS ET IMAGES DÉFORMABLES

### 1. ORIENTATION

Ce chapitre reprend les exemples de fonctions objectifs définies le long des contours des objets d'une image qui mènent à la recherche de géodésiques généralisées. L'application d'une simple méthode de descente du gradient peut être assimilée à la recherche de la solution stationnaire d'une équation d'évolution gouvernée par le gradient de la fonction objectif. C'est la base des différentes méthodes caractérisées par le choix de la représentation des contours. Les snakes correspondent à des courbes paramétrées par l'intervalle  $[0, 1]$  et les contours actifs aux ensembles de niveau d'une fonction.

La section 2 fait un tour d'horizon des snakes, des contours actifs et des ensembles de niveau. La section 3 rappelle la méthode des vitesses pour calculer la semi-dérivée d'une fonction objectif par rapport à un domaine géométrique. On utilise cette méthode pour obtenir l'équation d'évolution correspondante pour différentes représentations des contours : les ensembles de niveau dans la section 4, la fonction caractéristique en section 5, la fonction distance orientée en section 6, et des courbes paramétrées par des nœuds en section 7. Pour cette dernière représentation, l'équation d'évolution associée mène à un système fini d'équations différentielles plutôt qu'à des équations aux dérivées partielles comme dans les autres cas.

## 2. SNAKES, CONTOURS ACTIFS ET ENSEMBLES DE NIVEAU

La détection des contours ou frontières des objets contenus dans une image utilisant une fonction objectif définie sur le contour a été largement étudiée par de nombreux chercheurs au cours des 20 dernières années. Par exemple, Blat et Morel [18] ont travaillé sur la relation entre des problèmes elliptiques en segmentation d'image et la théorie des fractures en 1987, Kass, Witkin, et Terzopoulos [75] sur les modèles à contour actif, Osher et Sethian [101] sur la propagation de fronts et Terzopoulos, Witkin et Kass [120] sur les contraintes liées aux modèles déformables en 1988, Cohen [37] pour les modèles à contour actif et les ballons en 1991, Cohen et Cohen [41] sur des méthodes aux éléments finis appliquées aux modèles de contour actif et ballons et Caselles, Catté, Coll et Dibos [30] sur un modèle géométrique pour les contours actifs en 1993, Malladi, Sethian et Vemuri [87] sur le modelage de forme avec propagation de fronts en 1995, Malladi, Kimmel, Adalsteinsson, Sapiro, Caselles, et Sethian [85] et McInerney et Terzopoulos [91] sur des approches géométriques en segmentation d'images médicales en 1996, Caselles, Kimmel et Sapiro [32] sur les contours actifs géodésiques en 1997, Aubert et Blanc-Féraud [14] sur la relation d'équivalence entre les snakes et les contours actifs géodésiques en 1999, et Osher et Paragios [100] qui ont produit une synthèse complète sur les méthodes par ensembles de niveau en imagerie en 2003.

En dimension deux, la définition d'une fonction objectif de densité  $g$  sur un contour revient à un problème de recherche d'une courbe de longueur minimum ou *géodésique généralisée* pour la métrique riemannienne  $g dl$  (pondérée par la densité  $g$ ). En effet, lorsque  $g = 1$  la fonction objectif se réduit à la longueur du contour et sa minimisation à la recherche d'une courbe de longueur minimum ou *géodésique*. Dans le cas général, on peut retenir cette interprétation en considérant que la fonction  $g$  sous l'intégrale de contour redéfinit la métrique  $g dl$  de l'espace et donc les géodésiques. On explique le principe de la géodésique ou *courbe de distance minimale* ("geodesics or minimal distance curves") en section 4 du chapitre 2. Cette formulation se généralise facilement en dimension trois à des courbes ou à des surfaces.

Dans l'approche des géodésiques généralisées, où le contour est représenté par une courbe régulière paramétrée, l'utilisation d'une simple méthode de descente par gradient d'une fonction objectif (ou fonction d'énergie) définie sur les contours, génère une suite de courbes ou de géodésiques paramétrées. Ces courbes qui semblent se tordre au cours des itérations ont été appelées *serpents* (snakes) ou *contours actifs* (active contours) par Kass *et al.* [75] (cf. section 2.1). On est ainsi amené à introduire une dynamique et un temps. À la limite, la méthode de descente du gradient revient à considérer une équation en temps évoluant sous l'effet de la semi-dérivée directionnelle de la fonction objectif par rapport à un champ de vitesses (cf. section 3) dans une direction opposée au gradient. Étant donnée une courbe (ou surface) initiale au temps zéro, le contour actif est alors donné par un *flot géométrique* qui agit sous l'effet du gradient de la fonction objectif et qui, en général, contient un terme de courbure moyenne (cf. section 2.2). Dans le cas où la fonction objectif se réduit à l'intégrale de un le long de la courbe, on recherche une courbe de longueur minimum ou géodésique et on obtient l'*équation du mouvement par courbure moyenne* (cf. section 2.3).

D'abord représentés par des courbes paramétrées, les contours en dimension deux sont plus tard représentés par les *ensembles de niveau* de Osher et Sethian [101] en 1988, par Caselles *et al.* [30] en 1993 et par Malladi *et al.* [87] en 1995. Dans le cas de l'évolution d'un *ballon* par exemple, on peut spécifier le contour de celui-ci (voir Cohen et Cohen [41] en 1993 et L. D. Cohen [37] en 1995) par les points du niveau zéro d'une fonction qui dépend du temps. Si le champ de vitesses qui déplace les points est spécifié par la direction opposée au gradient, on obtient alors une *équation d'évolution des ensembles de niveau* ("level set equation") pour cette famille de fonctions. Cette approche permet, en principe, les changements de topologie comme la fusion de deux contours lorsqu'il y a présence de plus d'un objet dans l'image. Ce qui est impraticable avec la méthode classique des snakes. C'est cette propriété qui a suscité un grand intérêt chez les chercheurs dans des domaines comme la reconnaissance, la visualisation, le modelage de formes, etc. Enfin, ces méthodes introduisent une représentation intrinsèque des objets puisque ces derniers sont localisés par les ensembles de niveau d'une fonction

particulière (e.g. la fonction caractéristique ou la fonction distance orientée). On obtient alors une *équation d'évolution de la fonction caractéristique* (cf. section 5) ou une *équation d'évolution de la fonction distance orientée* (cf. section 6).

## 2.1. Contour actif géodésique

Caselles, Kimmel et Sapiro [32] introduisent la notion de *contour actif géodésique* en étudiant les relations entre les modèles de Caselles *et al.* [30] et de Malladi *et al.* [87]. En effet, l'approche par les snakes (cf. section 4 du chapitre 2) revient à trouver la courbe géodésique contenue dans un *espace riemannien* dont la métrique est directement liée à l'image. La frontière à détecter est alors considérée comme étant la *distance minimale entre deux points* donnés de l'image selon cette *métrique riemannienne*.

Étant donnée une représentation par ensembles de niveau du contour déformable, Caselles *et al.* [32] montrent que trouver la courbe géodésique via un flot géométrique est similaire aux approches géométriques mentionnées plus haut [30, 87]. La méthode des contours actifs géodésiques est également introduite et testée pour la détection d'objets en dimension trois dans [30, 32].

Rappelons tout d'abord la structure (section 4 du chapitre 2) de la fonction objectif utilisée par Caselles *et al.* [30, 32] en dimension deux. Étant donné un cadre  $D = ]0, a[ \times ]0, b[$  et une image  $I : D \rightarrow \mathbb{R}$ , le problème consiste à trouver une courbe  $\mathcal{C}$  dans  $\mathbb{R}^2$  qui minimise la fonction objectif

$$E(\mathcal{C}) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\mathcal{C}} g_I dl, \quad g_I \stackrel{\text{déf}}{=} g(\nabla I). \quad (2.1)$$

Si on fait l'hypothèse que  $\mathcal{C}$  est une courbe fermée pour laquelle il existe un domaine régulier  $\Omega$  de frontière  $\Gamma$  tel que  $\Gamma = \mathcal{C}$ , alors la semi-dérivée directionnelle  $dE(\Omega; V)$  par rapport à un champ de vitesses  $V$  de l'équation (2.1) est donnée par (4.7) du chapitre 2

$$dE(\Omega; V) = \int_{\Gamma} [Hg_I + (\nabla g_I \cdot n)] n \cdot V d\Gamma, \quad (2.2)$$

avec  $n$  la normale unitaire extérieure à  $\Omega$  et  $H \stackrel{\text{déf}}{=} \text{div}_{\Gamma}(n)$  la courbure moyenne.

Si on applique une *méthode de descente du gradient* pour minimiser (2.1) à partir d'une courbe initiale  $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}$ , le processus itératif est équivalent à suivre

l'évolution  $\mathcal{C}_t$  (frontière d'un domaine régulier  $\Omega_t$ ) de la courbe fermée  $\mathcal{C}$  à l'aide de l'équation

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{C}_t}{\partial t} = - [H_t g_I + (\nabla g_I \cdot n_t)] n_t \text{ sur } \mathcal{C}_t,} \quad (2.3)$$

où  $H_t$  est la courbure moyenne au sens euclidien,  $n_t$  est la normale unitaire extérieure, et le côté droit de l'équation est la dérivée de la minimisation (2.1) (pour détails voir annexe B [32]). L'équation (2.3) est appelée le *flot géodésique* et est issue du calcul de la minimisation (2.1). Lorsque  $g_I = 1$  on obtient le *mouvement par courbure moyenne* :

$$\frac{\partial \mathcal{C}_t}{\partial t} = -H_t n_t \text{ sur } \mathcal{C}_t. \quad (2.4)$$

## 2.2. Flot géodésique représenté par les ensembles de niveau d'une fonction

Il s'agit de représenter le flot géodésique (2.3) au temps  $t$  et les contours  $\mathcal{C}_t$  par les ensembles de niveau de la fonction  $\varphi_t(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \varphi(t, x)$  pour une fonction  $\varphi : [0, \tau] \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  en posant

$$\mathcal{C}_t = \{x \in \mathbb{R}^N : \varphi(t, x) = 0\} = \varphi_t^{-1}\{0\}.$$

Puisque la représentation de  $\mathcal{C}_t$ , maintenant vue comme l'ensemble de niveau zéro de  $\varphi_t$ , ne requiert pas de paramétrisation dans l'espace, elle est dite *intrinsèque*. Introduite par Osher et Sethian [101] en 1988, la technique de représentation par ensembles de niveau d'une fonction est, en principe, *indépendante* des changements de topologie puisque différentes topologies de l'ensemble de niveau zéro n'impliquent pas différentes topologies de la fonction  $\varphi$ . Selon Caselles, Kimmel et Sapiro [32] (annexe C), il est facile de vérifier que si la courbe planaire évolue selon l'équation différentielle

$$\frac{\partial \mathcal{C}_t}{\partial t} = v(t) n_t \quad (2.5)$$

avec une fonction scalaire  $v(t)$ , alors la fonction  $\varphi_t$  devrait évoluer (se déformer) selon l'équation différentielle

$$\boxed{\frac{\partial \varphi_t}{\partial t} + v(t) |\nabla \varphi_t| = 0 \text{ sur } \mathcal{C}_t,} \quad (2.6)$$

où  $v(t)$  est évaluée sur l'ensemble de niveau zéro de  $\varphi_t$ . Selon les auteurs, les changements de topologies de  $\mathcal{C}_t$  à partir d'un contour initial  $\mathcal{C}$  sont bien traités et lorsque les méthodes numériques d'Osher et Sethian [101] sont utilisées, il y a stabilité du schéma et précision des résultats. Cette représentation par ensembles de niveau zéro est également analysée formellement par Chen, Giga et Goto [34], Evans et Spruck [61, 62, 63, 64] et Soner [117].

**Remarque 2.1.** Dans Caselles, Kimmel et Sapiro [32],  $\varphi$  est présentée comme étant la fonction distance orientée  $b_{\Omega_t}$  (équation (5.15) du chapitre 2), où l'on suppose que  $\mathcal{C}_t = \Gamma_t$ , la frontière d'un domaine  $\Omega_t$  tel que

$$\begin{aligned} \text{int } \Omega_t &= \{x \in \mathbb{R}^N : \varphi(t, x) < 0\} \\ \Gamma_t &= \{x \in \mathbb{R}^N : \varphi(t, x) = 0\}. \end{aligned}$$

On peut par exemple poser  $\varphi(t, x) = b_{\Omega_t}(x)$  la fonction distance orientée, et la faire évoluer dans l'équation (2.6) avec la méthode des ensembles de niveau. On voudrait la préserver tout au long de l'évolution.

Basée sur la minimisation (2.1), la relation

$$v(t) = -[H_t g_I + (\nabla g_I \cdot n_t)]$$

et l'équation différentielle (2.5), le problème de la géodésique est équivalent à trouver l'ensemble de niveau zéro de l'état stationnaire de l'équation d'évolution

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_t}{\partial t} &= |\nabla \varphi_t| \operatorname{div} \left( g_I \frac{\nabla \varphi_t}{|\nabla \varphi_t|} \right) \\ &= g_I |\nabla \varphi_t| \operatorname{div} \left( \frac{\nabla \varphi_t}{|\nabla \varphi_t|} \right) + \nabla g_I \cdot \nabla \varphi_t, \end{aligned} \quad (2.7)$$

avec la condition initiale  $\varphi_0(\mathcal{C}_0) = \varphi^0(\mathcal{C})$  et  $\mathcal{C}$  comme l'ensemble de niveau de la fonction  $\varphi^0$ . L'équation (2.7) est obtenue à partir des relations

$$H_t = \operatorname{div} n_t \text{ avec } n_t = \frac{\nabla \varphi_t}{|\nabla \varphi_t|}. \quad (2.8)$$

Pour les domaines de classe  $C^2$  la courbure moyenne est donnée par la divergence tangentielle

$$\operatorname{div}_{\Gamma_t} n_t = \operatorname{div}_{\Gamma_t} \left( \frac{\nabla \varphi_t}{|\nabla \varphi_t|} \right).$$

On peut cependant vérifier que dans ce cas

$$\operatorname{div}_{\Gamma_t} n_t = \operatorname{div}_{\Gamma_t} \left( \frac{\nabla \varphi_t}{|\nabla \varphi_t|} \right) = \operatorname{div} \left( \frac{\nabla \varphi_t}{|\nabla \varphi_t|} \right)$$

car

$$D \left( \frac{\nabla \varphi_t}{|\nabla \varphi_t|} \right) n_t \cdot n_t = D \left( \frac{\nabla \varphi_t}{|\nabla \varphi_t|} \right) \frac{\nabla \varphi_t}{|\nabla \varphi_t|} \cdot \frac{\nabla \varphi_t}{|\nabla \varphi_t|} = 0.$$

On insiste sur le fait que l'équation du flot géodésique (2.3) est un des résultats principaux de Caselles, Kimmel et Sapiro [32].

### 2.3. Mouvement des ensembles de niveau par courbure moyenne

Le mouvement d'une surface par courbure moyenne a été étudié par Brakke [24] en 1978 en utilisant la théorie des "*varifolds*". D'autres auteurs comme Angenent [9, 10, 11] de 1988 à 1991 ont développé une théorie des équations paraboliques pour des courbes sur des surfaces qui peut être appliquée aux "*curves shortening*" du problème de flot par courbure moyenne (cf. Grayson [71] en 1989) ainsi qu'un certain nombre de modèles de transition de phases en deux dimensions (cf. Angenent et Gurtin [12] en 1989).

Evans et Spruck [61] en 1991 montrèrent que le mouvement des ensembles de niveau par courbure moyenne était la solution unique d'une équation aux dérivées partielles non-linéaire (cf. voir aussi [62, 63, 64] de 1992 à 1995). Ces travaux furent suivis par une démonstration de l'existence, pour un court laps de temps, d'une solution autour d'une hypersurface régulière dans [62] en 1992. En 1993 Soner [117] utilise la récente théorie des *solutions de viscosité*<sup>1</sup> étroitement liée aux travaux de Osher et Sethian [101] en 1988, Chen, Giga et Goto [34] en 1991, et de Evans et Spruck [61, 62] en 1991 et 1992. Une importante littérature existe sur les solutions de viscosité de l'équation de Hamilton-Jacobi (cf. Lions [82] en 1982, Crandal, Evans et Lions [43] en 1984 et Crandall et Lions [45, 46, 47, 48, 49, 50, 51] de 1985 à 1994 et Barles [16] en 1994).

---

<sup>1</sup>Voir également Rouy [109] et Rouy et Tourin [110] en 1992 et Lions, Rouy et Tourin [83] en 1993

### 3. ÉVOLUTION D'UN ENSEMBLE SOUS L'ACTION D'UN CHAMP DE VITESSES

Il existe différentes façons de déformer (perturber) un domaine. Dans cette section, on développe la *méthode des vitesses*, une technique analogue à la semi-dérivée directionnelle au sens de Hadamard utilisée pour les fonctions de forme (“shape functions”). On introduit également une autre technique de déformation analogue à la semi-dérivée directionnelle au sens de Gâteaux, soit la *méthode de perturbation de l'opérateur identité* qui est un cas particulier de la méthode des vitesses.

**Définition 3.1.** Soit  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction à valeur réelle définie sur un espace topologique vectoriel  $E$ . La semi-dérivée directionnelle au sens de Gâteaux au point  $x \in E$  dans la direction  $v \in E$  est donnée par la limite (lorsqu'elle existe)

$$df(x; v) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \lim_{t \searrow 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}, \quad (3.1)$$

et la semi-dérivée directionnelle au sens de Hadamard par

$$d_H f(x; v) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \lim_{\substack{w \rightarrow v \\ t \searrow 0}} \frac{f(x + tw) - f(x)}{t}. \quad (3.2)$$

L'équivalent de la semi-dérivée directionnelle au sens de Gâteaux pour les fonctions de forme sera obtenu par la *méthode de perturbation de l'opérateur identité*, mais ne fera pas l'objet de cette section, tandis que l'équivalent de la semi-dérivée directionnelle au sens de Hadamard sera obtenue par la *méthode des vitesses*. Définissons tout d'abord la notion de fonction de forme selon les terminologies de [54].

**Définition 3.2.** Étant donné un sous-ensemble non-vide  $D$  de  $\mathbb{R}^N$ , considérons l'ensemble  $\mathcal{P}(D) = \{\Omega : \Omega \subset D\}$  de sous-ensembles de  $D$ . L'ensemble  $D$  sera identifié comme étant le fourre-tout ou l'univers. Une fonction de forme est une fonction

$$J : \mathcal{A} \rightarrow E \quad (3.3)$$

d'une famille admissible de domaines  $\mathcal{A}$  dans  $\mathcal{P}(D)$  à valeur dans un espace topologique  $E$  telle que pour n'importe quel homéomorphisme  $T$  de  $\overline{D}$ , tel que  $T(\Omega) = \Omega$ , on a  $J(\Omega) = J(T(\Omega))$  pour chaque élément  $\Omega \in \mathcal{A}$ .

Le fourre-tout  $D$  peut représenter une contrainte de type physique ou mécanique, une sous-variété de  $\mathbb{R}^N$  ou une quelconque contrainte mathématique. Dans plusieurs cas il peut être choisi assez grand et/ou aussi régulier que nécessaire.  $D$  peut être tout  $\mathbb{R}^N$  lorsqu'il n'y a pas de contrainte.

**Remarque 3.1.** *Considérons une fonction de forme à valeur réelle*

$$\Omega \mapsto J(\Omega) : \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.4)$$

définie sur une famille  $\mathcal{A}$  dans  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ . Selon l'espace du domaine, il est important de s'assurer que la fonction de forme est bien définie, c'est-à-dire qu'elle a la même valeur pour tous les éléments dans la classe d'équivalence.

Étant donnée la famille de transformations

$$x \mapsto T_t(x) \stackrel{\text{déf}}{=} T(t, x) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N \quad (3.5)$$

de  $\mathbb{R}^N$ , on construit

$$\boxed{T(t, X) \stackrel{\text{déf}}{=} x(t, X), \quad t \geq 0, X \in \mathbb{R}^N,} \quad (3.6)$$

où  $x(t, X) = x(t)$  est défini comme le *flot* de l'équation différentielle

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = V(t, x(t)), & t \geq 0, \\ x(0, X) = X, \end{cases} \quad (3.7)$$

pour un *champ de vitesses*  $V : [0, \tau] \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ . On utilisera souvent la notation

$$V(t)(x) \stackrel{\text{déf}}{=} V(t, x). \quad (3.8)$$

On complète les fondements de la *méthode des vitesses*<sup>2</sup> en y ajoutant le principe sous-jacent suivant.

<sup>2</sup>En anglais, on trouve les expressions "Velocity method" et "Speed method". "Velocity" et "Speed" signifient vitesse, mais en anglais "velocity" est le vecteur vitesse, alors que "speed" est le scalaire vitesse. La terminologie correcte est "Velocity method".

La *semi-dérivée de forme* de  $J$  à  $\Omega$  dans la direction de  $V$  est définie alors par

$$dJ(\Omega; V) \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{t \searrow 0} \frac{J(\Omega_t) - J(\Omega)}{t} \quad (3.9)$$

(lorsque la limite existe), où

$$\Omega_t \stackrel{\text{déf}}{=} T_t(\Omega) = \{T_t(x) : x \in \Omega\} \quad (3.10)$$

et  $T_t$  est la transformation de  $\mathbb{R}^N$  définie par les équations (3.5), (3.6) et (3.7). C'est le principe sous-jacent à la *méthode des vitesses* dont le but est de perturber (déformer) un domaine dans la direction d'un champ de vitesses.

Sous des hypothèses adéquates sur la famille des champs de vitesses  $\{V(t)\}$ , les transformations  $\{T_t\}$  sont des homéomorphismes qui transportent la frontière  $\Gamma$  de  $\Omega$  sur la frontière  $\Gamma_t$  de  $\Omega_t$  et l'intérieur de  $\Omega$  sur l'intérieur de  $\Omega_t$ . Il est intéressant de noter que si  $\overline{\Omega} = \Gamma$ , alors  $\overline{\Omega}_t = \Gamma_t$  pour le cas d'une sous-variété. On veut analyser et calculer non seulement l'évolution du front  $\Gamma_t$ , mais aussi l'évolution de la normale  $n_t$  et de la courbure moyenne  $H_t$  en fonction du temps  $t$ .

#### 4. ÉQUATION D'ÉVOLUTION DES ENSEMBLES DE NIVEAU

Cette approche semble avoir été simultanément introduite en imagerie par Caselles, Catté, Coll et Dibos [30] en 1993 sous le nom de "geometric partial differential equations" avec en plus du terme de courbure moyenne un terme de *transport* et par Malladi, Sethian et Vemuri [87] en 1995 sous le nom de "level set approach" combinée avec la notion d'"extension velocity". Elle est également utilisée par plusieurs groupes de recherche de domaines différents tels Malladi et Sethian [86] pour la segmentation, représentation et reconnaissance de forme en 1994, Adalsteinsson et Sethian [1, 2] pour la propagation de front en 1995 et la construction de prolongements de vitesse en 1999, Sussman, Smereka et Osher [118] pour le calcul de solutions de flots incompressibles (deux phases) en 1996, Zhao, Chan, Merriman et Osher [125] pour le "mouvement multi-phases" en 1996, Bosnjak *et al.* [21, 22] pour la segmentation du ventricule gauche en 2001, et Sethian [115] en 1999, Osher et Fedwik [99] en 2001 et Osher et Paragios [100] en 2003 pour leur synthèse complète sur ce type de méthodes.

#### 4.1. Équation d'évolution et les hypothèses

Soit  $(t, x) \mapsto \varphi(t, x) : [0, \tau] \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction régulière et un sous-ensemble  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  de frontière  $\Gamma = \overline{\Omega} \cap \overline{\mathbb{C}\Omega}$  tel que

$$\text{int } \Omega = \{x \in \mathbb{R}^N : \varphi(0, x) < 0\} \text{ et } \Gamma = \{x \in \mathbb{R}^N : \varphi(0, x) = 0\}. \quad (4.1)$$

Soit  $V : [0, \tau] \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  un champ de vitesses suffisamment régulier pour

$\partial\Omega = \varphi^{-1}\{0\}$   
 $\text{int } \Omega = \varphi^{-1}\{< 0\}$   
 $\text{ext } \Omega = \varphi^{-1}\{> 0\}$

FIG. 3.1. Ensembles de niveau de la fonction  $\varphi$  définie sur le sous-ensemble  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ .

que les transformations  $\{T_t\}$  soient des *difféomorphismes*. On suppose, en plus, que sous l'action du champ de vitesses  $V(t)$ , les images  $\Omega_t = T_t(\Omega)$  vérifient les propriétés suivantes :

$$\text{int } \Omega_t = \{x \in \mathbb{R}^N : \varphi(t, x) < 0\} \text{ et } \Gamma_t = \{x \in \mathbb{R}^N : \varphi(t, x) = 0\} \quad \forall t \in [0, \tau]. \quad (4.2)$$

En supposant que la fonction  $\varphi_t(x) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(t, x)$  est au moins de classe  $C^1$  et que  $\nabla \varphi_t \neq 0$  sur  $\varphi_t^{-1}\{0\}$  et en prenant la *dérivée totale* par rapport à  $t$  de  $\varphi(t, T_t(x))$  pour  $x \in \Gamma$ , on obtient

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, T_t(x)) + \nabla \varphi(t, T_t(x)) \cdot \frac{d}{dt} T_t(x) = 0. \quad (4.3)$$

En substituant le champ de vitesses de l'équation (3.7), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, T_t(x)) + \nabla \varphi(t, T_t(x)) \cdot V(t, T_t(x)) &= 0, \quad \forall T_t(x) \in \Gamma_t \\ \Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t} \varphi_t + \nabla \varphi_t \cdot V(t) = 0 \text{ sur } \Gamma_t, t \in [0, \tau].} & \quad (4.4) \end{aligned}$$

Cette dernière équation, l'équation d'évolution des ensembles de niveau, n'est valide qu'*uniquement* sur les fronts  $\Gamma_t$ ,  $0 \leq t \leq \tau$ . Il serait donc intéressant de trouver un représentant  $\varphi$  de la classe d'équivalence des fonctions  $\varphi$  qui vérifient les conditions (4.1) et (4.2),

$$[\varphi]_{\Omega, V} = \{ \varphi : \varphi_t^{-1}\{0\} = \Gamma_t \text{ et } \varphi_t^{-1}\{< 0\} = \text{int } \Omega_t, \forall t \in [0, \tau] \},$$

pour étendre l'équation (4.4) de  $\Gamma_t$  à tout  $\mathbb{R}^N$  ou tout au moins presque partout dans  $\mathbb{R}^N$ . On pourrait aussi considérer la classe d'équivalence plus grande

$$[\varphi]_{\Gamma, V} = \{ \varphi : \varphi_t^{-1}\{0\} = \Gamma_t, \forall t \in [0, \tau] \}.$$

#### 4.2. Cas de la vitesse scalaire portée par la normale

Dans Adalsteinsson et Sethian [2], Gomez et Faugeras [69] et Malladi, Sethian et Vemuri [87], le front se déplace sous l'effet d'un champ de vitesses porté par sa normale avec une vitesse scalaire dépendant en particulier de la courbure de l'ensemble de niveau ou du front.

On est donc amené à considérer des champs de vitesses  $V$  de la forme

$$V(t)|_{\Gamma_t} = v(t) n_t, \quad x \in \Gamma_t \tag{4.5}$$

pour une *vitesse scalaire*  $(t, x) \mapsto v(t)(x) : [0, \tau] \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ . En utilisant l'expression  $\nabla \varphi_t / |\nabla \varphi_t|$  de la normale  $n_t$  en fonction de  $\nabla \varphi_t$ , l'équation (4.4) devient alors

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \varphi_t + v(t) |\nabla \varphi_t| = 0 \text{ sur } \Gamma_t.} \tag{4.6}$$

Par exemple, considérons le cas du problème de minimisation de la longueur totale de la courbe  $\mathcal{C}$  de l'équation (2.3) pour la métrique  $g(I_\varepsilon) d\mathcal{C}$  introduite par Caselles *et al.* [32]. En utilisant le calcul (4.7) du chapitre 2 de la semi-dérivée directionnelle par rapport à un champ de vitesses  $V$  de la fonction objectif (4.6) du chapitre 2

$$E(\Omega; V) = \int_{\Gamma} g(I_\varepsilon) d\Gamma \quad \text{et} \quad dE(\Omega; V) = \int_{\Gamma} \left[ Hg(I_\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial n} g(I_\varepsilon) \right] n \cdot V d\Gamma,$$

le choix d'une direction de descente du gradient amène à choisir

$$\boxed{v(t) = - \left[ H_t g(I_\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial n_t} g(I_\varepsilon) \right] \text{ sur } \Gamma_t.} \quad (4.7)$$

Par ailleurs, on a vu en (2.8) que la normale  $n_t$  et la courbure moyenne  $H_t$  peuvent s'exprimer en fonction de  $\nabla\varphi_t$  comme suit

$$n_t = \frac{\nabla\varphi_t}{|\nabla\varphi_t|} \text{ et } H_t = \operatorname{div}_{\Gamma_t} n_t = \operatorname{div}_{\Gamma_t} \left( \frac{\nabla\varphi_t}{|\nabla\varphi_t|} \right) = \operatorname{div} \left( \frac{\nabla\varphi_t}{|\nabla\varphi_t|} \right) \Big|_{\Gamma_t}. \quad (4.8)$$

En substituant dans (4.6), on obtient l'équation d'évolution suivante

$$\frac{\partial\varphi_t}{\partial t} - \left( H_t g(I_\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial n_t} g(I_\varepsilon) \right) \nabla\varphi_t \cdot \frac{\nabla\varphi_t}{|\nabla\varphi_t|} = 0 \text{ sur } \Gamma_t. \quad (4.9)$$

En simplifiant

$$\begin{cases} \frac{\partial\varphi_t}{\partial t} - \left( H_t g(I_\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial n_t} g(I_\varepsilon) \right) |\nabla\varphi_t| = 0 & \text{sur } \Gamma_t \\ \varphi_0 = \varphi^0 & \text{sur } \Gamma_0, \end{cases} \quad (4.10)$$

et en remplaçant  $n_t$  et  $H_t$  par leurs expressions (4.8) en terme de  $\nabla\varphi_t$ , il vient finalement

$$\boxed{\begin{cases} \frac{\partial\varphi_t}{\partial t} - \left[ \operatorname{div} \left( \frac{\nabla\varphi_t}{|\nabla\varphi_t|} \right) g(I_\varepsilon) + \nabla g(I_\varepsilon) \cdot \frac{\nabla\varphi_t}{|\nabla\varphi_t|} \right] |\nabla\varphi_t| = 0 & \text{sur } \Gamma_t \\ \varphi_0 = \varphi^0 & \text{sur } \Gamma_0. \end{cases}} \quad (4.11)$$

Le signe négatif provient du fait que l'on a choisi la normale sortante plutôt que rentrante. La littérature regroupant les théorèmes d'existence et d'unicité reliés aux solutions de l'équation (4.11) peut être trouvée dans Chen, Giga et Goto [34].

### 4.3. Prolongement de l'équation des ensembles de niveau

L'équation (4.11) sur les fronts  $\Gamma_t$  n'est pas pratique tant sur le plan théorique que numérique. On voudrait que l'équation (4.11) puisse être étendue dans un petit *voisinage tubulaire* de rayon  $h$

$$U_h(\Gamma_t) \stackrel{\text{déf}}{=} \{x \in \mathbb{R}^N : d_{\Gamma_t}(x) < h\} \quad (4.12)$$

du front  $\Gamma_t$  pour un petit  $h > 0$ . En théorie, le champ de vitesses associé sur  $\Gamma_t$  est donné par

$$V(t) = - \left[ \operatorname{div} \left( \frac{\nabla \varphi_t}{|\nabla \varphi_t|} \right) g(I_\varepsilon) + \nabla g(I_\varepsilon) \cdot \frac{\nabla \varphi_t}{|\nabla \varphi_t|} \right] \frac{\nabla \varphi_t}{|\nabla \varphi_t|} \text{ sur } \Gamma_t. \quad (4.13)$$

Étant donné les identités (4.8), les expressions de  $n_t$  et  $H_t$  se prolongent dans un voisinage de  $\Gamma_t$  et possiblement aux points de  $\mathbb{R}^N$  lorsque  $\nabla \varphi_t$  est assez régulier et que  $\nabla \varphi_t \neq 0$  sur  $\Gamma_t$ .

On peut alors essayer de prolonger l'équation (4.11) de  $\Gamma_t$  à tout  $\mathbb{R}^N$  au prix de violer les hypothèses (4.1)-(4.2), soit par perte de régularité de  $\varphi_t$  ou soit par annulation de son gradient

$$\boxed{\begin{cases} \frac{\partial \varphi_t}{\partial t} - \left[ \operatorname{div} \left( \frac{\nabla \varphi_t}{|\nabla \varphi_t|} \right) g(I_\varepsilon) + \nabla g(I_\varepsilon) \cdot \frac{\nabla \varphi_t}{|\nabla \varphi_t|} \right] |\nabla \varphi_t| = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \\ \varphi_0 = \varphi^0 & \text{dans } \mathbb{R}^N. \end{cases}} \quad (4.14)$$

En fait, le point de départ dans Caselles, Catté, Coll et Dibos [30] était l'équation géométrique aux dérivées partielles suivante

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_t}{\partial t} - \left[ \operatorname{div} \left( \frac{\nabla \varphi_t}{|\nabla \varphi_t|} \right) g(I_\varepsilon) + \nu g(I_\varepsilon) \right] |\nabla \varphi_t| = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \\ \varphi_0 = \varphi^0 & \text{dans } \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (4.15)$$

pour une constante  $\nu > 0$ , où la fonction  $g(I_\varepsilon) = 1/(1 + |\nabla I_\varepsilon|^2)$ . Ils donnent l'existence, en dimension deux, d'une *solution de viscosité* unique pour une donnée initiale  $u^0 \in C^{0,1}([0, 1] \times [0, 1]) \cap W^{1,\infty}([0, 1] \times [0, 1])$  et  $g \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)$  à l'équation

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - g a_{ij}(\nabla u) \partial_{ij} u - \nu g |\nabla u| = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \\ u(0) = u^0 & \text{dans } \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

où

$$a_{ij}(p) \stackrel{\text{déf}}{=} \delta_{ij} - \frac{p_i p_j}{|p|^2} \text{ si } p \neq 0,$$

et  $\nu$  un terme de transport.

**Remarque 4.1.** Pour fin de comparaison, noter que

$$a_{ij}(\nabla u) \partial_{ij} u = \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) |\nabla u| \text{ si } \nabla u \neq 0$$

et qu'il s'agit bien de l'équation précédente (4.15) en  $\varphi_t$ .

#### 4.4. Difficultés liées au prolongement

Le prolongement de l'équation (4.11) de  $\Gamma_t$  à tout  $\mathbb{R}^N$  n'est cependant pas la bonne chose à faire. En le faisant on s'expose à violer les hypothèses (4.1)-(4.2), soit par perte de régularité de  $\varphi_t$  ou soit par annulation de son gradient. L'autre point important mentionné par Barles, Soner et Souganidis [17] en 1993 est que la solution de l'équation (4.14) ayant pour donnée initiale une fonction distance orientée d'un ensemble de frontière mince n'est pas une fonction distance orientée pour  $t > 0$  (voir aussi Gomes et Faugeras [69]). On reviendra sur ce point en section 6 lorsque l'on donnera l'équation d'évolution de la fonction distance orientée d'un ensemble à frontière mince évoluant sous l'action d'un champ de vitesses.

Les numériciens (par exemple Malladi, Sethian et Vemuri [87] en 1995) ont rapidement pris conscience de cette difficulté théorique et introduirent la notion de *prolongement de la vitesse* (“*extension velocity*”) pour empêcher la dégénérescence du gradient et la *ré-initialisation*<sup>3</sup>. La notion de prolongement de la vitesse fut formalisée par Adalsteinsson et Sethian [1] en 1999 pour atteindre plusieurs objectifs :

- 1) “fournir une façon de construire des vitesses dans un voisinage de l'ensemble de niveau dans le cas où la vitesse est seulement définie sur le front ;
- 2) fournir des résolutions sous-grille pour des cas qui n'ont pas encore été approfondis lors de l'utilisation de la méthode des ensembles de niveau standard ;
- 3) fournir une façon d'actualiser une interface selon une vitesse donnée sur le front de telle façon que la fonction distance signée soit préservée et que le front ne soit jamais ré-initialisé.”

---

<sup>3</sup>Voir par exemple Malladi, Sethian et Vemuri [87] pour plus de détails sur la technique de ré-initialisation.

Parmi les nombreux choix de *prolongements de la vitesse* (extension velocity), celui construit par Malladi, Sethian et Vemuri [87] en 1995 correspond à la vitesse  $\tilde{V}(t) = V(t) \circ p_{\Gamma_t}$  évalué au point projeté sur le front  $\Gamma_t$ .

En citant [1] : “In cases where there is no available choice for an extension velocity, one approach is to simply extrapolate; standing at each grid point, the value of the speed function at the closest point on the front is used as the extension velocity at that point. This is the approach used in [87].”

La même construction impliquant  $p_{\Gamma_t}$  fut obtenue par Gomes et Faugeras [69] en 2000 avec plusieurs mises en œuvres numériques. On verra plus loin à la section 6 comment ce prolongement de la vitesse arrive naturellement dans l'équation d'évolution de  $b_{\Omega_t}$ .

## 5. ÉQUATION D'ÉVOLUTION DE LA FONCTION CARACTÉRISTIQUE

En utilisant les résultats obtenus dans la section 3, on veut donner une équation d'évolution pour la fonction caractéristique

$$\chi_{\Omega}(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Omega; \\ 0 & \text{si } x \notin \Omega. \end{cases} \quad (5.1)$$

Puisque  $\chi_{\Omega}$  n'est pas différentiable, on doit définir son gradient à l'aide de la théorie des *distributions*. Étant donnée un sous-ensemble non-vide  $D$  de  $\mathbb{R}^N$ , un sous-ensemble  $\Omega \subset D$  et une fonction régulière  $\psi$  définie sur  $D$  dont le support est compact et inclus dans  $D$ , on a

$$\langle \chi_{\Omega}, \psi \rangle \stackrel{\text{déf}}{=} \int_D \chi_{\Omega} \psi \, dx, \quad \forall \psi, \quad (5.2)$$

$$\langle \nabla \chi_{\Omega}, \psi \rangle \stackrel{\text{déf}}{=} - \int_D \chi_{\Omega} \operatorname{div} \psi \, dx, \quad \forall \psi. \quad (5.3)$$

**Remarque 5.1.** Si l'on choisit  $\psi$  dans  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$  l'espace des fonctions infiniment différentiables dans  $\mathbb{R}^N$  dont le support est compact et inclus dans  $\mathbb{R}^N$  introduit en section 3.1 du chapitre 2, alors  $\nabla \chi_{\Omega}$  est le gradient de  $\chi_{\Omega}$  au sens des *distributions*.

Pour déformer  $\Omega$  via la transformation  $T_t$  en  $\Omega_t = T_t(\Omega)$  de l'équation (3.10), on doit prendre la dérivée par rapport à  $t$  de l'intégrale

$$\frac{d}{dt} \int_D \chi_{\Omega_t} \psi dx \quad (5.4)$$

au sens faible. Pour ce faire on utilise le théorème de *calcul de forme* ("shape calculus") suivant :

**Théorème 5.1** ([54], Théorème 4.2, p. 352). *Supposons qu'il existe  $\tau > 0$  tel que le champ de vitesses  $V(t)$  satisfasse les conditions*

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^N, & V(\cdot, x) \in C([0, \tau]; \mathbb{R}^N), \\ \exists c > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}^N, & \|V(\cdot, y) - V(\cdot, x)\|_{C([0, \tau]; \mathbb{R}^N)} \leq c|y - x|, \end{cases} \quad (5.5)$$

où  $V(\cdot, x)$  est la fonction  $t \mapsto V(t, x)$  et  $V \in C^0([0, \tau]; C^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N))$ . Étant donnée une fonction  $\psi \in C([0, \tau]; W^{1,1}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)) \cap C^1([0, \tau]; L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N))$  et un domaine mesurable borné  $\Omega$  de frontière  $\Gamma$ , la semi-dérivée de la fonction

$$J_V(t) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\Omega_t(V)} \psi(t) dx \quad (5.6)$$

au temps  $t = 0$  est donnée par

$$dJ_V(0) = \int_{\Omega} \psi'(0) + \text{div}(\psi(0)V(0)) dx, \quad (5.7)$$

où  $\psi(0)(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \psi(0, x)$  et  $\psi'(0)(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \partial\psi/\partial t(0, x)$ . Si  $\Omega$  est un domaine ouvert de frontière  $\Gamma$  lipschitzienne, alors en plus (en utilisant le théorème de Stokes)

$$dJ_V(0) = \int_{\Omega} \psi'(0) dx + \int_{\Gamma} \psi(0)V(0) \cdot n dx. \quad (5.8)$$

La dérivée de l'intégrale (5.4) est alors

$$\frac{d}{dt} \int_D \chi_{\Omega_t} \psi dx = \int_D \chi_{\Omega_t} \text{div}(\psi V(t)) dx. \quad (5.9)$$

Puisque l'équation (5.9) est vérifiée pour toutes les fonctions régulières  $\psi$  à support compact inclus dans  $D$ , elle est une *forme faible* de l'équation différentielle aux

dérivées partielles du premier ordre <sup>4</sup>

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \chi_{\Omega_t} + V(t) \cdot \nabla \chi_{\Omega_t} &= 0 \text{ dans } D, \\ \chi_0 &= \chi_{\Omega_0}. \end{aligned}} \quad (5.10)$$

L'équation d'évolution de la fonction caractéristique (5.10) sera utilisé lors de l'évolution de la fonction caractéristique d'un domaine  $\Omega_0 = \Omega$  vers un domaine  $\Omega_t$  au temps  $t$ .

L'utilisation de  $\chi_{\Omega}$  pour l'évolution d'un front est une approche semblable aux *techniques de volume de fluide* ("volume-of-fluid technique") introduit par Noh et Woodward [98] et utilisant une *formulation eulérienne*. Ces techniques sont apparues sous plusieurs formes et ont été introduites sous plusieurs noms tels que la *méthode des cellules* "cell method" et la *méthode des fractions partielles* "method of partial fractions".

Le concept est relativement simple. Étant donné une grille fixe placée sur le domaine de calcul  $D$ , on assigne une valeur à chaque cellule basée sur la fraction de matériels (objets) qu'elle contient. Les cellules contenant des parties de matériels ou pas prennent des valeurs entre 0 et 1, 0 étant pour les cellules ne contenant rien. L'idée est de relier cette grille à la location du front (voir Sethian [115]). Selon lui, ces techniques possèdent quelques défauts :

- 1) "elles sont imprécises ;
- 2) puisque les approximations du front sont assez grossières, un grand nombre de cellules sont nécessaires pour un résultat raisonnable ;
- 3) lorsque la fonction vitesse est complexe, l'évolution est problématique à cause de la dépendance de l'orientation par rapport à la grille ;
- 4) les calculs des propriétés géométriques du front telles que la courbure, la normale peuvent également être difficiles et imprécises ;
- 5) l'extension en dimension supérieure et le développement de versions d'ordre supérieur demandent un travail considérable."

---

<sup>4</sup>Référence : Dziri et Zolésio [58].

## 6. ÉQUATION D'ÉVOLUTION DE LA FONCTION DISTANCE ORIENTÉE

Étant donné le fourre-tout  $D$  de  $\mathbb{R}^N$ , un champ de vitesses  $V$  et un sous-ensemble  $\Omega \subset D$ , on considère la fonction distance orientée de la section 5.3.1 du chapitre 2

$$b_\Omega(x) \stackrel{\text{déf}}{=} d_\Omega(x) - d_{\mathbb{C}\Omega}(x). \quad (6.1)$$

C'est un cas particulier d'une fonction employée dans le but d'utiliser les méthodes par ensembles de niveau en posant  $\varphi(t, x) = b_{\Omega_t}(x)$ .

On est intéressé à construire une nouvelle équation d'évolution pour

$$t \mapsto b_{\Omega_t} \text{ (resp. } b_{\Omega_t}^2) : [0, \tau] \rightarrow C(\overline{D})$$

avec  $\tau > 0$ ,  $t$  un temps artificiel et  $\Omega$  possédant une frontière mince (de mesure nulle). Introduisons d'abord les notations des dérivées partielles de  $b_\Omega$  qui seront utiles dans le prochain théorème :

$$b'_\Omega(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \left. \frac{\partial}{\partial t} b_{\Omega_t}(x) \right|_{t=0^+} \quad \text{et} \quad (b_\Omega^2)'(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \left. \frac{\partial}{\partial t} b_{\Omega_t}^2(x) \right|_{t=0^+}. \quad (6.2)$$

**Théorème 6.1** ([56], Théorème 4.2). *Soit  $\tau > 0$  et  $V : [0, \tau] \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  satisfaisant les conditions (5.5).*

(i) *Soit  $\Omega$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^N$  tel que  $\Gamma \neq \emptyset$ , alors*

$$\begin{aligned} (b_\Omega^2)' &= -\nabla b_\Omega^2 \cdot (V(0) \circ p_\Gamma) \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \setminus \text{Sk}(\Omega) \\ b'_\Omega &= -\nabla b_\Omega \cdot (V(0) \circ p_\Gamma) \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \setminus (\Gamma \cup \text{Sk}(\Omega)) \end{aligned} \quad (6.3)$$

*et ces identités sont respectées presque partout dans  $\mathbb{R}^N$  et  $\mathbb{R}^N \setminus \Gamma$ .*

(ii) *Soit  $\Omega$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^N$  tel que  $\Gamma \neq \emptyset$  et  $m_N(\Gamma) = 0$ , alors*

$$\boxed{b'_\Omega = -\nabla b_\Omega \cdot (V(0) \circ p_\Gamma) \text{ p.p. dans } \mathbb{R}^N.} \quad (6.4)$$

*Si  $V \in C([0, \tau]; C^0(\overline{\mathbb{R}^N}, \mathbb{R}^N))$ , pour tout ouvert borné  $D$  de  $\mathbb{R}^N$ ,  $b'_\Omega \in L^\infty(D)$  et en plus*

$$\forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N), \quad \left. \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^N} b_{\Omega_t} \psi \, dx \right|_{t=0^+} = \int_{\mathbb{R}^N} b'_\Omega \psi \, dx. \quad (6.5)$$

Nous pouvons maintenant construire l'équation d'évolution non-linéaire pour la distance orientée  $b_{\Omega_t}$  comme fonction du temps  $t$  pour des ensembles  $\Omega$  ayant une frontière mince. Un avantage de travailler avec cette équation est qu'elle permet l'évolution de domaines arbitraires de mesure de Lebesgue de dimension  $N$  nulle tels qu'un nuage de points, des courbes, des objets de codimension supérieure ou égale à un ou un mélange de ceux-ci. Elle n'est pas uniquement restreinte à l'évolution de domaine ouvert à frontière mince. Pour construire l'équation d'évolution de  $b_{\Omega_t}$ , il est pratique d'introduire la notation

$$b'_{\Omega_t}(x) = \frac{\partial}{\partial t} b_{\Omega_t} \quad (6.6)$$

pour l'utiliser dans le théorème suivant ([56], Théorème 5.1).

**Théorème 6.2.** *Soit  $\tau > 0$  et  $V : [0, \tau] \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  une transformation satisfaisant les conditions (5.5) et telle que  $V \in C([0, \tau]; C^0(\overline{\mathbb{R}^N}, \mathbb{R}^N))$ . Supposons que  $\Omega$  soit un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^N$  avec une frontière mince  $\Gamma \neq \emptyset$ , alors pour tout sous-ensemble ouvert borné  $D$  de  $\mathbb{R}^N$  et pour tout  $r$ ,  $1 \leq r < \infty$ , la fonction  $t \mapsto b_{\Omega_t}$  appartient à l'espace  $C^1([0, \tau]; L^r(D)) \cap C^0([0, \tau]; W^{1,r}(D))$  et satisfait l'équation d'évolution de la fonction distance orientée*

$$\boxed{\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} b_{\Omega_t} + \nabla b_{\Omega_t} \cdot (V(t) \circ p_{\Gamma_t}) = 0 & p.p. \text{ dans } \mathbb{R}^N, \\ b_{\Omega_0} = b_{\Omega}, \end{cases}} \quad (6.7)$$

pour tout  $t$ ,  $0 \leq t \leq \tau$ , où  $p_{\Gamma_t}$  est la projection sur  $\Gamma_t$

$$p_{\Gamma_t}(x) = x - \frac{1}{2} \nabla b_{\Omega_t}^2(x) \quad p.p. \text{ dans } \mathbb{R}^N. \quad (6.8)$$

**Remarque 6.1.** *Notons que l'équation d'évolution de la fonction distance orientée au carré  $b_{\Omega_t}^2 = d_{\Gamma_t}^2$  est donnée par*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} b_{\Omega_t}^2 + \nabla b_{\Omega_t}^2 \cdot \left( V(t) \circ \left[ I - \frac{1}{2} \nabla b_{\Omega_t}^2 \right] \right) = 0 & p.p. \text{ dans } \mathbb{R}^N, \\ b_{\Omega_0}^2 = b_{\Omega}^2, \end{cases} \quad (6.9)$$

pour tout  $t$ ,  $0 \leq t \leq \tau$ . Remarquons qu'elle ne fait intervenir que des dérivées premières.

**Remarque 6.2.** En comparant l'équation (6.7) avec l'équation d'évolution de la fonction caractéristique  $\chi_{\Omega_t}$

$$-\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^N} \chi_{\Omega_t} \psi \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} \chi_{\Omega_t} \operatorname{div}(\psi V(t)) \, dx = 0, \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \quad (6.10)$$

avec  $\chi_{\Omega_0} = \chi_{\Omega}$ , on remarque que cette dernière est inutile pour des ensembles de mesure de dimension  $N$  nulle puisque la fonction caractéristique est zéro presque partout.

Contrairement à l'équation d'évolution de la fonction caractéristique (6.10), l'équation d'évolution de la distance orientée (6.7) a un *sens* dans le contexte des méthodes par ensembles de niveau. Étant donné un champ de vitesses

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} x(t) = V(t, x(t)), & t > 0; \\ x(0) = X, & X \in \Gamma, \end{cases}$$

on peut obtenir l'ensemble de niveau  $\Gamma_t$  par la connaissance de  $\Gamma$  en solutionnant cette équation. Par la suite, en connaissant  $\Gamma_t$ , la projection  $p_{\Gamma_t}$  est déterminée presque partout dans  $\mathbb{R}^N$  et pour tout  $t \in [0, \tau]$ , ce qui implique que le champ de vitesses  $\tilde{V}(t) = V(t) \circ p_{\Gamma_t}$  est précisé et que l'équation (6.7) est linéaire en  $b_{\Omega_t}$ .

En associant aux solutions de

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} x(t) = \tilde{V}(t, x(t)), & t > 0; \\ x(0) = X, & X \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

la transformation  $\tilde{T}_t$  de  $\mathbb{R}^N$ , on peut vérifier formellement que la fonction distance orientée  $b_{\Omega_t} = b_{\Omega} \circ \tilde{T}_t^{-1}$  est bien la solution de l'équation d'évolution (6.7).

Dans le contexte des méthodes par ensembles de niveau, la fonction distance orientée est un cas particulier de l'équation d'évolution (4.4)

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi_t + \nabla \varphi_t \cdot V(t) = 0 \text{ sur } \Gamma_t. \quad (6.11)$$

En effet, en posant

$$(t, x) \mapsto \varphi(t, x) = b_{\Omega_t}(x(t)) : [0, \tau] \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$$

la famille des ensembles de niveau zéro devient exactement

$$\Gamma_t = \{x \in \mathbb{R}^N : b_{\Omega_t}(x) = 0\}. \quad (6.12)$$

Étant donné que les points  $x(t)$  sont transportés par le champ de vitesses  $V(t)$ , l'équation d'évolution (6.11) n'est vérifiée que sur les ensembles de niveau zéro  $\Gamma_t$  (voir section 4). C'est la projection  $p_{\Gamma_t}$  sur la frontière  $\Gamma_t$  qui permet d'étendre l'équation d'évolution sur les fronts  $\Gamma_t$  à presque tout  $\mathbb{R}^N$ . En effet, dans l'équation (6.7), le champ de vitesses  $V(t)$  est remplacé par  $V(t) \circ p_{\Gamma_t}$  à l'extérieur de  $\Gamma_t$ .

L'équation (6.7) est plus fondamentale que l'équation (6.11) qui n'a *pas toujours* de sens. En effet, pour des sous-variétés  $\Omega$  de codimension strictement supérieure à un, le gradient de la fonction distance orientée  $\nabla b_{\Omega_t}$  n'existe pas sur  $\Gamma_t$ , et donc l'équation d'évolution (6.11)

$$\frac{\partial}{\partial t} b_{\Omega_t} + \nabla b_{\Omega_t} \cdot V(t) = 0 \text{ sur } \Gamma_t$$

n'a pas de sens (voir Delfour et Zolésio [56]).

## 7. ÉVOLUTION DE CONTOURS PARAMÉTRÉS PAR DES NŒUDS

Dans les sections précédentes, on a représenté le contour soit par une courbe paramétrée, soit par une fonction paramétrée par un domaine. Dans ces derniers cas, on obtient des équations d'évolution faisant intervenir des courbures qui, pour des contours très irréguliers, deviennent des singularités ou des mesures ce qui rend difficile l'attribution d'un sens à ces équations.

On peut contourner cette difficulté en représentant le contour par une courbe paramétrée par un certain nombre de nœuds comme à la section 5.1.2 du chapitre 2. Cette approche mène à un système d'équations d'évolution pour les nœuds de dimension finie sans courbures explicites plutôt qu'aux équations d'évolution précédentes de dimension infinie que l'on devra tout de même discrétiser par rapport à la variable d'espace.

Soient  $x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_M$  une suite de  $M$  points distincts dans  $\mathbb{R}^2$ ,  $A = \{a_{jk}\}$  une *matrice de connectivité*, et  $C_{jk}$  la ligne entre les points  $x_j$  et  $x_k$

$$a_{jk} \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} 1, & \text{si } x_j \text{ et } x_k \text{ sont connectés} \\ 0, & \text{si } x_j \text{ et } x_k \text{ ne sont pas connectés} \end{cases} \quad (7.1)$$

$$C_{jk} \stackrel{\text{déf}}{=} \{sx_j + (1-s)x_k : s \in [0, 1]\}, \quad \text{si } a_{jk} = 1. \quad (7.2)$$

Dans le cas de courbes de Bézier couramment utilisées en aéronautique, on ajoute à chaque paire de nœuds connectés  $x_j$  et  $x_k$  un *nœud de contrôle*  $u_{jk}$  et l'on modifie la définition des ensembles  $C_{jk}$  comme suit

$$C_{jk} \stackrel{\text{déf}}{=} \{s^2x_j + 2s(1-s)u_{jk} + (1-s)^2x_k : s \in [0, 1]\}, \quad \text{si } a_{jk} = 1, \quad (7.3)$$

où  $s = 0$  correspond au point  $x_k$  et  $s = 1$  au point  $x_j$ . On remarque que  $a_{jk} = a_{kj}$  et  $C_{jk} = C_{kj}$ .

Avec ces définitions, le contour est maintenant donné par

$$\Gamma \stackrel{\text{déf}}{=} \bigcup_{\substack{j < k \\ a_{jk} = 1}} C_{jk}. \quad (7.4)$$

On se donne une fonction objectif générale de la forme

$$E(\Gamma) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\Gamma} f d\Gamma, \quad (7.5)$$

pour une fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  assez régulière telle que sa semi-dérivée directionnelle  $df(x; v)$  existe dans toute les directions  $v \in \mathbb{R}^2$ . On pose

$$E(C_{jk}) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{C_{jk}} f d\Gamma \quad (7.6)$$

et on remarque que  $E(C_{jk}) = E(C_{kj})$ . On a la décomposition suivante

$$\begin{aligned} E(\Gamma) &= \sum_{j=1}^M \sum_{\substack{1 \leq k < M \\ j < k \\ a_{jk} = 1}} \int_{C_{jk}} f d\Gamma = \sum_{j=1}^M \sum_{\substack{1 \leq k < M \\ j < k \\ a_{jk} = 1}} E(C_{jk}) = \sum_{j=1}^M \sum_{\substack{1 \leq k < M \\ k < j \\ a_{jk} = 1}} E(C_{jk}) \\ &\Rightarrow E(\Gamma) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^M \sum_{\substack{1 \leq k < M \\ k \neq j \\ a_{jk} = 1}} E(C_{jk}). \end{aligned} \quad (7.7)$$

Dans ce qui précède, le contour  $\Gamma = \Gamma(\vec{x}, A)$  est paramétré par le vecteur

$$\vec{x} \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_M \end{bmatrix} \in (\mathbb{R}^2)^M \quad (7.8)$$

et la matrice de connectivité  $A$ . Si l'on fixe  $A$ , la fonction objectif  $E(\Gamma)$  qui dépend des  $M$  points devient

$$e(\vec{x}) \stackrel{\text{déf}}{=} E(\Gamma(\vec{x}, A)) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^M \sum_{\substack{1 \leq k \leq M \\ k \neq j \\ a_{jk}=1}} E(C_{jk}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^M e_j(\vec{x}) \quad (7.9)$$

où

$$e_j(\vec{x}) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{\substack{1 \leq k \leq M \\ k \neq j \\ a_{jk}=1}} E(C_{jk}) = \sum_{\substack{1 \leq k \leq M \\ k \neq j \\ a_{jk}=1}} \int_{C_{jk}} f d\Gamma \quad (7.10)$$

de l'identité (7.7).

Dans l'expression  $e(\vec{x})$ , les seuls termes qui dépendent de  $x_j$  sont précisément ceux de  $e_j(\vec{x})$ . Donc si  $\vec{v} = (v_1, \dots, v_M)$  est une direction de  $(\mathbb{R}^2)^M$

$$\begin{aligned} de(x_1, \dots, x_j, \dots, x_M; 0, \dots, 0, v_j, 0, \dots, 0) &= de_j(\vec{x}; 0, \dots, 0, v_j, 0, \dots, 0) \\ \Rightarrow de(\vec{x}; \vec{v}) &= \sum_{j=1}^M de_j(\vec{x}; 0, \dots, 0, v_j, 0, \dots, 0) = \sum_{j=1}^M de_j(\vec{x}; \vec{v}_j) \end{aligned} \quad (7.11)$$

en introduisant la notation

$$\vec{v}_j \stackrel{\text{déf}}{=} (0, \dots, 0, v_j, 0, \dots, 0). \quad (7.12)$$

### 7.1. Contours linéaires par morceaux

On calcule maintenant la semi-dérivée directionnelle de la fonction objectif par rapport au nœud  $x_j$  dans la direction  $v_j \in \mathbb{R}^2$  dans le cas linéaire (7.2). Comme on l'a vu, seuls les termes connectés à  $x_j$  dépendront de  $x_j$ . Il vient donc

$$e_j(\vec{x}) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{\substack{1 \leq k \leq M \\ k \neq j \\ a_{jk}=1}} E(C_{jk}) = \sum_{\substack{1 \leq k \leq M \\ k \neq j \\ a_{jk}=1}} \int_0^1 f(sx_j + (1-s)x_k) |x_j - x_k| ds \quad (7.13)$$

On calcule pour  $t > 0$  le  $k$ -ième terme du quotient différentiel

$$\begin{aligned}
 \frac{e_j(\vec{x} + t\vec{v}_j) - e_j(\vec{x})}{t} &= \frac{1}{t} \int_0^1 f(s[x_j + tv_j] + (1-s)x_k) |[x_j + tv_j] - x_k| \\
 &\quad - f(sx_j + (1-s)x_k) |x_j - x_k| ds \\
 \rightarrow \int_0^1 df(sx_j + (1-s)x_k; sv_j) |x_j - x_k| + f(sx_j + (1-s)x_k) \frac{x_j - x_k}{|x_j - x_k|} \cdot v_j ds \\
 \Rightarrow \boxed{
 \begin{aligned}
 de_j(\vec{x}; \vec{v}_j) &= \sum_{\substack{1 \leq k \leq M \\ k \neq j \\ a_{jk}=1}} \int_0^1 df(sx_j + (1-s)x_k; v_j) |x_j - x_k| s ds \\
 &\quad + \frac{x_j - x_k}{|x_j - x_k|} \cdot v_j \int_0^1 f(sx_j + (1-s)x_k) ds.
 \end{aligned}
 } \tag{7.14}
 \end{aligned}$$

Cette expression regroupe deux parties : une partie différentiable et une partie potentiellement non-différentiable dépendant de la nature de  $f$ . Dans le cas  $f = 1$  la fonction objectif est égale à la longueur totale de  $\Gamma$ . On obtient la somme des vecteurs unitaires tangents à chacune des lignes connectées au point  $x_j$

$$\sum_{\substack{1 \leq k \leq M \\ k \neq j \\ a_{jk}=1}} \frac{x_j - x_k}{|x_j - x_k|} \cdot v_j. \tag{7.15}$$

Si on pense à un ballon, ce serait des forces élastiques tirant les nœuds  $x_k$  vers le nœud  $x_j$ . Si  $f(x) = -|\nabla I(x)|$ , alors le terme est non-différentiable et  $df(x; v)$  est donné par

$$df(x; v) = - \begin{cases} \frac{\nabla I(x)}{|\nabla I(x)|} \cdot v, & \text{si } \nabla I(x) \neq 0 \\ |v|, & \text{si } \nabla I(x) = 0. \end{cases} \tag{7.16}$$

Si  $I$  est suffisamment régulière, ce terme est l'opposé de la normale aux lignes de niveau de la fonction  $I$ . Si  $\nabla I \neq 0$  sur  $\Gamma$  et  $f = -|\nabla I| + \lambda$ , il vient

$$\begin{aligned} \nabla_{x_j} e_j(\vec{x}) = & \sum_{\substack{1 \leq k \leq M \\ k \neq j \\ a_{jk}=1}} \int_0^1 -\frac{\nabla I}{|\nabla I|}(sx_j + (1-s)x_k) |x_j - x_k| s ds \\ & + \frac{x_j - x_k}{|x_j - x_k|} \int_0^1 [-|\nabla I(sx_j + (1-s)x_k)| + \lambda] ds \end{aligned} \quad (7.17)$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \nabla_{x_j} e_j(x_j) = & \sum_{\substack{1 \leq k \leq M \\ k \neq j \\ a_{jk}=1}} - \int_{C_{jk}} \frac{|x - x_k|}{|x_j - x_k|} \frac{\nabla I(x)}{|\nabla I(x)|} dx \\ & + \left[ \lambda - \frac{1}{|x_j - x_k|} \int_{C_{jk}} |\nabla I(x)| dx \right] \frac{x_j - x_k}{|x_j - x_k|}. \end{aligned}} \quad (7.18)$$

Il est intéressant de noter que la formule (7.14) peut s'obtenir par le choix particulier suivant de la vitesse

$$V_j(x) \stackrel{\text{déf}}{=} c_j(x) v \quad (7.19)$$

associée au point  $x_j$  et à la direction  $v \in \mathbb{R}^2$ , où  $c_j$  est une fonction continue linéaire par morceaux tel qu'au nœud  $x_k$

$$c_j(x_k) \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} 1, & \text{si } x_k = x_j \\ 0, & \text{si } x_k \neq x_j. \end{cases} \quad (7.20)$$

Cette fonction fut utilisée par Zolésio [126] pour calculer la dérivée d'une fonction objectif qui dépend de la solution d'un problème d'éléments finis par rapport aux nœuds internes de la triangularisation du domaine sous-jacent. Pour  $t$  suffisamment petit, la transformation générée par  $V_j$  est  $T_t(x) = x + t c_j(x) v$  et elle transporte les triangles sur les triangles et les lignes sur les lignes. Donc pour la fonction objectif

$$\int_{x_k}^{x_j} f d\Gamma,$$

on a

$$\begin{aligned}
\delta(t) &\stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \frac{1}{t} \left[ \int_{T_t(x_k)}^{T_t(x_j)} f \, d\Gamma - \int_{x_k}^{x_j} f \, d\Gamma \right] \\
&= \frac{1}{t} \int_{x_k}^{x_j} \left[ f \circ T_t \frac{|T_t(x_j) - T_t(x_k)|}{|x_j - x_k|} - f \right] d\Gamma \\
&= \int_{x_k}^{x_j} \left[ \frac{f \circ T_t - f}{t} \frac{|T_t(x_j) - T_t(x_k)|}{|x_j - x_k|} - f \frac{1}{t} \left( \frac{|T_t(x_j) - T_t(x_k)|}{|x_j - x_k|} - 1 \right) \right] d\Gamma.
\end{aligned}$$

Mais

$$\frac{f(T_t(x)) - f(x)}{t} = \frac{f(x + t c_j(x) v) - f(x)}{t} \rightarrow df(x; c_j(x) v) = c_j(x) df(x; v)$$

puisque  $c_j(x)$  est positive. Aussi pour  $x_j \neq x_k$

$$\frac{1}{t} \left[ \frac{|T_t(x_j) - T_t(x_k)|}{|x_j - x_k|} - 1 \right] \rightarrow \frac{x_j - x_k}{|x_j - x_k|} \cdot v \frac{1}{|x_j - x_k|}.$$

Finalement on obtient la forme intrins\u00e8que de la formule (7.14)

$$\int_{x_k}^{x_j} c_j(x) df(x; v) + \frac{x_j - x_k}{|x_j - x_k|} \cdot v \frac{1}{|x_j - x_k|} f \, d\Gamma. \quad (7.21)$$

Dans les mod\u00e8les ci-haut les inconnues sont les n\u00f4uds et possiblement la matrice de connectivit\u00e9  $A$ . Dans sa pleine g\u00e9n\u00e9ralit\u00e9, la minimisation num\u00e9rique exigera des m\u00e9thodes d'optimisation non-diff\u00e9rentiables et de la programmation 0-1 pour g\u00e9rer la matrice  $A$ .

## 7.2. M\u00e9thode de descente du gradient en continu

Dans ce qui pr\u00e9c\u00e8de, on a consid\u00e9r\u00e9 un contour  $E(\Gamma(\vec{x}, A))$  param\u00e9tr\u00e9 par le vecteur

$$\vec{x} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_M \end{bmatrix} \in (\mathbb{R}^2)^M \quad (7.22)$$

et la matrice de connectivit\u00e9  $A$ . En fixant  $A$ , la fonction objectif devient

$$e(\vec{x}) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} E(\Gamma(\vec{x}, A)) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^M e_j(\vec{x}) \quad (7.23)$$

par la décomposition (7.9) et la définition (7.10) de  $e_j(\vec{x})$ . Enfin, il vient de (7.11)

$$\forall \vec{v} = (v_1, \dots, v_M) \in (\mathbb{R}^2)^M, \quad de(\vec{x}; \vec{v}) = \sum_{j=1}^M de_j(\vec{x}; \vec{v}_j).$$

Si  $e(\vec{x})$  possède un gradient  $\nabla e(\vec{x})$ , alors la version continue de la méthode de descente du gradient revient à chercher la solution stationnaire de l'équation d'évolution de dimension finie

$$\boxed{\frac{d\vec{x}(t)}{dt} + \nabla e(\vec{x}(t)) = 0.} \quad (7.24)$$

Si  $e$  ne possède qu'une semi-dérivée directionnelle  $de(\vec{x}; \vec{v})$ , on peut alors construire l'ensemble des directions de croissance maximale de  $e$

$$G(\vec{x}) \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ \vec{v} \in (\mathbb{R}^N)^M : |\vec{v}| \leq 1 \text{ et } de(\vec{x}; \vec{v}) = \sup_{|\vec{w}| \leq 1} de(\vec{x}; \vec{w}) \right\}. \quad (7.25)$$

Ceci mène à l'équation différentielle multivoque

$$\boxed{\frac{d\vec{x}(t)}{dt} \in -G(\vec{x}(t)).} \quad (7.26)$$

Lorsque  $e$  possède un gradient,  $G(\vec{x}) = \{\nabla e(\vec{x})\}$  est un singleton et l'équation multivoque (7.26) se réduit à l'équation (7.24).

On voit que cette approche, tout en étant dans l'esprit des équations d'évolution des sections 4, 5 et 6, donne un système fini d'équations et permet une discrétisation implicite des termes de gradient et de courbure.

### 7.3. Contours Bézier par morceaux

Les constructions et calculs ci-dessus s'étendent des courbes linéaires par morceaux à des courbes de Bézier par morceaux couramment utilisées en aéronautique et autres domaines. Par exemple, le cas de courbes de Bézier du second ordre peut être facilement obtenu en ajoutant à chaque paire de nœuds connectés  $x_j$  et  $x_k$  un nœud de contrôle  $u_{jk}$  et en modifiant les définitions des ensembles  $C_{jk}$  de lignes à des courbes comme suit :

$$C_{jk} \stackrel{\text{déf}}{=} \{s^2 x_j + 2s(1-s)u_{jk} + (1-s)^2 x_k : s \in [0, 1]\}, \quad \text{si } a_{jk} = 1,$$

où  $s = 0$  correspond au point  $x_k$  et  $s = 1$  au point  $x_j$ . Pour compléter cette section, on calcule la semi-dérivée directionnelle de la fonction objectif par rapport

au nœud  $x_j$  dans la direction  $v$ . Seuls les termes qui correspondent à des segments connectés à  $x_j$  dépendront de  $x_j$

$$e_j(x_j) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{\substack{1 \leq k \leq M \\ k \neq j \\ a_{jk}=1}} \int_{C_{jk}} f d\Gamma = \sum_{\substack{1 \leq k \leq M \\ k \neq j \\ a_{jk}=1}} \int_0^1 f(s^2 x_j + 2s(1-s)u_{jk} + (1-s)^2 x_k) 2|sx_j + (1-2s)u_{jk} - (1-s)x_k| ds$$

et sa semi-dérivée dans la direction  $v$  est donnée par l'expression

$$\begin{aligned} de_j(x_j; v) &= \sum_{\substack{1 \leq k \leq M \\ k \neq j \\ a_{jk}=1}} \int_0^1 df(s^2 x_j + 2s(1-s)u_{jk} + (1-s)^2 x_k; v) \\ &\quad |sx_j + (1-2s)u_{jk} - (1-s)x_k| 2s^2 ds \\ &\quad + \int_0^1 f(s^2 x_j + 2s(1-s)u_{jk} + (1-s)^2 x_k) \\ &\quad \frac{sx_j + (1-2s)u_{jk} - (1-s)x_k}{|sx_j + (1-2s)u_{jk} - (1-s)x_k|} \cdot v 2s ds. \end{aligned}$$

Ici et plus bas, pour simplifier, on a commis un abus de notation en écrivant  $e_j(x_j)$ , car cette fonction dépend du vecteur  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_M)$  et de  $U = \{u_{jk}\}_{1 \leq j < k \leq M}$ .

De la même façon pour une paire d'indices tels que  $a_{jk} = 1$ , le seul terme dépendant du nœud de contrôle  $u_{jk}$  est

$$\begin{aligned} e_{jk}(u_{jk}) &\stackrel{\text{déf}}{=} \int_{C_{jk}} f d\Gamma \\ &= \int_0^1 f(s^2 x_j + 2s(1-s)u_{jk} + (1-s)^2 x_k) 2|sx_j + (1-2s)u_{jk} - (1-s)x_k| ds \end{aligned}$$

et sa semi-dérivée dans la direction  $v$  est donnée par l'expression

$$\begin{aligned} de_{jk}(u_{jk}; v) &= \int_0^1 df(s^2 x_j + 2s(1-s)u_{jk} + (1-s)^2 x_k; v) \\ &\quad |sx_j + (1-2s)u_{jk} - (1-s)x_k| 4s(1-s) ds \\ &\quad + \int_0^1 f(s^2 x_j + 2s(1-s)u_{jk} + (1-s)^2 x_k) \\ &\quad \frac{sx_j + (1-2s)u_{jk} - (1-s)x_k}{|sx_j + (1-2s)u_{jk} - (1-s)x_k|} \cdot v 2(1-2s) ds. \end{aligned}$$

La formule ci-dessus peut aussi être obtenue en introduisant le champ de vitesses particulier suivant associé au nœud de contrôle  $u_{jk}$  et la direction  $v \in \mathbb{R}^2$

$$V_{jk}(x) \stackrel{\text{déf}}{=} c_{jk}(x) v, \quad (7.27)$$

où  $c_{jk}$  est une fonction continue linéaire par morceaux telle qu'à chaque nœud  $x_{k'}$  et nœud de contrôle  $u_{j'k'}$

$$c_{jk}(x_{k'}) \stackrel{\text{déf}}{=} 0, \quad c_{jk}(u_{j'k'}) \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} 1, & \text{si } u_{j'k'} = u_{jk} \\ 0, & \text{si } u_{j'k'} \neq u_{jk}. \end{cases} \quad (7.28)$$

Pour  $t$  suffisamment petit, elle transforme le triangle  $\{x_j, x_k, u_{jk}\}$  en le triangle  $\{T_t(x_j), T_t(x_k), T_t(u_{jk})\}$  et la courbe de Bézier

$$s^2 x_j + 2s(1-s)u_{jk} + (1-s)^2 x_k \quad (7.29)$$

qui est contenue dans le triangle  $\{x_j, x_k, u_{jk}\}$  en la courbe de Bézier

$$s^2 T_t(x_j) + 2s(1-s)T_t(u_{jk}) + (1-s)^2 T_t(x_k) \quad (7.30)$$

dans le triangle  $\{T_t(x_j), T_t(x_k), T_t(u_{jk})\}$ .

Les constructions et calculs ci-dessus peuvent être étendus à la dimension trois en représentant  $\Gamma$  par des facettes triangulaires ou des surfaces triangulaires courbes avec des nœuds de contrôle.

# Chapitre 4

---

## EXPÉRIMENTATION NUMÉRIQUE

### 1. ORIENTATION

Ce chapitre donne à la fois la motivation initiale de l'ensemble de notre travail et une perspective sur ce qu'il resterait à faire, mais qu'il n'a pas été possible de réaliser dans le cadre limité d'un mémoire de maîtrise. La première section 2 reprend le modèle du ballon dont les contours sont paramétrés par les nœuds comme à la section 5.1.2 du chapitre 2, la fonction objectif définie sur les contours

$$E(\Gamma) = \int_{\Gamma} -|\nabla I_{\varepsilon}| d\Gamma + \lambda \int_{\Gamma} d\Gamma \quad (1.1)$$

avec  $\lambda > 0$  un coefficient de pénalisation de la longueur du contour, et les gradients calculés à la section 7 du chapitre 3. Pour simplifier, on remplacera le terme non-différentiable  $-|\nabla I_{\varepsilon}|$  par un canyon circulaire de pentes régulières placé au centre de l'image carrée. Cet exemple académique contient cependant toutes les caractéristiques du problème, permet de bien identifier les difficultés et enfin d'expérimenter. On verra qu'il faut procéder en plusieurs étapes : placement du ballon initial et son guidage dans un voisinage du contour recherché suivi de la localisation du contour par minimisation de la fonction objectif définie sur le contour.

La section 3 présente l'ensemble de l'expérimentation faite à partir du modèle du ballon de Gill *et al.* [68]. Cette section a été réalisée antérieurement aux chapitres précédents et elle donne des éléments plus directs pour construire les forces appliquées au ballon dans le voisinage des contours. Ceci est fait à partir

de la fonction objectif explicité en section 5.1.2 du chapitre 2 et section 7.1 du chapitre 3.

## 2. EXEMPLE DU CANYON CIRCULAIRE DANS UNE IMAGE CARRÉE

On se place dans le cadre de la minimisation d'une fonction objectif (1.1). Le calcul du terme  $-|\nabla I_\epsilon|$  à partir d'une image  $I$  est une étape préliminaire indépendante du processus de minimisation. Pour simplifier, on va considérer une image circulaire  $I$  placée au centre du cadre de l'image, avec une intensité constante égale à un sur l'image circulaire et zéro partout ailleurs dans le cadre. La régularisation  $I_\epsilon$  et le calcul de  $-|\nabla I_\epsilon|$  vont produire un *canyon* circulaire en dessous du niveau zéro.

### 2.1. Exemple académique : le canyon circulaire

Pour simplifier la première étape et se concentrer sur le problème de minimisation, on construit un exemple académique : un canyon circulaire dans un cadre carré  $D$ . Pour modéliser le canyon, on spécifie la section du canyon par la fonction polynomiale suivante définie sur l'intervalle  $[-1, 1]$

$$p(x) \stackrel{\text{déf}}{=} [x^2 - 1]^2. \quad (2.1)$$

La fonction  $p$  est centrée en  $x = 0$  et égale à 0 en  $x = \pm 1$  et à 1 en 0 et sa dérivée

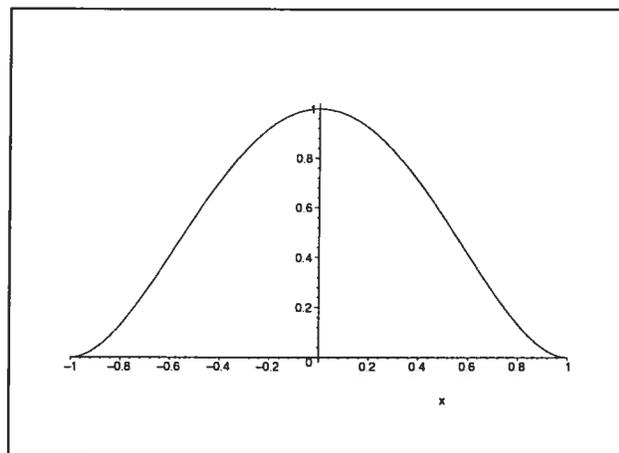


FIG. 4.1. Fonction polynomiale  $p(x)$  définie par l'équation (2.1).

est zéro en 0 et en  $x = \pm 1$ . Soient  $w > 0$ ,  $a > w$  et  $h > 0$ , trois paramètres et la

fonction

$$p_{wh}^a(r) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} -h \begin{cases} p\left(\frac{r-a}{w}\right), & a-w < r < a+w \\ 0, & 0 \leq r \leq a-w \text{ et } a+w \leq r \end{cases} \quad (2.2)$$

qui d\u00e9finit une fonction centr\u00e9e en  $a$  de largeur  $2w$  et de hauteur  $h$ . Pour une

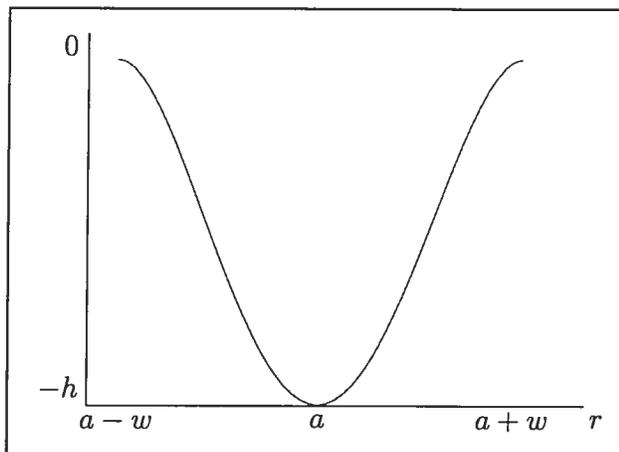


FIG. 4.2. Fonction  $p_{wh}^a(r)$  d\u00e9finie par l\u00e9quation (2.2) avec  $0 < a-w < a+w < c$ .

image carr\u00e9e de cot\u00e9  $2c > 0$ ,  $0 < w < a$  et  $a+w < c$ , on d\u00e9finit la densit\u00e9 (*canyon*)

$$g(x_1, x_2) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} p_{wh}^a\left(\sqrt{(x_1-a)^2 + (x_2-a)^2}\right), \quad |x_1| + |x_2| < c. \quad (2.3)$$

On cherche maintenant \u00e0 minimiser l\u2019int\u00e9grale

$$E(\Gamma) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \int_{\Gamma} (g + \lambda) d\Gamma \quad (2.4)$$

le long de la courbe  $\Gamma$  pour un param\u00e8tre  $\lambda > 0$  qui p\u00e9nalise la longueur de  $\Gamma$ .

## 2.2. \u00c9tape d\u2019initialisation

Il est facile de voir que si l\u2019on met un petit ballon initial dans la partie de l\u2019image o\u00f9 le terme  $g$  est z\u00e9ro, c\u2019est le terme en  $\lambda$  qui, en minimisant la longueur de la fronti\u00e8re du ballon, va le faire r\u00e9tr\u00e9cir jusqu\u2019\u00e0 sa disparition (voir figure 4.3). Il faut alors placer le ballon initial de fa\u00e7on \u00e0 ce que la fronti\u00e8re du ballon entoure le canyon de l\u2019ext\u00e9rieur. Il faut donc, avant de minimiser quoique ce soit, amener le ballon initial dans le canyon. Il faudrait aussi que cette op\u00e9ration soit

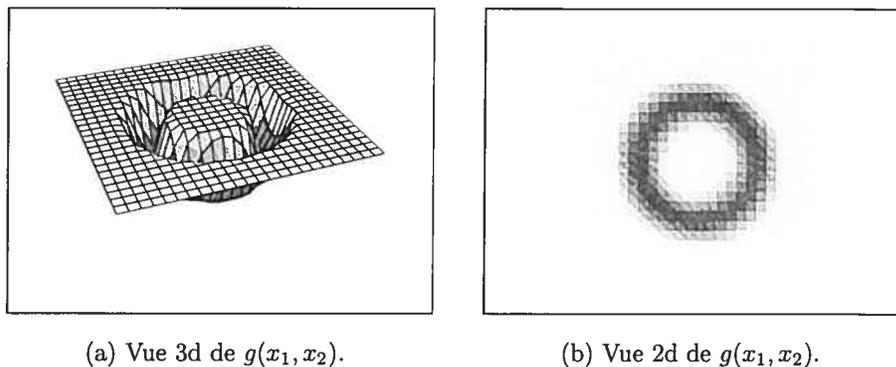


FIG. 4.3. Différentes vues de la densité  $g(x_1, x_2)$  définie par (2.3).

automatique. On retrouve ainsi la seconde étape de la méthode de Gill qui suit celle du placement du ballon initial.

Ces observations indiquent aussi que le choix de la fonction objectif n'est pas avantageux pour au moins deux raisons. La première est que l'utilisation de seulement  $\nabla I_\epsilon$  nous prive de l'information de l'image régularisée  $I_\epsilon$ . La seconde est que l'utilisation d'une fonction objectif qui est définie uniquement sur le contour augmente le risque de se trouver piégé dans une région du cadre de l'image, car elle n'utilise pas l'information donnée dans tout le cadre. C'est pour cela que la fonction objectif de Mumford et Shah (cf. section 6 du chapitre 2), qui est définie dans tout le cadre est probablement beaucoup plus intéressante tant du point de vue théorique que numérique.

### 3. BALLON DE GILL

Pour déterminer les contours des objets dans une image, Gill *et al.* [68] utilisent la *méthode du ballon* pour la segmentation semi-automatique de la carotide. L'analogie physique est de mettre un petit ballon au milieu de ce vaisseau et de le gonfler jusqu'à ce que la paroi du ballon moule bien les parois de cette artère. Si l'image comporte plusieurs objets, alors on sèmera plusieurs petits ballons initiaux. La paroi du ballon que l'on appellera *front* avance sous l'effet de la pression à l'intérieur de l'artère et se régularise par la tension superficielle de la paroi. On retrouve essentiellement la même démarche dans Magee, Bullpitt et Berry [84] pour la segmentation de réseaux vasculaires.

Il reste à déterminer comment utiliser l'image pour ralentir et arrêter le déplacement du front. L'image est une fonction  $I$  définie sur un *cadre* fixe  $D$  qui se nomme VOI ("volume of interest") selon la terminologie des auteurs. On s'attend à voir les objets de l'image dans cette région. Il faudra alors utiliser les niveaux de gris de l'image pour créer des forces qui ralentiront le front précisément sur les frontières des objets. Une frontière entre deux objets peut par exemple être déterminée par un changement brusque (même très petit) du niveau de gris, ce qui signifierait que le gradient de l'image le long de cette frontière serait impulsionnel. D'un point de vue pratique, on régularisera l'image en la convolant avec une fonction suffisamment différentiable d'intégrale égale à un, et on cherchera les lignes ou les lieux de fort gradient.

### 3.1. Méthode du ballon en dimension deux

La *méthode du ballon* de Gill *et al.* [68] est divisée en trois étapes distinctes :

- **étape 1:** le placement interactif du ballon à l'intérieur de la lumen de l'artère,
- **étape 2:** le gonflement automatique du ballon vers la paroi de l'artère,
- **étape 3:** et la localisation automatique de la paroi artérielle.

En dimension deux, la paroi du ballon est représentée par des segments extensibles entre un nombre fini de nœuds formant et définissant le front ; en dimension trois, on utilisera des facettes triangulaires. On pourra raffiner en ajoutant des nœuds de contrôle pour générer des courbes de Bézier comme en section 5.1.2 du Chapitre 2 <sup>1</sup>.

#### 3.1.1. *Ballon déformable*

Rappelons la formulation introduite en section 5.1.2 du chapitre 2 qui traite de la paramétrisation par les nœuds d'un petit ballon. Soient  $M$  points  $x_1, \dots, x_M$  dans  $\mathbb{R}^2$  et la *courbe fermée*

$$\Gamma \stackrel{\text{déf}}{=} \bigcup_{i=1}^M [x_i, x_{i+1}],$$

---

<sup>1</sup>Voir également l'annexe A pour les définitions et propriétés des courbes de Bézier.

où  $[a, b]$  représente le segment entre deux vecteurs  $a$  et  $b$  de  $\mathbb{R}^2$  et  $x_{M+1} = x_1$ . On supposera que  $\Gamma$  n'a pas de point d'intersection et que  $\Gamma$  est la frontière d'un domaine ouvert connexe  $\Omega$  que l'on appellera le *ballon*. On appellera aussi  $\Gamma$  le front et les points  $x_i$  les *nœuds* du front.

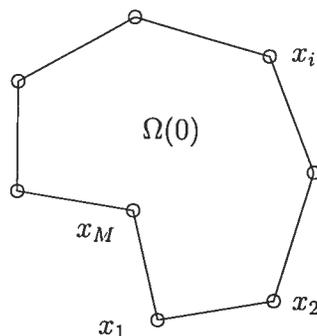


FIG. 4.4. Ballon au temps initial.

Pour déformer ce ballon, on se donne une pression en son intérieur et l'on suppose que les segments  $[x_i, x_{i+1}]$  peuvent se déformer longitudinalement comme des petits ressorts. Sous l'influence des forces résultantes, le *vecteur des nœuds*

$$x \stackrel{\text{déf}}{=} (x_1, \dots, x_M)$$

évolue en un nouveau vecteur

$$x(t) \stackrel{\text{déf}}{=} (x_1(t), \dots, x_M(t))$$

au temps  $t$  et forme un nouveau front

$$\Gamma(t) \stackrel{\text{déf}}{=} \bigcup_{i=1}^M [x_i(t), x_{i+1}(t)] \quad \text{avec} \quad x_{M+1}(t) = x_1(t).$$

On supposera que dans cette évolution,  $\Gamma(t)$  n'a toujours pas de point d'intersection et qu'il demeure la frontière d'un domaine ouvert connexe  $\Omega(t)$ . On parlera maintenant de  $\Omega$  et de son évolution  $\Omega(t)$  (voir figure 4.5) comme d'un *ballon déformable* par analogie avec un ballon physique qui se gonfle sous la pression et dont la paroi linéaire par morceaux se déforme.

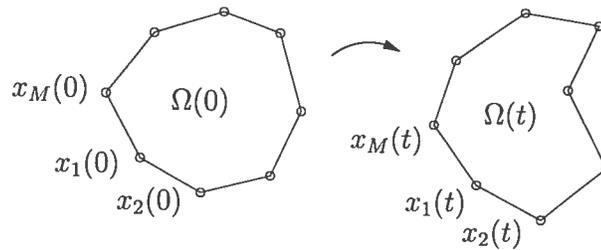


FIG. 4.5. Évolution du ballon du temps initial au temps  $t$ .

### 3.1.2. Problème de segmentation d'image

La *méthode du ballon* consiste à utiliser le ballon déformable pour détecter les positions de forte variation du gradient de la fonction  $I$ . On place un ballon initial, ou plusieurs ballons si nécessaire, dans le domaine  $D$ . Sous l'action de la pression constante, le ballon se gonfle et occupe de plus en plus d'espace jusqu'à ce qu'il rencontre un fort gradient de l'image, qui formera une barrière extérieure sur laquelle la paroi du ballon viendra buter. En augmentant la pression, le ballon se collera de plus en plus près des contours des objets, tandis que la tension dans les arêtes contribuera à régulariser ces contours.

Ces constructions s'appliquent à une image statique ou à une image dynamique  $I(t)$  qui varierait avec le temps  $t$  comme pour la détection d'objets en mouvement.

### 3.1.3. Modèle du ballon déformable

Il faut maintenant préciser les équations qui décrivent l'évolution des nœuds qui définissent le ballon  $\Omega(t)$ . On suppose que le nœud  $x_i(t)$  possède une masse  $m_i$  et qu'il subit un amortissement  $\nu_i$ . La pression à l'intérieur du ballon exerce une force  $f_i(x(t))$ , qui est la somme des forces de pression sur les arêtes adjacentes au nœud  $x_i(t)$  et une autre force  $g_i(x(t))$ , qui est la somme des forces de tension dans les arêtes adjacentes au nœud  $x_i(t)$ . Le système d'équations provenant de Terzopoulos et Vasilescu [119] s'écrit

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2}(t) + \nu_i \frac{dx_i}{dt}(t) + g_i(x(t)) = f_i(x(t)), \quad 1 \leq i \leq M. \quad (3.1)$$

On peut mettre ce système d'équations sous forme vectorielle

$$\boxed{mx''(t) + \nu x'(t) + g(x(t)) = f(x(t))} \quad (3.2)$$

où  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_M(t))$ ,  $x'(t)$  et  $x''(t)$  représentent les vecteurs vitesse et accélération du système,  $m$  correspond à la matrice diagonale des masses en chaque nœud et  $\nu$  la matrice diagonale des coefficients d'amortissement. On introduit également les fonctions vectorielles  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_M(x))$ ,  $g(x) = (g_1(x), \dots, g_M(x))$ . La figure 4.4 représente le ballon au temps initial.

L'enveloppe du ballon  $\Gamma$  est spécifiée par les  $M$  points  $x_1, \dots, x_M$ . Le segment reliant un nœud à un autre ne se déforme que longitudinalement. Le ballon évolue alors sous l'influence d'une force de pression qui le fait gonfler et d'une force de tension superficielle qui force les nœuds à se rapprocher. Selon Chen et Medioni [35], le ballon cesse de se déformer lorsqu'il y a équilibre des forces de pression et de tension superficielle

$$f(x(t)) - g(x(t)) = 0. \quad (3.3)$$

Ceci signifie que l'équilibre est atteint lorsque la vitesse et l'accélération s'annulent. Décrivons maintenant les forces qui contribuent à l'évolution du ballon.

Soit  $M(i)$  l'ensemble des indices des nœuds connectés au nœud  $x_i$

$$M(i) = \{j : 1 \leq j \leq M \text{ tel que } [x_i, x_j] \subset \Gamma\}, \quad (3.4)$$

et  $|M(i)|$  la cardinalité de  $M(i)$  qui, dans le cas d'une courbe fermée, est toujours 2 en dimension deux. En effet, par construction, les nœuds adjacents au nœud  $x_i$  sont  $x_{i-1}$  et  $x_{i+1}$ . Par contre,  $|M(i)|$  peut prendre différentes valeurs en dimension trois, dépendant par exemple du choix de la géométrie du ballon.

La résultante des forces de *tension superficielle* au nœud  $x_i(t)$ , utilisée par Gill *et al.* [68], est donnée par

$$\boxed{g(x_i(t)) = \frac{k_{\text{tens}}}{|M(i)|} \sum_{j=1}^{M(i)} \frac{e_{ij}(t)}{|e_{ij}(t)|}}, \quad (3.5)$$

où

$$e_{ij}(t) \stackrel{\text{déf}}{=} x_i(t) - x_j(t) \quad j \in M(i),$$

et  $k_{\text{tens}}$  est un coefficient d'intensité donné. Ils supposent donc que la résultante des forces de tension superficielle est portée par la somme des vecteurs normalisés

$$\sum_{j=1}^{|M(i)|} \frac{e_{ij}(t)}{|e_{ij}(t)|}$$

pour les nœuds  $x_j(t)$  connectés au nœud  $x_i(t)$ .

Dans le cas bidimensionnel, on peut représenter l'action, sur le nœud  $x_i$ , des deux forces de tension superficielle reliées aux nœuds  $x_{i-1}$  et  $x_{i+1}$  par la figure 4.6.

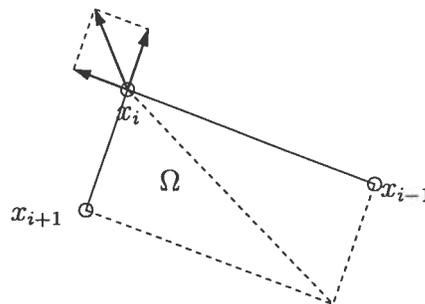


FIG. 4.6. Force de tension superficielle au nœud  $x_i$ .

À l'étape 2, on suppose que le ballon est maintenu à une *pression interne*  $k_{\text{inf}}$  qui produit une force normale extérieure à la paroi du ballon

$$f_{\text{inf}}(x_i(t)) = \begin{cases} k_{\text{inf}} n_i(t), & \text{si } I(x_i(t)) \leq T \text{ et } x_i(t) \in \text{VOI}; \\ 0 & \text{autrement,} \end{cases} \quad (3.6)$$

où  $k_{\text{inf}}$  est l'amplitude de la force de pression interne et  $n_i(t)$  est le vecteur normal<sup>2</sup> au nœud  $x_i(t)$ , lequel est calculé comme étant la moyenne des normales de chaque segment attaché au nœud.

Cela correspond à l'hypothèse que la force due à la pression est la même sur chaque arête. En fait, mécaniquement parlant, une force de pression réelle

<sup>2</sup>Le terme "normal" est un abus de langage, car en général il n'y a pas une seule normale en un point anguleux, mais un *cône de directions normales*. Les auteurs choisissent la direction normale égale à la moyenne des vecteurs normaux extérieurs aux segments qui sont adjacents au nœud  $x_i(t)$ .

devrait être proportionnelle à la longueur de l'arête comme illustré en figure 4.7. Cependant dans le problème d'image, le ballon n'est pas physique et l'on peut utiliser d'autres hypothèses pour l'objectif visé.

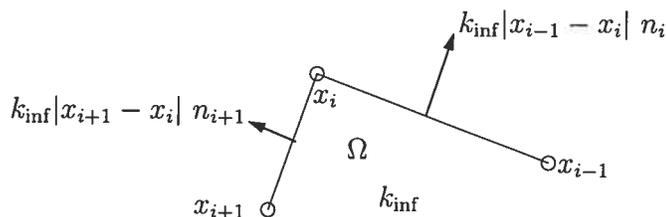


FIG. 4.7. Force de pression interne au nœud  $x_i$ .

VOI correspond au cadre  $D$  dans lequel est définie la fonction  $I$  désignant le niveau de gris de l'image. Le paramètre  $T$  est un seuil de niveau de gris en dessus duquel les auteurs mettent la force de pression à zéro.

À l'étape 3 de l'algorithme de Gill *et al.* [68], la force de pression interne est remplacée par une fonction *potentiel*  $P$  construite à partir de l'image  $I$  et définie par

$$P = \frac{1}{\|(\nabla G_\varepsilon^2 * I)\| + c}, \quad (3.7)$$

où “\*” désigne l'opérateur de convolution,  $G_\varepsilon^2$  un filtre gaussien d'écart-type  $\varepsilon$ , et  $c$  une petite constante positive qui empêche la division par 0.

Ils prennent ensuite le gradient du produit convolé dans le but d'obtenir les variations brusques de niveau de gris et ainsi dévoiler les contours des objets de l'image. Donc, l'ensemble des minimums de la fonction de potentiel  $P$  coïnciderait avec la frontière du domaine  $\Omega$ . En effet, lorsque la variation de niveau de gris est très brusque, la fonction de potentiel  $P$  prend une valeur très petite. Ils utilisent la fonction de potentiel  $P$  pour produire un *champ de forces*

$$f_{\text{edge}}(x(t)) = -k_{\text{edge}} \nabla P(x(t)) \quad (3.8)$$

déformant le ballon où  $k_{\text{edge}}$  représente un coefficient d'intensité.

### 3.1.4. Modèle du ballon simplifié

Comme on l'a vu plus haut, le concept du ballon est quelque peu artificiel et n'a d'autre but que d'introduire des équations qui gouvernent la propagation du front. Ce qui compte vraiment c'est le ou les points d'équilibre. En particulier, il est avantageux de remplacer les équations du deuxième ordre par des équations du premier ordre ayant le ou les mêmes points d'équilibre. Dans Gill *et al.* [68], on considère l'équation différentielle

$$\boxed{\frac{dx}{dt}(t) = f(x(t)) - g(x(t))}. \quad (3.9)$$

L'équilibre de cette dernière équation est atteint lorsque  $f = g$ , i.e. aux mêmes points que dans la forme générale (3.1). L'équation (3.9) est plus simple à mettre en œuvre numériquement et selon Chen et Medioni [35] elle atteint l'équilibre plus rapidement puisque le système ne possède pas d'inertie et qu'elle demande moins d'opérations. Pour calculer la position d'équilibre de chaque nœud, Gill *et al.* [68] utilisent le schéma explicite aux différences finies d'Euler. L'algorithme itère dans le temps jusqu'à ce que la norme de la vitesse soit inférieure à un certain seuil  $\sigma > 0$  constant, prédéterminé et assez petit.

## 4. MISE EN ŒUVRE DE QUELQUES SCÉNARIOS EN DIMENSION DEUX

On considère quelques scénarios d'évolution du ballon et la mise en œuvre de schémas numériques correspondants afin d'acquérir une meilleure intuition du comportement du ballon. On introduit une variante du modèle de Gill *et al.* [68] en modifiant les forces  $f$  et  $g$  pour se rapprocher un peu de la physique d'un ballon déformable.

### 4.1. Nouvelles définitions des forces $f$ et $g$

On redéfinit les fonctions  $f$  et  $g$  de la façon suivante :

$$f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) = p|x_{i-1} - x_i|n_i + p|x_{i+1} - x_i|n_{i+1}; \quad (4.1)$$

$$g(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) = \tau(x_{i-1} - x_i) + \tau(x_{i+1} - x_i), \quad (4.2)$$

où  $p$  est le coefficient de la force de pression interne du ballon et  $\tau$  le coefficient de la force de tension superficielle entre les nœuds. Dans le tableau 4.1, on étudie les différences entre les fonctions  $f$  et  $g$  données par les équations (4.1) et (4.2) et celles données par les équations (3.5) et (3.6) de Gill *et al.* [68]. De plus, on représente les nouvelles définitions des forces de pression interne  $f$  et de tension superficielle  $g$  sur la figure 4.8.

<b>Force de pression interne</b>	
$f$ de Gill <i>et al.</i> [68]	$f$ de l'équation (4.1)
<ul style="list-style-type: none"> <li>• La même pression sur chaque arête;</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Pression proportionnelle à la longueur de l'arête;</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Direction normale calculée avec la "moyenne" des directions normales (voir l'équation (3.6));</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Direction normale calculée sans utilisation de "moyenne" (voir la figure 4.7);</li> </ul>
<b>Force de tension superficielle</b>	
$g$ de Gill <i>et al.</i> [68]	$g$ de l'équation (4.2)
<ul style="list-style-type: none"> <li>• La force de tension est calculée comme une moyenne.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• La force de tension est calculée seulement comme une somme.</li> </ul>

TAB. 4.1. Différences entre les forces de pression interne et de tension superficielle de Gill et celles des équations (4.1) et (4.2).

#### 4.2. Scénario A : modèle de Gill

Dans cette section, on fait évoluer des fronts initiaux sous l'effet des forces de Gill *et al.* [68] définies par les équations (3.5) et (3.6). L'équation différentielle (3.9) d'ordre un du modèle simplifié est utilisée pour déformer le ballon et

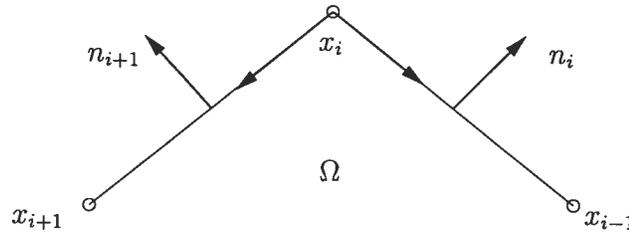


FIG. 4.8. Représentation des nouvelles forces de pression interne et de tension superficielle.

l'on réécrit l'équation en posant  $F = f - g$  :

$$\boxed{\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x) - g(x) = F(x); \\ x(0) = x_0. \end{cases}} \quad (4.3)$$

#### 4.2.1. Schéma de discrétisation

On choisit de mettre en œuvre une méthode aux différences finies pour résoudre l'équation différentielle.

**Remarque 4.1.** On rappelle que la fonction  $F_i$  ne dépend que de  $x_i(t)$  et de ses voisins. On écrira  $x_i^k$  pour la position du nœud  $i$  au temps  $t^k = k\Delta t$ .

On utilise un schéma explicite d'Euler et on approche la dérivée première avec la formule

$$\frac{d}{dt}x_i \simeq \frac{x_i^{k+1} - x_i^k}{\Delta t}.$$

L'équation approchée devient

$$\frac{x_i^{k+1} - x_i^k}{\Delta t} = F_i(x_{i-1}^k, x_i^k, x_{i+1}^k).$$

Cette méthode nous permet une programmation simple et un minimum d'opérations à effectuer. En introduisant la notation  $F_i^k \stackrel{\text{def}}{=} F_i(x_{i-1}^k, x_i^k, x_{i+1}^k)$ , la solution approchée au nœud  $x_i^{k+1}$  en fonction du nœud  $x_i^k$  est donnée par

$$x_i^{k+1} = x_i^k + \Delta t F_i^k \quad \text{avec} \quad x_i^0 = (x_0)_i. \quad (4.4)$$

### 4.2.2. Résultats numériques

Tout d'abord on doit préciser que l'on observe la propagation du front sous l'effet des forces appliquées sans être limité par un cadre  $D$ . On veut observer le comportement du ballon et alors on fixe les différentes constantes de l'équation différentielle (4.3) et de la fonction  $F$  avec

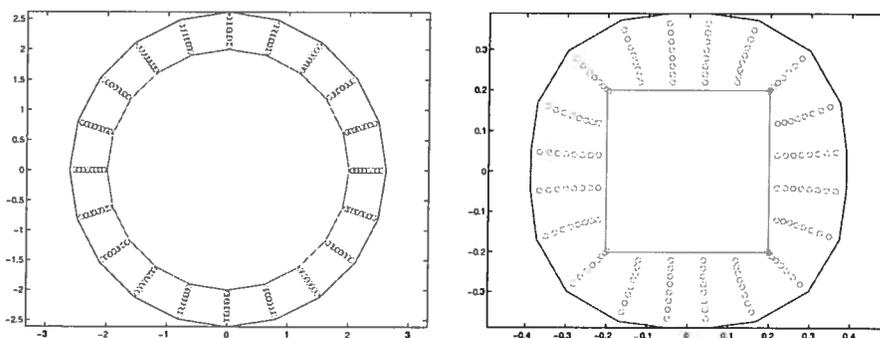
$$\nu_i = 1 \quad i = 1, \dots, Nb_{nod} ;$$

$$p = 10 \quad \text{et} \quad \tau = 1,$$

avec  $Nb_{nod}$  le nombre de nœuds constituant le ballon initial. Les paramètres pour les ballons initiaux sont

$$\text{Cercle : } Nb_{nod} = 20 \quad \text{et} \quad \Delta t = 0.01;$$

$$\text{Carré : } Nb_{nod} = 20 \quad \text{et} \quad \Delta t = 0.025.$$



(a) Cercle centré en  $(0,0)$  de rayon 2,  $Nb_{nod} = 20$ ,  $\Delta t = 0.01$  et nombre itérations=10.

(b) Carré centré en  $(0,0)$  de longueur 0.4,  $Nb_{nod} = 20$ ,  $\Delta t = 0.025$  et nombre itérations=10.

FIG. 4.9. Évolution de différents fronts initiaux avec le schéma numérique du modèle de Gill *et al.* [68] de l'équation (4.3).

On remarque sur la figure 4.9 que la propagation des fronts semble concorder avec la définition des forces impliquées dans l'équation différentielle (3.9). On s'attend à ce que le front circulaire de la figure 4.9(a) évolue de façon à garder la forme circulaire. C'est ce qui se passe pour l'instant. Le carré de la figure 4.9(b) semble également prendre une forme circulaire lorsque le ballon se gonfle.

On se demande si les ballons arrêtent de se gonfler à partir d'un certain temps. On veut vérifier si après un certain nombre d'itérations la force de tension compense la force de pression dans le modèle de Gill *et al.* [68]. La figure 4.10 montre qu'il se passe autre chose lorsque l'on atteint environ 500 itérations et plus. À cet instant, les nœuds se situent à environ  $10^6$  unités de l'origine (centre du ballon).

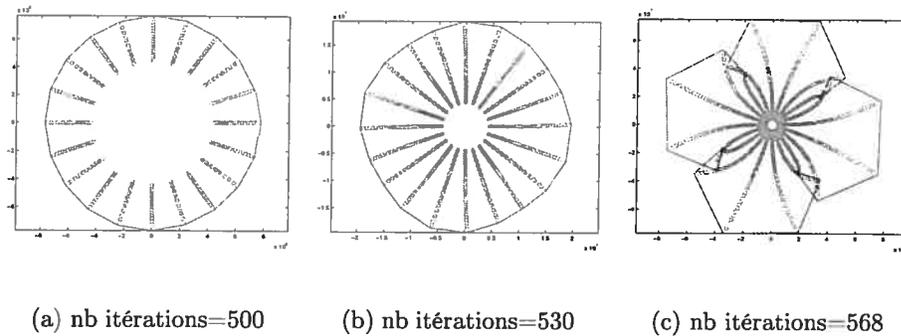


FIG. 4.10. Évolution d'un front circulaire centré en  $(0,0)$  de rayon 2,  $Nb_{nod} = 20$ ,  $\Delta t = 0.01$  pour la 480-ième itération et plus.

En augmentant continuellement le nombre d'itérations on remarque (voir figure 4.10) que certains nœuds viennent croiser des nœuds voisins. Ce phénomène insensé est probablement dû au manque de consistance de la physique du ballon. En effet, les auteurs ont utilisé des définitions des forces de pression interne et de tension superficielle différentes des lois naturelles de la physique. À environ 500 itérations, certains nœuds courbent et prennent une trajectoire tout à fait inattendue. L'observation n'est vérifiée que numériquement.

On se pose la même question pour le ballon carré et l'on suppose que ce sera sensiblement le même problème. En effet, on obtient le même genre de résultat mais beaucoup plus tôt. Certains nœuds commencent à se croiser dès l'itération 25 comme en témoigne la figure 4.11. On remarque que ce sont les paires de nœuds se situant au centre de chaque côté du carré qui sont les premières à se rejoindre. On observe sur la figure 4.11(c) que les prochains nœuds à se rejoindre sont les voisins immédiats des nœuds qui se sont croisés en premier. En effet, il y a une sorte de rotation qui s'installe entre les nœuds qui se coupent chacun leur tour. Seuls les nœuds situés aux 4 coins du carré évoluent en ligne droite.

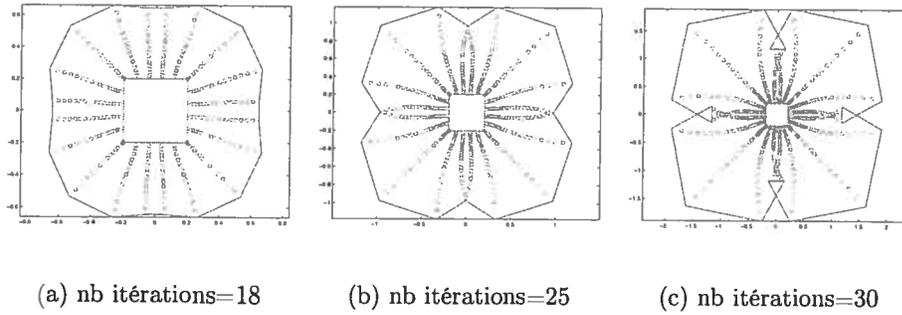


FIG. 4.11. Évolution d'un front carré centré en  $(0,0)$  de longueur 0.4,  $Nb_{nod} = 20$ ,  $\Delta t = 0.025$  pour certains nombres d'itérations.

#### 4.2.3. Difficultés rencontrées

La présence des phénomènes illustrés aux figures 4.10 et 4.11 peut être expliquée par le fait que les forces  $f$  et  $g$  de Gill *et al.* [68] ne concordent pas avec la physique réelle d'un ballon. Ce comportement n'est pas étudié dans [68]. Peut-être parce que la fonction de pression interne  $f_{inf}$  est remplacée par la fonction de potentiel  $P$  avant que le phénomène surgisse. De plus, les notions de stabilité et de convergence ne sont pratiquement pas traitées. Il est difficile de vérifier et de contrôler certains critères numériques lorsqu'il n'y a pas ou peu d'informations théoriques.

#### 4.3. Scénario B : modèle d'ordre deux

Soit le système différentiel d'ordre deux avec conditions initiales

$$\begin{cases} m \frac{d^2 x}{dt^2}(t) + \nu \frac{dx}{dt}(t) = F(x(t)); \\ \frac{dx}{dt}(0) = \dot{x}_0; \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (4.5)$$

qui servira à déformer le ballon.

### 4.3.1. Schéma de discrétisation

On utilise un schéma explicite aux différences finies, et on approche les dérivées première et seconde au temps  $t^k$  avec les formules

$$\frac{d^2}{dt^2}x_i \simeq \frac{x_i^{k+2} - 2x_i^{k+1} + x_i^k}{(\Delta t)^2} \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt}x_i \simeq \frac{x_i^{k+1} - x_i^k}{\Delta t}.$$

On remplace ensuite les approximations dans l'équation (4.5) et on obtient

$$m_i \left( \frac{x_i^{k+2} - 2x_i^{k+1} + x_i^k}{(\Delta t)^2} \right) + \nu_i \left( \frac{x_i^{k+1} - x_i^k}{\Delta t} \right) = F_i(x_{i-1}^k, x_i^k, x_{i+1}^k).$$

En utilisant la notation  $F_i^k \stackrel{\text{déf}}{=} F_i(x_{i-1}^k, x_i^k, x_{i+1}^k)$ , la solution approchée au nœud  $x_i^{k+2}$  en fonction des nœuds  $x_i^{k+1}$  et  $x_i^k$  est donnée par

$$x_i^{k+2} = \left( 2 - \frac{\nu_i}{m_i} \Delta t \right) x_i^{k+1} + \left( \frac{\nu_i}{m_i} \Delta t - 1 \right) x_i^k + \frac{(\Delta t)^2}{m_i} F_i^k, \quad (4.6)$$

avec  $x_i^0 = (x_0)_i$  et  $x_i^1 - x_i^0 = \Delta t(\dot{x}_0)_i$ .

### 4.3.2. Résultats numériques

On ne limite pas le domaine par un cadre. On observe tout simplement comment le front se propage sous l'effet des forces appliquées. On fixe les valeurs des différentes constantes de l'équation différentielle (4.5) et de la fonction  $F = f - g$  des équations (4.1) et (4.2) avec

$$\nu_i = m_i = 1 \quad i = 1, \dots, Nb_{nod} ;$$

$$p = 10 \quad \text{et} \quad \tau = 1.$$

On choisit

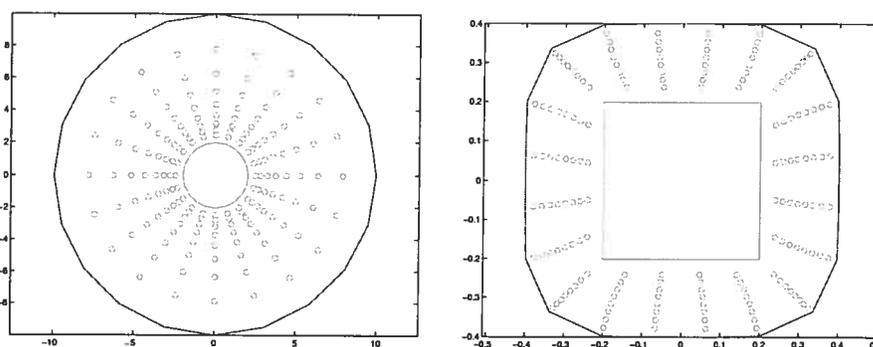
$$Nb_{nod} = 20 \quad \text{et} \quad \Delta t = 0.1$$

pour l'évolution des ballons de formes circulaires et carrées. La figure 4.12 montre l'évolution de ces deux ballons initiaux. Entre autres, on remarque que les forces de pression permettent aux nœuds de se distancer tandis que les forces de tension tentent de maintenir une distance égale entre chacun des nœuds. De plus, le front circulaire garde la même forme tandis que le front carré semble vouloir prendre une forme circulaire. La pression étant constante, le ballon évolue continuellement sans atteindre une position d'équilibre. En effet, le ballon ne cesse d'évoluer que

lorsque les nœuds rencontrent la valeur  $NAN$  ("Not A Number"). Physiquement on devrait avoir

$$pV = C \quad \text{avec} \quad \begin{cases} p & \text{pression interne;} \\ V & \text{volume du ballon;} \\ C & \text{constante.} \end{cases}$$

On remarque également que plus l'arête est longue  $\Rightarrow$  plus la force de pression est grande  $\Rightarrow$  plus les nœuds avancent vite et inversement.



(a) Cercle centré en  $(0,0)$  de rayon 2,  $Nb_{nod} = 20$ ,  $\Delta t = 0.1$  et nombre d'itérations=10.

(b) Carré centré en  $(0,0)$  de longueur 0.4,  $Nb_{nod} = 20$ ,  $\Delta t = 0.1$  et nombre d'itérations=10.

FIG. 4.12. Évolution de différents fronts initiaux avec le schéma numérique du modèle d'ordre deux de l'équation (4.5).

#### 4.3.3. Difficultés rencontrées

Tout d'abord, nous savons que les schémas explicites sont stables sous certaines conditions (e.g. la condition CFL (Courant-Friedrichs-Levy)), c'est-à-dire qu'ils ne sont pas inconditionnellement stables. Puisque l'étude de la stabilité n'a pas été effectuée, il est difficile, de façon numérique, de trouver une relation entre le pas de temps  $\Delta t$ , le pas dans l'espace  $\Delta x$ , la masse  $m$  et le coefficient d'amortissement  $\nu$ . On retrouve le même genre de problème pour la fixation des coefficients de pression interne  $p$  et de tension superficielle  $\tau$  lors du calcul de  $f$  et  $g$ . On procède donc par tests, tâtonnements et réajustements. Par contre, ces

résultats nous aident à acquérir, dans un premier temps, une intuition numérique de la mise en œuvre et du comportement du ballon en fonction de la valeur des paramètres.

#### 4.4. Scénario C : modèle d'ordre un

On reprend l'équation (3.1) en posant  $\nu = 1$  et  $m = 0$ . On fait alors évoluer les points du ballon sans accélération. On retrouve une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants de la forme

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x); \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (4.7)$$

##### 4.4.1. Schéma de discrétisation

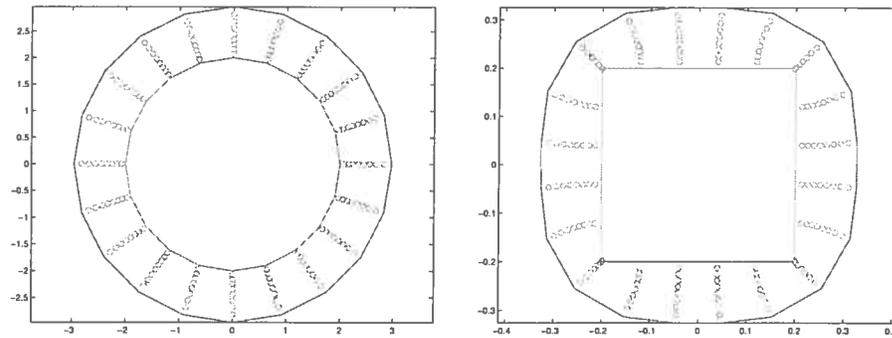
On utilise le même schéma de discrétisation qu'à la section 4.2.1. On choisit donc un schéma explicite d'Euler et seule la fonction  $F = f - g$  est définie d'une manière différente.

##### 4.4.2. Résultats numériques

Encore une fois on observe le front se propager sous l'effet des forces appliquées. On fixe les valeurs des différentes constantes de l'équation différentielle (4.7) et de la fonction  $F = f - g$  des équations (4.1) et (4.2) de la même façon qu'à la section 4.3.2 à l'exception que  $m_i = 0 \forall i$ . On choisit

$$Nb_{nod} = 20 \quad \text{et} \quad \Delta t = 0.1$$

pour l'évolution du ballon initial en forme carrée. Par contre pour le ballon initial de forme circulaire, on modifie le pas de temps par  $\Delta t = 0.01$ . On ajuste le pas de temps parce que les nœuds du ballon final sont situés à des valeurs beaucoup trop élevées. La figure 4.13 montre l'évolution des deux ballons initiaux. On a les mêmes remarques qu'à la section 4.3.2 sur l'effet des forces de pression et de tension. De plus, le front circulaire garde la même forme tandis que le front carré semble vouloir prendre une forme circulaire. Les remarques sur le point d'équilibre du système sont les mêmes qu'en section 4.3.2. Puisqu'il n'y a pas d'accélération, on aperçoit que la distance entre le même nœud  $i$  du cercle est la



(a) Cercle centré en (0,0) de rayon 2,  $Nb_{nod} = 20$ ,  $\Delta t = 0.01$  et nombre itérations=10

(b) Carré centré en (0,0) de longueur 0.4,  $Nb_{nod} = 20$ ,  $\Delta t = 0.1$  et nombre itérations=10

FIG. 4.13. Évolution de différents fronts initiaux avec le schéma numérique de l'équation (4.7).

même, itération après itération. Ce qui n'était pas le cas pour le scénario B (voir figure 4.12). Évidemment le temps de calcul est plus rapide puisqu'il y a moins d'opérations à effectuer.

#### 4.4.3. Difficultés rencontrées

On rencontre les mêmes difficultés qu'à la section 4.3.3. Rien de nouveau.

## 5. FORCES DIRECTEMENT CALCULÉES À PARTIR DE LA FONCTION OBJECTIF

En utilisant les notations et les gradients calculés à la section 7 du chapitre 3 pour la fonction objectif (1.1) avec  $f = -|\nabla I_\epsilon| + \lambda$  ou, de façon plus générale,  $f = g + \lambda$  pour un  $g$  dérivable, le modèle du ballon prend la forme du système d'équations différentielles

$$\boxed{\frac{d\vec{x}(t)}{dt} + \nabla e(\vec{x}(t)) = 0.} \quad (5.1)$$

où

$$e(\vec{x}) \stackrel{\text{déf}}{=} E(\Gamma(\vec{x}, A)) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^M e_j(\vec{x}) \quad (5.2)$$

et avec  $f = g + \lambda$

$$e_j(\vec{x}) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \sum_{\substack{1 \leq k \leq M \\ k \neq j \\ a_{jk}=1}} E(C_{jk}) = \sum_{\substack{1 \leq k \leq M \\ k \neq j \\ a_{jk}=1}} \int_0^1 f(sx_j + (1-s)x_k) |x_j - x_k| ds \quad (5.3)$$

et sa semi-d\u00e9riv\u00e9e dans la direction  $v$  est donn\u00e9e par l'expression

$$de_j(\vec{x}; \vec{v}_j) = \sum_{\substack{1 \leq k \leq M \\ k \neq j \\ a_{jk}=1}} \int_0^1 df(sx_j + (1-s)x_k; v_j) |x_j - x_k| s ds. \\ + \frac{x_j - x_k}{|x_j - x_k|} \cdot v_j \int_0^1 f(sx_j + (1-s)x_k) ds$$

Donc si  $\vec{v} = (v_1, \dots, v_M)$  est une direction de  $(\mathbb{R}^2)^M$  et  $\vec{v}_j = (0, \dots, 0, v_j, 0, \dots, 0)$ , alors

$$\boxed{de(\vec{x}; \vec{v}) = \sum_{j=1}^M de_j(\vec{x}; \vec{v}_j).} \quad (5.4)$$

Comme  $f = g + \lambda$  est d\u00e9rivable, les d\u00e9riv\u00e9es existent et

$$\nabla e(\vec{x}) \cdot \vec{v} = \sum_{j=1}^M \sum_{\substack{1 \leq k \leq M \\ k \neq j \\ a_{jk}=1}} \int_0^1 \nabla g(sx_j + (1-s)x_k) \cdot v_j |x_j - x_k| s ds \\ + \frac{x_j - x_k}{|x_j - x_k|} \cdot v_j \int_0^1 [g(sx_j + (1-s)x_k) + \lambda] ds.$$

Il ne reste plus qu'\u00e0 calculer le gradient de  $g$  :

$$\nabla g(x_1, x_2) = (p_{wh}^a)' \left( \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right) \frac{(x_1, x_2)}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \\ (p_{wh}^a)'(r) = -h \begin{cases} \frac{1}{w} p' \left( \frac{r-a}{w} \right), & a - w < r < a + w \\ 0, & 0 \leq r \leq a - w \text{ et } a + w \leq r \end{cases} \\ p'(r) = 4r [r^2 - 1].$$

\u00c9tant donn\u00e9s les outils en main, il serait int\u00e9ressant de mettre en \u0153uvre cette derni\u00e8re technique.

# Annexe A

---

## COURBES DE BÉZIER

Dans le contexte de la paramétrisation par les nœuds introduite en § 5.1.2 du chapitre 2, on peut également choisir de faire passer des courbes entre chacun des nœuds. On peut alors remplacer les arêtes par des *courbes de Bézier* ou des *B-splines*. En effet, chaque segment de courbe peut être représenté par un polygone de Bézier. La courbe est intimement liée à son polygone de Bézier formé par les nœuds sur la courbe et des nœuds de contrôle. Par exemple, ils ont les mêmes extrémités et la même tangente en ce point, la courbe se trouve dans l'enveloppe convexe de son polygone de Bézier,

### 1. DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS

Définissons d'abord les *polynômes de Bernstein* qui seront utiles par la suite pour définir les courbes de Bézier.

**Définition 1.1.** Soit  $n$  un entier non-négatif. Pour tout  $i \in \{0, \dots, n\}$  le polynôme de Bernstein de degré  $n$   $B_i^n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est donné par

$$B_i^n(t) \stackrel{\text{déf}}{=} C(n, i) t^i (1-t)^{n-i} \quad \text{où} \quad C(n, i) = \frac{n!}{(n-i)! i!}, \quad (1.1)$$

et provient de l'expansion binomiale

$$1 = (t + (1-t))^n = \sum_{i=0}^n C(n, i) t^i (1-t)^{n-i}.$$

La famille  $\{B_i^n\}_{i \in \{0, \dots, n\}}$  forme une base pour l'espace des polynômes à une variable de degré inférieur ou égal à  $n$ . On s'intéresse uniquement aux restrictions de ces polynômes à l'intervalle  $[0, 1]$  et aux quelques propriétés suivantes :

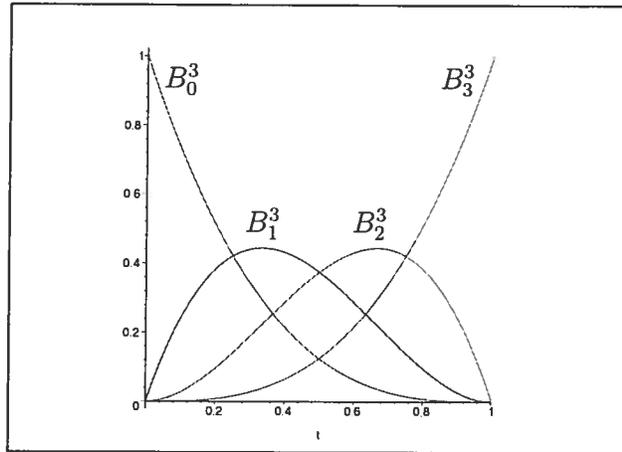


FIG. A.1. Polynômes de Bernstein de degré  $n = 3$  sur  $[0, 1]$ .

(i) ils sont *positifs* pour tout  $t \in [0, 1]$ ,

$$0 \leq B_i^n(t) \leq 1, \quad \forall i \in \{0, \dots, n\};$$

(ii) ils forment une *partition de l'unité*,

$$\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1, \quad \forall t \in [0, 1];$$

(iii) ils sont *symétriques* pour tout  $t \in [0, 1]$ ,

$$B_i^n(t) = B_{n-i}^n(1-t), \quad \forall i \in \{0, \dots, n\};$$

(iv) ils satisfont la *formule de récursion*,

$$B_i^n(t) = (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t), \quad \forall i \in \{0, \dots, n\}$$

pour tout  $t \in [0, 1]$  avec la convention  $B_i^n(t) = 0$  si  $i < 0$  ou  $i > n$  et  $B_0^0(t) = 0$ ;

(v) ils sont *différentiables* pour tout  $t \in [0, 1]$ ,

$$(B_i^n)'(t) = n(B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)), \quad \forall i \in \{0, \dots, n\}.$$

On s'intéresse aux courbes de Bézier planes mais le résultat se généralise en dimension  $N$  (voir Prautzsch *et al.* [102]).

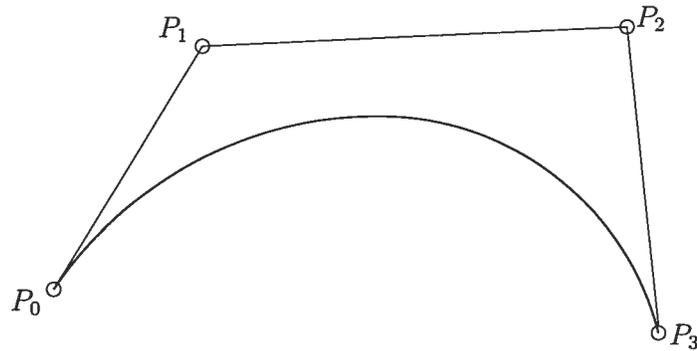


FIG. A.2. Un segment de courbe cubique et sa *courbe de Bézier*  $\mathcal{B}$  sur l'intervalle  $[a, b]$  pour  $t \in [0, 1]$ .

**Définition 1.2.** Soient  $P_0, P_1, \dots, P_n$  des points du plan. La courbe de Bézier associée à cet ensemble de points est la courbe paramétrique polynomiale de degré  $n$  définie par

$$\mathcal{B}_n(P_0, P_1, \dots, P_n; \cdot) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \mathcal{B}_n(P_0, P_1, \dots, P_n; t) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{i=0}^n B_i^n(t) P_i. \quad (1.2)$$

Les points  $P_0, P_1, \dots, P_n$  s'appellent les *nœuds de contrôle* de la courbe de Bézier et le polygone  $P_0P_1 \dots P_n$  le polygone de Bézier ou le  $\mathcal{B}$ -polygone.

Les courbes de Bézier ont des propriétés géométriques intéressantes :

- (i) la courbe a les *mêmes extrémités* que son  $\mathcal{B}$ -polygone ;
- (ii) la courbe est *incluse* dans l'enveloppe convexe de son  $\mathcal{B}$ -polygone ;
- (iii) la courbe est *symétrique* en  $t$  :

$$\mathcal{B}_n(P_0, P_1, \dots, P_n; 1 - t) = \mathcal{B}_n(P_n, P_{n-1}, \dots, P_0; t).$$

- (iv) les droites  $\overline{P_0P_1}$  et  $\overline{P_{n-1}P_n}$  sont respectivement *tangentes* à la courbe en  $P_0$  et  $P_n$ .

Ce qui complète le survol rapide des caractéristiques des courbes de Bézier.

## BIBLIOGRAPHIE

---

1. D. ADALSTEINSSON ET J.A. SETHIAN, *A fast level set method for propagating interfaces*, J. Computational Physics 118 (1995), 269–277.
2. D. ADALSTEINSSON ET J.A. SETHIAN, *The Fast Construction of Extension Velocities in Level Set Methods*, J. Computational Physics 148 (1999), 2–22.
3. R.A. ADAMS, *Sobolev spaces*, Academic Press, New York, London, (1975).
4. L. ALVAREZ, F. GUICHARD, P.-L. LIONS ET J.-M. MOREL, *Axioms and fundamental equations of image processing*, Arch. Rational Mech. Anal. 123 (1993), no. 3, 199–257.
5. L. ALVAREZ, P.-L. LIONS ET J.-M. MOREL, *Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion. II*, SIAM J. Numer. Anal. 29 (1992), no. 3, 845–866.
6. L. AMBROSIO, *Existence theory for a new class of variational problems*, Arch. Rational Mech. Anal. 111 (1990), No. 4, 291–322.
7. L. AMBROSIO, *Variational problems in SBV and image segmentation*, Acta Appl. Math. 17 (1989), no. 1, 1–40.
8. L. AMBROSIO, V. CASELLES, S. MASNOU ET J.-M. MOREL, *Connected components of sets of finite perimeter and applications to image processing*, J. Eur. Math. Soc. 3 (2001), 39–92.
9. S. ANGENENT, *The zero set of a solution of a parabolic equation*, J. Reine Angew. Math. 390 (1988), 79–96.
10. S. ANGENENT, *Parabolic equations for curves on surfaces. I. Curves with  $p$ -integrable curvature*, Ann. of Math. (2) 132 (1990), no. 3, 451–483.
11. S. ANGENENT, *Parabolic equations for curves on surfaces. II. Intersections, blow-up and generalized solutions*, Ann. of Math. (2) 133 (1991), no. 1, 171–215.

12. S. ANGEMENT ET M. E. GURTIN *Multiphase thermomechanics with interfacial structure. II. Evolution of an isothermal interface*, Arch. Rational Mech. Anal. 108 (1989), no. 4, 323–391.
13. V. I. ARNOLD, *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag New York (1983).
14. G. AUBERT ET L. BLANC-FÉRAUD, *Some remarks on the equivalence between 2D and 3D classical snakes and geodesic active contours*, International Journal of Computer Vision Vol. 34, No. 1, (1999), 19–28.
15. J.-F. AUJOL ET G. AUBERT, *Signed distance functions and viscosity solutions of discontinuous Hamilton- Jacobi equations*, à paraître (2004).
16. G. BARLES, *Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi*, Springer-Verlag (1994).
17. G. BARLES, H. M. SONER ET P. E. SOUGANIDIS, *Front propagation and phase field theory*, SIAM J. Control and Optimisation 31 (2) March (1993), 439–469.
18. A. BLAKE ET A. ZISSERMAN, *Visual Reconstruction*, MIT Press, Cambridge (1987).
19. J. BLAT ET J.-M. MOREL, *Elliptic problems in image segmentation and their relation to fracture theory*, Recent advances in nonlinear elliptic and parabolic problems (Nancy, 1988), 216–228, Pitman Res. Notes Math. Ser., 208, Longman Sci. Tech., Harlow, 1989.
20. H. BLUM, *A transformation for extracting view description of shapes*, in “Models for perception of speech and visual form”, W. Wathen-Dunn, ed., pp. 362–380, MIT Press, Cambridge Mass., (1967).
21. A. BOSNJAK, V. BURDIN, V. TORREALBA, G. MONTILLA, B. SOLAIMAN ET C. ROUX, *Dynamical segmentation of the left ventricle in echocardiographic image sequences*, Engineering in Medecine and Biology Society, 2001, Proceedings of the Annual International Conference of the IEEE, Vol. 3, 25–28, (2001), 2634–2637.
22. A. BOSNJAK, V. TORREALBA, G. MONTILLA, H. VILLEGAS, V. BURDIN, B. SOLAIMAN ET C. ROUX, *Segmentation, reconstruction, modeling and 3D visualization of the ventricles in echocardiographic images*, Image and Signal Processing and Analysis, 2001, Proceedings of the 2<sup>th</sup> International Symposium on, 19–21, (2001), 260–264.

23. R. BRACEWELL, *The Fourier transform and its applications*, in McGraw-Hill, New York 1965.
24. A. BRAKKE, *The motion of a surface by its mean curvature*, Princeton University Press, Princeton, NJ 1978.
25. D. BUCUR ET J.-P. ZOLÉSIO, *Free boundary problems and density perimeter*, J. Differential Equations 126 (1996), pp. 224–243.
26. F.W. CAMPBELL ET J.G. ROBSON, *Applications of Fourier Analysis to the visibility of grating*, J. Physiol., Lond. 197 (1968), 551–556.
27. J.F. CANNY, *A computational approach to edge detection*, IEEE Trans. on PAMI 8, no. 6 (1986), 679–698.
28. S. CASADEI ET S. MITTER, *Hierarchical image segmentation—part I : detection of regular curves in a vector graph*, Int. J. of Computer Vision 27, no. 1 (1998), 71–100.
29. V. CASELLES, *Geometric models for active contours*, Proceedings 5th IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV'95), Cambridge, Mass 1995, 694–699
30. V. CASELLES, F. CATTÉ, T. COLL ET F. DIBOS, *A geometric model for active contours*, Numerische Mathematik 66 (1993), 1–31.
31. V. CASELLES ET T. COLL, *Snakes in movement* SIAM J. Numer. Anal. 33 (1996), no. 6, 2445–2456.
32. V. CASELLES, R. KIMMEL ET G. SAPIRO, *Geodesic Active Contours*, International J. Computer Vision 22 (1997), 61–79.
33. F. CATTÉ, P.-L. LIONS, J.-M. MOREL ET T. COLL, *Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion*, SIAM J. Numer. Anal. 29 (1992), no. 1, 182–193.
34. Y. G. CHEN, Y. GIGA ET S. GOTO, *Uniqueness and Existence of Viscosity Solutions of Generalized Mean Curvature Flow Equations*, J. Differential Geometry 33 (1991), 749–786.
35. Y. CHEN ET G. MEDIONI, *Description of complex objects from multiple range images using an inflating balloon model*, Comput. Vis. Image Underst. 61, (1995), 325–334.

36. P. G. CIARLET, *The finite element method for elliptic problems*, North-Holland, (1978).
37. L. D. COHEN, *On active contour models and balloons*, Computer Visions, Graphics, and Image Processing, vol. 53, No. 2, (1991), 221–218.
38. L. D. COHEN, *Auxiliary Variables and Two-step Iterative Algorithms in Computer Vision Problems*, International J. of Mathematical Imaging and Vision 6 (1996), 59–83.
39. L. D. COHEN, *Multiple contour finding and perceptual grouping using minimal paths* Mathematics and image analysis 2000 (Paris). J. Math. Imaging Vision 14 (2001), no. 3, 225–236
40. L. D. COHEN, *Mathematics and image analysis 2000*, Selected papers from the 3rd Conference (MIA'00) held in Paris, September 25–27, 2000. Edited by Laurent D. Cohen. J. Math. Imaging Vision 14 (2001), no. 3. Kluwer Academic Publishers, London, 2001. pp. i–ii and 193–296.
41. L. D. COHEN ET I. COHEN, *A Finite element methods for active contour models and balloons for 2-D and 3-D images*, IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence PAMI-15 no 11 (1993), 1131–1147.
42. L. D. COHEN ET R. KIMMEL, *Global minimum for active contours models : a minimal path approach*, Int. J. of Computer Vision 24, no.1 (1997) 57–78.
43. M. G. CRANDALL, L. C. EVANS ET P.-L. LIONS, *Some properties of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Trans. of the American Mathematical Society Vol. 282, No. 2, (1984), 487–502.
44. M. G. CRANDALL, M.G. ISHII ET P.-L. LIONS, *User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 27 (1992), no. 1, 1–67.
45. M. G. CRANDALL ET P.-L. LIONS, *Hamilton-Jacobi equations in infinite dimensions I. Uniqueness of viscosity solutions*, J. of Functionnal Analysis 62 (1985), 379–396.
46. M. G. CRANDALL ET P.-L. LIONS, *Hamilton-Jacobi equations in infinite dimensions II. Existence of viscosity solutions*, J. of Functionnal Analysis 65 (1986), 368–405.
47. M. G. CRANDALL ET P.-L. LIONS, *Hamilton-Jacobi equations in infinite dimensions III*, J. of Functionnal Analysis 68 (1986), 214–247.

48. M. G. CRANDALL ET P.-L. LIONS, *Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations in infinite dimensions IV. Hamiltonians with unbounded linear terms*, J. of Functionnal Analysis 90 (1990), 237–283.
49. M. G. CRANDALL ET P.-L. LIONS, *Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations in infinite dimensions V. Unbounded linear terms and B-continuous solutions*, J. of Functionnal Analysis 97 (1991), 417–465.
50. M. G. CRANDALL ET P.-L. LIONS, *Hamilton-Jacobi equations in infinite dimensions VI. Nonlinear A and Taratu's method refined*, Evolution equations, control theory, and biomathematics (Han sur Lesse, 1991), 51–89, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 155, Dekker, New York, 1994.
51. M. G. CRANDALL ET P.-L. LIONS, *Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations in infinite dimensions VII. The HJB equation is not always satisfied*, J. of Functionnal Analysis 125 (1994), 111–148.
52. G. DAL MASO, J.-M. MOREL, ET S. SOLIMINI, *Une approche variationnelle en traitement d'images : résultats d'existence et d'approximation*, (French) [Variational approach in image processing : existence and approximation properties] C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 308 (1989), no. 19, 549–554.
53. G. DAL MASO, J.-M. MOREL, ET S. SOLIMINI, *A variational method in image segmentation : existence and approximation results*, Acta Math. 168 (1992), no. 1-2, 89–151.
54. M.C. DELFOUR ET J.-P. ZOLÉSIO, *Shapes and Geometries : Analysis, Differential Calculus and Optimization*, SIAM series on Advances in Design and Control, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, USA (2001).
55. M.C. DELFOUR ET J.-P. ZOLÉSIO, *Dynamical free boundary problem for an incompressible potential fluid flow in a time-varying domain*, J. Inv. Ill-Posed Problems Vol. 11, No. 1. (2004), 1–24.
56. M.C. DELFOUR ET J.-P. ZOLÉSIO, *Oriented distance function in shape identification via metrics and its evolution equation*, SIAM J. on Control and Optim. 42 (2004), no. 6, 2286-2304.
57. M.C. DELFOUR ET J.-P. ZOLÉSIO, *Shape identification via metrics constructed from the oriented distance function*, Control and Cybernetics (2004), à paraître.
58. R. DZIRI ET J.-P. ZOLÉSIO, *Eulerian derivative for noncylindrical functionals* In : Shape optimization and optimal design. Cambridge, 1999. J. Cagnol and

- M. P. Polis (Eds.). Lecture Notes in Pure and Applied Math., 216. Dekker, New York, (2001), 87-107.
59. M.C. ESCHER, *Remplissage périodique du plan*, (1958).
60. L.C. EVANS ET R.F. GARIEPY, *Measure theory and the properties of functions*, CRC Press, Inc, Boca Raton, FL, (1992).
61. L.C. EVANS ET J. SPRUCK, *Motion of level sets by mean curvature. I*, J. Differential Geometry, Vol. 33, (1991), 635–681.
62. L.C. EVANS ET J. SPRUCK, *Motion of level sets by mean curvature. II*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 330, N0. 1, (1992), 321–332.
63. L.C. EVANS ET J. SPRUCK, *Motion of level sets by mean curvature. III*, J. Differential Geometric Analysis, Vol. 2, N0. 2, (1992), 121–150.
64. L.C. EVANS ET J. SPRUCK, *Motion of level sets by mean curvature. IV*, J. Differential Geometric Analysis, Vol. 5, N0. 1, (1995), 77–114.
65. A. FORTIN ET A. GARON, *Les éléments finis : de la théorie à la pratique*, en préparation, 250 pages.
66. P. FUA ET Y.G. LECLERC, *Model driven edge detection*, Machine Vision and Applications 3 (1990), 45–56.
67. S. GEMAN ET D. GEMAN, *Stochastic Relaxation, Gibbs Distributions, and the Bayesian Restoration of Images*, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence Med Phys. Vol. PAMI-6, No. 6, (1984), 721–741.
68. J. D. GILL, H. M. LADAK, D. A. STEINMAN ET A. FENSTER, *Accuracy and variability assessment of a semiautomatic technique for segmentation of the carotid arteries from three-dimensional ultrasound images*, Med Phys. 27 (6), (2000), 1133–1342.
69. J. GOMES ET O. FAUGERAS, *Reconciling distance functions and level sets*, J. Visual Com. and Image Representation 11 (2000), 209–223.
70. Y. GOUSSEAU ET J.-M. MOREL, *Are natural images of bounded variation ?*, SIAM J. Math. Anal. 33 (2001), no. 3, 634–64
71. M. A. GRAYSON, *Shortening embedded curves*, Ann. of Math. (2) 129 (1989), no. 1, 71–111.

72. R. M. HARALICK, *Digital step edges from zero crossing of second directional derivatives*, IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol. 6, no. 1, (1984), 58–68.
73. D.H. HUBEL ET T.N. WIESEL, *Receptive fields, binocular interaction and functional architecture in the cat's visual cortex*, J. Physiol., Lond. 160 (1962), 106–154.
74. T. ILMANEN, *Generalized flow of sets by mean curvature on a manifold*, Indiana University J. 41 (1992), 671–705.
75. M. KASS, M. WITKIN, ET D. TERZOPOULOS, *Snakes : Active contour models*, International J. Computer Vision 1 no. 4 (1988), 321–331.
76. R. KIMMEL ET A. BRUCKSTEIN, *Regularized Laplacian zero crossings as optimal edge integrators*, in “Proc. of Image and Vision Computing”, IVCNZ01, New Zealand, November 2001.
77. R. KIMMEL ET A. BRUCKSTEIN, *On edge detection, edge integration and geometric active contours*, in “Proc. Int. Symp. on Mathematical Morphology”, ISMM 2002, Sydney, New South Wales, Australia, April 2002.
78. G. KOEPLER, C. LOPEZ, ET J.-M. MOREL, *A multiscale algorithm for image segmentation by variational method*, SIAM J. Numer. Anal. 31 (1994), no. 1, 282–299.
79. S.R. KULKARNI, S. MITTER, ET T.J. RICHARDSON, *An existence theorem and lattice approximations for a variational problem arising in computer vision*, Signal processing, Part I, 189–210, IMA Vol. Math. Appl., 22, Springer, New York, 1990.
80. S.R. KULKARNI, S. MITTER, T.J. RICHARDSON, ET J.N. TSITSIKLIS, *Local versus non-local computation of length of digitized curves*, Foundations of software technology and theoretical computer science (Bombay, 1993), 94–103, Lecture Notes in Comput. Sci., 761, Springer, Berlin, 1993.
81. J.C. LAGARIAS ET T.J. RICHARDSON, , *Convexity and the average curvature of plane curves*, Geom. Dedicata 67 (1997), no. 1, 1–30.
82. P. L. LIONS, *Generalized solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Pitman Publishing (1982).
83. P. L. LIONS, E. ROUY ET A. TOURIN, *Shape-from-Shading, viscosity solutions and edges*, Numer. Math. 64, (1993), 323–353.

84. D. MAGEE, A. BULPITT ET E. BERRY, *3D automated segmentation and structural analysis of vascular trees using deformable models*, Proceedings on Variational and Level Set Methods in Computer Vision, IEEE Workshop, (2001), 119–126.
85. R. MALLADI, R. KIMMEL, D. ADALSTEINSSON, G. SAPIRO, V. CASELLES, ET J.A. SETHIAN, *A Geometric Approach to Segmentation and Analysis of 3D Medical Images*, IEEE Proceedings of MMBIA '96 (1996), 244–252.
86. R. MALLADI ET J. A. SETHIAN, *A Unified Framework for Shape Segmentation, Representation and Recognition*, Report LBL-36069, Lawrence Berkeley Laboratory, Univ. of California, Berkeley, Aug. (1994).
87. R. MALLADI, J. A. SETHIAN ET B. C. VEMURI, *Shape modeling with front propagation : A Level Set Approach*, IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence 17, no. 2, (1995) 158–175.
88. D. MARR, *Vision*, W.H. Freeman and Company, New York 1982.
89. D. MARR ET E. HILDRETH, *Theory of edge detection*, Proc. R. Lond. B 207 (1980) 187–217
90. A. MARTELLI, *Edge detection using heuristic search methods*, Comp. Graphics Image Processing 1 (1972), 169–182.
91. T. MCINERNEY ET D. TERZOPOULOS, *Deformable models in medical image analysis : A survey*, Med Image Analysis 1, (1996), 91–108.
92. K. MIKULA, *Image processing with partial differential equations*, Modern Methods in Scientific Computing and Applications, A. Bourlioux and M. J. Gander (eds.), Kluwer Academic Publishers, (1996), 283–321.
93. U. MONTANARI, *On the optimal detection of curves in noisy pictures*, RCACM 14, no. 5 (1971), 335–345.
94. J.-M. MOREL ET S. SOLIMINI, *Segmentation of images by variational methods : a constructive approach*, Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid 1 (1988), no. 1-3, 169–182.
95. J.-M. MOREL ET S. SOLIMINI, *Segmentation d'images par méthode variationnelle : une preuve constructive d'existence*, (French) [Image segmentation by a variational method : a constructive existence proof] C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 308 (1989), no. 15, 465–470.

96. D. MUMFORD ET J. SHAH, *Boundary detection by minimizing functionals*, Proceedings of Computer Vision and Pattern Recognition, (1985) 22–26.
97. D. MUMFORD ET J. SHAH, *Optimal approximations by piecewise smooth functions and associated variational problems*, Comm. on Pure and Applied Math., XLII (1989), 577–685.
98. W. NOH ET P. WOODWARD, *A simple line interface calculation*, Proceedings, Fifth International Conf. on Fluid Dynamic, Eds. A. I. Van de Vooran and P. J. Zandberger, Springer-Verlag (1976).
99. S. OSHER ET R. P. FEDKIW, *Level sets methods : an overview and some recent results*, J. Comput. Phys., 169, (2001), 463–502.
100. S. OSHER ET N. PARAGIOS, *Geometric Level Set Methods in Imaging, Vision and Graphics*, Springer-Verlag (2003).
101. S. OSHER ET J.A. SETHIAN, *Front propagating with curvature-dependent speed : algorithms based on Hamilton-Jacobi formulation*, J. Computational Physics 79 (1988), 12–49.
102. H. PRAUTZSCH, W. BOEHM ET M. PALUSZNY, *Bézier and B-Splines techniques*, Springer-Verlag (2000).
103. P. A. RAVIART ET J. M. THOMAS, *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, Masson, Paris, (1983).
104. T. RICHARDSON, *Scale independent piecewisw smooth segmentation of images via variational methods*, Doctoral dissertation, Center for Intelligent Control Systems, MIT, Cambridge, Mass. 1990.
105. T. RICHARDSON, *Limit theorems for a variational problem arising in computer vision*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 19 (1992), no. 1, 1–49.
106. T. RICHARDSON ET S.K. MITTER, *A variational formulation-based edge focusing algorithm*, Academy Proceedings in Engineering Sciences, Indian Acad. Sci. 22 (1997), no. 4, 553–574.
107. G. D. ROHRER ET J. M. WHITE, *Image thresholding for optical character recognition and other applications requiring character image extraction*, IBM J. res develop., Vol. 27, no. 4, (1983), 400–411.
108. A. ROSENFELD ET M. THURSTON, *Edge and curve detection using anisotropic diffusion*, IEEE Trans. on Comput. C-20 (1971), 562–569.

109. E. ROUY, *Numerical approximation of viscosity solutions of first-order Hamilton-Jacobi equations with Neumann type boundary conditions*, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences Vol. 2, No 3, (1992), 357-374.
110. E. ROUY ET A. TOURIN, *A viscosity solutions approach to Shape-from-Shading*, SIAM J. Numer. Anal. Vol. 29, No 3, (1992), 867-884.
111. L.I. RUDIN, S. OSHER ET E. FATEMI, *Nonlinear total variation based noise removal algorithms*, Physica D 60 (1992), no. 1-4, 259-268
112. W. RUDIN, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill, New York 1966.
113. J. A. SETHIAN, *Curvature and the evolution of fronts*, Commun. in Math. Physics, Vol 101, (1985), 487-499.
114. J. A. SETHIAN, *Numerical algorithms for propagating interfaces : Hamilton-Jacobi equations and conservation laws*, J. of Differential Geometry, vol. 31, (1990), 131-161.
115. J. A. SETHIAN, *Level Set Methods : Evolving Interfaces in Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision, and Materials Science*, Cambridge University Press, (1999).
116. J. A. SETHIAN ET J. STRAIN, *Crystal growth and dendritic solidification*, J. of Computational Physics, vol. 98, (1992), 231-253.
117. H. M. SONER, *Motion of a set by the curvature of its boundary*, J. of Differential Equations, vol. 101, (1993), 313-372.
118. M. SUSSMAN, P. SMEREKA ET S. OSHER, *A Level Set Approach for Computing Solutions to Incompressible Two-Phase Flow*, J. Comp. Phys. 114 (1996), 146-159.
119. D. TERZOPOULOS ET M. VASILESCU, *Sampling and reconstruction with adaptive meshes*, IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR'91) (IEEE Computer Society Press, Maui, HI, (1991)), 70-75.
120. D. TERZOPOULOS, M. WITKIN ET M. KASS, *Constraints on deformable models : Recovering 3D shape and nonrigid motions*, Artificial Intelligence 36 (1988), 91-123.
121. KHOAN VO-KHAC, *Distributions, analyse de Fourier, opérateurs aux dérivées partielles*, Tomes I et II, Librairie Vuilbert, Paris, 1972.

122. R.L. WHEEDEN ET A. ZYGMUND, *Measure and integral*, Marcel Dekker, New-York, Basel 1977.
123. A.P. WITKIN, *Scale space filtering*, Proc. IJCAI, Karlsruhe 1983, 1019–1021.
124. A. YUILLE ET T. POGGIO, *Scaling theorems for zero crossings*, IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence 8 (1986).
125. H.-K. ZHAO, T. CHAN, B. MERRIMAN ET S. OSHER, *A Variational Level Set Approach to Multiphase Motion*, J. Comp. Phys. 127 (1996), 179–195.
126. J.-P. ZOLÉSIO, *Les dérivées par rapport aux nœuds des triangulations en identification de domaines*, Ann. Sci. Math. Québec 8 (1984), no. 1, 97–120.

## Index

- énergie
  - d'une fonction, 19
  - densité d', 19
  - externe, 30
  - interne, 30
  - norme de l', 19
- équation
  - d'évolution, 73
    - de la fonction caractéristique, 49, 63, 66
    - de la fonction distance orientée, 49, 65
    - de la fonction distance orientée au carré, 65
    - des ensembles de niveau, 48, 57
  - de Hamilton-Jacobi, 52
  - différentielle multivoque, 73
  - du mouvement par courbure moyenne, 48
  - géométrique aux dérivées partielles, 59
- B-spline, A-i
- Bézier
  - courbe de, 33, 68, A-iii
  - par morceaux, 73
  - polygone de, A-i, A-iii
- ballon, 48, 70, 81
  - déformable, 82, 87
  - méthode du, 79, 80, 82
  - modèle du, 96
  - nœud du, 81
- bande de lissage, 8
- Bernstein
  - polynôme de, A-i
- bruit, 7, 12
- cône de directions normales, 85
- cadre, 7, 80
- calcul de forme, 62
- champ
  - de forces, 86
  - de vitesses, 32, 49, 54, 56
- coefficient de rigidité, 30
- coin, 32, 40
- collection, 15
- contour actif, 46, 48
  - géodésique, 49
- convolée d'une fonction, 15, 16
- convolution de fonctions, 14, 25, 42, 86
- courbe
  - de distance minimale, 47
  - fermée, 33, 81
  - linéaire par morceaux, 33
  - longueur d'une, 31, 44
  - planaire, 33
  - spatiale, 33
- courbure moyenne, 36, 52
- dérivée
  - directionnelle, 28

- normale, 32
- totale, 56
- détecteur
  - de contours, 7, 12, 31, 43
  - de Marr-Hildreth, 13
  - de White-Rohrer, 13
  - gradient, 14
  - laplacien, 12
  - linéaire, 12
- difféomorphisme, 56
- distance minimale entre deux points, 49
- distribution
  - d'énergie centrée, 23
- distributions
  - théorie des, 17, 45, 61
- divergence tangentielle, 29, 52
- effet de flou, 8
- ensemble, 15
  - à périmètre
    - fini, 44
    - fini de Caccioppoli, 45
    - localement fini, 45
  - convexe, 38
  - de niveau, 48
  - des directions de croissance maximale, 73
  - des fissures, 40
  - des projections, 40
  - des singularités, 40
  - diamètre d'un, 44
  - mesurable, 15
  - périmètre d'un, 45
- espace
  - de Sobolev, 17
  - des fonctions
    - à variation bornée, 44
    - infiniment différentiables, 18, 61
    - des mesures (vectorielles) bornées, 45
    - des polynômes à une variable, A-i
    - riemannien, 49
    - topologique localement compact, 15
- extension velocity, 60
- filtre, 7, 8
  - directionnel, 9
  - gaussien, 9
    - normalisé, 24
  - laplacien, 13
- fissure, 40
- flot, 54
  - géodésique, 50
  - géométrique, 48
- fonction
  - énergie d'une, 19
  - à support compact, 18
  - canonique, 37
  - canyon, 32, 77, 78
  - caractéristique, 25, 42, 61
  - centroïde d'une, 21
  - constante
    - par morceau, 6
    - par pavé, 6, 25
  - d'énergie, 30
  - d'interpolation de Lagrange, 26
  - de forme, 53
    - à valeur réelle, 54
  - distance, 16, 37, 38
    - orientée, 38, 51, 64
    - signée, 38
  - lissage d'une, 8
  - maxima d'une, 12, 18, 27
  - objectif, 30, 32, 43
  - potentiel, 86
  - variance d'une, 21

- force
  - de pression interne, 85
  - de tension superficielle, 84
- formulation eulérienne, 34, 63
- formule de récursion, A-ii
- fourre-tout, 53
- front, 34, 80
- frontière
  - épaisse, 36
  - mince, 36
- géodésique, 47
  - généralisée, 47
- gaussienne, 18
  - d'intégrale normalisée, 18
  - distribution, 18
  - normalisée d'écart-type  $\epsilon$ , 19
  - régularisation, 19
- homéomorphisme, 33, 54, 55
- hypothèse de linéarité, 15
- image, 5, 43
  - filtrage d'une, 8
  - régularisée, 15, 27, 79
- kernel, 8
- laplacien, 13, 19, 29
- Lebesgue
  - ensemble des fonctions mesurables au sens
    - de, 42
  - point de, 16
- méthode
  - de descente du gradient, 48, 50
  - de perturbation de l'opérateur identité,
    - 53
- des cellules, 63
- des fractions partielles, 63
- des vitesses, 53
- des vitesses, 53
- métrique riemannienne, 32, 47, 49
- matrice
  - de connectivité, 34, 67
  - hessienne, 17
  - jacobienne, 26
- mesure, 15
  - étrangère, 16
  - de Borel, 15
    - régulière, 16
  - de Hausdorff, 44
  - de Radon, 16
    - signée, 16
  - nulle, 36
  - régulière, 15
- mouvement par courbure moyenne, 50
- nœud de contrôle, 34, 68, 73, 80, A-iii
- niveaux de gris, 5
- normale extérieure, 28, 39
- noyau, 8, 27
- opérateurs de différences, 13
- pénalisation
  - terme de, 30, 44
- périmètre de
  - De Giorgi, 45
  - densité, 45
- paramètre de scaling, 14
- partition
  - de l'unité, A-ii
  - ouverte, 43
- passage à zéro, 28

- pavé, 7
  - de référence, 25
- pixel, 7
  - poids d'un, 9
  - pondération d'un, 9
- principe
  - d'incertitude, 14
  - de la moyenne pondérée, 8
- probabilité
  - densité de, 15
  - mesure de, 15
- projection, 29, 40, 41, 65
- prolongement de la vitesse, 60, 61
- propriété du segment uniforme, 38
  
- ré-initialisation, 60
- régularisation, 77
  - d'une fonction, 14
  - d'une image, 43
  - de Tikhonov, 42
  - gaussienne, 19
  - ordre de, 18
- relation d'incertitude, 21, 23
- représentation analytique, 32
  
- semi-dérivée
  - de forme, 54
  - directionnelle, 32, 49, 57, 68, 69, 73
  - directionnelle au sens de
    - Gâteaux, 53
    - Hadamard, 41, 53
- serpent, 48
- snake, 30, 46
- solution de viscosité, 52, 59
- squelette, 40
- surface, 33
  - avec bord, 33
  - sans bord, 33
- technique de volume de fluide, 63
- transformée de Fourier, 19
  - par rapport à l'énergie, 14
- transformation, 55
  - affine, 25
  - bijective, 35
- transport
  - terme de, 59
  
- univers, 53
  
- variation linéaire
  - condition de, 28
- vecteur des nœuds, 81
- vitesse scalaire, 57
- voisinage tubulaire, 58