

Université de Montréal

Diagnostiques robustes à des délais individuels en
utilisant les estimateurs robustes RA-ARX

par

Imad Bou-Hamad

Département de mathématiques et de statistique

Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures

en vue de l'obtention du grade de

Maître ès sciences (M.Sc.)
en Statistique

septembre 2004



QA

3

U54

2004

v. 012

Direction des bibliothèques

AVIS

L'auteur a autorisé l'Université de Montréal à reproduire et diffuser, en totalité ou en partie, par quelque moyen que ce soit et sur quelque support que ce soit, et exclusivement à des fins non lucratives d'enseignement et de recherche, des copies de ce mémoire ou de cette thèse.

L'auteur et les coauteurs le cas échéant conservent la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent ce document. Ni la thèse ou le mémoire, ni des extraits substantiels de ce document, ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans l'autorisation de l'auteur.

Afin de se conformer à la Loi canadienne sur la protection des renseignements personnels, quelques formulaires secondaires, coordonnées ou signatures intégrées au texte ont pu être enlevés de ce document. Bien que cela ait pu affecter la pagination, il n'y a aucun contenu manquant.

NOTICE

The author of this thesis or dissertation has granted a nonexclusive license allowing Université de Montréal to reproduce and publish the document, in part or in whole, and in any format, solely for noncommercial educational and research purposes.

The author and co-authors if applicable retain copyright ownership and moral rights in this document. Neither the whole thesis or dissertation, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms, contact information or signatures may have been removed from the document. While this may affect the document page count, it does not represent any loss of content from the document.

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

**Diagnostics robustes à des délais individuels en
utilisant les estimateurs robustes RA-ARX**

présenté par

Imad Bou-Hamad

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Roch Roy

(président-rapporteur)

Pierre Duchesne

(directeur de recherche)

Jean-François Angers

(membre du jury)

Mémoire accepté le:

31 août 2004

SOMMAIRE

Le but essentiel de ce mémoire est de présenter des tests robustes à des délais individuels dans les modèles autorégressifs avec variables exogènes. Nous obtenons la distribution asymptotique des estimateurs RA-ARX introduits dans Duchesne (2004a), en suivant une approche similaire à celle de Bustos et Yohai (1986). En particulier, nous fournissons la structure de covariance asymptotique des estimateurs RA-ARX. En utilisant ce résultat, nous établissons la distribution asymptotique des autocorrélations résiduelles robustifiées sous l'hypothèse nulle d'adéquation, qui s'avère être normale. Finalement, nous fournissons quelques résultats de simulation.

Mots clés : Modèles autorégressifs avec variables exogènes, vérification de l'adéquation, valeurs aberrantes additives, estimateurs RA-ARX, autocorrélations robustifiées, séries chronologiques.

SUMMARY

The aim of this thesis is to present robust individual tests in autoregressive models with exogenous variables. We derive the asymptotic distribution of the RA-ARX estimators introduced in Duchesne (2004a), following an approach similar to Bustos and Yohai (1986). In particular, we give the asymptotic covariance structure of the RA-ARX estimators. Using this result, we establish the asymptotic distribution of the robustified autocorrelations under the null hypothesis of adequacy, which is normal. Some simulation results are reported.

Keywords : Autoregressive models with exogenous variables, diagnostic checking, additive outliers, RA-ARX estimators, robust autocorrelations, time series.

REMERCIEMENTS

Je voudrais exprimer ma reconnaissance à toutes les personnes qui m'ont encouragé et aidé de près ou de loin pour réaliser ce mémoire.

Tout d'abord, je tiens à remercier chaleureusement mon directeur de recherche, M. Pierre Duchesne, pour son implication, sa grande disponibilité, sa patience, sa générosité et ses conseils judicieux. Je le remercie aussi pour m'accorder une bourse via des subventions qui m'a permis de travailler aisément et de consacrer le temps nécessaire pour pouvoir terminer ce mémoire.

Je n'oublie pas de remercier tous mes chers camarades de classe et du département de mathématiques et de statistique pour les bons moments que nous avons passés ensemble.

Finalement, je remercie du fond du coeur les êtres les plus chers dans ma vie, surtout ma mère qui a consacré sa vie pour m'offrir la meilleure éducation et pour ma fiancée qui m'attend passionnément.

TABLE DES MATIÈRES

Sommaire	iii
Summary	iv
Remerciements	v
Liste des tableaux	viii
Chapitre 1. Introduction	1
Chapitre 2. Normalité asymptotique des estimateurs RA-ARX .	8
2.1. Réécriture du système définissant les estimateurs RA-ARX.....	8
2.2. Distribution asymptotique et structure de la matrice de covariance asymptotique des estimateurs RA-ARX	10
Chapitre 3. Distribution asymptotique des autocovariances résiduelles robustes et applications	13
3.1. Distribution asymptotique de $n^{1/2}\gamma_{\hat{r}\hat{r}}$	14
3.2. Tests à des délais individuels	16
3.3. Algorithmes pour calculer les estimateurs RA-ARX	17
3.3.1. Algorithme itératif.....	17
3.3.2. Algorithme de Newton-Raphson	18
Chapitre 4. Preuve du théorème principal	20
4.1. Distribution asymptotique de $n^{1/2}\gamma_{rr}$	21
4.2. Covariance asymptotique entre $n^{1/2}(\hat{\lambda} - \lambda)$ et $n^{1/2}\gamma_{rr}$	22

Chapitre 5. Simulations	25
5.1. Introduction	25
5.2. Biais asymptotiques	26
5.2.1. Plan de la première expérience	26
5.2.2. Résultats de la première expérience	27
5.3. Comparaison des efficacités des estimateurs robustes RA-ARX par rapport aux estimateurs MC	31
5.3.1. Plan de la deuxième expérience	31
5.3.2. Résultats de la deuxième expérience	31
5.4. Niveaux et puissances des statistiques de test à des délais individuels	35
5.4.1. Plan des troisième et quatrième expériences	35
5.4.2. Résultats des troisième et quatrième expériences	35
5.5. Valeurs aberrantes dans la variable exogène	42
Chapitre 6. Conclusion	48
Annexe	50
Bibliographie	66

LISTE DES TABLEAUX

- 5.1 Moyennes empiriques, variances, biais au carré ($\times 10^{-5}$) et biais relatifs (en valeur absolue) pour l'estimation de ϕ et ν , en utilisant les estimateurs RA-ARX basés sur les fonctions η de types Mallows et Hampel, pour des fonctions ψ de familles Huber et bicarrée, comparés aux estimateurs MC, dans le cas où les données ne sont pas contaminées. 29
- 5.2 Moyennes empiriques, variances, biais au carré ($\times 10^{-5}$) et biais relatifs (en valeur absolue) pour l'estimation de ϕ et ν , en utilisant les estimateurs RA-ARX basés sur les fonctions η de types Mallows et Hampel, pour des fonctions ψ de familles Huber et bicarrée, comparés aux estimateurs MC, dans le cas où des valeurs aberrantes additives sont présentes. 30
- 5.3 Moyennes empiriques, variances, erreurs quadratiques moyennes et efficacités pour l'estimation de ϕ et ν , en utilisant les estimateurs RA-ARX basés sur les fonctions η de types Mallows et Hampel, pour des fonctions ψ de familles Huber et bicarrée, comparés aux estimateurs MC, dans le cas où les données ne sont pas contaminées. 33
- 5.4 Moyennes empiriques, variances, erreurs quadratiques moyennes et efficacités pour l'estimation de ϕ et ν , en utilisant les estimateurs RA-ARX basés sur les fonctions η de types Mallows et Hampel, pour des fonctions ψ de familles Huber et bicarrée, comparés aux estimateurs MC, dans le cas où des valeurs aberrantes additives sont présentes ... 34

- 5.5 Niveaux empiriques (en pourcentage) des statistiques de test à des délais individuels $Q_R(l)$ et $Q_R^*(l)$ définies par (3.4) et (3.5), et $Q(l)$ et $Q^*(l)$ définies par (3.6) et (3.7), basés sur 1000 réplifications, sans contamination. 38
- 5.6 Niveaux empiriques (en pourcentage) des statistiques de test à des délais individuels $Q_R(l)$ et $Q_R^*(l)$ définies par (3.4) et (3.5), et $Q(l)$ et $Q^*(l)$ définies par (3.6) et (3.7), basés sur 1000 réplifications, avec des valeurs aberrantes additives. 39
- 5.7 Puissances empiriques (en pourcentage) des statistiques de test à des délais individuels $Q_R(l)$ et $Q_R^*(l)$ définies par (3.4) et (3.5), et $Q(l)$ et $Q^*(l)$ définies par (3.6) et (3.7), basées sur 1000 réplifications, sans contamination. 40
- 5.8 Puissances empiriques (en pourcentage) des statistiques de test à des délais individuels $Q_R(l)$ et $Q_R^*(l)$ définies par (3.4) et (3.5), et $Q(l)$ et $Q^*(l)$ définies par (3.6) et (3.7), basées sur 1000 réplifications, avec des valeurs aberrantes additives. 41
- 5.9 Moyennes empiriques, variances, biais au carré ($\times 10^{-5}$) et biais relatifs (en valeur absolue) pour l'estimation de ϕ et ν , en utilisant les estimateurs RA-ARX basés sur les fonctions η de types Mallows et Hampel, pour des fonctions ψ de familles Huber et bicarrée, comparés aux estimateurs MC, dans le cas où la variable exogène est contaminée. 44
- 5.10 Moyennes empiriques, variances, erreurs quadratiques moyennes et efficacités pour l'estimation de ϕ et ν , en utilisant les estimateurs RA-ARX basés sur les fonctions η de types Mallows et Hampel, pour des fonctions ψ de familles Huber et bicarrée, comparés aux estimateurs MC, dans le cas où la variable exogène est contaminée 45
- 5.11 Niveaux empiriques (en pourcentage) des statistiques de test à des délais individuels $Q_R(l)$ et $Q_R^*(l)$ définies par (3.4) et (3.5), et $Q(l)$ et

	$Q^*(l)$ définies par (3.6) et (3.7), basés sur 1000 réplifications, avec des valeurs aberrantes dans la variable exogène.	46
5.12	Puissances empiriques (en pourcentage) des statistiques de test à des délais individuels $Q_R(l)$ et $Q_R^*(l)$ définies par (3.4) et (3.5), et $Q(l)$ et $Q^*(l)$ définies par (3.6) et (3.7), basées sur 1000 réplifications, avec des valeurs aberrantes dans la variable exogène.	47

Chapitre 1

INTRODUCTION

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à une classe d'estimateurs robustes servant à estimer les paramètres de certains modèles que nous détaillons plus bas. La normalité asymptotique de ces estimateurs est étudiée, et en utilisant ce résultat des nouveaux tests de type diagnostique sont proposés. Une attention particulière est consacrée à l'évaluation empirique des estimateurs robustes. Ces résultats, théoriques et empiriques, ont fait l'objet de l'article Bou-Hamad et Duchesne (2004).

Considérons $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ et $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ deux processus stochastiques stationnaires. Nous supposons que $E(Y_t) = E(X_t) = 0$. Nous considérons le modèle dynamique linéaire autorégressif avec variables exogènes (ARX) suivant :

$$\phi(B)Y_t = \nu(B)X_t + u_t, \quad (1.1)$$

où l'opérateur retard B est tel que $BY_t = Y_{t-1}$, $\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \dots - \phi_p z^p$ désigne le polynôme autorégressif d'ordre p , et $\nu(z) = \sum_0^s \nu_l z^l$ dénote un polynôme de degré s . Puisque le processus $\{Y_t\}$ est présumé stationnaire, toutes les racines de $\phi(z)$ sont supposées être à l'extérieur du cercle unité. Soit $\phi^{-1}(z) = \sum_{h=0}^{\infty} s_h z^h$, où l'on suppose que $s_0 = 1$. La variable Y_t représente la variable dépendante ou endogène, tandis que la variable X_t est la variable exogène. Soit $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_p)^\top$ et $\nu = (\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_s)^\top$. Le vecteur $\lambda = (\phi^\top, \nu^\top)^\top$ dénote le vecteur de paramètres inconnus du modèle (1.1). Nous désignons par σ_X^2 et $\Gamma_X(\cdot)$ la variance de

X_t et la fonction d'autocovariance du processus $\{X_t\}$, respectivement. L'hypothèse qui suit est une condition naturelle à imposer sur le processus d'innovations $\{u_t, t \in \mathbb{Z}\}$.

Hypothèse A : Le processus $\{u_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est tel que les u_t sont indépendants et identiquement distribués (*i.i.d.*), avec $E(u_t) = 0$ et $E(u_t^2) = \sigma_u^2 < \infty$. De plus, nous supposons que u_t admet une distribution symétrique.

Sous l'hypothèse A, le modèle (1.1) définit le processus $\{Y_t\}$ avec processus exogène $\{X_t\}$, et il est noté ARX(p, s). L'exogénéité stricte est supposée pour le processus $\{X_t\}$. Plus particulièrement, nous considérons l'hypothèse suivante.

Hypothèse B : Le processus $\{X_t\}$ est strictement exogène, c'est-à-dire $\{X_t\}$ et $\{u_t\}$ sont deux processus stochastiques indépendants.

En général, nous pouvons estimer les paramètres des modèles ARX par les approches classiques, notamment la méthode des moindres carrés conditionnels (MC). Les estimateurs MC sont convergents dans le modèle (1.1) lorsque les erreurs ne présentent pas de corrélation sérielle. Cependant, cette classe d'estimateurs n'est pas robuste aux valeurs aberrantes additives. En effet, elle est très sensible à quelques observations aberrantes qui pourraient survenir suite à des phénomènes inattendus. Les estimateurs MC conditionnels sont obtenus en résolvant

$$\min_{\lambda} \sum_{t=(p+1) \vee (s+1)}^n r_t^2,$$

où $r_t = r_t(\lambda) = \phi(B)Y_t - \nu(B)X_t$ sont les résidus basés sur le vecteur λ et $r_t = 0$ si $t < (p+1) \vee (s+1)$.

Des valeurs aberrantes se produisent dans le modèle (1.1), lorsque le processus observé n'est pas précisément le processus $\{Y_t\}$. Par exemple, le processus observé pourrait être $\{Y_t + W_t\}$, où $\{W_t\}$ dénote une suite *i.i.d.* qui génère les

valeurs aberrantes, typiquement avec une petite probabilité. Autrement dit, $\{W_t\}$ pourrait admettre une distribution H définie par :

$$H = (1 - \varepsilon)\delta_0 + \varepsilon G,$$

où δ_0 est la distribution qui assigne la valeur zéro avec probabilité un, ε est un petit nombre positif et G est une distribution arbitraire. Lorsque des valeurs aberrantes additives surviennent, ce n'est plus un processus ARX qui est observé, mais bien un processus ARX plus une erreur de distribution inconnue. Le problème des valeurs aberrantes en séries chronologiques est introduit dans Hampel et al. (1986), notamment dans la classe des modèles autorégressifs et moyennes mobiles.

Les estimateurs MC risquent d'être sérieusement affectés lorsque des valeurs aberrantes additives sont suspectes dans la variable dépendante Y_t , $t = 1, \dots, n$, où n est la taille échantillonnale. Afin de pallier aux problèmes potentiels de biais, des alternatives robustes ont été proposées. Dans la classe des modèles ARX, Duchesne (2004a) a proposé les estimateurs RA-ARX. Ces derniers devraient posséder un biais beaucoup moins important que celui des estimateurs MC, lorsque des valeurs aberrantes sont présentes.

L'idée fondamentale des estimateurs RA-ARX consiste à modifier l'équation du système qui donne les estimateurs MC conditionnels. Les estimateurs RA-ARX pour λ sont définis en résolvant le système d'équations non linéaires suivant :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^s \nu_i \sum_{h=0}^{n-j-i-1} s_h \gamma_{rx}(h+i+j; \psi) + \\ \sigma_u \sum_{h=0}^{n-p-j-1} s_h \gamma_{rr}(h+j; \eta) &= 0, \quad j = 1, \dots, p, \\ \gamma_{rx}(j; \psi) &= 0, \quad j = 0, 1, \dots, s, \end{aligned} \quad (1.2)$$

où γ_{rx} et γ_{rr} sont définis par

$$\gamma_{rx}(i; \psi) = n^{-1} \sum_{t=i+1}^n \psi(r_t/\sigma_u) X_{t-i}, \quad (1.3)$$

$$\gamma_{rr}(i; \eta) = n^{-1} \sum_{t=p+i+1}^n \eta(r_t/\sigma_u, r_{t-i}/\sigma_u). \quad (1.4)$$

Nous dénotons la solution du système (1.2) $\hat{\lambda}_n$. Les formules γ_{rx} et γ_{rr} représentent des mesures robustes de dépendance. Elles dépendent des fonctions $\eta(\cdot, \cdot)$ et $\psi(\cdot)$. Plusieurs choix pour les fonctions $\eta(\cdot, \cdot)$ et $\psi(\cdot)$ sont possibles, mais nous supposons que la fonction $\psi(\cdot)$ est impaire et continue. Par exemple, si $\eta(u, v) = uv$ et $\psi(u) = u$, nous trouvons les estimateurs MC, et (1.3) et (1.4) dénotent la covariance croisée au délai i entre $\{X_t\}$ et $\{r_t/\sigma_u\}$, et l'autocorrélation au délai i de $\{r_t\}$. Ces cas particuliers sont importants. Ils sont dénotés $R_{rx}(i)$ et $R_{rr}(i)$, respectivement. Afin d'obtenir des estimateurs robustifiés et des mesures de dépendance robustes, nous pouvons utiliser les fonctions $\eta(\cdot, \cdot)$ appartenant aux familles de Mallows ou Hampel :

$$\eta_M(u, v) = \psi(u)\psi(v), \quad \text{Mallows,}$$

$$\eta_H(u, v) = \psi(uv), \quad \text{Hampel.}$$

Nous notons que dans l'étape de l'estimation, un autre exemple d'intérêt est $\eta(u, v) = \psi(u)v$, et les estimateurs résultant correspondent essentiellement aux M estimateurs, obtenus en résolvant $\min \sum \rho(u_t/\sigma_u)$, où $\rho'(\cdot) = \psi(\cdot)$. Un premier exemple pour la fonction $\psi(\cdot)$ est celle de la famille d'Huber :

$$\psi_H(u; c) = \text{sign}(u) \min(|u|, c).$$

Une autre possibilité est la famille bicarrée :

$$\psi_B(u; c) = \begin{cases} u(1 - u^2/c^2)^2, & \text{si } 0 \leq |u| \leq c, \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

La constante c dans $\psi_H(u; c)$ et $\psi_B(u; c)$ est un paramètre permettant de calibrer l'efficacité et la robustesse. Des considérations d'efficacité par rapport aux estimateurs MC, lorsque des modèles ARX sont parfaitement observés, dictent le choix

de c . Lorsque $\eta(\cdot, \cdot)$ est de type Mallows, Duchesne (2004a) fournit une procédure itérative des moindres carrés, qui est particulièrement facile à exécuter. Pour une fonction générale $\eta(\cdot, \cdot)$, des algorithmes de Newton-Raphson peuvent être utilisés pour obtenir les estimateurs RA-ARX. Nous notons que dans le système (1.2), une estimation simultanée de λ et σ_u est possible et désirable en utilisant un algorithme général de Newton-Raphson. Dans Duchesne (2004a), une équation supplémentaire est nécessaire pour l'estimation de σ_u , basée sur une certaine fonction π (voir aussi Martin et Yohai (1985), p.131-132 et p.137). En pratique, si on utilise la fonction $\eta(\cdot, \cdot)$ de type Mallows et la procédure des moindres carrés itérative, alors à chaque itération un estimateur d'échelle robuste pour σ_u peut être estimé avec les observations, en utilisant par exemple

$$\hat{\sigma}_u = \text{med}(|r_{p+1}|, \dots, |r_n|)/0.6745.$$

De plus, un terme constant peut être ajouté dans le modèle (1.1) et si c'est le cas, le modèle devient $\phi(B)(Y_t - \mu) = \nu(B)X_t + u_t$. Dans cette situation, une équation supplémentaire pour μ est également nécessaire dans le système définissant les estimateurs RA-ARX, et tous les paramètres du modèle peuvent être estimés simultanément.

Duchesne (2004a) a introduit les estimateurs robustes RA-ARX, afin de développer des tests robustes et puissants. Plus précisément, il a présenté des tests pour la corrélation sérielle dans le terme d'erreur d'un modèle ARX ajusté, en utilisant une approche spectrale. Ces tests fournissent des versions robustes généralisées des tests robustes de type portemanteau proposés par Li (1988), ces derniers étant également décrits dans la récente monographie de Li (2004). Ils reposent sur un estimateur robuste de la densité spectrale basée sur un noyau. Les tests spectraux admettent asymptotiquement une distribution normale centrée réduite sous l'hypothèse nulle de l'adéquation du modèle. De plus, la pondération flexible de ces types de tests donne la possibilité d'attribuer plus de poids aux délais de bas ordres, et moins de poids aux délais d'ordres plus élevés. Puisque plusieurs fonctions d'autocorrélation décroissent rapidement vers zéro lorsque les

ordres de délai croissent, une telle procédure de pondération fournit des statistiques de test plus puissantes que celles des tests de Li, pour plusieurs séries chronologiques pouvant survenir en pratique. Les statistiques de test de Li (1988) et Duchesne (2004a) sont de type portemanteau, dans le sens qu'elles prennent en considération plusieurs délais. Cependant, du point de vue des praticiens, une meilleure compréhension est obtenue en considérant des statistiques de test basées sur les autocorrélations résiduelles à des délais individuels. Une telle approche exige la distribution asymptotique de la fonction d'autocorrélation résiduelle robuste. Nous obtiendrons cette distribution asymptotique dans ce mémoire. Cette contribution théorique est une composante originale du mémoire.

Le but primaire de ce travail est de compléter les résultats de Duchesne (2004a). À cette fin, le présent mémoire est organisé comme suit. Dans le deuxième chapitre, nous étudions les propriétés des estimateurs robustes RA-ARX. Nous établissons la normalité asymptotique des estimateurs RA-ARX, en suivant une approche similaire à celle de Bustos et Yohai (1986). En particulier, nous énonçons explicitement la structure de covariance asymptotique des estimateurs RA-ARX. Au troisième chapitre, la distribution asymptotique des autocorrélations résiduelles robustes est établie. En se basant sur ce résultat, nous introduisons des statistiques de test à des délais individuels et nous fournissons leur distribution asymptotique. Ces résultats sont des corollaires de notre résultat principal. Les nouvelles statistiques de test à des délais individuels admettent chacune une distribution χ^2 à un degré de liberté. La preuve du théorème principal fait l'objet du quatrième chapitre. Quant au cinquième chapitre, il est consacré à une étude de simulation. Nous étudions empiriquement les biais des estimateurs et aussi les efficacités des estimateurs RA-ARX par rapport aux estimateurs MC, lorsque des valeurs aberrantes additives sont présentes et aussi lorsque celles-ci sont absentes dans la série chronologique. Cette contribution empirique illustre les propriétés de robustesse des estimateurs RA-ARX. De plus, elle permet d'apprécier l'efficacité des estimateurs RA-ARX par rapport aux estimateurs MC. Nous explorons également la performance des estimateurs considérés, lorsque des valeurs aberrantes

figurent dans la variable exogène. Les estimateurs RA-ARX sont étudiés lorsque les fonctions $\eta(\cdot, \cdot)$ sont de types Mallows et Hampel, et pour des fonctions $\psi(\cdot)$ qui appartiennent aux familles d'Huber et bicarrée. Nous calculons les estimateurs RA-ARX en utilisant l'algorithme de Newton-Raphson pour le cas de la fonction $\eta(\cdot, \cdot)$ de type Hampel. Des programmes informatiques ont été élaborés pour calculer les estimateurs RA-ARX lorsque la fonction $\eta(\cdot, \cdot)$ est de type Hampel. Duchesne (2004a) s'était contenté d'utiliser un algorithme itératif, se limitant à la fonction $\eta(\cdot, \cdot)$ de type Mallows. Considérant l'originalité des programmes, ces derniers sont donnés dans l'Annexe. Finalement, les niveaux et les puissances des nouvelles statistiques de test à des délais individuels sont étudiés. Nous concluons dans le chapitre 6.

Chapitre 2

NORMALITÉ ASYMPTOTIQUE DES ESTIMATEURS RA-ARX

Dans Duchesne (2004a), les propriétés de convergence des estimateurs RA-ARX ont été étudiées. En particulier, il a été démontré sous certaines conditions que les estimateurs RA-ARX convergent presque sûrement vers la vraie valeur du paramètre. De plus, sous certaines hypothèses détaillées dans Duchesne (2004a), il est établi que $\hat{\lambda} - \lambda_0 = O_p(n^{-1/2})$. Dans ce chapitre, nous obtenons la distribution asymptotique des estimateurs RA-ARX, en utilisant une approche similaire à celle de Bustos et Yohai (1986).

2.1. RÉÉCRITURE DU SYSTÈME DÉFINISSANT LES ESTIMATEURS RA-ARX

Après plusieurs manipulations, notamment un changement de sommations, il est possible de réécrire le système (1.2) de la manière suivante :

$$L_j^*(\lambda) = \sum_{i=0}^s \nu_i \sum_{t=i+j+1}^n \delta_{rx,(i+j)t}^* + \sigma_u \sum_{t=p+j+1}^n \delta_{rr,jt}^* = 0, \quad j = 1, 2, \dots, p,$$
$$L_j^*(\lambda) = \sum_{t=j-p}^n \delta_{jt}^* = 0, \quad j = p+1, \dots, p+s+1,$$

où

$$\delta_{rx,kt}^* = \sum_{h=0}^{t-k-1} s_h \psi(r_t / \sigma_u) X_{t-k-h}, \quad j = 1, \dots, p,$$

$$\begin{aligned}\delta_{rr,jt}^* &= \sum_{h=0}^{t-p-j-1} s_h \eta(r_t/\sigma_u, r_{t-j-h}/\sigma_u), \quad j = 1, \dots, p, \\ \delta_{jt}^* &= \psi(r_t/\sigma_u) X_{t-j+p+1}, \quad j = p+1, \dots, p+s+1.\end{aligned}$$

Ainsi, on peut réécrire le système de manière vectorielle comme suit :

$$\mathbf{L}^*(\boldsymbol{\lambda}) = (L_1^*(\boldsymbol{\lambda}), L_2^*(\boldsymbol{\lambda}), \dots, L_{p+s+1}^*(\boldsymbol{\lambda}))^\top = \mathbf{0}.$$

Rappelons que $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ est une solution du système (1.2). En utilisant un développement en série de Taylor de $\mathbf{L}^*(\boldsymbol{\lambda})$ au voisinage de $\boldsymbol{\lambda}_0$, nous obtenons que

$$n^{1/2}(\hat{\boldsymbol{\lambda}} - \boldsymbol{\lambda}_0) = -[n^{-1}D\mathbf{L}^*(\boldsymbol{\lambda}_0)]^{-1}[n^{-1/2}\mathbf{L}^*(\boldsymbol{\lambda}_0)] + o_p(1), \quad (2.1)$$

où $D\mathbf{L}^*(\boldsymbol{\lambda}_0)$ est la dérivée du vecteur \mathbf{L}^* par rapport à $\boldsymbol{\lambda}$, évaluée à $\boldsymbol{\lambda}_0$. Nous désignons par \xrightarrow{D} et \xrightarrow{P} la convergence en distribution et la convergence en probabilité, respectivement. D'après l'hypothèse A et puisque la fonction $\psi(\cdot)$ est impaire, l'espérance mathématique de $\mathbf{L}^*(\boldsymbol{\lambda}_0)$ est nulle. En adoptant des arguments similaires à ceux de Bustos et Yohai, nous allons montrer dans la prochaine section que

$$n^{-1/2}\mathbf{L}^*(\boldsymbol{\lambda}_0) \xrightarrow{D} N(\mathbf{0}, \mathbf{A}), \quad (2.2)$$

$$n^{-1}D\mathbf{L}^*(\boldsymbol{\lambda}_0) \xrightarrow{P} \mathbf{B}, \quad (2.3)$$

où \mathbf{A} et \mathbf{B} sont deux matrices symétriques de dimension $(p+s+1) \times (p+s+1)$. Les arguments font intervenir le théorème central limite et le théorème ergodique pour des suites stationnaires (voir Durrett 1995). En utilisant (2.1), (2.2) et (2.3), nous déduisons alors que

$$n^{1/2}(\hat{\boldsymbol{\lambda}} - \boldsymbol{\lambda}_0) \xrightarrow{D} N(\mathbf{0}, \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1\top}).$$

2.2. DISTRIBUTION ASYMPTOTIQUE ET STRUCTURE DE LA MATRICE DE COVARIANCE ASYMPTOTIQUE DES ESTIMATEURS RA-ARX

Avec nos hypothèses sur le polynôme autorégressif, s_h décroît exponentiellement lorsque $h \rightarrow \infty$ (voir Brockwell et Davis (1991)), et nous avons asymptotiquement que

$$L_j^*(\boldsymbol{\lambda}) = L_j(\boldsymbol{\lambda}) + o_p(1), \quad j = 1, 2, \dots, p + s + 1, \quad (2.4)$$

où

$$L_j(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{t=1}^n \delta_{jt}(\boldsymbol{\lambda}), \quad j = 1, 2, \dots, p + s + 1, \quad (2.5)$$

et

$$\begin{aligned} \delta_{jt}(\boldsymbol{\lambda}) &= \sum_{i=0}^s \nu_i \delta_{rx,(i+j)t} + \sigma_u \delta_{rr,jt}, \quad j = 1, 2, \dots, p, \\ \delta_{jt}(\boldsymbol{\lambda}) &= \psi(r_t/\sigma_u) X_{t-j+p+1}, \quad j = p+1, p+2, \dots, p+s+1, \\ \delta_{rx,(i+j)t} &= \sum_{h=0}^{\infty} s_h \psi(r_t/\sigma_u) X_{t-i-j-h}, \\ \delta_{rr,jt} &= \sum_{h=0}^{\infty} s_h \eta(r_t/\sigma_u, r_{t-j-h}/\sigma_u). \end{aligned}$$

On remarque que $\delta_{rx,kt}^*$ et $\delta_{rr,jt}^*$ représentent des versions tronquées des quantités $\delta_{rx,kt}$ et $\delta_{rr,jt}$. Considérons le processus multivarié

$$\boldsymbol{\delta}_t(\boldsymbol{\lambda}_0) = (\delta_{1t}(\boldsymbol{\lambda}_0), \delta_{2t}(\boldsymbol{\lambda}_0), \dots, \delta_{(p+s+1)t}(\boldsymbol{\lambda}_0))^T.$$

D'après l'hypothèse A et l'exogénéité stricte de $\{X_t\}$, il est possible de vérifier que $\boldsymbol{\delta}_t(\boldsymbol{\lambda}_0)$ est un processus stochastique stationnaire et ergodique. Notons que si $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}_0$, nous obtenons asymptotiquement que $r_t = u_t$. Alors la relation (2.4) et le théorème de la limite centrale nous donnent la relation (2.2). Les éléments de la matrice de covariance asymptotique $\mathbf{A} = (A_{ij})$ sont définis par

$$A_{ij} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} v_{ij}(m),$$

avec $v_{ij}(m) = E[\delta_{it}(\boldsymbol{\lambda}_0)\delta_{j(t-m)}(\boldsymbol{\lambda}_0)]$.

Cependant, dans notre cas puisque $\{u_t\}$ est *i.i.d.* et que $\{X_t\}$ est strictement exogène, la matrice \mathbf{A} se réduit à

$$A_{ij} = E[\delta_{it}(\boldsymbol{\lambda}_0)\delta_{jt}(\boldsymbol{\lambda}_0)].$$

L'application du théorème ergodique fournit quant à lui

$$n^{-1}DL^*(\boldsymbol{\lambda}_0) \xrightarrow{P} E[D\delta_t(\boldsymbol{\lambda}_0)] = \mathbf{B},$$

établissant (2.3). Des estimateurs convergents des matrices \mathbf{A} et \mathbf{B} peuvent être obtenus en substituant $\hat{v}_{ij}(m) = n^{-1} \sum \delta_{it}^*(\hat{\boldsymbol{\lambda}})\delta_{jt}^*(\hat{\boldsymbol{\lambda}})$ à $v_{ij}(m)$ et en posant $\hat{\mathbf{B}} = n^{-1} \sum_{t=m+1}^n D\delta_t(\hat{\boldsymbol{\lambda}})$.

Considérons maintenant les constantes suivantes qui seront utiles par la suite :

$$\begin{aligned} a &= E[\eta^2(u_t/\sigma_u, u_{t-1}/\sigma_u)], \\ b &= E[\eta_1(u_t/\sigma_u, u_{t-1}/\sigma_u)u_{t-1}], \\ a^* &= E[\psi^2(u_t/\sigma_u)], \\ b^* &= E[\psi'(u_t/\sigma_u)], \end{aligned} \tag{2.6}$$

où $\eta_1(u, v) = \partial\eta(u, v)/\partial u$ et $\psi'(u) = d\psi(u)/du$. Puisque le processus $\{u_t\}$ est constitué de variables aléatoires *i.i.d.* avec une distribution symétrique et $\eta(\cdot, \cdot)$ est impaire dans chacune des variables, des longs calculs nous permettent de montrer que la matrice \mathbf{A} est donnée par :

$$\begin{aligned} A_{ij} &= a^* \sum_{k_1, k_2=0}^s \sum_{h_1, h_2=0}^{\infty} \nu_{k_1} \nu_{k_2} s_{h_1} s_{h_2} \Gamma_x(k_2 - k_1 + h_2 - h_1 + j - i) + \\ &\quad a\sigma_u^2 \sum_{h=0}^{\infty} s_h s_{h+i-j}, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, p\}, \\ A_{ij} &= a^* \sum_{k=0}^s \nu_k \sum_{h=0}^{\infty} s_h \Gamma_x(j - i - k - h - p - 1), \quad i \in \{1, 2, \dots, p\}, \\ &\quad j \in \{p+1, p+2, \dots, p+s+1\}, \\ A_{ij} &= a^* \sum_{k=0}^s \nu_k \sum_{h=0}^{\infty} s_h \Gamma_x(i - j - k - h - p - 1), \quad j \in \{1, 2, \dots, p\}, \\ &\quad i \in \{p+1, p+2, \dots, p+s+1\}, \\ A_{ij} &= a^* \Gamma_x(j - i), \quad i, j \in \{p+1, p+2, \dots, p+s+1\}, \end{aligned}$$

et les éléments de la matrice B sont définis par :

$$B_{ij} = -b^* \sigma_u^{-1} \sum_{k_1, k_2=0}^s \sum_{h_1, h_2=0}^{\infty} s_{h_1} s_{h_2} \nu_{k_1} \nu_{k_2} \Gamma_x(k_1 - k_2 + h_1 - h_2 + i - j) -$$

$$b \sum_{h=0}^{\infty} s_h s_{h+i-j} \quad i, j \in \{1, 2, \dots, p\},$$

$$B_{ij} = -b^* \sigma_u^{-1} \sum_{k=0}^s \nu_k \sum_{h=0}^{\infty} s_h \Gamma_x(j - i - k - h - p - 1), \quad i \in \{1, 2, \dots, p\},$$

$$j \in \{p+1, p+2, \dots, p+s+1\},$$

$$B_{ij} = -b^* \sigma_u^{-1} \sum_{k=0}^s \nu_k \sum_{h=0}^{\infty} s_h \Gamma_x(i - j - k - h - p - 1), \quad j \in \{1, 2, \dots, p\},$$

$$i \in \{p+1, p+2, \dots, p+s+1\},$$

$$B_{ij} = -b^* \sigma_u^{-1} \Gamma_x(j - i), \quad i, j \in \{p+1, p+2, \dots, p+s+1\}.$$

Il est intéressant de remarquer que les matrices A et B se spécialisent quelque peu pour certains choix particuliers de la fonction $\eta(\cdot, \cdot)$. Par exemple, dans le cas de M-estimateurs, c'est-à-dire lorsque $\eta(u, v) = \psi(u)v$, nous obtenons que $A = a^* A_1$, $B = b^* \sigma_u^{-1} B_1$ et $B^{-1} A B^{-1\top} = a^* b^{*-2} \sigma_u^2 B_1^{-1} A_1 B_1^{-1\top}$, où les éléments de A_1 et B_1 sont les autocovariances $\text{cov}(Y_i, Y_j)$ et les covariances croisées $\text{cov}(Y_t, X_{t-k})$. Le cas des M estimateurs est particulièrement intéressant, puisque la matrice de covariance asymptotique des estimateurs RA-ARX diffère de celle des estimateurs MC par le facteur $\omega = a^*/b^{*2}$. Ainsi, dans ce cas particulier, l'efficacité des estimateurs RA-ARX par rapport aux estimateurs MC est donnée par ω^{-1} .

Chapitre 3

DISTRIBUTION ASYMPTOTIQUE DES AUTOCOVARIANCES RÉSIDUELLES ROBUSTES ET APPLICATIONS

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la distribution asymptotique des autocovariances résiduelles robustes

$$\gamma_{\hat{r}\hat{r}} = (\gamma_{\hat{r}\hat{r}}(1), \dots, \gamma_{\hat{r}\hat{r}}(M))^T, \quad (3.1)$$

où $\hat{r}_t = r_t(\hat{\lambda})$ sont les résidus basés sur les estimateurs RA-ARX et

$$\gamma_{\hat{r}\hat{r}}(i) = n^{-1} \sum_{t=p+i+1}^n \eta(\hat{r}_t/\hat{\sigma}_u, \hat{r}_{t-i}/\hat{\sigma}_u).$$

Dans le vecteur (3.1), la constante M est un entier fixé, $1 \leq M < n$. Plus précisément, nous établirons la distribution asymptotique des autocovariances résiduelles robustes sous l'hypothèse nulle de l'adéquation d'un modèle ARX. En particulier, nous donnerons explicitement la structure de covariance asymptotique de $n^{1/2}\gamma_{\hat{r}\hat{r}}$. Ce résultat présente des applications utiles. Un peu plus loin, nous proposerons des statistiques de test à des délais individuels. D'autre part, la mise en oeuvre de la méthodologie repose de manière très importante sur le calcul numérique des estimateurs RA-ARX. Nous allons conclure ce chapitre en décrivant des algorithmes pour calculer ces estimateurs robustes.

3.1. DISTRIBUTION ASYMPTOTIQUE DE $n^{1/2}\gamma_{\hat{r}\hat{r}}$

Avant de trouver la distribution asymptotique de $n^{1/2}\gamma_{\hat{r}\hat{r}}$, il est utile de trouver celle de $n^{1/2}\gamma_{rr}$, c'est-à-dire celle reposant sur le processus innovation. En notant que $\{\eta(u_t/\sigma_u, u_{t-i}/\sigma_u)\}$ forme une différence de martingales, où i est fixé, et ceci pour $i = 1, \dots, M$, il s'en suit par le théorème central limite pour une différence de martingales (voir le lemme 1 de Li (1988), p. 357) que

$$n^{1/2}\gamma_{rr} \xrightarrow{D} N(\mathbf{0}, a\mathbf{I}_M),$$

c'est-à-dire que $n^{1/2}\gamma_{rr}$ converge en distribution vers une loi normale de moyenne $\mathbf{0}$ et de matrice de covariance $a\mathbf{I}_M$ où a est donné par (2.6) et \mathbf{I}_M dénote la matrice identité de dimension $M \times M$. De plus, il est possible de montrer que $n^{1/2}((\hat{\lambda} - \lambda)^\top, \gamma_{rr}^\top)^\top$ converge conjointement en distribution vers une loi normale. En utilisant (2.1), la structure de covariance entre $n^{1/2}(\hat{\lambda} - \lambda)$ et $n^{1/2}\gamma_{rr}$ est donnée par

$$\lim_n \text{ncov}(\hat{\lambda} - \lambda_0, \gamma_{rr}) = -\mathbf{B}^{-1} \lim_n E[L(\lambda_0)\gamma_{rr}^\top],$$

où $L(\lambda_0) = (L_1(\lambda_0), \dots, L_{p+s+1}(\lambda_0))^\top$ est donné par (2.5) avec $\lambda = \lambda_0$. Soit $\mathbf{Z} = (z_{ij})$ une matrice de dimension $M \times (p + s + 1)$, où $z_{ij} = \lim_n E[L_j(\lambda_0)\gamma_{rr}(i)]$. À l'aide de la relation

$$E[\eta(u_{t_1}/\sigma_u, u_{t_1-j}/\sigma_u)\eta(u_{t_2}/\sigma_u, u_{t_2-k}/\sigma_u)] = 0, \quad (3.2)$$

si $t_1 \neq t_2$ ou $j \neq k$ (voir Li (1988, p.357)), et puisque les processus $\{X_t\}$ et $\{u_t\}$ sont indépendants, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} z_{ij} = \lim_n E[L(\lambda_0)\gamma_{rr}(i)] &= a\sigma_u s_{i-j}, \quad j = 1, \dots, p, \\ &= 0, \quad j = p + 1, \dots, p + s + 1, \end{aligned}$$

où $i = 1, \dots, M$. Par conséquent,

$$\lim_n \text{ncov}(\hat{\lambda} - \lambda, \gamma_{rr}) = -\mathbf{B}^{-1} \mathbf{Z}^\top.$$

Un développement en séries de Taylor de $\gamma_{\hat{r}\hat{r}}$ nous permet d'affirmer que

$$\gamma_{\hat{r}\hat{r}} = \gamma_{rr} + D_\gamma(\lambda)(\hat{\lambda} - \lambda) + o_p(n^{-1/2}), \quad (3.3)$$

où D_γ désigne la matrice de dérivées de dimension $M \times (p + s + 1)$. Plus précisément, les entrées de cette matrice de dérivées sont :

$$D_\gamma(\boldsymbol{\lambda}) = \begin{pmatrix} \partial\gamma_{rr}(1)/\partial\phi_1 & \dots & \partial\gamma_{rr}(p)/\partial\phi_p & \partial\gamma_{rr}(1)/\partial\nu_0 & \dots & \partial\gamma_{rr}(1)/\partial\nu_s \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial\gamma_{rr}(M)/\partial\phi_1 & \dots & \partial\gamma_{rr}(M)/\partial\phi_p & \partial\gamma_{rr}(M)/\partial\nu_0 & \dots & \partial\gamma_{rr}(M)/\partial\nu_s \end{pmatrix}.$$

Nous écrivons $\mathbf{Z} = a\sigma_u\mathbf{Z}_1$, où $\mathbf{Z}_1 = (\mathbf{Z}_{11} \vdots \mathbf{0})$ et

$$\mathbf{Z}_{11} = (s_{i-j})_{i=1,\dots,M;j=1,\dots,p}.$$

En adoptant des arguments similaires à ceux de Li (1988), on peut montrer que

$$n^{1/2}\gamma_{\hat{r}\hat{r}} = n^{1/2}\gamma_{rr} - \frac{b}{\sigma_u} \mathbf{Z}_1 n^{1/2}(\hat{\boldsymbol{\lambda}} - \boldsymbol{\lambda}) + o_p(1).$$

Ceci nous amène au théorème principal de ce chapitre. La preuve de ce théorème est détaillée dans le chapitre 4.

Théorème 3.1. *Soit une série chronologique générée par l'équation (1.1). Soit $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ le vecteur d'estimateurs RA-ARX pour le vecteur de paramètres $\boldsymbol{\lambda}$. Supposons que les hypothèses A et B sont satisfaites. Nous obtenons alors que*

$$n^{1/2}\gamma_{\hat{r}\hat{r}} \xrightarrow{D} N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Omega}_\eta),$$

où

$$\boldsymbol{\Omega}_\eta = a \left\{ \mathbf{I}_M + b\mathbf{Z}_1 \left[2\mathbf{B}^{-1} + \frac{b}{\sigma_u^2 a} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{B}^{-1} \right] \mathbf{Z}_1^\top \right\}.$$

Le dernier résultat est utile pour vérifier d'une manière robuste l'adéquation d'un modèle ARX. Dans le cas des modèles purement autorégressifs, le théorème 3.1 généralise le théorème principal de Li (1988, Section 2). Si les variables exogènes ne sont pas dans le modèle, alors (1.1) est un modèle purement autorégressif et alors la matrice \mathbf{Z}_1 se réduit à \mathbf{Z}_{11} . De plus, $\mathbf{A} = a\sigma_u^2\mathbf{C}$ et $\mathbf{B} = -b\mathbf{C}$, où $\mathbf{C} = (c_{ij})$, $c_{ij} = \sum_{h=0}^{\infty} s_h s_{h+i-j}$. La matrice asymptotique du théorème 3.1 se réduit alors à $\lim_n n \text{var}(\gamma_{\hat{r}\hat{r}}) = a(\mathbf{I}_M - \mathbf{Z}_{11}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{Z}_{11}^\top)$, comme obtenue par Li (1988).

Duchesne (2004b) a fournit la distribution asymptotique des autocorrélations matricielles dans les modèles ARX vectoriels (appelés modèles VARX), dans la situation où il y a potentiellement des contraintes linéaires sur les paramètres. Il a montré rigoureusement que la matrice de covariance asymptotique d'un vecteur d'autocovariances matricielles n'est pas singulière, sous certaines conditions.

Pour trouver les autocorrélations usuelles, posons $\eta(u, v) = uv$ et supposons maintenant la normalité. Soit $\hat{\lambda}_{MV}$ l'estimateur de maximum de vraisemblance pour λ . Dans ce cas, $a = a^* = b^* = 1$ et $b = \sigma_u$. De plus, $B = -A/\sigma_u$. Par conséquent, nous obtenons la structure de covariance : $\lim_n n \text{var}(\gamma_{\hat{r}\hat{r}}) = a(I_M - \sigma_u^2 Z_1 A^{-1} Z_1^\top)$. Il est à noter que les résultats de Duchesne (2004b) sont plus généraux dans le sens qu'ils sont valides dans le cas multivarié. Cependant, le théorème 3.1 fournit une version robuste d'une partie du théorème 3.1 de Duchesne (2004b), dans le cas particulier des modèles ARX univariés.

3.2. TESTS À DES DÉLAIS INDIVIDUELS

En utilisant le théorème 3.1, nous pouvons développer des statistiques de test à des délais individuels, qui sont utiles pour vérifier l'adéquation d'un modèle ARX à chaque délai, dans le cas où des valeurs aberrantes sont potentiellement observées. Soit

$$\begin{aligned} \hat{\Omega}_\eta &= \hat{a} \left\{ I_M + \hat{b} \hat{Z}_1 \left[2\hat{B}^{-1} + \frac{\hat{b}}{\hat{\sigma}_u^2 \hat{a}} \hat{B}^{-1} \hat{A} \hat{B}^{-1} \right] \hat{Z}_1^\top \right\}, \\ &= (\hat{\omega}_{ij,\eta}). \end{aligned}$$

Pour tout $l \geq 1$ nous définissons les statistiques de test à des délais individuels par la formule

$$Q_R(l) = n \gamma_{\hat{r}\hat{r}}^2(l) / \hat{\omega}_{ll,\eta}. \quad (3.4)$$

Sous l'hypothèse nulle d'adéquation, $Q_R(l) \xrightarrow{D} \chi_1^2$. La statistique modifiée de test

$$Q_R^*(l) = \frac{n}{n-1} Q_R(l) \quad (3.5)$$

devrait avoir de meilleures propriétés échantillonnales en pratique, surtout lorsque l est grand. Les statistiques de test $Q_R(l)$ et $Q_R^*(l)$ fournissent des versions robustes des statistiques de test

$$Q(l) = nR_{\hat{r}\hat{r}}^2(l)/\hat{\omega}_u, \quad (3.6)$$

$$Q^*(l) = \frac{n}{n-1}Q(l), \quad (3.7)$$

où $\hat{\omega}_u$ désigne la variance asymptotique de $n^{1/2}R_{\hat{r}\hat{r}}(l)$. Les statistiques de test $Q(l)$ et $Q^*(l)$ correspondent à des cas particuliers des statistiques de test de Duchesne (2004b), dans le cas des modèles ARX univariés. Des statistiques de test pour les diagnostics des modèles VARX se trouvent dans Duchesne (2004b). Les propriétés échantillonnales de $Q(l)$, $Q^*(l)$, $Q_R(l)$ et $Q_R^*(l)$ seront étudiées dans le chapitre 5, sous divers scénarios pour l'apparition des valeurs aberrantes.

3.3. ALGORITHMES POUR CALCULER LES ESTIMATEURS RA-ARX

Nous distinguons deux algorithmes pour déterminer les estimateurs RA-ARX. Le premier est introduit dans Duchesne (2004a), qui a proposé un algorithme itératif basé sur une procédure des moindres carrés itérées. Celui-ci fournit des estimations pour les paramètres d'un modèle ARX dans le cas particulier de la fonction $\eta(\cdot, \cdot)$, lorsque cette dernière est de type Mallows. Cet algorithme est facile à exécuter, et est probablement le plus utile en pratique. Quant au deuxième algorithme, c'est celui de Newton-Raphson, qui est bien connu en analyse numérique (voir par exemple, Maron et Lopez (1991)). Cet algorithme est général pour n'importe quel type de fonction $\eta(\cdot, \cdot)$. Cependant, il exige des valeurs initiales pour les paramètres qui peuvent parfois être difficiles à spécifier. Si les valeurs initiales ne sont pas bien choisies, ceci risque d'affecter la convergence de l'algorithme.

3.3.1. Algorithme itératif

Soit

$$r_t^* = \psi(r_t(\hat{\lambda})/\hat{\sigma}_u)/\hat{\sigma}_u$$

et

$$Y_t^* = \hat{\phi}^{-1}(B)\hat{\nu}(B)X_t + \hat{\phi}^{-1}(B)r_t^*.$$

Supposons un instant que la série chronologique observée est Y_t^* avec variables exogènes X_t . Alors les estimateurs MC sont obtenus par la résolution du système (1.2). Cette propriété suggère l'algorithme itératif suivant :

1. Soit $\hat{\lambda}^{(0)}$ et $\hat{\sigma}_u$. Ces estimateurs peuvent être les estimateurs MC ordinaires.
2. Étant donné $\hat{\lambda}^{(k)}$ et $\hat{\sigma}_u^{(k)}$ qui correspondent à la k ème itération, calculer

$$r_t^{*(k)} = \psi(r_t(\hat{\lambda}^{(k)})/\hat{\sigma}_u^{(k)})/\hat{\sigma}_u^{(k)}$$

et

$$Y_t^{*(k)} = \hat{\phi}^{-1(k)}(B)\hat{\nu}^{(k)}(B)X_t + \hat{\phi}^{-1(k)}(B)r_t^{*(k)}.$$

3. Calculer les estimateurs MC de la série $Y_t^{*(k)}$ avec variables exogènes X_t .
4. Répéter les étapes 2. et 3., jusqu'à la convergence.

Nous ne sommes pas assurés d'obtenir la convergence de l'algorithme itératif (voir aussi Bustos et Yohai (1986), section 2.2, p.158). Cependant, dans nos expériences, nous n'avons pas expérimenté de problèmes de convergence, qui était généralement relativement rapide.

3.3.2. Algorithme de Newton-Raphson

Pour $j \in \{1, \dots, p + s + 1\}$, soit

$$f_j(\lambda) = \begin{cases} \sum_{i=0}^s \nu_i \sum_{h=0}^{n-j-i-1} s_h \gamma_{rx}(h+i+j; \psi) \\ + \sigma_u \sum_{h=0}^{n-p-j-1} s_h \gamma_{rr}(h+j; \eta), & \text{si } j = 1, \dots, p, \\ \gamma_{rx}(j-p-1; \psi), & \text{si } j = p+1, \dots, p+s+1. \end{cases}$$

Soit $f(\lambda) = (f_1(\lambda), \dots, f_{p+s+1}(\lambda))^T$ et $\Delta_\lambda = (\Delta_{\phi_1}, \dots, \Delta_{\phi_p}, \Delta_{\nu_0}, \dots, \Delta_{\nu_s})^T$. L'algorithme de Newton-Raphson nous permet de résoudre le système d'équations $f(\lambda) = 0$ en procédant par les étapes suivantes :

1. Soit $\hat{\lambda}^{(0)}$ le vecteur des valeurs initiales des paramètres à l'itération 0. Ces valeurs initiales peuvent être obtenues par l'algorithme itératif, ou bien par les estimateurs MC s'il ne semble pas y avoir des valeurs aberrantes.
2. Étant donné $\hat{\lambda}^{(k)}$ qui correspond à la k ème itération, calculer

$$f'(\hat{\lambda}^{(k)}) = [\partial f(\lambda)/\partial \lambda]_{\lambda=\hat{\lambda}^{(k)}}$$

et obtenir $\Delta_{\lambda}^{(k)}$ en résolvant

$$f'(\hat{\lambda}^{(k)})\Delta_{\lambda} = -f(\hat{\lambda}^{(k)}).$$

3. De l'étape 2. nous obtenons

$$\hat{\lambda}^{(k+1)} = \hat{\lambda}^{(k)} + \Delta_{\lambda}^{(k)}.$$

4. Répéter les étapes 2. et 3., jusqu'à la convergence.

Il est à noter que lorsque la fonction $\eta(\cdot, \cdot)$ est de type Mallows, les deux algorithmes que nous avons cités donnent exactement les mêmes estimations, comme il était attendu.

De manière générale, la convergence de l'algorithme itératif est plutôt rapide. Nous avons noté qu'habituellement la convergence avait lieu après une dizaine d'itérations. Quant à l'algorithme de Newton-Raphson, nous avons remarqué que sa convergence est extrêmement rapide lorsque les valeurs initiales sont soigneusement choisies. Dans ce cas, cet algorithme offrait une convergence après quatre ou cinq itérations. Cependant, si le choix de valeurs initiales n'est pas adéquat, l'algorithme à quelques reprises affichait des problèmes de convergence.

Chapitre 4

PREUVE DU THÉORÈME PRINCIPAL

Considérons le modèle (1.1) défini dans le premier chapitre, avec les deux hypothèses A et B. Le développement en série de Taylor de $\gamma_{\hat{r}\hat{r}} = (\gamma_{\hat{r}\hat{r}}(1), \dots, \gamma_{\hat{r}\hat{r}}(M))^{\top}$, est donné par (3.3). Pour tout $i \in \{1, \dots, M\}$ et pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$, nous avons que

$$\begin{aligned}\partial\gamma_{rr}(i)/\partial\phi_j &= (n\sigma_u)^{-1} \sum_{t=p+i}^n \eta_1(r_t/\sigma_u, r_{t-i}/\sigma_u) \partial r_t / \partial\phi_j \\ &\quad + (n\sigma_u)^{-1} \sum_{t=p+i}^n \eta_2(r_t/\sigma_u, r_{t-i}/\sigma_u) \partial r_{t-i} / \partial\phi_j, \\ &= M_1 + M_2,\end{aligned}\tag{4.1}$$

où $\eta_1(x, y) = \partial\eta(x, y)/\partial x$ et $\eta_2(x, y) = \partial\eta(x, y)/\partial y$ sont des dérivées par rapport à la première et seconde variable, respectivement. Le terme M_2 converge en probabilité vers 0 (voir Li (1988)). Dans un modèle ARX tel que défini par (1.1), nous avons que

$$\partial r_t / \partial\phi_j = -(\phi^{-1}(B)\nu(B)X_{t-j} + \phi^{-1}(B)r_{t-j}),\tag{4.2}$$

avec $\phi^{-1}(B) = \sum_{h=0}^{\infty} s_h B^h$. Ainsi, nous obtenons que

$$\begin{aligned}M_1 &= -(n\sigma_u)^{-1} \sum_{t=p+i}^n \phi^{-1}(B)\nu(B)X_{t-j}\eta_1(r_t/\sigma_u, r_{t-i}/\sigma_u) \\ &\quad - (n\sigma_u)^{-1} \sum_{t=p+i}^n \phi^{-1}(B)r_{t-j}\eta_1(r_t/\sigma_u, r_{t-i}/\sigma_u), \\ &= M_{11} + M_{12}.\end{aligned}\tag{4.3}$$

Lorsque la taille échantillonnale est suffisamment grande, nous montrons que

$$M_{11} \xrightarrow{P} -\sigma_u^{-1} E[\phi^{-1}(B)\nu(B)X_{t-j}\eta_1(r_t/\sigma_u, r_{t-i}/\sigma_u)].$$

Cependant $\{X_t\}$ et $\{r_t\}$ sont indépendants et puisque nous avons supposé que $E(X_t) = 0$, alors nous obtenons que $M_{11} \xrightarrow{P} 0$. Lorsque $i \geq j$, nous pouvons montrer que

$$M_{12} \xrightarrow{P} -\sigma_u^{-1} E[\phi^{-1}(B)r_{t-j}\eta_1(r_t/\sigma_u, r_{t-i}/\sigma_u)] = C.$$

Or nous avons que $\phi^{-1}(B) = \sum_{h=0}^{\infty} s_h B^h$, ceci nous permet d'écrire

$$C = -\sigma_u^{-1} \sum_{h=0}^{\infty} s_h E[\eta_1(r_t/\sigma_u, r_{t-i}/\sigma_u)r_{t-j-h}].$$

Puisque η est impaire dans chaque variable, nous obtenons finalement que

$$C = -\sigma_u^{-1} s_{i-j} b.$$

Dans le cas où $i < j$, il est possible de montrer que $M_{12} \xrightarrow{P} 0$ (voir Li (1988)).

Pour tout $i \in \{1, \dots, M\}$ et pour tout $j \in \{0, \dots, s\}$ nous avons

$$\begin{aligned} \partial\gamma_{rr}(i)/\partial\nu_j &= (n\sigma_u)^{-1} \sum_{t=p+i}^n \eta_1(r_t/\sigma_u, r_{t-i}/\sigma_u) \partial r_t / \partial\nu_j + \\ &\quad (n\sigma_u)^{-1} \sum_{t=p+i}^n \eta_2(r_t/\sigma_u, r_{t-i}/\sigma_u) \partial r_{t-i} / \partial\nu_j. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Cependant $\partial r_t / \partial\nu_j = -X_{t-j}$ et puisque $\{X_t\}$ et $\{r_t\}$ sont indépendants et que $E(X_t) = 0$, nous déduisons que $\partial\gamma_{rr}(i)/\partial\nu_j \xrightarrow{P} 0$. Par conséquent, la matrice $D_\gamma(\lambda)$ de dimension $M \times (p + s + 1)$ est donnée par

$$D_\gamma(\lambda) = (-\sigma_u^{-1} s_{i-j} b : \mathbf{0})_{i=1, \dots, M; j=1, \dots, p}.$$

Nous pouvons écrire $D_\gamma(\lambda) = -\sigma_u^{-1} b \mathbf{X}$, où $\mathbf{X} = (s_{i-j} : \mathbf{0})$.

4.1. DISTRIBUTION ASYMPTOTIQUE DE $n^{1/2} \gamma_{rr}$

Pour $i \in \{1, \dots, M\}$, on note dans un premier temps que

$$E(\gamma_{rr}(i)) = n^{-1} \sum_{t=p+1+i}^n E[\eta(r_t/\sigma_u, r_{t-i}/\sigma_u)] = 0.$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\text{var}(\gamma_{rr}(i)) &= E[\gamma_{rr}^2(i)], \\
&= n^{-2} E \left\{ \sum_{t=p+1+i}^n \eta(r_t/\sigma_u, r_{t-i}/\sigma_u) \right\}^2, \\
&= n^{-2} \sum_{t=p+1+i}^n E\{\eta^2(r_t/\sigma_u, r_{t-i}/\sigma_u)\},
\end{aligned}$$

parce que $E[\eta(u_{t_1}/\sigma_u, u_{t_1-j}/\sigma_u)\eta(u_{t_2}/\sigma_u, u_{t_2-k}/\sigma_u)] = 0$, si $t_1 \neq t_2$ ou $j \neq k$. Alors

$$\text{var}(\gamma_{rr}(i)) = a(n-p-i)/n^2.$$

Pour n assez grand, $\text{var}(\gamma_{rr}(i)) \cong a/n$. Rappelons que $n^{1/2}\gamma_{rr} \xrightarrow{D} N(\mathbf{0}, a\mathbf{I}_M)$ par le théorème central limite pour une différence de martingales.

4.2. COVARIANCE ASYMPTOTIQUE ENTRE $n^{1/2}(\hat{\lambda} - \lambda)$ ET $n^{1/2}\gamma_{rr}$

Nous avons cité dans la section 2.1 du deuxième chapitre que

$$n^{1/2}(\hat{\lambda} - \lambda_0) = -[n^{-1}DL^*(\lambda_0)]^{-1}[n^{-1/2}L^*(\lambda_0)] + o_p(1).$$

Or $n^{-1}DL^*(\lambda_0) \xrightarrow{P} B$. Par conséquent

$$n^{1/2}(\hat{\lambda} - \lambda_0) \approx -B^{-1}L^*(\lambda_0)/n^{1/2},$$

ceci nous donne

$$\text{cov}(n^{1/2}(\hat{\lambda} - \lambda_0), n^{1/2}\gamma_{rr}) \approx -B^{-1}\text{cov}(L^*(\lambda_0), \gamma_{rr}).$$

Pour $j \in \{1, \dots, p\}$ et pour $k \in \{1, \dots, M\}$,

$$\text{cov}(L_j^*(\lambda_0), \gamma_{rr}(k)) = E[L_j^*(\lambda_0)\gamma_{rr}(k)].$$

Or

$$\begin{aligned}
E[L_j^*(\lambda_0)\gamma_{rr}(k)] &= n^{-1} E \left[\sum_{i=0}^s \nu_i \sum_{t=i+j+1}^n \sum_{h=0}^{t-i-j-1} \sum_{t_1=p+k+1}^n \mathcal{F}(i, t, h, t_1) \right] \\
&+ n^{-1}\sigma_u \sum_{h=0}^{t-p-j-1} s_h \left[\sum_{t=p+j+1}^n \sum_{t_1=p+k+1}^n E(\mathcal{G}(t, t_1)) \right], \quad (4.5)
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(i, t, h, t_1) &= s_h \psi(r_t/\sigma_u) \eta(r_{t_1}/\sigma_u, r_{t_1-k}/\sigma_u) X_{t-j-i-h}, \\ \mathcal{G}(t, t_1) &= \eta(r_t/\sigma_u, r_{t-k}/\sigma_u) \eta(r_{t_1}/\sigma_u, r_{t_1-k}/\sigma_u).\end{aligned}$$

Le premier terme du membre de droite de l'équation (4.5) est 0 car $E(X_t) = 0$ et les deux processus $\{X_t\}$ et $\{r_t\}$ sont indépendants. Cependant, le deuxième terme est non nul si et seulement si $t = t_1$ et $h = k - j$, donc il converge dans ce cas vers $a\sigma_u s_{k-j}$. Lorsque $j \in \{p+1, \dots, p+s+1\}$, alors

$$\begin{aligned}E[L_j^*(\lambda_0) \gamma_{rr}(k)] &= n^{-1} E\left[\left(\sum_{t=j-p}^n \psi(r_t/\sigma_u) X_{t-j+p+1}\right) \left(\sum_{t_1=p+k+1}^n \eta(r_{t_1}/\sigma_u, r_{t_1-k}/\sigma_u)\right)\right], \\ &= 0.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\text{cov}(\mathbf{L}^*(\lambda_0), \gamma_{rr}) &= a\sigma_u (s_{k-j} \mathbf{1})^\top, \\ &= a\sigma_u \mathbf{X}^\top.\end{aligned}$$

Par suite

$$\text{cov}(n^{1/2}(\hat{\lambda} - \lambda_0), n^{1/2}\gamma_{rr}) = -a\sigma_u \mathbf{B}^{-1} \mathbf{X}^\top.$$

D'autre part nous avons que

$$n^{1/2}(\hat{\lambda} - \lambda_0) \xrightarrow{D} N(\mathbf{0}, \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{B}^{-1\top}),$$

en utilisant ce résultat et les résultats précédents, nous allons chercher l'espérance et la variance de $n^{1/2}\gamma_{\hat{r}\hat{r}}$. Tout d'abord,

$$n^{1/2}\gamma_{\hat{r}\hat{r}} = n^{1/2}\gamma_{rr} - \sigma_u^{-1} b \mathbf{X} n^{1/2}(\hat{\lambda} - \lambda) + o_p(1),$$

alors

$$\begin{aligned}E(n^{1/2}\gamma_{\hat{r}\hat{r}}) &= E(n^{1/2}\gamma_{rr}) - \sigma_u^{-1} b \mathbf{X} E(n^{1/2}(\hat{\lambda} - \lambda)) = 0 \\ \text{var}(n^{1/2}\gamma_{\hat{r}\hat{r}}) &= \text{var}(n^{1/2}\gamma_{rr}) + (\sigma_u^{-1})^2 b^2 \mathbf{X} \text{var}(n^{1/2}(\hat{\lambda} - \lambda)) \mathbf{X}^\top \\ &\quad - 2\sigma_u^{-1} b \mathbf{X} \text{cov}(n^{1/2}\gamma_{rr}, n^{1/2}(\hat{\lambda} - \lambda)),\end{aligned}$$

en remplaçant chaque terme par sa valeur on obtient finalement que

$$\text{var}(n^{1/2}\gamma_{\hat{\tau}}) = a\{\mathbf{I}_M + b\mathbf{X}[2\mathbf{B}^{-1} + \frac{b}{\sigma_u^2 a}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}]\mathbf{X}^\top\}.$$

D'où la démonstration du théorème.

Chapitre 5

SIMULATIONS

5.1. INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous rapportons les résultats de quatre expériences de simulation. Ces expériences présument un modèle ARX(1,0) de la forme $(1 - \phi B)Y_t = \nu_0 X_t + u_t$. Dans ce cas le système d'équations non linéaires qui détermine les estimateurs RA-ARX est défini par :

$$\begin{aligned} \nu_0 \sum_{h=0}^{n-1} \phi^h \gamma_{rx}(h+1; \psi) + \sigma_u \sum_{h=0}^{n-3} \gamma_{rr}(h+1; \eta) &= 0, \\ \gamma_{rx}(0; \psi) &= 0. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Dans la première et la seconde études, nous comparons les estimateurs MC et les estimateurs RA-ARX en utilisant l'algorithme général de Newton-Raphson. Les estimateurs RA-ARX sont calculés à l'aide des fonctions $\eta(\cdot, \cdot)$ de types Hampel et Mallows, lorsque les fonctions $\psi(\cdot)$ appartiennent aux familles d'Huber et bicarrée. Plus précisément, dans la première expérience, nous comparons les biais asymptotiques des estimateurs RA-ARX par rapport à ceux des estimateurs MC. Dans la seconde expérience, nous déterminons les efficacités empiriques des estimateurs RA-ARX par rapport aux estimateurs MC. Différentes fonctions $\eta(\cdot, \cdot)$ et $\psi(\cdot)$ sont considérées. Nous soulignons que dans les tableaux qui suivront, nous avons utilisé les abréviations *RAMH*, *RAHH*, *RAMB* et *RAHB* pour désigner les estimateur RA-ARX basés sur les couples de fonctions $(\eta_M; \psi_H)$, $(\eta_H; \psi_H)$, $(\eta_M; \psi_B)$ et $(\eta_H; \psi_B)$, respectivement.

Dans les troisième et quatrième expériences, nous étudions la performance échantillonnale des tests à des délais individuels. Les niveaux empiriques et les puissances des tests basés sur les statistiques robustes $Q_R(l)$ et $Q_R^*(l)$ sont comparés à ceux reposant sur les statistiques non robustes $Q(l)$ et $Q^*(l)$, où les estimateurs RA-ARX sont basés sur la fonction $\eta(\cdot, \cdot)$ de type Mallows et la fonction $\psi(\cdot)$ de la famille bicarrée. Notons que toutes les simulations sont faites à l'aide du logiciel S-plus.

5.2. BIAIS ASYMPTOTIQUES

Il est intéressant d'étudier le biais des estimateurs, avec et sans la présence de valeurs aberrantes dans les séries chronologiques. En présence de valeurs aberrantes additives, tous les estimateurs, robustes ou non robustes, présentent un biais (voir Denby et Martin (1979, p. 142)). Cependant, on s'attend à ce que le biais d'un estimateur robuste soit nettement plus petit que celui des estimateurs MC.

5.2.1. Plan de la première expérience

Afin d'étudier empiriquement les propriétés du biais,

1. nous générons les données à partir du modèle suivant :

$$(1 - \phi B)Y_t = \nu X_t + u_t, \quad (5.2)$$

où la variable exogène satisfait

$$X_t = 0.8X_{t-1} + v_t,$$

où le processus $\{v_t\}$ est un bruit blanc, tel que $v_t \sim N(0, 1)$.

2. Nous fixons

$$\lambda = (\phi, \nu)^\top = (0.5, 0.5)^\top.$$

Le processus bruit blanc $\{u_t\}$ est supposé gaussien de variance connue $\sigma_u^2 = 1$.

3. Pour l'occurrence des valeurs aberrantes, nous étudions deux stratégies :
 - (i) absence de valeurs aberrantes,

(ii) valeurs aberrantes additives.

Les valeurs aberrantes additives dans la variable endogène Y_t sont obtenues en observant $Y_t + W_t$ où $W_t \equiv 0$ avec une probabilité de 95% et $W_t = \pm 10$ avec une probabilité de 5%, le signe étant choisi aléatoirement. Nous adoptons pour cette expérience une taille échantillonnale $n = 1000$, qui procure une bonne idée des valeurs asymptotiques des estimateurs. Pour cette expérience et les autres expériences empiriques, pour obtenir un échantillon de taille n , nous avons généré $2n + 1$ observations et n'avons retenu que les n plus récentes, dans le but de minimiser l'effet des valeurs initiales. Nous considérons $Nsim = 400$ répliques de l'expérience. Nous n'avons pas choisi une valeur très grande pour $Nsim$, puisque les estimateurs RA-ARX exigent des calculs intensifs avec une taille échantillonnale assez grande. Les estimateurs RA-ARX sont déterminés à l'aide des fonctions $\eta(\cdot, \cdot)$ de types Mallows et Hampel. Nous avons utilisé l'algorithme de Newton-Raphson pour déterminer d'une façon générale les estimateurs RA-ARX basés sur la fonction $\eta(\cdot, \cdot)$ de Hampel. Avec la fonction $\eta(\cdot, \cdot)$ de Mallows, les estimateurs RA-ARX peuvent être calculés facilement en utilisant l'algorithme itératif. Les fonctions $\psi(\cdot)$ sont choisies dans la famille d'Huber ainsi que la famille bicarrée. Pour la fonction $\psi(\cdot)$ d'Huber, nous avons adopté $c = 1.345$ et pour la fonction $\psi(\cdot)$ bicarrée, $c = 4.685$. Pour une discussion concernant le choix de la constante c , voir Bustos et Yohai (1986).

5.2.2. Résultats de la première expérience

Les tableaux 5.1 et 5.2 rapportent chacun les moyennes empiriques, les variances, les biais au carré (Biais²) et les biais relatifs (BREL) des estimateurs MC et des estimateurs RA-ARX, tel que

$$\text{BREL} = |\text{Moyenne}(\hat{\lambda}) - \lambda|/|\lambda|,$$

où $\lambda = \phi$ ou ν . Les estimations dans les tableaux cités ci-dessus sont calculées en absence des valeurs aberrantes et lorsque des valeurs aberrantes additives sont présentes, respectivement.

Du tableau 5.1, il apparaît que les estimateurs MC sont moins variables que les estimateurs RA-ARX, comme il était prévu. En général, les biais de tous les estimateurs considérés sont suffisamment petits. Cependant, lorsque des valeurs aberrantes additives sont observées, le tableau 5.2 montre que les estimateurs MC sont les plus biaisés pour l'estimation de chacun des paramètres ϕ et ν . Il apparaît que la variance des estimateurs MC est plus importante, en particulier pour l'estimation de ν . Les estimateurs RA-ARX montrent nettement un biais petit. Le choix de la fonction $\psi(\cdot)$ semble important dans cette expérience : la fonction bicarrée $\psi(\cdot)$ fournit des estimateurs moins biaisés que ceux de la fonction $\psi(\cdot)$ d'Huber. Il semble aussi que la fonction $\eta(\cdot, \cdot)$ de Hampel donne de bons résultats, comparativement à celle de Mallows, mais la différence est plutôt marginale.

TAB. 5.1. Moyennes empiriques, variances, biais au carré ($\times 10^{-5}$) et biais relatifs (en valeur absolue) pour l'estimation de ϕ et ν , en utilisant les estimateurs RA-ARX basés sur les fonctions η de types Mallows et Hampel, pour des fonctions ψ de familles Huber et bicarrée, comparés aux estimateurs MC, dans le cas où les données ne sont pas contaminées.

	$\phi = 0.5$			
	Moyenne	Variance	Biais ²	BREL
<i>MC</i>	0.49846	0.00048	0.23510	0.00306
<i>RAMH</i>	0.49884	0.00051	0.13313	0.00230
<i>RAHH</i>	0.49874	0.00053	0.15684	0.00250
<i>RAMB</i>	0.49882	0.00051	0.13892	0.00230
<i>RAHB</i>	0.49885	0.00058	0.13160	0.00229
$\nu = 0.5$				
<i>MC</i>	0.50117	0.00056	0.13854	0.00235
<i>RAMH</i>	0.50086	0.00058	0.07506	0.00173
<i>RAHH</i>	0.50092	0.00060	0.08570	0.00185
<i>RAMB</i>	0.50092	0.00058	0.08627	0.00185
<i>RAHB</i>	0.50089	0.00062	0.08078	0.00179

TAB. 5.2. Moyennes empiriques, variances, biais au carré ($\times 10^{-5}$) et biais relatifs (en valeur absolue) pour l'estimation de ϕ et ν , en utilisant les estimateurs RA-ARX basés sur les fonctions η de types Mallows et Hampel, pour des fonctions ψ de familles Huber et bicarrée, comparés aux estimateurs MC, dans le cas où des valeurs aberrantes additives sont présentes.

	$\phi = 0.5$			
	Moyenne	Variance	Biais ²	BREL
<i>MC</i>	0.15360	0.00109	11998.7	0.69278
<i>RAMH</i>	0.43678	0.00080	399.604	0.12642
<i>RAHH</i>	0.45115	0.00077	238.552	0.09768
<i>RAMB</i>	0.49835	0.00055	0.26985	0.00328
<i>RAHB</i>	0.49863	0.00064	0.18596	0.00272
$\nu = 0.5$				
<i>MC</i>	0.73383	0.00241	5467.78	0.46766
<i>RAMH</i>	0.54190	0.00080	175.612	0.08381
<i>RAHH</i>	0.53234	0.00079	104.592	0.06468
<i>RAMB</i>	0.50048	0.00062	0.02365	0.00097
<i>RAHB</i>	0.50030	0.00067	0.00938	0.00061

5.3. COMPARAISON DES EFFICACITÉS DES ESTIMATEURS ROBUSTES RA-ARX PAR RAPPORT AUX ESTIMATEURS MC

Une autre considération importante concerne l'efficacité des procédures robustes, lorsque des valeurs aberrantes sont présentes ou absentes dans une série chronologique. Dans notre étude, l'efficacité (EFF) est définie par le quotient entre l'erreur quadratique moyenne (EQM) des estimateurs MC et celle des estimateurs robustes RA-ARX. Dans les sections qui suivent, nous exposons le plan de la simulation qui est destiné à comparer les efficacités, ainsi que les résultats empiriques dégagés de cette simulation.

5.3.1. Plan de la deuxième expérience

Pour cette expérience, nous générons les données à partir du modèle (5.2), avec la même variable exogène X_t . Cependant, dans cette expérience, nous considérons une taille échantillonnale $n = 100$ et l'expérience de Monte Carlo est conduite avec $Nsim = 1000$ itérations. Nous adoptons les deux stratégies pour l'occurrence de valeurs aberrantes citées dans la sous-section (5.2.1). Cependant dans cette expérience, la méthode de la contamination de la variable endogène consiste à remplacer systématiquement Y_{11} , Y_{33} , Y_{49} , Y_{76} et Y_{90} par 10, -10, 10, -10 et 10 respectivement. Cette stratégie de contamination est similaire à celle de l'étude de simulation dans Duchesne (2004a).

5.3.2. Résultats de la deuxième expérience

Dans les tableaux 5.3 (absence de valeurs aberrantes) et 5.4 (présence de valeurs aberrantes additives), nous rapportons les moyennes échantillonnales, variances, erreurs quadratiques moyennes et les efficacités, des estimateurs robustes, par rapport aux estimateurs MC.

Du tableau 5.3, lorsque les valeurs aberrantes ne sont pas présentes, les estimateurs MC obtiennent l'efficacité la plus élevée, comme prévu. Cependant, les efficacités des estimateurs robustes, par rapport aux estimateurs MC, sont satisfaisantes et les résultats sont en accord avec les résultats de Duchesne (2004a). Il

semble qu'une fonction $\eta(\cdot, \cdot)$ de type Mallows fournit des estimateurs plus efficaces qu'une fonction $\eta(\cdot, \cdot)$ de type Hampel, au moins pour cette taille d'échantillon et pour le processus choisi, sans des valeurs aberrantes additives.

Du tableau 5.4, les estimateurs robustes sont clairement plus efficaces que les estimateurs MC. Cela est expliqué par la composante importante de biais dans l'EQM des estimateurs MC. Les variances des estimateurs robustes et non robustes apparaissent plutôt comparables en ce qui concerne l'estimation de ϕ . La fonction $\psi(\cdot)$ bicarrée procure l'efficacité la plus élevée pour l'estimation des paramètres. Cependant, les différences entre les efficacités sont assez petites concernant l'estimation de ν . Les variances échantillonnales des estimateurs RA-ARX de ν sont plus petites que celles des estimateurs MC. Toutes les fonctions $\eta(\cdot, \cdot)$ fournissent des efficacités élevées, et aucune ne performe uniformément mieux que l'autre.

TAB. 5.3. Moyennes empiriques, variances, erreurs quadratiques moyennes et efficacités pour l'estimation de ϕ et ν , en utilisant les estimateurs RA-ARX basés sur les fonctions η de types Mallows et Hampel, pour des fonctions ψ de familles Huber et bicarrée, comparés aux estimateurs MC, dans le cas où les données ne sont pas contaminées.

	$\phi = 0.5$			
	Moyenne	Variance	EQM	EFF
<i>MC</i>	0.49241	0.00451	0.00457	1.00000
<i>RAMH</i>	0.49213	0.00491	0.00497	0.91923
<i>RAHH</i>	0.49203	0.00515	0.00521	0.87722
<i>RAMB</i>	0.49225	0.00501	0.00507	0.90117
<i>RAHB</i>	0.49154	0.00566	0.00573	0.79724
$\nu = 0.5$				
<i>MC</i>	0.50411	0.00617	0.00618	1.00000
<i>RAMH</i>	0.50398	0.00666	0.00668	0.92580
<i>RAHH</i>	0.50408	0.00684	0.00686	0.90125
<i>RAMB</i>	0.50399	0.00668	0.00670	0.92278
<i>RAHB</i>	0.50445	0.00703	0.00705	0.87738

TAB. 5.4. Moyennes empiriques, variances, erreurs quadratiques moyennes et efficacités pour l'estimation de ϕ et ν , en utilisant les estimateurs RA-ARX basés sur les fonctions η de types Mallows et Hampel, pour des fonctions ψ de familles Huber et bicarrée, comparés aux estimateurs MC, dans le cas où des valeurs aberrantes additives sont présentes

	$\phi = 0.5$			
	Moyenne	Variance	EQM	EFF
<i>MC</i>	0.13147	0.00610	0.14191	1.00000
<i>RAMH</i>	0.42021	0.00736	0.01373	10.33220
<i>RAHH</i>	0.43557	0.00763	0.01178	12.04144
<i>RAMB</i>	0.48113	0.00686	0.00722	19.64633
<i>RAHB</i>	0.48108	0.00761	0.00797	17.80034
$\nu = 0.5$				
<i>MC</i>	0.69836	0.02268	0.06203	1.00000
<i>RAMH</i>	0.54984	0.00873	0.01122	5.52855
<i>RAHH</i>	0.53983	0.00875	0.01034	5.99954
<i>RAMB</i>	0.50538	0.00823	0.00825	7.51199
<i>RAHB</i>	0.50547	0.00853	0.00856	7.24475

5.4. NIVEAUX ET PUISSANCES DES STATISTIQUES DE TEST À DES DÉLAIS INDIVIDUELS

Nous explorons maintenant la performance échantillonnale des statistiques de test $Q(l)$, $Q^*(l)$, $Q_R(l)$ et $Q_R^*(l)$. Plus spécifiquement, Nous étudions empiriquement les niveaux et les puissances des tests fournis par ces statistiques.

5.4.1. Plan des troisième et quatrième expériences

Nous considérons le même processus générateur défini par (5.2), mais le processus $\{X_t\}$ est maintenant *i.i.d.*, telle que X_t suit une loi uniforme $U[-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}]$, où $U[a, b]$ désigne la distribution uniforme sur l'intervalle $[a, b]$. Nous considérons deux cas de termes d'erreurs pour u_t :

- a) $u_t = \varepsilon_t$,
- b) $u_t = 0.6u_{t-1} + \varepsilon_t$,

où $\{\varepsilon_t\}$ est un bruit blanc gaussien avec une variance unité. Ces deux cas nous permettent d'étudier le niveau et la puissance de statistiques de test, respectivement. La taille échantillonnale choisie pour cette simulation est $n = 100$. Nous examinons les mêmes stratégies pour l'occurrence des valeurs aberrantes que celles de la sous-section 5.2.1, avec la même méthode de contamination que celle dans la sous-section 5.3.1. Nous considérons les tests à des délais individuels pour $l = 1, \dots, 10$. Pour les estimateurs RA-ARX, la fonction $\eta(\cdot, \cdot)$ de type Mallows et la fonction $\psi(\cdot)$ bicarrée avec la constante d'efficacité $c = 4.685$ sont adoptées. L'algorithme itératif a été appliqué pour calculer les estimateurs RA-ARX. Pendant la réalisation de l'algorithme, le paramètre d'échelle a été simultanément estimé par la médiane des résidus divisée par 0.6745. Pour les valeurs particulières de c adoptées, voir Bustos et Yohai (1986), par exemple.

5.4.2. Résultats des troisième et quatrième expériences

Le tableau 5.5 rapporte les taux de rejet empiriques (en pourcentage), basés sur 1000 répliques, aux niveaux nominaux 5% et 10% et sous l'hypothèse que le processus d'erreur est un bruit blanc. Pour une valeur donnée de l , les tests robustes et non robustes $Q_R(l)$ et $Q_R^*(l)$ (et pareillement $Q(l)$ et $Q^*(l)$) fournissent

une performance de niveau comparable. Certains niveaux affichent des problèmes de sous-rejet pour $Q(l)$ et $Q_R(l)$, comme prévu. Pour un délai l plus élevé, le facteur correcteur $n/(n-l)$ améliore la performance du niveau et les statistiques de test $Q^*(l)$ et $Q_R^*(l)$ offrent des niveaux raisonnables pour chacun des niveaux nominaux.

Le tableau 5.6, rapporte les taux de rejet (en pourcentage) lorsque des valeurs aberrantes additives sont présentes. Les statistiques robustes donnent des niveaux raisonnables pour tous les délais considérés. En général, les niveaux sont similaires à ceux obtenus dans le tableau 5.5, malgré que certains problèmes de sur-rejet sont observés pour certains niveaux. Cependant, les statistiques de test non robustes $Q(l)$ et $Q^*(l)$ sont affectés par les valeurs aberrantes additives. Un sur-rejet important au premier délai est observé et des sous-rejets très marqués ont été observés pour tous les délais $l > 1$. Ceci est en accord avec l'étude de niveau décrite dans Duchesne (2004a) pour les statistiques de type portemanteau robustes et non robustes. En général, le tableau 5.6 décrit plus en détail le problème de valeurs aberrantes que la seule utilisation des tests portemanteau, puisque la dépendance est présentée à chaque délai.

Nous examinons maintenant les puissances empiriques aux niveaux nominaux 5% et 10%. Nous avons calculé la puissance des tests en utilisant deux types de valeurs critiques. Le premier type est basé sur les valeurs critiques asymptotiques (ACV). Cependant, le deuxième est basé sur les valeurs critiques empiriques (exact) (ECV) obtenues de l'étude de niveau lorsqu'il n'y a pas de valeurs aberrantes.

Le tableau 5.7 rapporte les taux de rejet (en pourcentage) sur 1000 répliques sous l'alternative AR(1). En général, pour des délais l petits et modérés, les puissances évaluées selon ECV et ACV sont très similaires. Les statistiques de test à des délais individuels les plus puissantes sont obtenues lorsque $l = 1$. Les statistiques de test affichent une certaine puissance pour $l = 2$ et la puissance est

presque inexistante pour $l > 2$. Puisque l'alternative est de type AR(1), il était prévu que des puissances plus élevées seraient observées pour des délais de bas ordres. Pour le délai $l = 1$, les statistiques robustes sont légèrement moins puissantes que les statistiques non robustes $Q(l)$ et $Q^*(l)$. Cela représente le coût à payer pour l'utilisation des méthodes robustes en absence des valeurs aberrantes. Dans notre expérience, ce coût ne paraît pas très élevé.

Finalement, le tableau 5.8 rapporte la puissance estimée sous l'alternative AR(1) lorsque des valeurs aberrantes additives figurent dans la variable endogène Y_t . Une procédure de test satisfaisante devrait montrer une puissance similaire à celle obtenue dans le tableau 5.7. Cependant, puisque les statistiques non robustes de test rejettent fortement au premier délai et légèrement aux autres délais, la puissance des tests non robustes apparaît très affectée. Une puissance nettement plus petite que celle des tests robustes a été observée au premier délai. Tandis que pour les délais $l > 1$, la puissance est presque négligeable. Par comparaison, les nouvelles statistiques de test à des délais individuels affichent une puissance similaire à celle observée dans le tableau 5.7. Par conséquent, lorsque des valeurs aberrantes additives sont suspectes, les nouvelles statistiques robustes fournissent une description beaucoup plus fidèle de la dépendance qui est présente dans le terme d'erreur $\{u_t\}$.

TAB. 5.5. Niveaux empiriques (en pourcentage) des statistiques de test à des délais individuels $Q_R(l)$ et $Q_R^*(l)$ définies par (3.4) et (3.5), et $Q(l)$ et $Q^*(l)$ définies par (3.6) et (3.7), basés sur 1000 réplifications, sans contamination.

$\alpha = 5\%$				
l	$Q(l)$	$Q^*(l)$	$Q_R(l)$	$Q_R^*(l)$
1	4.3	4.5	4.8	4.8
2	4.5	4.7	4.8	5.3
3	4.4	4.9	6.0	6.2
4	2.7	2.9	3.8	4.5
5	4.0	4.2	4.2	4.8
6	3.5	3.7	4.4	5.0
7	3.4	4.2	3.8	4.8
8	3.9	5.7	5.1	6.3
9	2.7	3.5	3.4	4.3
10	2.8	3.8	3.3	4.6
$\alpha = 10\%$				
1	10.6	10.6	10.5	10.6
2	10.3	10.8	10.4	10.6
3	10.4	10.9	11.3	11.4
4	8.0	8.6	8.2	8.5
5	7.7	8.6	8.6	9.8
6	7.6	8.6	8.8	10.5
7	7.9	9.1	8.6	10.2
8	9.3	10.6	10.5	12.2
9	7.1	8.7	8.9	10.5
10	6.8	9.3	8.7	10.6

TAB. 5.6. Niveaux empiriques (en pourcentage) des statistiques de test à des délais individuels $Q_R(l)$ et $Q_R^*(l)$ définies par (3.4) et (3.5), et $Q(l)$ et $Q^*(l)$ définies par (3.6) et (3.7), basés sur 1000 réplifications, avec des valeurs aberrantes additives.

$\alpha = 5\%$				
l	$Q(l)$	$Q^*(l)$	$Q_R(l)$	$Q_R^*(l)$
1	29.8	30.4	7.0	7.2
2	0.1	0.1	6.2	6.7
3	0.2	0.2	4.6	4.6
4	0.1	0.2	4.8	5.5
5	0.2	0.3	4.2	5.1
6	0.1	0.2	3.6	4.7
7	0.0	0.0	4.5	4.9
8	0.1	0.2	3.2	3.8
9	0.0	0.0	3.3	4.0
10	0.1	0.2	5.6	7.0
$\alpha = 10\%$				
1	43.9	44.4	12.4	12.7
2	0.9	0.9	10.9	11.4
3	0.8	0.8	9.2	9.6
4	1.0	1.2	9.7	10.3
5	0.3	0.3	9.6	10.6
6	0.6	0.6	8.4	9.5
7	0.0	0.1	8.7	9.8
8	0.3	0.4	7.7	8.8
9	0.2	0.3	6.7	8.7
10	0.3	0.4	10.5	12.0

TAB. 5.7. Puissances empiriques (en pourcentage) des statistiques de test à des délais individuels $Q_R(l)$ et $Q_R^*(l)$ définies par (3.4) et (3.5), et $Q(l)$ et $Q^*(l)$ définies par (3.6) et (3.7), basées sur 1000 réplifications, sans contamination.

$\alpha = 5\%$								
Délai	$Q(l)$		$Q^*(l)$		$Q_R(l)$		$Q_R^*(l)$	
l	ACV	ECV	ACV	ECV	ACV	ECV	ACV	ECV
1	97.6	97.7	97.7	97.7	96.7	97.0	96.7	97.0
2	8.1	9.3	8.3	9.3	13.8	14.2	14.8	14.2
3	4.5	4.9	4.7	4.9	4.0	3.2	4.6	3.2
4	8.7	11.5	9.8	11.5	7.3	8.4	8.0	8.4
5	9.4	11.0	9.7	11.0	7.7	9.1	8.5	9.1
6	7.6	10.4	8.7	10.4	7.8	8.6	8.6	8.6
7	6.7	8.2	7.6	8.2	5.4	6.7	6.4	6.7
8	6.4	7.5	7.8	7.5	5.1	5.1	7.0	5.1
9	5.8	8.8	6.8	8.8	5.3	7.1	6.2	7.1
10	5.2	8.6	6.4	8.6	5.6	6.6	6.4	6.6
$\alpha = 10\%$								
1	98.9	98.8	98.9	98.8	98.5	98.4	98.5	98.4
2	17.4	17.4	17.9	17.4	24.7	23.9	25.2	23.9
3	9.0	8.8	9.3	8.8	8.6	7.9	9.4	7.9
4	13.9	15.8	14.6	15.8	11.9	13.5	12.2	13.5
5	16.0	20.8	17.6	20.8	14.7	16.0	15.5	16.0
6	14.1	17.9	15.7	17.9	13.7	14.6	15.0	14.6
7	12.8	14.7	13.8	14.7	12.1	13.6	13.8	13.6
8	12.4	13.0	14.1	13.0	12.7	12.3	14.5	12.3
9	10.9	14.0	12.4	14.0	11.5	13.0	13.4	13.0
10	9.6	13.0	11.7	13.0	9.3	10.8	11.1	10.8

TAB. 5.8. Puissances empiriques (en pourcentage) des statistiques de test à des délais individuels $Q_R(l)$ et $Q_R^*(l)$ définies par (3.4) et (3.5), et $Q(l)$ et $Q^*(l)$ définies par (3.6) et (3.7), basées sur 1000 réplifications, avec des valeurs aberrantes additives.

$\alpha = 5\%$								
Délai	$Q(l)$		$Q^*(l)$		$Q_R(l)$		$Q_R^*(l)$	
l	ACV	ECV	ACV	ECV	ACV	ECV	ACV	ECV
1	27.5	29.8	28.0	29.8	95.4	95.8	95.5	95.8
2	2.1	2.6	2.3	2.6	10.8	10.8	11.1	10.8
3	0.7	0.8	0.7	0.8	3.7	2.6	3.8	2.6
4	0.1	0.3	0.1	0.3	4.9	6.1	5.2	6.1
5	0.1	0.1	0.1	0.1	5.3	6.8	6.5	6.8
6	0.0	0.0	0.0	0.0	5.8	6.6	6.6	6.6
7	0.0	0.1	0.0	0.1	5.1	6.1	5.9	6.1
8	0.0	0.0	0.0	0.0	4.8	4.8	5.5	4.8
9	0.2	0.4	0.2	0.4	4.8	7.1	6.4	7.1
10	0.1	0.5	0.2	0.5	4.4	6.5	5.7	6.5
$\alpha = 10\%$								
1	43.7	43.2	43.8	43.2	98.3	98.3	98.3	98.3
2	9.7	9.5	10.5	9.5	19.4	18.4	20.1	18.4
3	2.8	2.3	3.4	2.3	8.1	7.3	8.5	7.3
4	1.0	1.5	1.3	1.5	9.2	10.9	9.8	10.9
5	0.8	1.3	1.0	1.3	10.2	11.2	10.9	11.2
6	0.5	1.2	0.8	1.2	11.3	12.0	12.2	12.0
7	0.4	0.7	0.5	0.7	9.6	10.9	11.0	10.9
8	0.0	0.1	0.1	0.1	9.5	8.8	10.7	8.8
9	0.7	1.0	0.8	1.0	9.3	11.0	11.6	11.0
10	0.6	1.2	1.0	1.2	10.2	10.9	11.6	10.9

5.5. VALEURS ABERRANTES DANS LA VARIABLE EXOGÈNE

Dans l'article Bou-Hamad et Duchesne (2004), nous n'avons pas présenté l'étude empirique sur la performance des estimateurs lorsque la variable exogène est contaminée. Nous allons présenter quelques résultats complémentaires de simulation dans cette section. Nous notons que les méthodes de contamination de la variable exogène X_t sont similaires à celles de contamination de Y_t présentées dans les sections précédentes. De plus, nous avons considéré les mêmes tailles échantillonnales et le même nombre d'itérations que lors de la détermination des biais asymptotiques, des efficacités, des niveaux et des puissances lorsque des valeurs aberrantes additives sont présentes.

Tout d'abord dans le cas asymptotique, nous constatons du tableau 5.9 que les estimateurs MC sont moins variables. Concernant les biais, nous remarquons que tous les estimateurs considérés fournissent des biais suffisamment petits, surtout dans l'estimation du paramètre autorégressif ϕ . Quant aux efficacités des estimateurs, le tableau 5.10 nous informe que les estimateurs MC obtiennent aussi l'efficacité la plus élevée, comme prévu. Cependant, les estimateurs RA-ARX fournissent aussi des efficacités satisfaisantes par rapport aux estimateurs MC. Il semble aussi dans cette étude, que la fonction $\eta(\cdot, \cdot)$ de type Mallows fournit des estimateurs plus efficaces que la fonction $\eta(\cdot, \cdot)$ de type Hampel. Ce résultat montre que les estimateurs MC demeurent valides en présence des valeurs aberrantes dans la variable exogène. Ceci s'explique par la façon dont nous avons effectué la contamination. Malgré que les variables exogènes sont contaminées, le modèle ARX tient toujours. Ceci s'apparente aux "aberrants dans les innovations". Voir Bustos et Yohai (1986) pour une description de ce type de valeurs aberrantes.

Les tableaux 5.11 et 5.12 rapportent respectivement les niveaux et les puissances empiriques (en pourcentage) en présence des valeurs aberrantes dans la variable exogène. Les statistiques robustes et non robustes fournissent des niveaux raisonnables comme dans le cas de l'absence de valeurs aberrantes, surtout les statistiques modifiées $Q^*(l)$ et $Q_R^*(l)$. Pour étudier les puissances empiriques,

nous avons considéré aussi l'alternative AR(1). Les résultats de puissances obtenus avec une variable exogène contaminée sont similaires aux résultats où les valeurs aberrantes sont absentes. C'est que les statistiques de test considérées affichent la puissance la plus élevée au délai $l = 1$ et une certaine puissance lorsque $l = 2$ et au délai $l > 2$ la puissance est presque absente.

Nous pouvons constater finalement que dans le cas de l'absence des valeurs aberrantes ou lorsque celles-ci figurent dans la variable exogène X_t , toutes les statistiques considérées performant d'une manière similaire.

TAB. 5.9. Moyennes empiriques, variances, biais au carré ($\times 10^{-5}$) et biais relatifs (en valeur absolue) pour l'estimation de ϕ et ν , en utilisant les estimateurs RA-ARX basés sur les fonctions η de types Mallows et Hampel, pour des fonctions ψ de familles Huber et bicarrée, comparés aux estimateurs MC, dans le cas où la variable exogène est contaminée.

	$\phi = 0.5$			
	Moyenne	Variance	Biais ²	BREL
<i>MC</i>	0.50055	0.00021	0.03053	0.00110
<i>RAMH</i>	0.50045	0.00022	0.02087	0.00091
<i>RAHH</i>	0.50044	0.00022	0.01985	0.00089
<i>RAMB</i>	0.50047	0.00022	0.02294	0.00095
<i>RAHB</i>	0.50043	0.00023	0.01901	0.00087
$\nu = 0.5$				
<i>MC</i>	0.49950	0.00014	0.02424	0.00098
<i>RAMH</i>	0.49977	0.00015	0.00516	0.00045
<i>RAHH</i>	0.49978	0.00015	0.00502	0.00044
<i>RAMB</i>	0.49978	0.00015	0.00047	0.00043
<i>RAHB</i>	0.49979	0.00015	0.00414	0.00040

TAB. 5.10. Moyennes empiriques, variances, erreurs quadratiques moyennes et efficacités pour l'estimation de ϕ et ν , en utilisant les estimateurs RA-ARX basés sur les fonctions η de types Mallows et Hampel, pour des fonctions ψ de familles Huber et bicarrée, comparés aux estimateurs MC, dans le cas où la variable exogène est contaminée

	$\phi = 0.5$			
	Moyenne	Variance	EQM	EFF
<i>MC</i>	0.49619	0.00226	0.00227	1.00000
<i>RAMH</i>	0.49685	0.00245	0.00246	0.92272
<i>RAHH</i>	0.49704	0.00247	0.00248	0.91559
<i>RAMB</i>	0.49718	0.00248	0.00249	0.91320
<i>RAHB</i>	0.49718	0.00258	0.00258	0.87860
$\nu = 0.5$				
<i>MC</i>	0.50086	0.00147	0.00147	1.00000
<i>RAMH</i>	0.50063	0.00155	0.00155	0.94670
<i>RAHH</i>	0.50058	0.00156	0.00156	0.94559
<i>RAMB</i>	0.50054	0.00157	0.00157	0.93712
<i>RAHB</i>	0.50049	0.00158	0.00158	0.93287

TAB. 5.11. Niveaux empiriques (en pourcentage) des statistiques de test à des délais individuels $Q_R(l)$ et $Q_R^*(l)$ définies par (3.4) et (3.5), et $Q(l)$ et $Q^*(l)$ définies par (3.6) et (3.7), basés sur 1000 réplifications, avec des valeurs aberrantes dans la variable exogène.

$\alpha = 5\%$				
l	$Q(l)$	$Q^*(l)$	$Q_R(l)$	$Q_R^*(l)$
1	5.0	5.1	4.4	4.5
2	3.9	4.0	4.5	4.7
3	5.0	5.6	6.0	6.4
4	5.3	5.8	5.2	5.6
5	4.0	4.6	4.3	5.0
6	3.8	4.5	4.7	5.5
7	4.0	5.1	3.5	4.8
8	3.9	4.4	3.7	4.9
9	4.3	5.3	4.2	5.7
10	3.4	4.3	3.9	4.8
$\alpha = 10\%$				
1	10.8	10.9	9.5	9.8
2	8.9	9.4	10.2	10.7
3	9.8	10.3	10.3	10.7
4	9.7	10.3	10.8	12.3
5	9.2	9.8	9.2	10.2
6	8.3	9.2	10.0	11.0
7	8.4	9.5	9.0	10.2
8	8.7	9.9	9.0	10.4
9	9.6	11.1	10.3	12.0
10	6.7	8.0	7.1	8.4

TAB. 5.12. Puissances empiriques (en pourcentage) des statistiques de test à des délais individuels $Q_R(l)$ et $Q_R^*(l)$ définies par (3.4) et (3.5), et $Q(l)$ et $Q^*(l)$ définies par (3.6) et (3.7), basées sur 1000 réplifications, avec des valeurs aberrantes dans la variable exogène.

$\alpha = 5\%$								
l	$Q(l)$		$Q^*(l)$		$Q_R(l)$		$Q_R^*(l)$	
	ACV	ECV	ACV	ECV	ACV	ECV	ACV	ECV
1	99.3	99.3	99.3	99.3	99.2	99.2	99.2	99.2
2	27.8	29.5	28.6	29.5	36.6	36.8	37.6	36.8
3	5.6	6.1	6.0	6.1	9.3	7.1	10.3	7.1
4	6.6	8.8	7.0	8.8	7.0	8.7	7.7	8.7
5	6.9	8.9	7.7	8.9	6.3	7.7	7.2	7.7
6	7.1	9.8	7.9	9.8	7.2	8.1	8.0	8.1
7	7.7	10.0	9.1	10.0	7.3	8.7	8.4	8.7
8	6.9	7.8	8.0	7.8	7.0	7.0	8.0	7.0
9	7.3	10.5	8.5	10.5	5.8	8.5	7.5	8.5
10	4.5	8.6	5.9	8.6	5.3	7.6	7.1	7.6
$\alpha = 10\%$								
1	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5
2	39.4	39.3	40.7	39.3	50.7	49.9	51.5	49.9
3	11.7	11.1	11.9	11.1	17.6	16.0	18.4	16.0
4	11.4	13.4	12.0	13.4	12.1	13.8	12.9	13.8
5	13.9	16.8	14.8	16.8	11.9	13.2	12.7	13.2
6	13.9	16.7	15.0	16.7	13.8	14.8	15.2	14.8
7	13.1	16.7	15.0	16.7	13.0	14.7	14.7	14.7
8	12.8	13.9	14.3	13.9	14.0	12.8	16.0	12.8
9	12.1	15.0	13.6	15.0	12.4	13.5	14.2	13.5
10	10.7	14.7	13.4	14.7	11.0	12.4	13.0	12.4

Chapitre 6

CONCLUSION

Le but de ce mémoire était de présenter des nouveaux tests individuels dans les modèles autorégressifs avec variables exogènes. Comme nous l'avons vu, l'avantage de ces tests est de décomposer l'étude de la dépendance, de manière robuste aux valeurs aberrantes. Ces statistiques de test devraient compléter l'analyse qui peut être faite avec les tests portemanteaux de Duchesne (2004a).

Nous avons déduit la distribution asymptotique des estimateurs RA-ARX. En particulier, nous avons fourni la structure de la matrice de covariance asymptotique. La preuve est basée sur des approches similaires à celles de Bustos et Yohai (1986), valide dans les modèles ARMA. Une preuve plus rigoureuse et complète pourrait être fournie, en utilisant probablement les résultats de Bustos et al. (1984). Cette considération est au-delà de la portée de ce présent mémoire et est laissée pour des études futures.

En utilisant le résultat de la normalité asymptotique des estimateurs RA-ARX, nous avons établi la distribution asymptotique des autocorrélations résiduelles robustifiées sous l'hypothèse nulle d'adéquation. Nous avons rapporté quelques résultats de simulation. Les estimateurs RA-ARX, basés sur diverses fonctions $\eta(\cdot, \cdot)$ et $\psi(\cdot)$, ont été comparés, par rapport aux biais et aux efficacités. Nous avons fourni l'évidence que la fonction $\eta(\cdot, \cdot)$ de type Mallows devrait être adéquate en pratique. Elle peut être appliquée facilement avec un algorithme des moindres carrés itératif. Les estimateurs résultants sont beaucoup moins biaisés

que les estimateurs MC, lorsque des valeurs aberrantes sont présentes.

Des statistiques de test à des délais individuels ont été étudiées par rapport aux niveaux et aux puissances. Nous avons obtenu des résultats satisfaisants avec des statistiques robustes de test. De notre étude, nous pouvons conclure que les statistiques de test non robustes aux délais individuels ne sont pas fiables lorsque des valeurs aberrantes additives sont observées. Les tests robustes proposés sont de manière générale beaucoup plus satisfaisants.

ANNEXE

Code de programmation S-plus

Dans cette annexe, nous présentons quelques fonctions informatiques qui ont servi à illustrer pratiquement la théorie fournie dans cette recherche. Plus précisément, nous fournissons les fonctions qui ont été utilisées pour générer les données sous différents scénarios de l'apparition des valeurs aberrantes. Nous présentons également d'autres fonctions qui ont été utiles pour calculer les estimateurs RA-ARX. Puisqu'il n'est pas évident de calculer ces estimateurs, nous avons jugé particulièrement opportun d'inclure ce code. D'autre part, nous fournissons les sous-programmes qui ont été utilisés pour comparer les efficacités des estimateurs RA-ARX par rapport aux estimateurs MC, les biais asymptotiques, les niveaux et les puissances, lorsque les valeurs aberrantes sont absentes. Notons que lorsque les valeurs aberrantes sont présentes, nous utilisons les sous-programmes cités ci-dessus en changeant la fonction générant les données.

Matrices auxiliaires qui servent à programmer des fonctions dans S-plus.

```
mat<-matrix(nrow=n,ncol=n)
for(i in 1:n)
  {
    mat[,i]<-c(rep(NA,i-1),1:(n-i+1))
  }
```

```
indice<-matrix(nrow=n,ncol=n-1)
```

```

for(i in 1:(n-1))
  {
    indice[,i]<-c(c((i+1):n) ,rep(NA,i))
  }

indice.cut<-indice[-c((n-1),n) ,-1]
-----

ham1<-matrix(ncol=n-2,nrow=n-2)
ham2<-matrix(ncol=n-2,nrow=n-2)
for(i in 1:(n-2)){ham1[,i]<-c(rep(i+2,i),rep(NA,n-2-i))}
for(i in 1:(n-2)){ham2[i,]<-c(rep(NA,i-1),c(2:(n-i)))}
=====

Constantes et paramètres
*****

c1<-1.345 #(Constante d'efficacité pour la fonction psi d'Huber).
c2<-4.685 #(Constante d'efficacité pour la fonction psi bicarrée).
phi.sim<-0.5
nu.sim<-0.5 #(Vrais paramètres utilisés pour la génération du modèle (5.2)
phix<-0.8
h<-0.000001 #(Cette valeur de h sert à calculer numériquement la dérivée d'une fonction).
=====

Fonctions psi
*****

# Fonction psi d'Huber.

psy1<-function(u,c)

{ min.u<-(abs(u)-c)<=0
  test<-abs(u)
  test[min.u==F]<-c
  sign(u)*test
}
-----

```

```
# Fonction psi bicarrée.
```

```
psy2<-function(u,c)
{test<-abs(u)<=c
  test2<-u * (1 - u^2/c^2)^2
  test2[test==F]<-0
  test2
}
```

```
=====
```

```
# Fonction qui détermine la proportion empirique du rejet d'un test d'hypothèse.
```

```
rejets<-function(output, quanti)
{
  mate <- t(t(output) > quanti)
  apply(mate, 2, mean)
}
```

```
=====
```

```
Génération des données
```

```
*****
```

```
# Fonction générant des observations du modèle (5.2) dont le processus
exogène est un AR(1) et sans valeurs aberrantes.
```

```
gener<-function(nu,phi,phix)
{
  y<-NULL
  y[1]<-0
  x<-arima.sim((2*n+1),model=list(ar=phix))
  u<-rnorm(2*n+1)
  Xt<-x[(n+2):(2*n+1)]
  for(i in 1:(2*n))
    {y[i+1]<-phi*y[i]+nu*x[i+1]+u[i+1]}
  y<-y[(n+2):(2*n+1)]
  matrice<-cbind(y,Xt)
  matrice
}
```

```
-----
```

Fonction générant des observations du modèle (5.2) dont le processus exogène est un AR(1) et avec des valeurs aberrantes additives.

```
generendocon<-function(nu,phi,phix)
{
  y<-NULL
  y[1]<-0
  x<-arima.sim(2*n+1,model=list(ar=phix))
  u<-rnorm(2*n+1)
  Xt<-x[(n+2):(2*n+1)]
  for(i in 1:(2*n))
    { y[i+1]<-phi*y[i]+nu*x[i+1]+u[i+1]
      }
  y<-y[(n+2):(2*n+1)]
  y[c(11,33,49,76,90)]<-c(10,-10,10,-10,10)
  matrice<-cbind(y,Xt)
  matrice
}
```

Fonction générant des observations du modèle (5.2) dont le processus exogène est un AR(1) contaminé.

```
generexocon_function(nu,phi,phix)
{
  y_NULL
  y[1]_0
  x_arima.sim((2*n+1),model=list(ar=phix))
  u_rnorm(2*n+1)
  x[c(112,134,150,177,191)]_c(10,-10,10,-10,10)
  Xt_x[(n+2):(2*n+1)]
  for(i in 1:(2*n))
    { y[i+1]_phi*y[i]+nu*x[i+1]+u[i+1]
      }
  y_y[(n+2):(2*n+1)]
```

```

    matrice_cbind(y,Xt)
    matrice
}

```

Fonction générant des observations du modèle (5.2) dont le processus exogène est un AR(1) et avec des valeurs aberrantes additives, dans le cas asymptotique.

```

gener.asym<-function(nu,phi,phix)
{
  y<-NULL
  y[1]<-0
  x<-arima.sim((2*n+1),model=list(ar=phix))
  u<-rnorm(2*n+1)
  Xt<-x[(n+2):(2*n+1)]
  for(i in 1:(2*n))
    { y[i+1]<-phi*y[i]+nu*x[i+1]+u[i+1]
    }
  y<-y[(n+2):(2*n+1)]
  out1.unif <- runif(n)
  out2.unif <- runif(n)
  vecteur.vt1 <- ifelse(out1.unif < 0.05, 10, 0)
  signe.out <- ifelse(out2.unif < 0.5, 1, -1)
  vecteur.vt <- signe.out * vecteur.vt1
  y<-y+ vecteur.vt
  matrice<-cbind(y,Xt)
  matrice
}

```

Fonction générant des observations du modèle (5.2) dont le processus exogène est un AR(1) contaminé, dans le cas asymptotique.

```

gener.asymexo<-function(nu,phi,phix)
{
  y_NULL
  y[1]_0
  x_arima.sim((2*n+1),model=list(ar=phix))
  u_rnorm(2*n+1)
  out1.unif <- runif(2*n+1)

```

```

out2.unif <- runif(2*n+1)
vecteur.vt1 <- ifelse(out1.unif < 0.05, 10, 0)
signe.out <- ifelse(out2.unif < 0.5, 1, -1)
vecteur.vt <- signe.out * vecteur.vt1
x_x+ vecteur.vt
Xt_x[(n+2):(2*n+1)]
for(i in 1:(2*n))
  { y[i+1]_phi*y[i]+nu*x[i+1]+u[i+1]
  }
y_y[(n+2):(2*n+1)]
matrice_cbind(y,Xt)
matrice
}

```

Fonction générant des observations du modèle (5.2) dont le processus exogène est i.i.d. d'une loi uniforme et sans valeurs aberrantes.

```

gener.iid<-function(nu, phi)
{
  y <- NULL
  y[1] <- 0
  x <- runif(2 * n + 1, -2*sqrt(3), 2*sqrt(3))
  u <- rnorm(2 * n + 1)
  Xt <- x[(n + 2):(2 * n + 1)]
  for(i in 1:(2 * n)) {
    y[i + 1] <- phi * y[i] + nu * x[i + 1] + u[i + 1]
  }
  y <- y[(n + 2):(2 * n + 1)]
  matrice <- cbind(y, Xt)
  matrice
}

```

Fonction générant des observations du modèle (5.2) dont le processus exogène est i.i.d. d'une loi uniforme et avec des valeurs aberrantes additives.

```

generendo.iid<-function(nu, phi)
{
  y <- NULL

```

```

y[1] <- 0
x <- runif(2 * n + 1, -2*sqrt(3), 2*sqrt(3))
u <- rnorm(2 * n + 1)
Xt <- x[(n + 2):(2 * n + 1)]
for(i in 1:(2 * n))
  { y[i + 1] <- phi * y[i] + nu * x[i + 1] + u[i + 1]
  }
y <- y[(n + 2):(2 * n + 1)]
y[c(11, 33, 49, 76, 90)] <- c(10, -10, 10, -10, 10)
matrice <- cbind(y, Xt)
matrice
}

```

Fonction générant des observations du modèle (5.2) dont le processus exogène est i.i.d. d'une loi uniforme avec un procesus d'erreurs AR(1) et sans valeurs aberrantes.

```

gpuiss.norm<-function(nu, phi,phiu)
{
  y <- NULL
  y[1] <- 0
  x <- runif(2 * n + 1, -2*sqrt(3), 2*sqrt(3))
  u <- arima.sim((2*n+1),model=list(ar=phiu))
  Xt <- x[(n + 2):(2 * n + 1)]
  for(i in 1:(2 * n))
    { y[i + 1] <- phi * y[i] + nu * x[i + 1] + u[i + 1]
    }
  y <- y[(n + 2):(2 * n + 1)]
  matrice <- cbind(y, Xt)
  matrice
}

```

Fonction générant des observations du modèle (5.2) dont le processus exogène est i.i.d. d'une loi uniforme avec un procesus d'erreurs AR(1), et lorsque des valeurs aberrantes additives sont présentes.

```

gpuiss.endo<-function(nu, phi,phiu)
{

```

```

y <- NULL
y[1] <- 0
x <- runif(2 * n + 1, -2*sqrt(3), 2*sqrt(3))
u <- arima.sim((2*n+1), model=list(ar=phiu))
Xt <- x[(n + 2):(2 * n + 1)]
for(i in 1:(2 * n))
  { y[i + 1] <- phi * y[i] + nu * x[i + 1] + u[i + 1]
  }
y <- y[(n + 2):(2 * n + 1)]
y[c(11, 33, 49, 76, 90)] <- c(10, -10, 10, -10, 10)
matrice <- cbind(y, Xt)
matrice
}

```

=====
Calcul des estimateurs RA-ARX

Fonction qui calcule les estimateurs RA-ARX selon l'algorithme itératif et avec
une fonction psi bicarrée.

```

iteratif.b<-function(y,Xt)
{
  i0<-lm(y[2:n]~y[1:(n-1)]+Xt[2:n] -1)
  phi0<-as.vector(coef(i0)[1])
  nu0<-as.vector(coef(i0)[2])
  mat.exo<-matrix(Xt[mat],nrow(mat),ncol(mat))
  mat.exo[is.na(mat.exo)]<-0
  for ( k in 1:100)
  {
    r.etoile<-NULL
    res<-NULL
    res<-c(y[2:n] - phi0 * y[1:(n-1)] - nu0 * Xt[2:n])
    sigma<-median(abs(res))/0.6745
    res<-res/sigma
    res<-c(0,res)
    r.etoile<-psy2(res,c2)
    mat.res<-matrix(r.etoile[mat],nrow(mat),ncol(mat))
    mat.res[is.na(mat.res)]<-0
    vec.phi.hat<-as.vector(coef(i0)[1])~c(0,seq(n-1))
  }
}

```

```

y.etoile<-as.vector(coef(i0)[2])*
(mat.exo%%vec.phi.hat)+mat.res%%vec.phi.hat
i0<-lm(y.etoile[2:n]~y.etoile[1:(n-1)]+Xt[2:n]-1)
prev.phi<-phi0
prev.nu<-nu0
d.phi<-abs(coef(i0)[1]-prev.phi)
d.nu<-abs(coef(i0)[2]-prev.nu)
if(d.phi >0.0000001 || d.nu> 0.0000001)
{ phi0<-as.vector(coef(i0)[1])
  nu0<-as.vector(coef(i0)[2])
}
else
break
}
c(phi0,nu0)
}

```

La fonction qui donne le membre de gauche de la première équation du système (5.1), dans le cas où la fonction eta est de type Hampel et la fonction psi est bicarrée.

```

fbis.ha<-function(nu, phi, Xt, y)
{
  unite<-rep(1,n-2)
  phi.vec <- phi^c(0:(n - 1))
  r <- c(0,y[2:n] - phi * y[1:(n-1)] - nu * Xt[2:n])
  psyr<-psy2(r,c2)
  mat.psy <- matrix(psyr[indice],nrow(indice),ncol(indice))
  mat.psy[is.na(mat.psy)]<-0
  ha1<-matrix(r[ham1],nrow(ham1),ncol(ham1))
  ha1[is.na(ha1)]<-0
  ha2<-matrix(r[ham2],nrow(ham2),ncol(ham2))
  ha2[is.na(ha2)]<-0
  ha<-ha1*ha2
  mat.psy.ham<-psy2(ha,c2)
  (nu * (t(phi.vec) %% mat.psy %% Xt[1:(n - 1)]) + t(phi.vec[1:(n -
  2)]) %% mat.psy.ham %% unite)[, 1]
}

```

La fonction qui donne le membre de gauche de la deuxième équation du système (5.1), dans le cas où la fonction psi est bicarrée.

```
gbis<-function(nu, phi, Xt, y)
{
  r <- c(0,y[2:n] - phi * y[1:(n-1)] - nu * Xt[2:n])
  psyr<-psy2(r,c2)
  (t(psyr) %% Xt)[, 1]
}
```

La fonction qui donne le membre de gauche de la première équation du système (5.1), dans le cas où la fonction eta est de type Mallows et la fonction psi est bicarrée.

```
fbis.m<-function(nu, phi, Xt, y)
{
  phi.vec <- phi^c(0:(n - 1))
  r <- c(0,y[2:n] - phi * y[1:(n-1)] - nu * Xt[2:n])
  psyr<-psy2(r,c2)
  mat.psy <- matrix(psyr[indice],nrow(indice),ncol(indice))
  mat.psy[is.na(mat.psy)]<-0
  mat.psy3<-matrix(psyr[indice.cut],nrow(indice.cut),ncol(indice.cut))
  mat.psy3[is.na(mat.psy3)]<-0
  (nu * (t(phi.vec) %% mat.psy %% Xt[1:(n - 1)]) + t(phi.vec[1:(n -
  2)]) %% mat.psy3 %% psyr[2:(n - 1)]), 1]
}
```

Fonction qui détermine les estimateurs RA-ARX selon l'algorithme de Newton-Raphson, dans le cas où la fonction eta est de type Mallows et la fonction psi est de la famille bicarrée.

```
newt.m.bis<-function(phi,nu,y,Xt)
{
  for(i in 1:100)
  {
    f.nu.phi<-fbis.m(nu,phi,Xt,y)
    g.nu.phi<-gbis(nu,phi,Xt,y)
    f.prim.nu<-(fbis.m(nu+h,phi,Xt,y)-f.nu.phi)/h
```

```

f.prim.phi<-(fbis.m(nu,phi+h,Xt,y)-f.nu.phi)/h
g.prim.nu<-(gbis(nu+h,phi,Xt,y)-g.nu.phi)/h
g.prim.phi<-(gbis(nu,phi+h,Xt,y)-g.nu.phi)/h
f.g<-c(f.nu.phi,g.nu.phi)
jacob<-rbind(c(f.prim.nu,f.prim.phi),c(g.prim.nu,g.prim.phi))
s<-det(jacob)
if(s !=0 & abs(phi)<=1 )
{
  delta<--solve(jacob)%*%f.g
  if(abs(delta[1,1])>0.0000001 || abs(delta[2,1])>0.0000001)
  { nu<-nu+delta[1,1]
    phi<-phi+delta[2,1]
  }
  else
  {break}
}
else
{
  phi<-NA
  nu<-NA
  break
}
}
c(phi,nu)
}

```

Fonction qui détermine les estimateurs RA-ARX selon l'algorithme de Newton-Raphson, dans le cas où la fonction eta est de type Hampel et la fonction psi est de la famille bicarrée.

```

newt.ham.bis<-function(phi,nu,y,Xt)
{
  for(i in 1:100)
  {
    f.nu.phi<-fbis.ha(nu,phi,Xt,y)
    g.nu.phi<-gbis(nu,phi,Xt,y)
    f.prim.nu<-(fbis.ha(nu+h,phi,Xt,y)-f.nu.phi)/h
    f.prim.phi<-(fbis.ha(nu,phi+h,Xt,y)-f.nu.phi)/h
    g.prim.nu<-(gbis(nu+h,phi,Xt,y)-g.nu.phi)/h

```

```

g.prim.phi<-(gbis(nu,phi+h,Xt,y)-g.nu.phi)/h
f.g<-c(f.nu.phi,g.nu.phi)
jacob<-rbind(c(f.prim.nu,f.prim.phi),c(g.prim.nu,g.prim.phi))
s<-det(jacob)
if(s !=0 & abs(phi)<=1 )
{
  delta<--solve(jacob)%*%f.g
  if(abs(delta[1,1])>0.0000001 || abs(delta[2,1])>0.0000001)
  {
    nu<-nu+delta[1,1]
    phi<-phi+delta[2,1]
  }
  else
  {break}
}
else
{
  phi<-NA
  nu<-NA
  break
}
}
c(phi,nu)
}

```

=====
Calcul des efficacités

Ce code permet de calculer l'efficacité des estimateurs RA-ARX par rapport aux estimateurs MC.

```

parametres.endo<-matrix(nrow=1000,ncol=10)
For(i = 1:1000,{
yx<-generendocon(nu.sim,phi.sim,phix)
y<-yx[,1]
Xt<-yx[,2]
phi.hu<-iteratif.hub(y,Xt)[1]
nu.hu<-iteratif.hub(y,Xt)[2]
phi.bis<-iteratif.bis(y,Xt)[1]
nu.bis<-iteratif.bis(y,Xt)[2]
}

```

```

      vec<-c(as.vector(coef(lm(y[2:n]~y[1:(n-1)]+Xt[2:n] -1))),
      newt.m.hub(phi.hu,nu.hu,y,Xt),newt.ham.hub(phi.hu,nu.hu,y,Xt)
, newt.m.bis(phi.bis,nu.bis,y,Xt),
      newt.ham.bis(phi.bis,nu.bis,y,Xt))
      vec.ord<-vec[ord]
      parametres.endo[i,]<-vec.ord
      cat("iteration:",i)
    }, grain.size=20)

```

=====
Calcul des biais asymptotiques

Ce code permet de calculer les biais asymptotiques des estimateurs RA-ARX
et ceux des estimateurs MC.

```

      va.asymp<-matrix(nrow=400,ncol=10)
      For(i = 1:400,{
      yx<-gener.asym(nu.sim,phi.sim,phix)
      y<-yx[,1]
      Xt<-yx[,2]
      vec<-c(as.vector(coef(lm(y[2:n]~y[1:(n-1)]+Xt[2:n] -1))),
      newt.m.hub(phi,nu,y,Xt),newt.ham.hub(phi,nu,y,Xt),newt.m.bis(phi,nu,y,Xt),
      newt.ham.bis(phi,nu,y,Xt))
      vec.ord<-vec[ord]
      va.asymp[i,]<-vec.ord
      cat("iteration:",i)
    }, grain.size=10)

```

=====
Niveaux empiriques

m<-10 # (Le plus grand délai individuel).

correc<-NULL # (La mutliplication des composantes de ce vecteur par des
statistiques, nous donne des statistiques modifiées qui
tiennent compte de l'effet délai.

```

for(i in 1:m)
  { correc[i]<-n/(n-i)}

# Ce code permet de calculer les niveaux empiriques des tests robustes et non robustes.

quant<-matrix(nrow=1000,ncol=40)
For(j = 1:1000,{
  yx<-generendo.iid(nu.sim,phi.sim)
  y<-yx[,1]
  Xt<-yx[,2]
  phi.bis<-iteratif.sigtab(y,Xt)[1]
  nu.bis<-iteratif.sigtab(y,Xt)[2]
  res<-c(y[2:n] - phi.bis * y[1:(n-1)] - nu.bis * Xt[2:n])
  sigmau<-median(abs(res))/0.6745
  res<-res/sigmau
  res<-c(0,res)
  psyr<-psy2(res,c2)
  psyprimr<-psy.prime(res,c2)
  estimemc<-as.vector(coef(lm(y[2:n]~y[1:(n-1)]+Xt[2:n] -1)))
  phimc<-estimemc[1]
  numc<-estimemc[2]
  residmc<-as.vector( resid(lm(y[2:n]~y[1:(n-1)]+Xt[2:n] -1)))
  sigmc<-sqrt(mean(residmc^2))
  residmc<-residmc/sigmc
  residmc<-c(0,residmc)
  resmat<-matrix(residmc[indice.auto],nrow(indice.auto),ncol(indice.auto))
  resmat[is.na(resmat)]<-0
  psymat<-matrix(psyr[indice.auto],nrow(indice.auto),ncol(indice.auto))
  psymat[is.na(psymat)]<-0
  gammamc<-1/n*(resmat%*%residmc[2:(n-1)]),[1]
  Amc<-cbind(c((numc^2*var(Xt)+sigmc^2)/(1-phimc^2),0),c(0,var(Xt)))
  W<-Amc/sigmc^2
  x0<-cbind(phimc^c(0,1:(m-1)),rep(0,m))
  vargamc<-diag(ind-x0%*(solve(W))%*%t(x0))
  a.hat<-(1/n*t(psyr[3:n])^2%*%psyr[2:(n-1)]^2)[1]
  b.hat<-(1/n*t(psyprimr[3:n])%*(psyr[2:(n-1)]*res[2:(n-1)])))[1]
  a.etoile<-(1/n*t(psyr[2:n])%*%psyr[2:n])[1]
  b.etoile<- mean(psyprimr)
  k<-sigmau^2*a.hat/b.hat^2
  A<-cbind(c((a.etoile*nu.bis^2*var(Xt)+a.hat*sigmau^2)/

```

```

      (1-phi.bis^2),0),c(0,a.etoile*var(Xt)))
B<-cbind(c((-b.etoile*nu.bis^2*var(Xt)*(1/sigmau)-b.hat)/
(1-phi.bis^2),0),c(0,-b.etoile*var(Xt)*(1/sigmau)))
x<-cbind(phi.bis^c(0,1:(m-1)),rep(0,m))
gamma<-1/n*(psymat%*%psyr[2:(n-1)]),1]
BAB<-solve(B)%*%A%*%solve(B)+2*b.hat*k*solve(B)
vgam<-diag(a.hat*(id+1/k*(x%*%BAB%*%t(x))))
QR<-NULL
QR<-n*gamma^2/vgam
QMC<-NULL
QMC<-n*gamamc^2/vargamc
QR.etoile<-NULL
QR.etoile<-correc*QR
QMC.etoile<-NULL
QMC.etoile<-correc*QMC
quant[j,]<-c(QMC,QMC.etoile,QR,QR.etoile)
cat("iteration:",j)
}, grain.size=20)
=====

Puissances empiriques
*****

# Ce code permet de calculer les puissances empiriques des tests robustes et non robustes.

quant<-matrix(nrow=1000,ncol=40)
  For(j = 1:1000,{
    yx<-gpuiss.norm(nu.sim,phi.sim,phiu)
    y<-yx[,1]
    Xt<-yx[,2]
    phi.bis<-iteratif.sigtab(y,Xt)[1]
    nu.bis<-iteratif.sigtab(y,Xt)[2]
    res<-c(y[2:n] - phi.bis * y[1:(n-1)] - nu.bis * Xt[2:n])
    sigmau<-median(abs(res))/0.6745
    res<-res/sigmau
    res<-c(0,res)
    psyr<-psy2(res,c2)
    psyprimr<-psy.prime(res,c2)
    estimemc<-as.vector(coef(lm(y[2:n]~y[1:(n-1)]+Xt[2:n] -1)))
    phimc<-estimemc[1]
  }

```

```

numc<-estimemc[2]
residmc<-as.vector( resid(lm(y[2:n]~y[1:(n-1)]+Xt[2:n] -1)))
sigmc<-sqrt(mean(residmc^2))
residmc<-residmc/sigmc
residmc<-c(0,residmc)
resmat<-matrix(residmc[indice.auto],nrow(indice.auto),ncol(indice.auto))
resmat[is.na(resmat)]<-0
psymat<-matrix(psypr[indice.auto],nrow(indice.auto),ncol(indice.auto))
psymat[is.na(psymat)]<-0
gammamc<-1/n*(resmat%*%residmc[2:(n-1)]),[,1]
Amc<-cbind(c((numc^2*var(Xt)+sigmc^2)/(1-phimc^2),0),c(0,var(Xt)))
W<-Amc/sigmc^2
x0<-cbind(phimc^c(0,1:(m-1)),rep(0,m))
vargamc<-diag(ind-x0%*(solve(W))%*t(x0))
a.hat<-(1/n*t(psypr[3:n])^2%*psypr[2:(n-1)]^2)[1]
b.hat<-(1/n*t(psyprimr[3:n])%*(psypr[2:(n-1)]*res[2:(n-1)])) [1]
a.etoile<-(1/n*t(psypr[2:n])%*psypr[2:n])[1]
b.etoile<- mean(psyprimr)
k<-sigmau^2*a.hat/b.hat^2
A<-cbind(c((a.etoile*nu.bis^2*var(Xt)+a.hat*sigmau^2)/
(1-phi.bis^2),0),c(0,a.etoile*var(Xt)))
B<-cbind(c((-b.etoile*nu.bis^2*var(Xt)*(1/sigmau)-b.hat)/
(1-phi.bis^2),0),c(0,-b.etoile*var(Xt)*(1/sigmau)))
x<-cbind(phi.bis^c(0,1:(m-1)),rep(0,m))
gamma<-1/n*(psymat%*%psypr[2:(n-1)]),[,1]
BAB<-solve(B)%*A%*solve(B)+2*b.hat*k*solve(B)
vgam<-diag(a.hat*(id+1/k*(x%*%BAB%*%t(x))))
QR<-NULL
QR<-n*gamma^2/vgam
QMC<-NULL
QMC<-n*gammamc^2/vargamc
QR.etoile<-NULL
QR.etoile<-correc*QR
QMC.etoile<-NULL
QMC.etoile<-correc*QMC
quant[j,]<-c(QMC,QMC.etoile,QR,QR.etoile)
cat("iteration:",j)
}, grain.size=20)
=====

```

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Bou-Hamad, I. et Duchesne, P. (2004), 'On robust diagnostics at individual lags using RA-ARX estimators', Accepté dans *Statistical Modeling and Analysis for Complex Data Problems*. Duchesne, P. et Rémillard, B., Éditeurs, Kluwer.
- [2] Brockwell, P. J. et Davis, R. A. (1991), *Time Series : Theory and Methods*, Deuxième Édition, Springer-Verlag, New York.
- [3] Bustos, O. H., Fraiman, R. et Yohai, V. J. (1984), 'Asymptotic behavior of the estimates based on residual autocovariances for ARMA models', *Robust and Nonlinear Time Series Analysis*, Éditeurs, Franke, J., Hardle, W. et Martin, D., Springer-Verlag, Berlin, 26-49.
- [4] Bustos, O. H. et Yohai, V. J. (1986), 'Robust estimates for ARMA models', *Journal of the American Statistical Association*, **81**, 155-168.
- [5] Denby, L. et Martin, R. D. (1979), 'Robust estimation of the first-order autoregressive parameter', *Journal of the American Statistical Association*, **74**, 140-146.
- [6] Duchesne, P. (2004a), 'Robust and powerful serial correlation tests with new robust estimates in ARX models', À paraître dans *Journal of Time Series Analysis*.
- [7] Duchesne, P. (2004b), 'On the asymptotic distribution of residual autocovariances in VARX models with applications', À paraître dans *Test*.
- [8] Durrett, R. (1995), *Probability, Theory and Examples*, Deuxième Édition, Duxbury Press, Belmont, CA.
- [9] Hampel, F. R., Ronchetti, E. M., Rousseeuw, P. J. et Stahel, W. A. (1986), *Robust Statistics : The Approach Based on Influence Functions*, Wiley, New York.

- [10] Li, W. K. (1988), 'A goodness-of-fit test in robust time series modelling', *Biometrika*, **75**, 355-361.
- [11] Li, W. K. (2004), *Diagnostic Checks in Time Series*, Chapman & Hall/CRC, New York.
- [12] Maron, M. J. et Lopez, R. J. (1991), *Numerical Analysis : A Practical Approach*, Belmont, CA.
- [13] Martin, R. D. et Yohai, V. J. (1985), 'Robustness in time series and estimating ARMA models', *Handbook of Statistics, Vol. 5*, E. J. Hannan, P. J. Krishnaiah et M. M. Rao, Éditeurs, Elsevier, Amsterdam, 119-155.

