

Université de Montréal

Problèmes de routages dans les réseaux optiques

par
Alfred Houndété

Département d'informatique et de recherche opérationnelle
Faculté des études supérieures

Mémoire présenté à la faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M. Sc.)
en informatique

Décembre 2002

©Alfred Houndété, 2002

QA

76

U54

2003

v. 033

Direction des bibliothèques

AVIS

L'auteur a autorisé l'Université de Montréal à reproduire et diffuser, en totalité ou en partie, par quelque moyen que ce soit et sur quelque support que ce soit, et exclusivement à des fins non lucratives d'enseignement et de recherche, des copies de ce mémoire ou de cette thèse.

L'auteur et les coauteurs le cas échéant conservent la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent ce document. Ni la thèse ou le mémoire, ni des extraits substantiels de ce document, ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans l'autorisation de l'auteur.

Afin de se conformer à la Loi canadienne sur la protection des renseignements personnels, quelques formulaires secondaires, coordonnées ou signatures intégrées au texte ont pu être enlevés de ce document. Bien que cela ait pu affecter la pagination, il n'y a aucun contenu manquant.

NOTICE

The author of this thesis or dissertation has granted a nonexclusive license allowing Université de Montréal to reproduce and publish the document, in part or in whole, and in any format, solely for noncommercial educational and research purposes.

The author and co-authors if applicable retain copyright ownership and moral rights in this document. Neither the whole thesis or dissertation, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms, contact information or signatures may have been removed from the document. While this may affect the document page count, it does not represent any loss of content from the document.

Université de Montréal
Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé :

Problèmes de routages dans les réseaux optiques

présenté par :
Alfred Houndété

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Alain Tapp
Président-rapporteur

Gena Hahn
Directeur de recherche

Stefan Wolf
Membre du jury



Sommaire

Ce mémoire est une synthèse de la littérature ainsi qu'une contribution originale. Notre étude porte sur des problèmes de routage dans les réseaux optiques avec multiplexage en longueur d'ondes. Nous avons choisi, en particulier, comme modèle de ces réseaux, les graphes de Cayley connus pour leurs propriétés de symétrie. Nous avons alors examiné divers types de requêtes dans un routage : l'échange total, la diffusion etc.

Dans le but d'analyser les conditions qui permettent d'avoir un routage optimal, nous avons étudié les paramètres tels que le nombre minimum de longueurs d'ondes dans un routage, la charge sur un lien du routage et la charge sur un nœud du routage. Ensuite, nous avons regardé d'une part, des relations entre ces différents paramètres et d'autre part, des algorithmes pouvant permettre la réalisation de routage optimal.

Mots-clé :

Routage, réseaux optiques, graphes de Cayley, multiplexage en longueur d'ondes, charge sur un lien, charge sur un sommet, nombre minimum de longueur d'ondes.

Summary

This thesis is a review of current literature and also includes an original contribution to the subject.. Our study concentrates on routing problems in optical networks with wavelength division multiplexing. Because of their symmetry properties, we chose Cayley graphs as models of networks. We examine various types of requests in a routing, such as all-t-all, broadcasting, etc.

With a view to analyzing the conditions that allow for an optimal routing we study such parameters as the minimum number of wavelengths needed for a routing, or the load (number of routes passing through) of a vertex or that of an edge. We then consider the relationships between the parameters studied as well as algorithms that realise optimal routings.

Key words:

Routing, optical networks, Cayley graphs, WDM, minimum number of wavelengths, load on a routing's edges and the load on a routing's node.

Table des matières

<i>Introduction</i>	3
CHAPITRE 1	5
La fibre optique : Graphes et réseaux	5
1.1 Fibre optique	5
1.2 Conversion optique/électronique	8
1.3 Techniques optiques	9
1.4 Modèle optique	15
1.5 Graphes	16
1.6 Groupes, symétrie et permutations	25
1.7 Graphes de Cayley	30
1.8 Problématique	31
CHAPITRE 2	38
Relations entre les paramètres	38
2.1 Optimisation et approximation	38
2.2 Relation entre π et ω	40
2.3 Relation entre π et ξ	49
2.4 Relation entre ω et ξ	55
2.5 Bornes sur ω et ω/π	59
CHAPITRE 3	62
Réseaux généraux	62
3.1 Indice optique	62
3.2 Réseaux spécifiques	63
<i>Conclusion</i>	72

Table des figures

<i>Figure 1 : Fibre optique</i>	7
<i>Figure 2 : Propagation de la lumière dans les différents types de fibres optiques</i>	8
<i>Figure 3 : Conversion de signaux électriques en signaux optiques au moyen d'un transceiver Ethernet</i>	8
<i>Figure 4 : Liaison WDM/DWDM</i>	11
<i>Figure 5 : Amplificateur optique</i>	11
<i>Figure 6 : Réseau IP sur DWDM</i>	13
<i>Figure 7 : Combinaison entre les différentes couches services et transports</i>	14
<i>Figure 8 : Multiplexeur à insertion/extraction optique</i>	14
<i>Figure 9 : Brasseur optique</i>	15
<i>Figure 10 : Cycle C_6 et graphe complet K_6</i>	21
<i>Figure 11 : Hypercube H_4</i>	21
<i>Figure 12 : Grille $M(5, 4)$ et Tore $TM(5, 4)$</i>	22
<i>Figure 13 : Arbre de cycles</i>	23
<i>Figure 14 : Graphe cube-connected-cycles $CCC(3)$</i>	24
<i>Figure 15 : Graphe biparti $K_{2,3}$</i>	27
<i>Figure 16 : Relations entre les différents types de symétrie</i>	28
<i>Figure 17 : Fibre optique</i>	31
<i>Figure 18 : Réseau G en 3-étoiles</i>	35
<i>Figure 19 : Routage dans un arbre et son graphe de conflit associé</i>	42
<i>Figure 20 : Pseudo-grille orientée non symétrique</i>	44
<i>Figure 21 : Routage dans le graphe $K_2 \square K_3$</i>	53
<i>Figure 22 : Routage dans le cycle C_4</i>	54
<i>Figure 23 : Routage dans le cycle C_5</i>	57
<i>Figure 24 : Routage dans une étoile orientée</i>	67

Introduction

La communication dans les réseaux optiques a connu un fulgurant développement ces dernières années. De plus en plus d'entreprises se tournent vers la fibre optique pour la transmission de tout genre d'information : conversations téléphoniques, images ou données. Des innovations techniques permettant d'envoyer et de faire circuler l'information ont alors été nécessaires.

L'une des techniques utilisées pour la transmission du signal est le multiplexage en longueurs d'ondes. Cette technique permet, en utilisant une seule fibre, d'envoyer plusieurs signaux à la fois mais sur des longueurs d'ondes différentes. Les frais liés au déploiement d'un réseau optique étant devenus très élevés, il s'est avéré important voire indispensable de chercher à optimiser d'une part l'utilisation des ressources optiques et d'autre part, la complexité des routeurs installés dans les réseaux.

Afin d'apporter des solutions à ces problèmes de routage optiques, nous avons exploité les résultats de la théorie des graphes pour modéliser les réseaux en terme de graphes. D'abord, les nœuds du réseau sont représentés par les sommets du graphe. Ensuite, chaque lien du réseau a pour équivalent une arête ou un arc dans le graphe. Enfin, un routage dans le réseau correspond à un ensemble de chemins, chacun reliant une paire distincte de sommets dans le graphe. Les longueurs d'ondes correspondent alors aux couleurs associées chacune à un chemin du routage donné.

Dans le chapitre 1, nous introduisons divers termes, définitions et notations qui sont nécessaires à la compréhension de ce mémoire. Ensuite, après avoir décrit la fibre optique et des techniques optiques utilisées dans le transport des signaux, nous montrons comment les outils que constituent les graphes abstraits peuvent aider à la

résolution des problèmes de routage avec multiplexage en longueurs d'ondes dans les réseaux optiques.

Le chapitre 2 est consacré à une synthèse des principaux résultats connus dans la littérature. Ainsi, nous abordons les relations entre le nombre de longueurs d'ondes et la charge d'un routage tout en insistant sur les bornes de certains de ces paramètres. Nous nous sommes essentiellement penchés sur l'étude des graphes de Cayley compte tenu de leurs propriétés de symétrie. Ce faisant, nous avons obtenu des résultats pertinents que nous présentons sous la forme de propositions et de corollaires.

Dans le chapitre 3, nous présentons une brève synthèse de la complexité algorithmique liée à la détermination des stratégies optimales de routage dans les réseaux ayant une topologie relativement simple comme les anneaux, les arbres et les grilles.

Nous concluons le mémoire en mentionnant quelques directions des recherches futures.

CHAPITRE 1

La fibre optique : Graphes et réseaux

1.1 Fibre optique

Jadis, les câbles télégraphiques, installés sous la mer, servaient à communiquer entre les continents. Ils ont été remplacés par les câbles coaxiaux qui permettaient l'acheminement des conversations téléphoniques. Le premier câble coaxial traversant l'Atlantique fut installé en 1955 et correspondait à 48 lignes téléphoniques.

Depuis plus de trois décennies, l'utilisation des fils électriques est progressivement remplacée par celle des fibres optiques. Dans une fibre optique, on peut faire transiter plusieurs messages en même temps, sur le même lien, en les faisant passer sur des longueurs d'ondes différentes. Alors que le téléphone standard fonctionne à 64 kilobits par seconde et la télévision numérique à 100 mégabits par seconde, la fibre optique peut transmettre simultanément jusqu'à environ 500 000 conversations téléphoniques d'un continent à un autre, soit sur une distance d'environ 10 000 km,

ce qui correspond à un débit d'environ 34 gigabits par seconde. Ce nouveau support de transmission présente de nombreux avantages. D'abord, on remarque que le transfert de l'information très fiable et très rapide, et qu'il y a une très faible atténuation dans la transmission des signaux. Ensuite, le taux de transmission est élevé en comparaison avec l'ancien support de transmission; de plus, sa mise en œuvre est facilitée par son faible poids, sa très petite taille et sa grande souplesse. Enfin, on note une économie d'énergie considérable et une grande sécurité dans le transfert de l'information.

L'information est codée sous la forme d'une succession de bits. Les bits sont acheminés physiquement par une onde lumineuse dont on module l'intensité : le temps est divisé en blocs de même durée, pendant lesquels le bit 1 est codé par une impulsion lumineuse et le bit 0 par une absence de lumière.

Afin de permettre la réalisation des opérations de commutation et de routage, les signaux optiques à convertir sont traduits en signaux électriques à l'aide d'une photo-diode. Cette conversion optique/électronique provoque un ralentissement de la vitesse de communication.

Pour régler ce problème, la solution envisagée réside dans l'utilisation des composants de commutation optiques. Ces derniers possèdent la capacité de traiter des signaux optiques à très haut débit sans conversion optique/électronique. Ainsi, dans les réseaux utilisant cette technologie de commutation, les informations sont véhiculées de façon optique de la source jusqu'à la destination. On parle de réseaux tout-optiques.

La fibre optique utilisée pour les télécommunications est composée de deux types de verre de silice différent et d'un revêtement protecteur permettant la réflexion de la lumière emprisonnée. Cette fibre est également protégée par divers autres moyens mécaniques qui varient selon les types d'application et selon l'environnement dans lequel elle est utilisée.

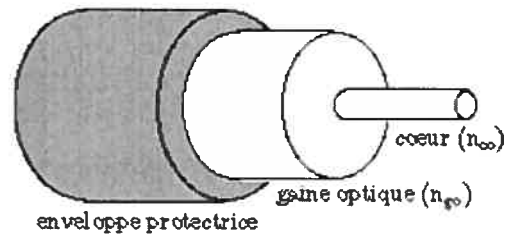


Figure 1 : Fibre optique ¹

On distingue deux sortes de fibres optiques suivant les dimensions du cœur :

1.1.1 La fibre optique monomode

Elle est généralement utilisée pour de grandes distances et pour des applications demandant une grande largeur de bande. On retrouve des fibres monomodes à dispersion décalée (norme internationale ITU-T G. 653 caractérisant les câbles à fibres optiques monomode à longueur d'ondes de coupure décalée) et à dispersion non-décalée (norme internationale ITU-T G. 652). Le cœur de cette fibre est généralement de $8 \text{ à } 10 \mu \text{ +/- } 2 \mu$ (Voir figure 2). On retrouve ces fibres dans des réseaux MAN et WAN.

1.1.2 La fibre optique multimode

Cette fibre est généralement utilisée pour de courtes distances (réseaux LAN et MAN) et est très répandue. Il y a deux principaux types de fibre multimode: la fibre à saut d'indice et celle à gradient d'indice (Voir figure 2). Les fibres à gradient d'indice $50\mu/125\mu$ sont généralement utilisées en Europe, tandis que celles à $62,5\mu/125\mu$ sont utilisées en Amérique du Nord.

¹ Merci à Frank LUSTEAU du département d'informatique du Conservatoire national des arts et métiers pour son site à partir duquel certains schémas ont été pris.

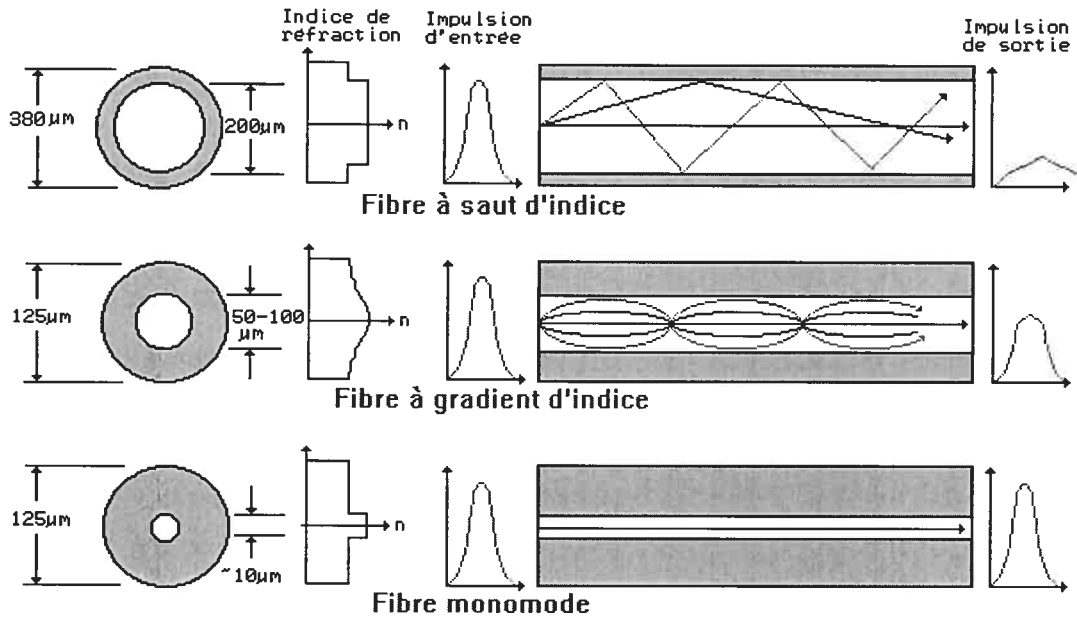


Figure 2 : Propagation de la lumière dans les différents types de fibres optiques

1.2 Conversion optique/électronique

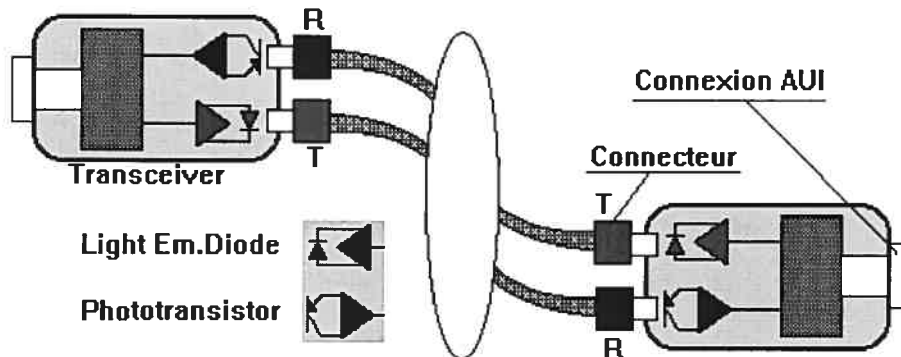


Figure 3 : Conversion de signaux électriques en signaux optiques au moyen d'un transceiver Ethernet

Le but du transceiver optique est de convertir les impulsions électriques en signaux optiques véhiculés au cœur de la fibre. Ainsi, à l'intérieur des deux transceivers

partenaires, les signaux électriques seront traduits en impulsions optiques par une LED (*Light Emitting Diode*) et lus par un phototransistor ou une photodiode.

On utilise une fibre pour chaque direction de la transmission.

Les émetteurs utilisés sont de trois types:

- Les LED qui fonctionnent dans le rouge visible (850 nm). C'est ce qui est utilisé pour le standard Ethernet FOIRL.
- Les diodes à infrarouge qui émettent dans l'invisible à 1300 nm
- Les lasers, utilisés pour la fibre monomode, dont la longueur d'onde est 1300 ou 1550 nm

1.3 Techniques optiques

La méthode utilisée est le multiplexage optique. Elle permet de transporter plusieurs signaux sur une même fibre optique. Cette technique consiste à diviser la fibre optique en plusieurs canaux accessibles individuellement et indépendamment. Il existe deux techniques de multiplexage. Alors que les systèmes de transmission ne reposaient que sur l'utilisation du multiplexage temporel (ou TDM pour *Time Division Multiplexing*), pour la transmission de 155 Mb/s, 622 Mb/s, 2,5 Gb/s, 10 Gb/s, voire 40 Gb/s sur une seule longueur d'onde, une nouvelle génération de systèmes est apparue au début des années 90, mettant en oeuvre le multiplexage de longueurs d'onde (ou WDM pour *Wavelength Division Multiplexing*).

1.3.1 Le multiplexage temporel TDM : Time Division Multiplexing

Il consiste à imbriquer temporellement différents canaux de communication en trames successives. Cette technique permet la superposition sur le même support physique de transmission de plusieurs canaux de communication, identifiables selon

leur décalage temporel. À la réception, chaque canal temporel est démultiplexé et acheminé vers son destinataire. Les fonctions de multiplexage / démultiplexage temporel sont réalisées grâce à des circuits intégrés ultrarapides.

Les canaux TDM sont uniquement modulables numériquement en amplitude et leur débit est imposé par le multiplexeur temporel. Ils ne sont transparents ni pour le débit de modulation ni pour le type de modulation.

Ces circuits intégrés deviennent très dispendieux pour de hauts débits. Ainsi, on suggère d'effectuer le multiplexage temporel par des moyens purement optiques. De plus, l'approche TDM n'est pas extensible. En effet, l'ajout d'un nouveau canal TDM nécessite une modification des décalages temporels et une resynchronisation de tous les canaux déjà existants. C'est pour ces raisons que la technique WDM est de plus en plus envisagée.

1.3.2 Le multiplexage en longueur d'onde WDM

La technologie WDM (*Wavelength Division Multiplexing*) consiste à envoyer simultanément dans la même fibre optique plusieurs trains de signaux numériques à la même vitesse de modulation, mais chacun à une longueur d'onde distincte. A l'émission, on multiplexe n canaux au débit nominal D , à la réception, on démultiplexe le signal global $n \times D$ en n canaux nominaux.

La norme internationale ITU-T G 692 (Interfaces optiques pour systèmes multi-canaux avec amplificateurs optiques) a défini un peigne de longueurs d'ondes autorisées dans la seule fenêtre de transmission 1530-1565 nm. Elle normalise l'espacement en nanomètre (nm) ou en Gigahertz (GHz) entre deux longueurs d'ondes permises de la fenêtre : 200 GHz ou 1,6 nm et 100 GHz ou 0,8 nm.

La technologie WDM est dite dense (DWDM) lorsque l'espacement utilisé est égal ou inférieur à 100 GHz. Des systèmes à 50 GHz (0,4 nm) et à 25 GHz (0,2 nm) ont déjà été testés.

Les systèmes WDM / DWDM commercialisés aujourd'hui comportent 4, 8, 16, 32 voire 80 canaux optiques, ce qui permet d'atteindre des capacités de 10, 20, 40, 80 voire 200 Gb/s en prenant un débit nominal de 2,5 Gb/s par canal, débit pour lequel les composants d'émission / réception sont très répandus. Par exemple, un système à 16 canaux 2,5 Gb/s permet de transmettre 500 000 conversations téléphoniques simultanées sur une fibre.

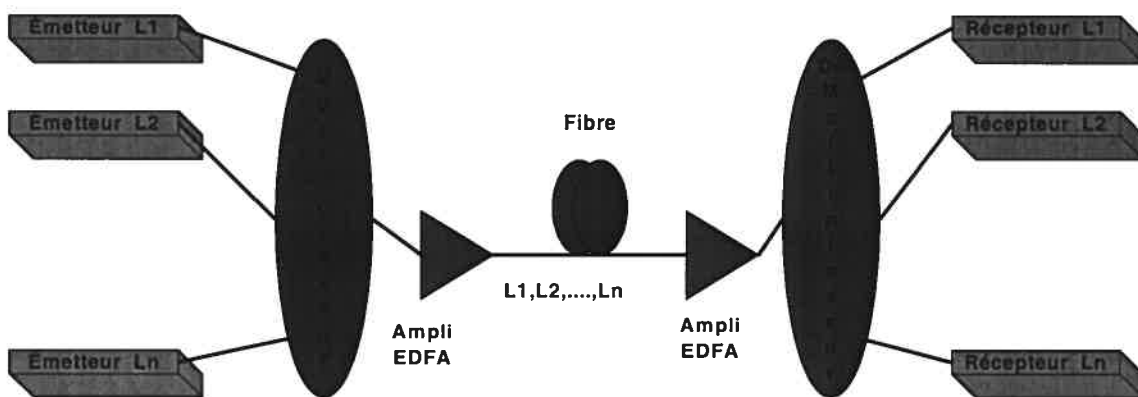


Figure 4 : Liaison WDM/DWDM

Une des composantes clés du WDM/DWDM est l'amplificateur à fibre dopée erbium (EDFA) qui permet de compenser les pertes d'insertion dues aux multiplexage/démultiplexage des longueurs d'ondes.

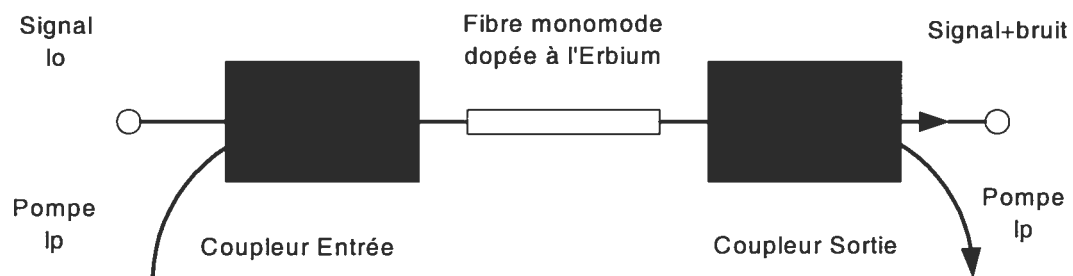


Figure 5 : Amplificateur optique

Néanmoins le DWDM introduit des phénomènes non linéaires qui ont notamment pour conséquence de limiter en pratique la distance entre amplificateurs entre 50 et 100 Km :

- la diaphonie entre canaux (XPM : *Cross Phase Modulation*),
- le mélange quatre ondes (FWM : *Four Wave Mixing*) qui crée de l'intermodulation optique entre les différents canaux,
- l'effet Raman (SRS : *Stimulated Raman Scattering*) qui augmente les écarts de puissance reçue entre canaux et par conséquent produit une trop grande dispersion du rapport signal/bruit.

Sur de la fibre optique monomode G 652 les effets non linéaires n'apparaissent pas dans la fenêtre 1550 nm tant que le nombre de canaux reste inférieur ou égal à 32 canaux et que la puissance par canal reste inférieure à 1 mw.

Plusieurs techniques permettent de corriger ces phénomènes : c'est le cas de la DCF (*Dispersion Compensating Fiber*) qui consiste à introduire dans la liaison un tronçon de fibre produisant une dispersion négative (environ -100 ps/nm.km) de compensation.

Cependant, la technologie DWDM n'a pas encore atteint ses limites. De nouvelles techniques en cours de développement permettront de multiplier encore plus les capacités des systèmes optiques :

- la transmission soliton permettant le transport d'impulsions très étroites sur des milliers de Km sans déformation, tout en conservant une bande passante très large ;
- la modulation des impulsions ou transmission duo-binaire, permettant la multiplication par deux ou trois du débit électronique, en utilisant des impulsions à 2 ou 3 niveaux binaires;
- l'amplification et le multiplexage dans la fenêtre 1300 nm permettant de mieux rentabiliser les fibres optiques conventionnelles G-652 qui connaissent des limites dans l'utilisation des systèmes DWDM à 1550 nm.

Compte tenu des nombreux avantages que le DWDM apporte, l'intégration de cette nouvelle technologie dans un réseau d'opérateurs nécessite de repenser son architecture avec le double objectif, de ménager les investissements déjà réalisés tout en préparant un proche avenir où simplicité, fiabilité et faible coût seront les clés du succès.

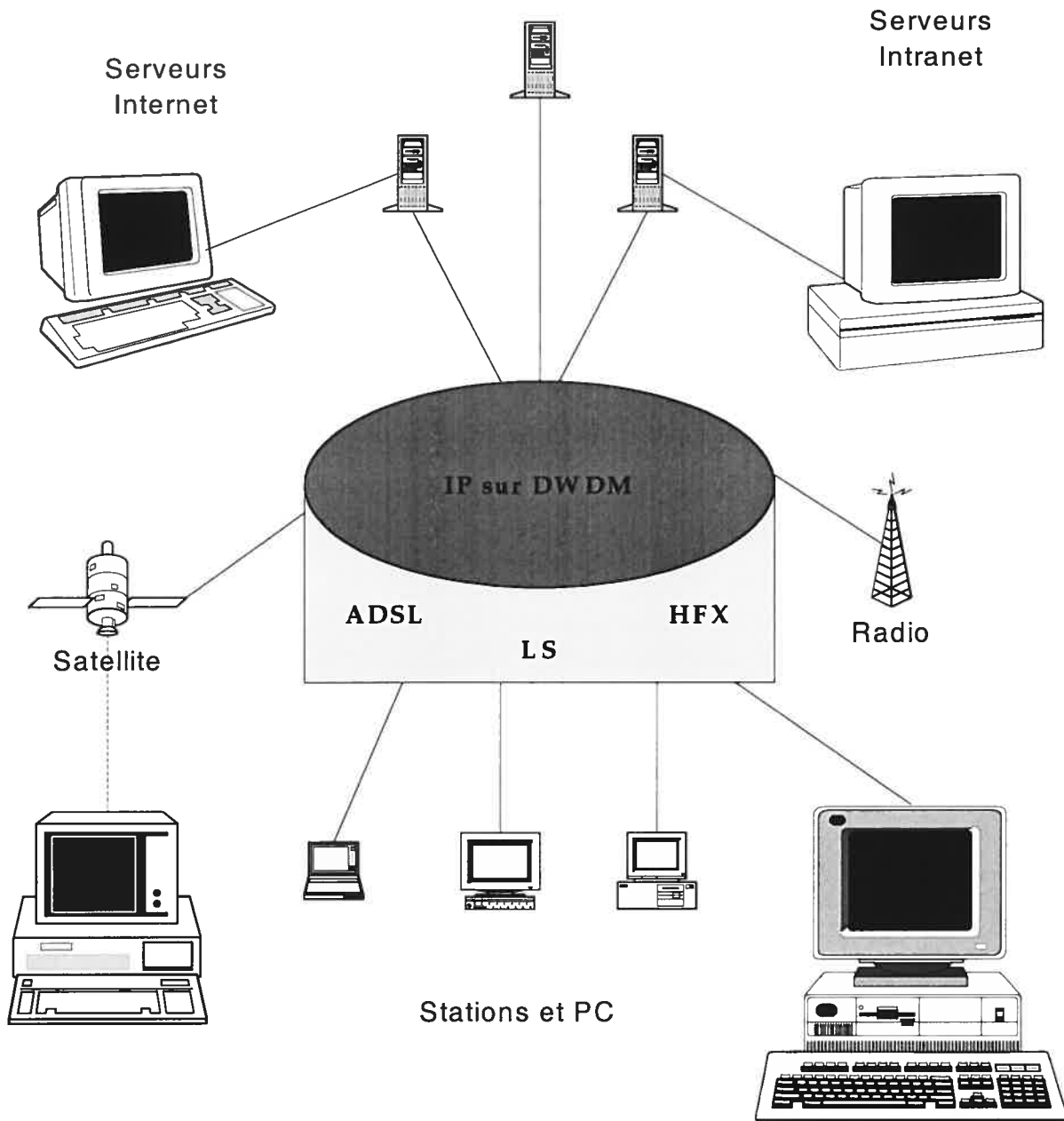


Figure 6 : Réseau IP sur DWDM

L'approche faite par de nouveaux opérateurs aux États-Unis de bâtir aujourd'hui directement leur réseau avec de l'IP (*Internet Protocol*) sur la SDH (*Synchronous Digital Hierarchy*), voire IP directement sur le DWDM est un signe révélateur de cette tendance qui devrait voir le jour en Europe dans les prochaines années.

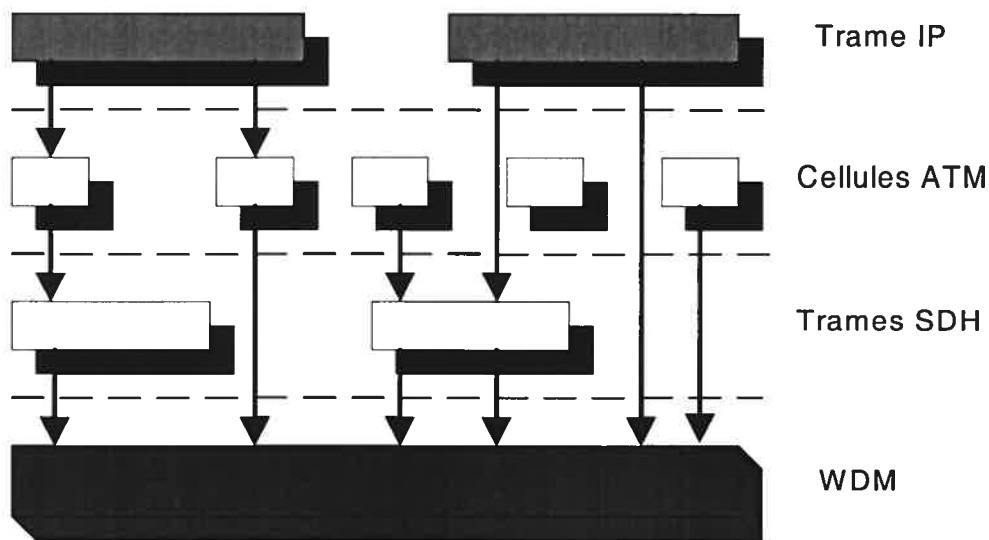


Figure 7 : Combinaison entre les différentes couches services et transports

Ainsi, il apparaît certain que demain la longueur d'onde optique deviendra un élément à part entière du réseau.

Avec l'introduction des multiplexeurs à insertion/extraction optique (*Optical Add Drop Multiplexing* : OADM) reconfigurables :

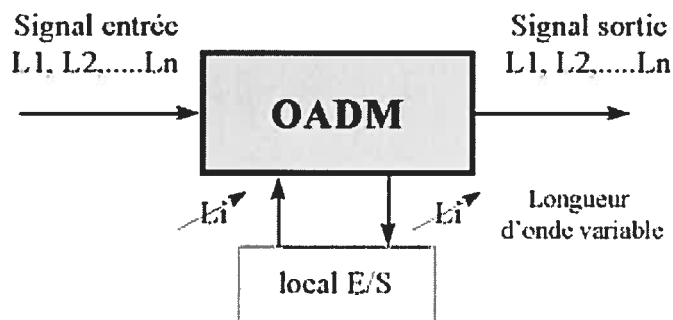


Figure 8 : Multiplexeur à insertion/extraction optique

et de brasseurs optiques (*Optical Cross-Connect* : OXC) :

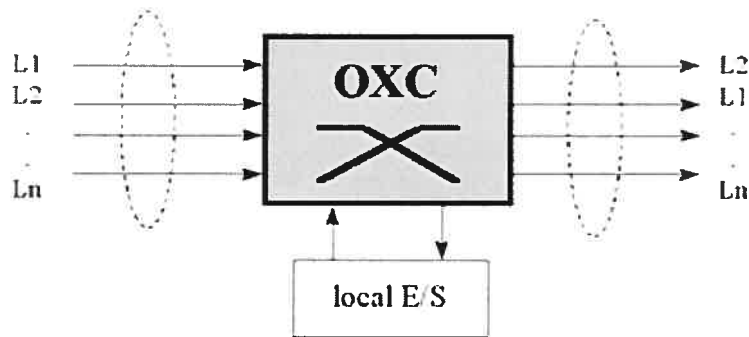


Figure 9 : Brasseur optique

il sera possible de mieux exploiter la capacité des fibres optiques mais aussi d'offrir des possibilités de restauration et de protection à haut niveau. Les couches optiques et SDH accompliront des fonctions similaires, la couche optique manipulant des porteuses optiques (à 2,5 ou 10 Gb/s) au lieu de conteneurs virtuels SDH, (ayant une capacité de 155 Mb/s ou moins) permettant de réduire la taille, la complexité et le coût des nœuds optiques.

1.4 Modèle optique

Les fibres optiques sont utilisées de façon unidirectionnelle [KG96]. Pour connecter deux nœuds ensemble, on pose deux fibres optiques unidirectionnelles en parallèle. Nous modéliserons le réseau optique par un graphe orienté $G = (V, A)$ ou un graphe non-orienté $G = (V, E)$. Les sommets de l'ensemble V correspondent aux nœuds du réseau. Le graphe est orienté (respectivement non-orienté) si les liens du réseau sont unidirectionnels (respectivement bidirectionnels). Nous représenterons alors les liens par des arcs ou des arêtes. Nous porterons, dans la suite, une attention particulière aux réseaux optiques basés sur les graphes de Cayley. Nous utiliserons

les résultats connus sur les graphes afin d'obtenir de nouveaux résultats sur les réseaux tout-optiques.

Nous commencerons d'abord par rappeler des définitions et des notions élémentaires de la théorie des graphes.

Nous présentons ici seulement les définitions nécessaires. Pour avoir des informations sur les notions non rappelées, le lecteur est invité à consulter le livre de Rumeur [dR94] et celui de Berge [Ber83]. Nous utiliserons parfois la notation V (resp. A ou E) pour désigner $V(G)$ (resp. $A(G)$ ou $E(G)$). Il est à préciser que les définitions concernant les graphes orientés se généralisent pour les graphes non orientés.

1.5 Graphes

- Un **graphe orienté** $G = (V(G), A(G))$ est constitué d'un ensemble fini $V(G) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ d'éléments, appelés **sommets**, et d'un ensemble $A(G) \subseteq V(G) \times V(G)$ de couples de sommets, appelés **arcs**. Un arc de x à y est noté (x, y) .
- Si $\alpha = (x, y)$ est un arc, alors x est son **extrémité initiale** et y son **extrémité finale**.
- Si $\alpha = (x, y)$ est un arc, le sommet y est un **successeur** du sommet x et x est un **prédécesseur** de y . On dit que x et y sont **adjacents**.
- Une **boucle** est un arc de la forme (x, x) .
- Un **graphe non orienté** $G = (V(G), E(G))$ est constitué d'un ensemble fini $V(G)$ de sommets et d'un ensemble $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de couples non ordonnés de sommets, appelées **arêtes**. Une arête de x à y est notée $[x, y]$. Notons que les boucles (arêtes de la forme $[x, x]$, souvent notées $\{x\}$) sont permises. Ainsi, on a : $E(G) \subseteq \{\{x, y\} \mid x, y \in V(G) \text{ } x \neq y\} \cup \{\{x\} \mid x \in V(G)\}$.

- Des *arcs* ou des *arêtes multiples* sont des arcs ou des arêtes joignant le même couple de sommets (nous n'allons pas insister sur les modifications à faire dans la définition de l'ensemble des arcs ou des arêtes dans ce cas). Il est à noter que deux arcs de sens opposés ne sont pas des arcs multiples.
- Un *graphe simple* est un graphe sans boucle, ni arête ou arc multiple. Si des boucles ou des arêtes (arcs) multiples sont autorisées, on parlera de *multigraphe*. Dans la suite et sauf mention contraire, le terme graphe désignera un graphe simple.
- Si $e = [x, y]$ est une arête, les sommets x et y sont dits *adjacents* l'un à l'autre et l'arête e est dite *incidente* à x et y .
- Le nombre de sommets, $|V(G)|$, d'un graphe $G = (V, E)$ est appelé l'*ordre* du graphe, et est noté N .
- Un graphe orienté G est dit *symétrique* si : $(x, y) \in A(G)$ si et seulement si $(y, x) \in A(G)$.
- On note G^* le graphe orienté symétrique obtenu à partir d'un graphe non orienté G en prenant dans $A(G^*)$ les arcs $\alpha = (x, y)$ et $\alpha' = (y, x)$ pour chaque arête $e = [x, y]$ de $E(G)$.
- Une *coloration* du graphe G est une application c de V dans un ensemble de couleurs telle que pour tout $(s, t) \in A(G)$, $c(s) \neq c(t)$.
- On appelle *nombre chromatique* d'un graphe G , le plus petit entier k permettant d'effectuer une coloration du graphe avec k couleurs.

- On appelle le **voisinage** de x , l'ensemble $V_G(x)$ des sommets qui lui sont adjacents. Ainsi : $V_G(x) = \{y \in V(G) : (x, y) \in E(G)\}$. On note $E_G(x)$, l'ensemble des arêtes incidentes à x . Ainsi : $E_G(x) = \{(x, y) \in E(G) : y \in V_G(x)\}$.
- Le **degré** $d_G(x)$ d'un sommet $x \in V(G)$ dans un graphe $G = (V, E)$ est le nombre d'arêtes incidentes à x , c'est-à-dire : $d_G(x) = |E_G(x)| = |V_G(x)|$.
- Le graphe $G = (V, E)$ est dit **régulier** si $d_G(x) = d_G(y)$ pour tout $x, y \in V$. Cette valeur est appelée **degré du graphe** et est notée $d(G)$.
- On appelle **degré sortant** $d^+(x)$ d'un sommet x dans un graphe orienté, le nombre d'arcs d'extrémité initiale x .
- On appelle **degré entrant** $d^-(x)$ d'un sommet x dans un graphe orienté, le nombre d'arcs d'extrémité finale x .
- On appelle **degré maximum** d'un graphe G , le maximum des degrés des sommets. On le note $\Delta(G)$. Le **degré maximum sortant** (respectivement **entrant**) est noté $\Delta^+(G)$ (respectivement $\Delta^-(G)$). Dans les deux cas, s'il n'y a pas de confusion, on utilise seulement Δ .
- On appelle **degré minimum** d'un graphe G , le minimum des degrés des sommets. On le note $\delta(G)$. Le **degré minimum sortant** (respectivement **entrant**) est noté $\delta^+(G)$ (respectivement $\delta^-(G)$). Ici aussi, dans les deux cas, s'il n'y a pas de confusion, on utilise seulement δ .
- Un **chemin non-orienté** de longueur k , dans un graphe non-orienté G , est une séquence $x_0x_1\dots x_k$ de sommets distincts où $[x_i, x_{i+1}]$ est une arête dans G pour tout $0 \leq i \leq k-1$.

- Un **chemin orienté** de longueur k , dans un graphe orienté G , est une séquence $x_0x_1\dots x_k$ de sommets distincts où (x_i, x_{i+1}) est un arc dans G pour tout $0 \leq i \leq k-1$. Les sommets x_0 et x_k sont les **extrémités** du chemin $x_0x_1\dots x_k$ et les autres sommets sont appelés les **sommets intérieurs**. On note le chemin de x à y , $C_{(x,y)}$. La **longueur** $|C_{(x,y)}| = k$ du chemin $C_{(x,y)}$ est le nombre d'arêtes ou d'arcs qui le composent.
- Un chemin $C_{(x,y)}$ est un **plus court chemin** entre x et y si pour tout autre chemin, $C'_{(x,y)}$, $|C_{(x,y)}| \leq |C'_{(x,y)}|$.
- On appelle **distance** entre deux sommets x et y dans un graphe non-orienté, et on note $d(x,y)$, la longueur d'un plus court chemin de x vers y .
- Dans un graphe orienté, la **distance** entre deux sommets x et y , est la longueur d'un plus court chemin orienté entre x et y . On définit la distance de x à y et celle de y à x de manière analogue. Il est à noter que dans un graphe orienté symétrique, la distance du sommet x vers le sommet y est la même que celle de y vers x . Par conséquent, dans ce cas, on ne fait pas la distinction .
- On appelle **diamètre** d'un graphe orienté ou non et on note D , le maximum des distances entre les sommets.
- Un graphe $G = (V, E)$ est **biparti** s'il admet une partition de V en deux sous-ensembles V_1 et V_2 tels que toute arête de E a une de ces deux extrémités dans V_1 et l'autre extrémité dans V_2 .
Si $|V_1| = M$ et $|V_2| = N$ et pour tout $u \in V_1, v \in V_2, (u, v) \in E$, le graphe G sera noté par $K_{M,N}$.
- La **somme cartésienne** de deux graphes orientés $G = (V, A)$ et $G' = (V', A')$, notée $G \square G'$, est le graphe qui a pour ensemble de sommets le produit cartésien $V \times V'$ et pour ensemble d'arcs les couples $((x, x'), (y, y'))$ tels que soit $x = y$ et

$(x', y') \in A$ soit $x' = y'$ et $(x, y) \in A$. La somme cartésienne de deux graphes non orientés se définit de façon analogue.

- Un graphe orienté est dit **fortement connexe** s'il existe un chemin orienté de tout sommet vers tout autre sommet.
- Un graphe non-orienté est dit **connexe** s'il existe un chemin non-orienté entre toute paire de sommets.
- Un graphe orienté $G = (V, A)$ est dit **connexe** si le graphe $G' = (V, \{(x, y) \mid (x, y) \in A(G) \text{ ou } (y, x) \in A(G)\})$ l'est.
- On appelle **arc-connectivité** $\lambda(G)$ de G , le nombre minimum d'arcs dont la suppression rend soit le graphe non fortement connexe, soit le réduit à un sommet.
- Un graphe G est **k -arc-connexe** si $\lambda(G) \geq k$.
- On appelle **arc-connectivité** $c_G(x)$ d'un sommet $x \in V(G)$, le nombre minimum d'arcs dont la suppression rend un sommet de $V(G)$ non accessible à partir de x .
- On appelle **arc-expansion** de G et on note $\beta(G)$ ou encore β , le minimum sur les parties non-vides S de V des rapports du nombre d'arcs ayant seulement leur extrémité initiale dans S par le nombre d'éléments de S .
- On appelle **cycle ou anneau** d'ordre N , le graphe connexe régulier de degré 2, à N sommets. On le note : C_N .
- Un graphe G est **complet** si toute paire de sommets est reliée par une arête. Si l'ordre de G est N , le graphe est noté K_N .

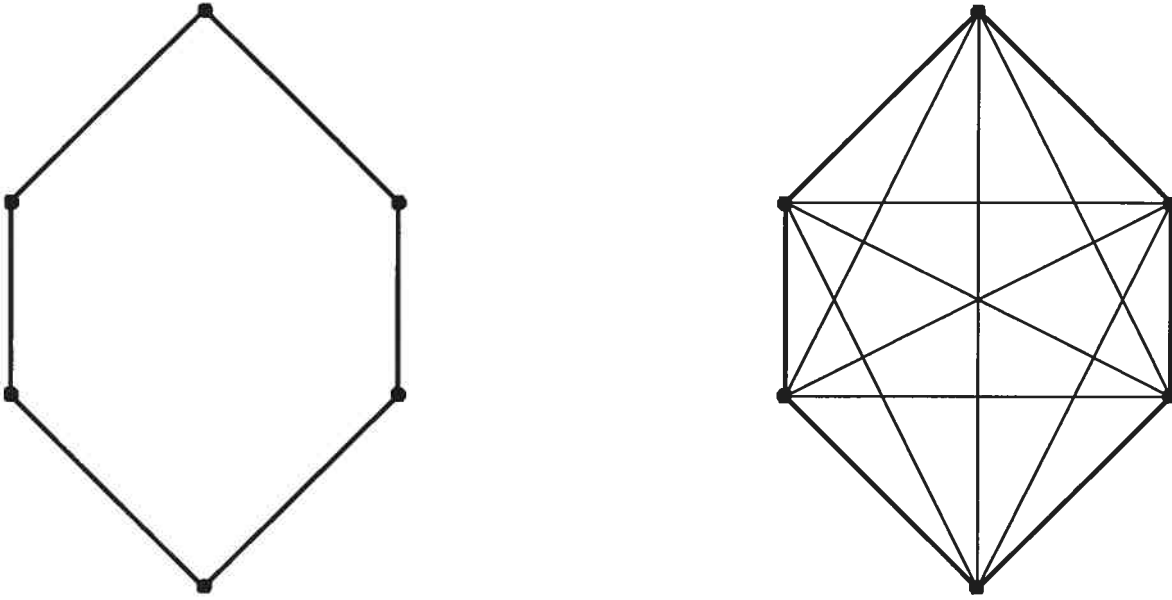


Figure 10 : Cycle C_6 et graphe complet K_6

- On appelle **hypercube** de dimension n , d'ordre $N = 2^n$, et on note H_n , la somme cartésienne de n copies du graphe complet d'ordre 2, K_2 . On peut le définir récursivement à partir du graphe K_2 par $H_1 = K_2$ et $H_n = K_2 \square H_{n-1}$.

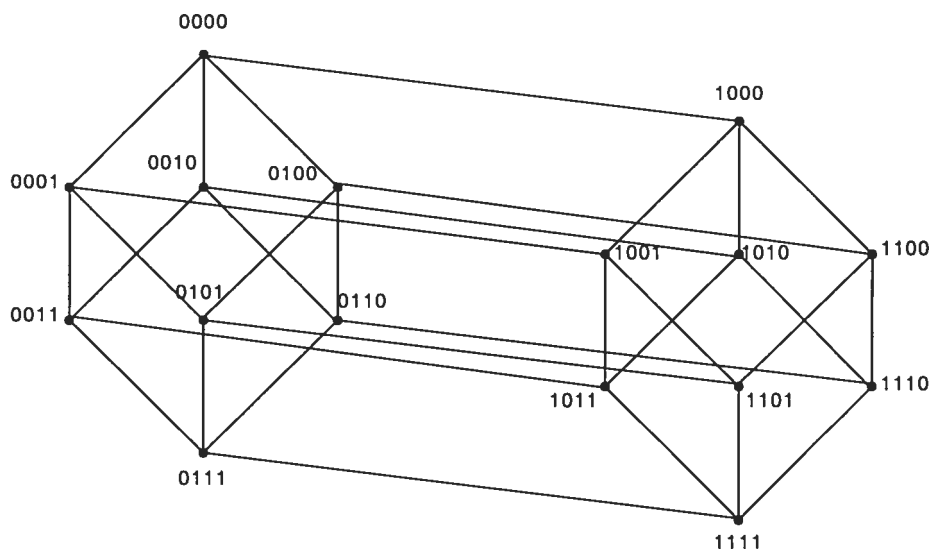


Figure 11 : Hypercube H_4

- On appelle **grille** de dimension n , d'ordre $N = \prod_{i=1}^n p_i$, et on note $M(p_1, p_2, \dots, p_n)$, la somme cartésienne de n chaînes P_{p_i} ($i = 1, 2, \dots, n$) c'est-à-dire : $P_{p_1} \square P_{p_2} \square \dots \square P_{p_n}$. (Voir figure 12)
- On appelle **grille torique** ou **tore** de dimension n , d'ordre $N = \prod_{i=1}^n l_i$, et on note $TM(l_1, l_2, \dots, l_n)$, la somme cartésienne des n cycles C_{l_i} ($i = 1, 2, \dots, n$) c'est-à-dire : $C_{l_1} \square C_{l_2} \square \dots \square C_{l_n}$. (Voir figure 12)
- On appelle **arbre de cycles**, (voir figure 13) un graphe formé par une union de cycles qui s'intersectent deux à deux en au plus un sommet, et tel que deux sommets quelconques peuvent être reliés par exactement deux chemins arc-disjoints.

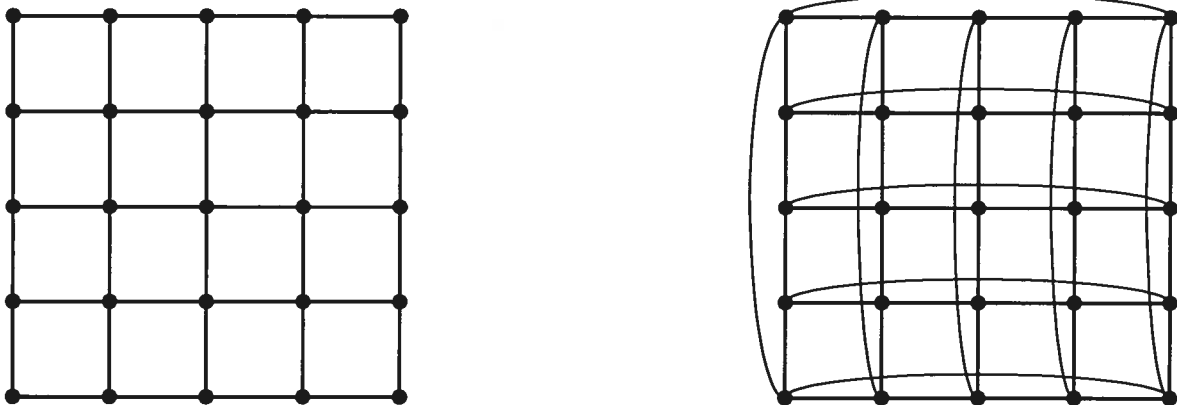


Figure 12 : Grille $M(5, 4)$ et Tore $TM(5, 4)$

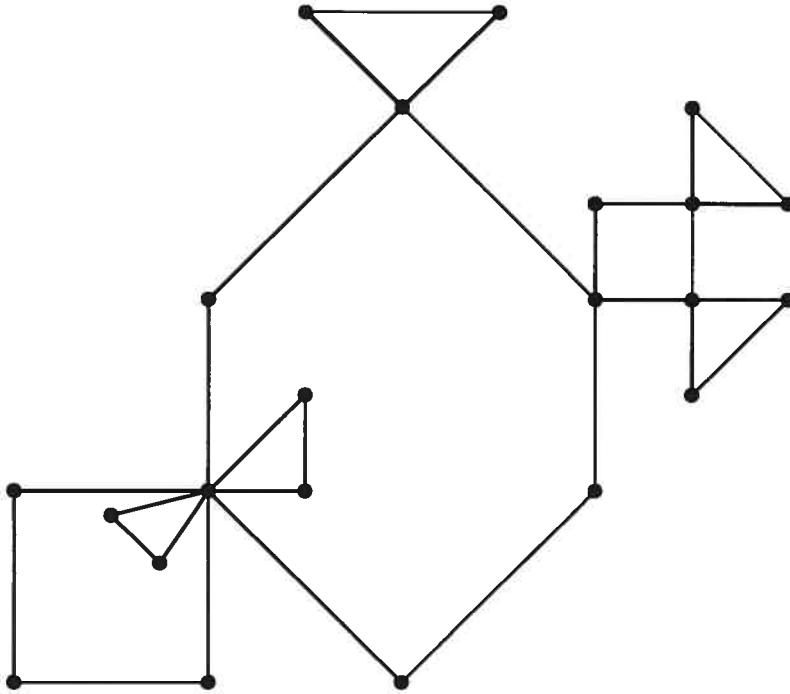


Figure 13 : Arbre de cycles

- On appelle **arbre**, un graphe connexe et sans cycle. Souvent, les arbres sont dits **enracinés**; cela signifie qu'un sommet appelé **racine** est distingué. Un tel graphe s'appelle également **arborescence**. Soit $[x, y]$ une arête d'un arbre enraciné en r avec $d(r, y) = d(r, x) + 1$. Alors y est le **fil** de x et x est le **père** de y . Nous allons considérer dans la suite qu'un arbre est un graphe orienté symétrique fortement connexe et sans cycle.
- Un **arbre binaire** est une arborescence dont chaque sommet a au plus 2 fils.
- Un **arbre k -aire** est une arborescence dont chaque sommet a au plus k fils.

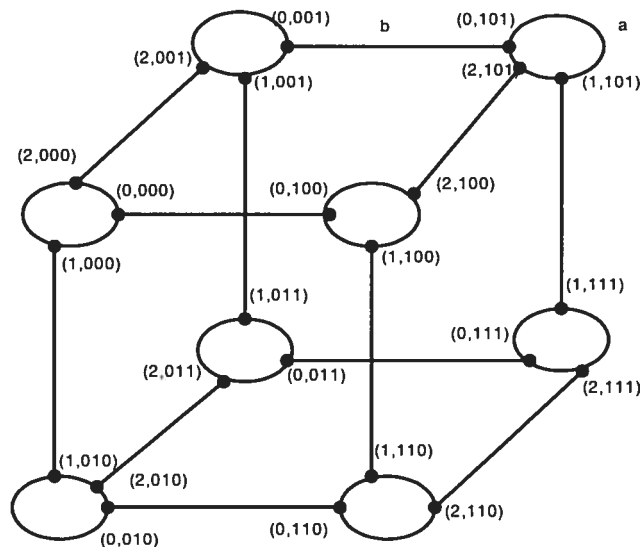


Figure 14 : Graphe cube-connected-cycles $CCC(3)$

- Pour $n \geq 3$, le graphe *Cube-connected-cycles* $CCC(n)$ (voir figure 14) est un graphe obtenu à partir d'un hypercube de dimension n en remplaçant chaque sommet par un cycle $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ de longueur n et en reliant deux cycles par une arête, appelée arête hypercubique, s'ils remplacent des sommets adjacents dans l'hypercube et ceci de manière suivante : on donne comme extrémité aux arêtes de la i -ème dimension les i -èmes sommets de cycles à relier. Les sommets sont notés $(i, x_0 x_1 \dots x_{n-1})$, avec $0 \leq i \leq n-1$ et $x_i = 0$ ou $x_i = 1$. Le sommet $(i, x_0 x_1 \dots x_i \dots x_{n-1})$ est connecté aux sommets $((i-1) \pmod n, x_0 x_1 \dots x_i \dots x_{n-1})$ et $((i+1) \pmod n, x_0 x_1 \dots x_i \dots x_{n-1})$ dans le même cycle, et au sommet $(i, x_0 x_1 \dots \overline{x_i} \dots x_{n-1})$ par une arête hypercubique, où $\overline{x_i}$ désigne le complément binaire de x_i .

1.6 Groupes, symétrie et permutations

Un *groupe fini* est un couple $(\Gamma, *)$, où Γ est un ensemble fini non-vidé et $*$ une application de $\Gamma \times \Gamma$ dans Γ , telle que :

- L'application $*$ est associative : pour tout $a, b, c \in \Gamma$, $(a*b)*c = a*(b*c)$
- Elle admet un élément neutre e tel que pour tout $a \in \Gamma$, $a*e = e*a = a$.
- Tout élément a , admet un inverse a^{-1} pour $*$ tel que : $a*a^{-1} = a^{-1}*a = e$.

L'application $*$ est appelée *opération* du groupe $(\Gamma, *)$ et on parle souvent d'un *produit*. Le cardinal $|\Gamma|$ de l'ensemble Γ est appelé *ordre du groupe* $(\Gamma, *)$. Un ensemble $\Gamma' \subset \Gamma$ engendre le groupe $(\Gamma, *)$ si chaque $a \in \Gamma$ peut être exprimé comme un produit d'éléments de Γ' . L'ensemble Γ' est appelé un *ensemble de générateurs*.

Soit les groupes $(\Gamma, *)$ et (Γ', \bullet) . Un *homomorphisme* de groupes ψ de $(\Gamma, *)$ dans (Γ', \bullet) est une application de Γ vers Γ' telle que pour tout a et b de Γ , $\psi(a*b) = \psi(a) \bullet \psi(b)$.

Un homomorphisme ψ est un *isomorphisme* s'il est bijectif. Si $\Gamma = \Gamma'$, on appelle ψ un *endomorphisme*. Un endomorphisme bijectif est un *automorphisme*.

Soient un groupe Γ et un ensemble E . Une *action de groupe* Γ sur E est une application $\psi : \Gamma \times E \rightarrow E$ où $\psi(a, x)$ est noté $a(x)$, satisfaisant, pour tout a, b appartenant à Γ et x appartenant à E , les deux conditions suivantes :

- $a(b(x)) = ab(x)$
- $e.x = x$

Le groupe Γ agit *transitivement* sur l'ensemble E si pour tout couple (x, x') d'éléments de E , il existe ψ dans Γ tel que $\psi(x) = x'$.

Le groupe Γ agit *régulièrement* sur l'ensemble E si pour tout couple (x, x') d'éléments de E , il existe un unique ψ dans Γ tel que $\psi(x) = x'$.

Soit un graphe $G = (V, E)$.

- Un *automorphisme* de graphe $G = (V, E)$ est une bijection $f : V \rightarrow V$ telle que : $[f(x), f(y)] \in E$ si et seulement si $[x, y] \in E$.

Les automorphismes de G avec l'opération de composition forment le groupe d'automorphisme de G noté $\text{Aut}(G)$.

- Un graphe $G = (V, E)$ est *sommet transitif* si le groupe d'automorphisme de G , $\text{Aut}(G)$, est transitif sur V , c'est-à-dire, si :

Pour tout $x, y \in V$, il existe $\alpha \in \text{Aut}(G)$ tel que $\alpha(x) = y$.

- Un graphe $G = (V, E)$ est *arête transitif* si le groupe d'automorphisme de G , $\text{Aut}(G)$, est transitif sur E , c'est-à-dire, si :

Pour tout $[x, y], [x', y'] \in E$, il existe $\alpha \in \text{Aut}(G)$ tel que $[\alpha(x), \alpha(y)] = [x', y']$.

Remarque :

On pourrait penser que si un graphe G est sommet transitif alors il est arête transitif ou même que si un graphe G est arête transitif alors il est sommet transitif.

Le graphe $\text{CCC}(3)$ est bien sommet transitif mais pas arête transitif. En effet, un sommet peut être envoyé sur n'importe quel sommet mais l'arête a ne peut être envoyée sur l'arête b (voir figure 14). Par contre, le graphe biparti $K_{2,3}$ est arête transitif mais pas sommet transitif. Il est aisé de remarquer que le sommet a ne peut être envoyé sur le sommet b alors qu'une arête peut être envoyée sur n'importe quelle arête (voir figure 15).

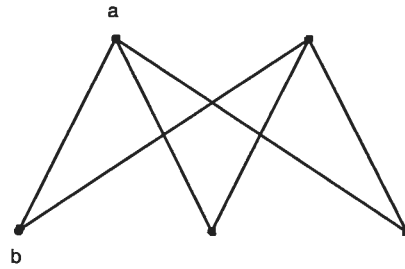


Figure 15 : Graphe biparti $K_{2,3}$

- Soit D le diamètre d'un graphe $G = (V, E)$ et $0 \leq k \leq D$. On dit que G est ***k-distance transitif*** si pour tout $x, y, u, v \in V$ avec $d(x, y) = d(u, v) = k$, il existe un automorphisme α tel que : $\alpha(x) = u$ et $\alpha(y) = v$.
- Un graphe G est ***distance transitif*** s'il est k -distance transitif pour tout $0 \leq k \leq D$.
- Un ***k-arc*** dans un graphe $G = (V, E)$ est une suite $u_0, u_1, u_2, \dots, u_k$ de $k+1$ sommets V tels que $(u_i, u_{i+1}) \in E$ pour $0 \leq i \leq k-1$ et $u_{i-1} \neq u_{i+1}$ pour $1 \leq i \leq k-1$.
- Le graphe G est dit ***k-arc-transitif*** pour $k \geq 1$ s'il existe un automorphisme α tel que pour $0 \leq j \leq k$ on ait :
 $\alpha(\omega_j) = z_j$ où $\omega = \omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$ et $z = z_0, z_1, z_2, \dots, z_k$ sont deux k -arc arbitraires dans G .
- Pour un sommet ou une arête x d'un graphe G , notons $C_i(x)$ le nombre de cycles de longueur i contenant x .
- Un graphe G est ***sommet uniforme*** si et seulement si pour tout élément i de \mathbb{N} et pour tout x, y de V , $C_i(x) = C_i(y)$.
- Soit $e \in E$ et $|V| = n$. Le graphe G est ***arête uniforme*** si $C_k(e) = C_k(e')$ pour tout $e, e' \in E$ et pour tout $3 \leq k \leq n$.

Il est facile de voir que d'une part, tout graphe sommet transitif est sommet uniforme et d'autre part, tout graphe arête uniforme est sommet uniforme. De plus, un graphe arête transitif est arête uniforme.

Voici un résumé schématique des relations entre les différents types de symétrie (d'après Awwad, [Awa99]). Les flèches représentent des implications

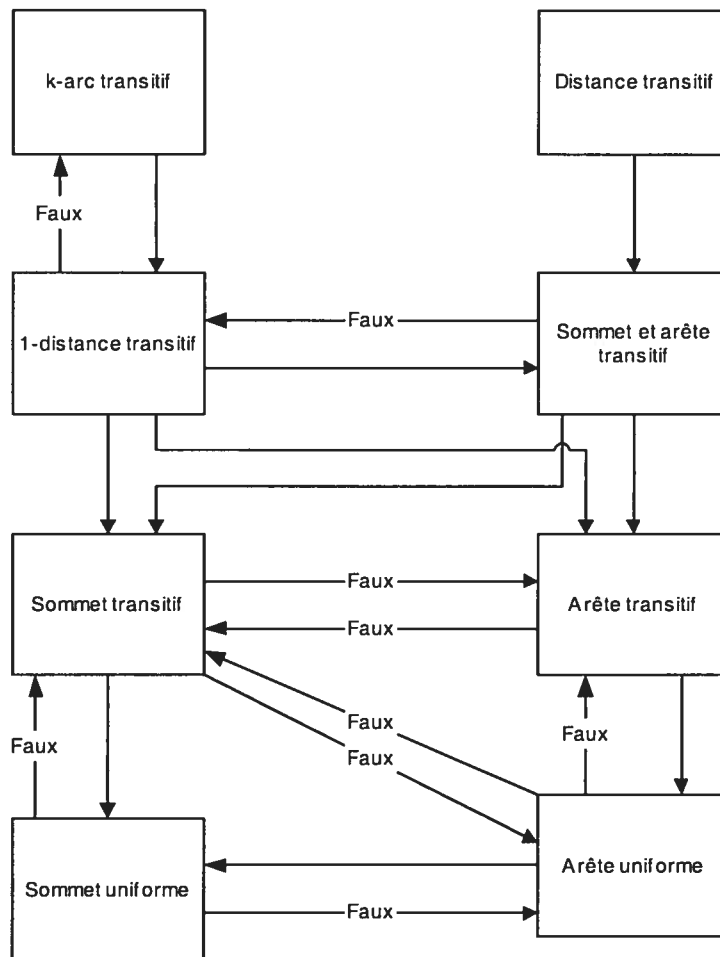


Figure 16 : Relations entre les différents types de symétrie

Soit X un ensemble non vide. Une **permutation** de X est une bijection $\alpha : X \rightarrow X$.

L'ensemble des permutations de X est noté S_X .

Si $X = \{1, 2, \dots, n\}$ alors l'ensemble des permutations de X sera noté S_n et $|S_n| = n!$.

Soit $x \in X$ et $\alpha \in S_X$. Si $\alpha(x) = x$ alors on dit que x est **fixé** par α . Si $\alpha(x) \neq x$ alors on dit que α **déplace** x . L'ensemble avec la loi de composition comme opération forme le **groupe symétrique** sur X . Quand $|X| = n$, on parle du groupe symétrique S_n .

Une permutation α sur l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ est représentée par la suite des images $(\alpha(1), \alpha(2), \dots, \alpha(n))$.

Soit i_1, i_2, \dots, i_r des entiers distincts entre 1 et n . On dit que α est un r -cycle ou un cycle de longueur r si α fixe les $n-r$ autres entiers et si $\alpha(i_1) = i_2, \alpha(i_2) = i_3, \dots, \alpha(i_r) = i_1$. On le note : $\langle i_1, i_2, \dots, i_r \rangle$

Tout cycle de longueur 1 est l'identité.

On appelle **transposition** un cycle de longueur 2. Il échange deux éléments entre eux et fixe les autres.

Il est à observer que le groupe des permutations vérifie les propriétés importantes suivantes :

Théorème 1.1

Toute permutation est soit un cycle, soit un produit de cycles disjoints.

Toute permutation est un produit de transpositions.

Théorème 1.2

Toute permutation $\alpha \neq e = (1)$ dans S_n peut être exprimée comme un produit de cycles disjoints de longueur ≥ 2 . Cette factorisation est unique sauf pour l'ordre des facteurs.

Théorème 1.3

Tout groupe Γ est isomorphe à un sous-groupe de S_Γ .

1.7 Graphes de Cayley

Soient Γ un groupe et S un sous-ensemble de Γ ne contenant pas l'élément neutre.

Un **graphe de Cayley orienté** $\text{Cay}(\Gamma, S)$ est un graphe dont Γ est l'ensemble des sommets et l'ensemble des arcs est constitué des couples (x, xy) pour $x \in \Gamma$ et $y \in S$.

Si pour tout $y \in S$, son inverse $y^{-1} \in S$ (on dit que S est *fermé* pour l'inverse), alors le **graphe de Cayley non-orienté** $\text{Cay}(\Gamma, S)$ est un graphe dont Γ est l'ensemble des sommets et l'ensemble des arêtes est constitué des paires $[x, y]$ telles que $x^{-1}y \in S$.

Le théorème suivant concerne les graphes de Cayley orientés symétriques. Cette propriété des graphes de Cayley sera utilisée plus tard pour prouver d'autres théorèmes.

Théorème 1.4

Un graphe de Cayley est un graphe simple régulier de degré entrant et de degré sortant égal au nombre d'éléments de S . Le graphe $\text{Cay}(\Gamma, S)$ est fortement connexe si et seulement si S génère Γ .

Théorème 1.5

Tout graphe de Cayley est sommet-transitif.

Il faut néanmoins préciser que tout graphe sommet-transitif n'est pas nécessairement un graphe de Cayley.

1.8 Problématique

Dans les réseaux tout-optique, l'information est acheminée de sa source à sa destination grâce à l'utilisation des ressources optiques telles que les commutateurs et les multiplexeurs.

Au départ de la transmission, les signaux électriques modulent des signaux optiques, attribués à des longueurs d'ondes précises. Ces dernières sont multiplexées (c'est-à-dire réunies) pour être véhiculées sur une fibre. Par la suite, elles sont démultiplexées (c'est-à-dire séparées), puis à nouveau, transformées en signaux électriques, pour être utilisées par les appareils électroniques situés en bout de ligne.

La bande passante désigne la capacité à faire circuler de l'information numérique sur un lien d'une fibre optique. Ainsi, en divisant chaque lien en plusieurs canaux optiques et en affectant une longueur d'onde particulière par canal de transmission, on peut transmettre simultanément plusieurs messages sur une même fibre mais sur de différentes longueurs d'ondes.

Les longueurs d'ondes sont espacées de 1 nanomètre pour qu'il n'y ait pas de mélange des données. Le spectre des fréquences utilisables sur une fibre étant environ de 1,5 micromètre, cela nous donne approximativement 1500 longueurs d'ondes différentes sur une même fibre.

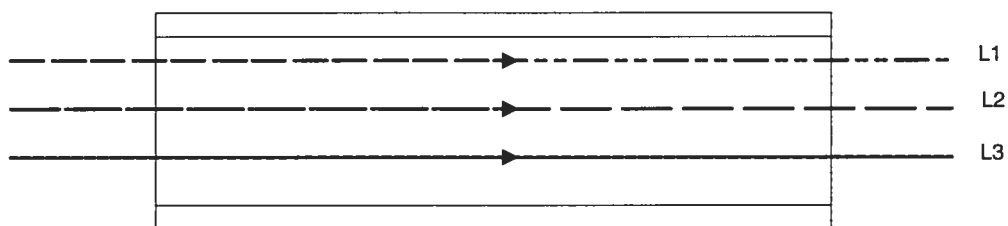


Figure 17 : Fibre optique

Le problème général, dans un réseau WDM tout-optique, consiste à satisfaire simultanément un ensemble de requêtes de connexion appelé *instances* de communication. Une *requête* est une paire de nœuds (x, y) correspondant à un message envoyé par x à y . Pour chaque requête, il faut définir un chemin dans le réseau et une longueur d'onde de telle façon que deux chemins partageant un arc aient des longueurs d'ondes différentes.

Le but recherché est de minimiser l'utilisation des ressources optiques, c'est-à-dire le nombre total de longueurs d'ondes permettant de satisfaire l'instance donnée. En effet, dans les réseaux WDM tout-optique, d'une part, le nombre de longueurs d'ondes disponible est fortement limité; d'autre part le coût et la complexité des nœuds de commutation et des multiplexeurs augmentent en fonction du nombre de longueurs d'ondes à traiter. Il s'avère donc important de chercher à minimiser l'utilisation de ces ressources optiques.

Soit $G = (V, A)$ un graphe orienté.

- Une *instance* de requêtes est un ensemble de couples de sommets (à connecter deux à deux) : $I = \{ (x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k) \}$, $x_i, y_i \in V(G)$.
- L'instance I_A de l'*échange total* est : $I_A = \{ (x, y) \mid x \in V(G), y \in V(G), x \neq y \}$
- Pour $x \in V(G)$, l'instance I_x de *diffusion* est : $I_x = \{ (x, y) \mid y \in V(G), x \neq y \}$. Cette instance est souvent notée I_0 dans la littérature, mais ceci n'a de sens que dans le cas d'un graphe transitif puisque I_x dépend de x .
- Une instance de *multicast* est un sous-ensemble de l'ensemble des instances I_x .
- Une *k-relation* est une instance I_k dans laquelle chaque nœud est une source et une destination d'au plus k requêtes.

- Une **1-relation** est une *instance de permutation*. Notons que l'instance I_A est une (N-1)-relation.
- Un **routage** R dans G est un ensemble de chemins, un menant de x à y pour chaque paire (x, y) . Le chemin dans R de x à y est noté $R(x, y)$. Si $R(x, y) = xx_1 \dots x_e y$ et $R(y, z) = yy_1 \dots y_k z$, alors on définit $R(x, y)R(y, z)$ comme étant : $R(x, y)R(y, z) = xx_1 \dots x_e yy_1 \dots y_k z$.
- Un **routage** R pour une instance I de requêtes dans G est un ensemble de chemins reliant les couples de sommets appartenant à l'instance I : $R = \{R(x, y), (x, y) \in I\}$. Au besoin, on le notera R_I .
- Un routage R dans G est **cohérent** si quel que soit z sur $R(x, y)$, $R(x, y) = R(x, z)R(z, x)$.
- Un routage R dans G est **symétrique** si $R(y, x)$ est l'inverse de $R(x, y)$, c'est-à-dire, $R(y, x) = x_e \dots x_1 x_0$ si $R(x, y) = x_0 \dots x_e$.

Remarque :

On désignera par *lien*, les arcs ou les arêtes d'un graphe orienté ou non. Dans le but d'alléger le texte, le graphe G , qu'il soit orienté ou non, sera noté G . Cependant, pour pouvoir faire la différence entre les paramètres des graphes orientés et ceux des graphes non-orientés, nous mettrons une flèche sur le graphe orienté. Par exemple $\omega(\vec{G}, I)$ désignera un paramètre du graphe G orienté tandis que $\omega(G, I)$ désignera le même paramètre pour le graphe G non-orienté.

1.8.1 Problème du routage optique

Le **problème du routage optique** dans un graphe G , encore appelé problème (G, I) , consiste à trouver un routage R pour une instance I de requêtes et à attribuer une

longueur d'ondes à chaque requête pour que deux chemins partageant le même lien aient deux longueurs d'ondes différentes.

La solution optimale, notée $\omega(\vec{G}, I)$, de ce problème est le *nombre minimum de longueurs d'ondes* de tous les routages de G pour I .

Le *graphe des conflits* G_R (dans la littérature, on le note G_c mais puisqu'il dépend de R , nous préférons notre notation) associé à un routage R dans un graphe G est le graphe non-orienté dont les sommets sont les chemins de R , deux chemins étant reliés par une arête s'ils passent par un même lien dans G .

On note $\omega(\vec{G}, I, R)$, le nombre minimum de longueurs d'ondes pour le routage R . Ainsi: $\omega(\vec{G}, I) = \min_R \omega(\vec{G}, I, R)$. Le nombre minimum de longueurs d'ondes pour le routage R est égal au nombre chromatique du graphe de conflits G_R d'un routage R réalisant une instance I dans un graphe orienté G .

Observation 1.1

Pour toute instance I d'un graphe G , on a :

$$\omega(\vec{G}, I) \leq \omega(G, I)$$

On pourrait croire que pour tout graphe non-orienté G et toute instance de requêtes I , $\omega(G, I) \leq 2\omega(\vec{G}, I)$. Ceci est faux comme le montre l'exemple de la figure 18.

Soit le graphe $G = (V, E)$ en 3-étoiles où $V(G) = \{0, 1, 2, 3\}$ et $E(G) = \{\{0, 1\}, \{0, 2\}, \{0, 3\}\}$. Soit R le routage pour l'instance I telle que $I = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$.

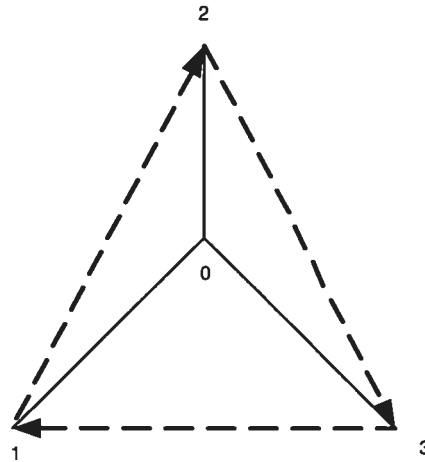


Figure 18 : Réseau G en 3-étoiles

On a : $\omega(\vec{G}, I) = 1$ et $\omega(G, I) = 3$.

1.8.2 Problème de la charge π

Le problème de la **charge sur les liens** dans un graphe G , qu'on appellera le problème de charge π , consiste à minimiser le nombre maximum de chemins d'un routage R qui utilisent un même lien de G en satisfaisant à l'instance de requêtes I . Trouver un routage qui réalise ce minimum est aussi important.

La **charge d'un lien** α pour un routage R réalisant une instance I dans un graphe G orienté désigne le nombre de chemins de R qui utilisent ce lien. On le note :

$$\pi(\vec{G}, I, R, \alpha).$$

La **charge sur les liens** du routage R , encore appelée **arête-indice de transmission** du routage R , est alors définie comme la charge maximale d'un lien pour R . C'est le nombre maximum de chemins de R qui utilisent le même lien de G . On le note :

$$\pi(\vec{G}, I, R).$$

La solution optimale, notée $\pi(\vec{G}, I)$, de ce problème de charge π , est le minimum sur tous les routage R de G des nombres maximums de chemins de R qui utilisent un

même lien de G . Soit $\pi(\vec{G}, I, R) = \max_{\alpha} \pi(\vec{G}, I, R, \alpha)$. La charge $\pi(\vec{G}, I)$ du graphe G pour l'instance de requêtes I est définie par $\pi(\vec{G}, I) = \min_R \pi(\vec{G}, I, R)$. Bien sûr, en pratique, la solution optimale sera accompagnée d'un routage qui la réalise.

Un routage est *uniforme sur les arcs* si pour toute paire d'arcs α, α' de $A(G)$, on a : $\pi(\vec{G}, I, R, \alpha) = \pi(\vec{G}, I, R, \alpha')$. Ce routage est encore appelé *routage arc-uniforme*.

1.8.3 Problème de la charge ξ

Le problème de la *charge sur les sommets* dans un graphe G , encore appelé le problème de charge ξ , consiste à minimiser le nombre maximum de chemins d'un routage R qui utilisent un même sommet de G en satisfaisant à l'instance de requêtes I . Trouver un routage réalisant ce minimum est également important.

La *charge d'un sommet* x pour un routage R réalisant une instance I dans un graphe orienté G est le nombre de chemins de R qui passent par ce sommet. On le note : $\xi(\vec{G}, I, R, x)$.

La *charge sur les sommets* du routage R , encore appelée *sommet-indice de transmission* du routage R , est alors définie comme la charge maximale d'un sommet pour R . C'est le nombre maximum de chemins de R qui utilisent le même sommet de G . On le note : $\xi(\vec{G}, I, R)$.

La solution optimale, notée $\xi(\vec{G}, I)$, de ce problème de charge ξ , est le minimum des nombres maximums de chemins de R qui passent par un même sommet de G . Soit $\xi(\vec{G}, I, R) = \max_x \xi(\vec{G}, I, R, x)$. La charge $\xi(\vec{G}, I)$ du graphe G pour l'instance de requêtes I est définie par $\xi(\vec{G}, I) = \min_R \xi(\vec{G}, I, R)$. En pratique, la solution optimale sera évidemment accompagnée d'un routage la réalisant.

Un routage est *uniforme sur les sommets* si pour tout sommet x, x' de $V(G)$, on a:
 $\xi(\vec{G}, I, R, x) = \xi(\vec{G}, I, R, x')$. On peut aussi l'appeler *routage sommet-uniforme*.

Remarque :

Dans la suite, quand nous utiliserons le terme *routage uniforme*, nous allons considérer le routage uniforme sur les arcs ou les arêtes. Quand il s'agira d'un routage uniforme sur les sommets, nous allons le préciser.

CHAPITRE 2

Relations entre les paramètres

2.1 Optimisation et approximation

Nous présentons dans cette section, la complexité du problème de routage optique dans un graphe G pour une instance I de requêtes où I est soit une instance quelconque, soit une permutation, soit une k -relation.

La complexité du problème consistant à trouver un routage utilisant un nombre minimum de longueurs d'ondes peut passer de temps polynomial à NP-complet ou à NP-difficile; tout ceci dépend de l'instance de requêtes utilisée et du type de graphe dans lequel le routage est réalisé.

2.1.1 Instances quelconques

Dans [EJ96], Erlebach et Jansen ont montré que d'une part, trouver un routage utilisant un nombre minimum de longueurs d'ondes et, d'autre part, déterminer

$\omega(G, I)$ pour un graphe orienté G où G est un arbre ou un cycle orienté symétrique et une instance quelconque est NP-complet.

Par la suite, dans [EJ97], ils ont obtenu des résultats similaires sur les grilles et les arbres binaires. Le résultat qui suit concerne les arbres binaires orientés symétriques.

Théorème 2.1 (Erlebach et Jansen, [EJ97])

Soit un arbre binaire orienté symétrique T et une instance de requêtes I . Le problème de routage (T, I) « Existe-t-il un routage R tel que $\omega(T, R, I)$ ne dépasse pas 3 ? » est NP-complet.

De leur côté, Even, Itai et Shamir dans [EIS76] ont prouvé que le problème de routage (G, I) , consistant à trouver un routage pour l'instance I de manière à ne pas dépasser la charge k sur les liens de G , est NP-complet pour les graphes orientés ou non.

Par ailleurs, Jarry dans [Jar99] a démontré que le problème de routage optique (G, I) est polynomial si le nombre de requêtes est borné et si G est un graphe orienté symétrique. Cependant, il faut noter que ces algorithmes polynomiaux sont quasiment impraticables compte tenu du fait que les constantes cachées sont trop grandes.

2.1.2 Permutations et K-relations

Dans le cas des permutations et des k -relations, des résultats ont été obtenus en traitant les graphes orientés symétriques.

Pour router une instance de requêtes, il est important de minimiser à la fois la charge et la longueur des chemins. Leighon et Rao dans [LR88], ont prouvé qu'on peut router une instance de requêtes dans un graphe orienté symétrique de degré borné en temps polynomial.

Théorème 2.2 (Leighton et Rao, [LR88])

Pour tout graphe orienté symétrique G de degré borné et d'arc-d'expansion β , et pour toute instance de permutation I_1 , on peut obtenir en temps polynomial un routage R réalisant I_1 tel que :

$$\pi(\vec{G}, I_1, R) \in O\left(\frac{\log N}{\beta}\right) \text{ et } L(R) \in O\left(\frac{\log N}{\beta}\right)$$

où $L(R)$ est la longueur maximale des chemins de R .

Dans le même ordre d'idées, Aumann et Rabani dans [AR95], en se basant sur le fait qu'une k -relation peut être décomposée en k permutations, ont obtenu une borne supérieure qui constitue une borne approximative asymptotique du problème de routage optique pour les k -relations dans les pires cas.

Corollaire 2.1 (Aumann et Rabani, [AR95])

Pour tout graphe orienté symétrique G de degré borné et d'arc-expansion β , et pour toute k -relation I_k , le problème de routage optique (\vec{G}, I_k) peut être résolu en temps polynomial en utilisant $O\left(k \frac{\log^2 N}{\beta^2}\right)$ longueurs d'ondes.

2.2 Relation entre π et ω

Nous examinons les relations entre la charge $\pi(G, I)$ d'un graphe G et le nombre minimum de longueurs d'ondes $\omega(G, I)$ dans le cas où I est une instance quelconque, un multicast et un échange total. Dans chaque cas, nous présentons les résultats connus dans la littérature.

2.2.1 Instances quelconques

Proposition 2.1

Pour toute instance I et tout réseau G , on a : $\omega(\vec{G}, I) \geq \pi(\vec{G}, I)$

En effet, si on a $\pi(\vec{G}, I)$ chemins qui traversent un même arc alors ils doivent avoir des longueurs d'ondes différentes.

Dans certains cas, on a : $\omega(\vec{G}, I) > \pi(\vec{G}, I)$

Soit le graphe orienté symétrique à 6 sommets (Voir figure 19). Soit R le routage pour l'instance $I = \{(0, 2), (1, 3), (4, 3), (4, 5), (0, 5)\}$. Soit G_R son graphe de conflit associé.

Puisque le graphe de conflit est un cycle de longueur impaire, il faut utiliser 3 couleurs pour le colorier. Donc on a :

$\pi(\vec{G}, I) = 2$ mais $\omega(\vec{G}, I) = 3$.

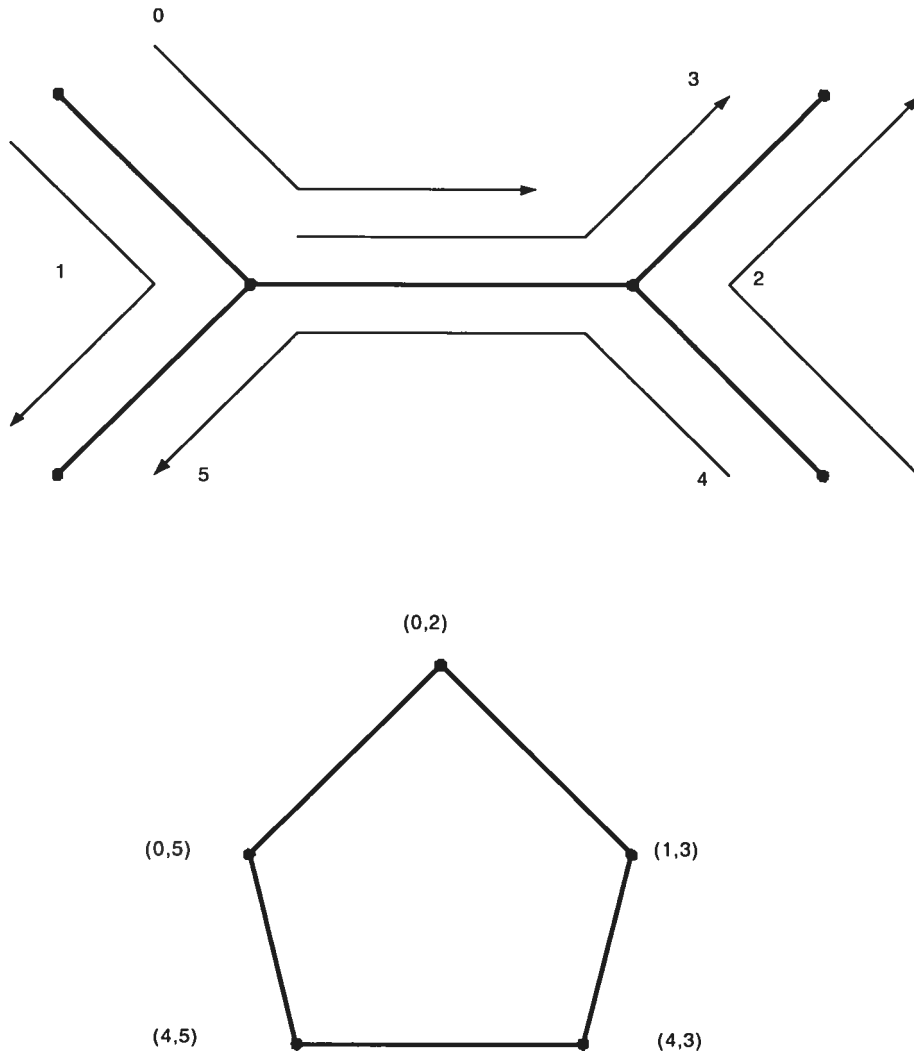


Figure 19 : Routage dans un arbre et son graphe de conflit associé

Dans [ABNC+94], en considérant le degré maximal du graphe des conflits, Aggarwal et al ont donné un majorant du nombre de longueurs d'ondes en fonction de la charge. Il est à noter que ce théorème tient également dans le modèle orienté.

Théorème 2.3 (Aggarwal et al, [ABNC+94])

Soit G un graphe, $m = |A(G)|$ et R un routage réalisant une instance de requêtes I .

Soit L la longueur d'un plus long chemin dans R . Alors on a :

$$\omega(\vec{G}, I) \leq \pi(\vec{G}, I) \min\{L, 2(m)^{1/2}\} + 1$$

Preuve

Soit r , un chemin de longueur L . Chaque arc de ce chemin a une charge au plus égale à $\pi(\vec{G}, I)$. Alors le sommet r dans le graphe des conflits est adjacent à au plus $L\pi(\vec{G}, I)$ sommets. Donc le degré maximal du graphe des conflits est $\Delta \leq L\pi(\vec{G}, I)$. On en déduit alors que : $\omega(\vec{G}, I) \leq L\pi(\vec{G}, I) + 1$. (i)

Supposons qu'il y ait n chemins de longueur supérieure ou égale à $(m)^{1/2}$, où $n > (m)^{1/2} \pi(\vec{G}, I)$. Ceci induirait une charge moyenne sur les arcs d'au moins $n \frac{m^{1/2}}{m} \pi(\vec{G}, I) > \pi(\vec{G}, I)$. Ce qui est absurde. Donc on a au plus $(m)^{1/2} \pi(\vec{G}, I)$ chemins de longueur supérieure ou égale à $(m)^{1/2}$.

On attribue une couleur différente à chacun de ces $(m)^{1/2} \pi(\vec{G}, I)$ chemins. Les chemins restants sont de longueur inférieure à $(m)^{1/2}$ et peuvent donc être coloriés en utilisant au plus $(m)^{1/2} \pi(\vec{G}, I) + 1$ couleurs. (ii)

De (i) et (ii), on conclut que : $\omega(\vec{G}, I) \leq \pi(\vec{G}, I) \min\{L, 2(m)^{1/2}\} + 1$.

□

Beauquier a donné une construction d'une pseudo-grille orientée non symétrique (voir figure 20) qui permet de prouver qu'on ne peut pas toujours avoir un routage R réalisant une instance I dans un graphe orienté tel que d'une part, le nombre minimum de longueurs d'ondes de tous les routages de G est égal au nombre minimum de longueurs d'ondes pour le routage R et, d'autre part, la charge sur les arcs du routage R est égale à la charge du graphe G .

Théorème 2.4 (Beauquier, [Beau00])

Il n'existe pas toujours de routage R réalisant une instance I dans un graphe orienté G , tel que :

$$\pi(\vec{G}, I, R) = \pi(\vec{G}, I) \text{ et } \omega(\vec{G}, I, R) = \omega(\vec{G}, I)$$

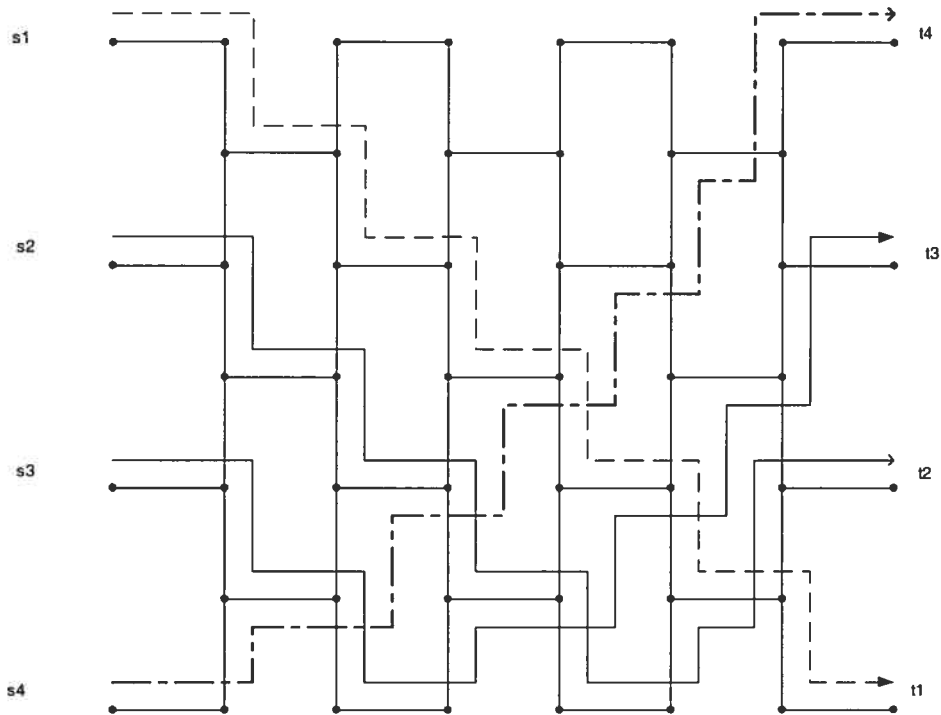


Figure 20 : Pseudo-grille orientée non symétrique

Ce résultat indique clairement qu'on ne peut pas toujours trouver dans un graphe orienté G , un routage R réalisant une instance de requêtes I de charge minimale $\pi(\vec{G}, I, R) = \pi(\vec{G}, I)$ qui soit colorable avec $\omega(\vec{G}, I)$ couleurs.

2.2.2 Permutations et K-relations

Rappelons qu'une k -relation est une instance I_k dans laquelle chaque nœud est une source et une destination d'au plus k requêtes. Et une 1 -relation est une *instance de permutation*. Des résultats pertinents, concernant les relations entre la charge $\pi(G, I)$ d'un graphe G et le nombre minimum de longueurs d'ondes $\omega(G, I)$ dans le cas où I est une permutation, ont été obtenus par Pankaj.

Dans [Pan92], Pankaj a pu établir un lien entre la charge et le nombre de longueurs d'ondes d'un graphe orienté symétrique et sommet-transitif dans le cas d'une instance de permutation. Il détermine également l'existence d'une borne inférieure

de la charge du graphe qui est égale au rapport du diamètre du graphe par son degré maximum.

Proposition 2.3 (Pankaj, [Pan92])

Pour tout graphe orienté symétrique et sommet-transitif G de diamètre D et de degré maximum Δ , il existe une instance de permutation I_1 telle que :

$$\omega(\vec{G}, I_1) \geq \pi(\vec{G}, I_1) \geq \frac{D}{\Delta}$$

Ainsi, pour le cycle C_N , la borne inférieure de la charge est $\frac{D}{\Delta} = \frac{N}{4}$ si N est pair et

$\frac{D}{\Delta} = \frac{N-1}{4}$ sinon. (En effet, $\Delta = 2$; $D = \frac{N}{2}$ si N est pair et $D = \frac{N-1}{2}$ sinon). Par

conséquent, cette borne et N varient dans le même sens.

Pour le graphe complet K_N , la borne inférieure de la charge est $\frac{D}{\Delta} = \frac{1}{N-1}$. (En

effet, $\Delta = 1$; $D = \frac{1}{N-1}$). Donc, la borne et N varient en sens contraires.

Dans le cas de l'hypercube H_N où $N=2^n$, la borne inférieure de la charge est

$\frac{D}{\Delta} = \frac{n}{n} = 1$. On observe alors que cette borne ne peut être améliorée.

Le deuxième résultat [PG95], obtenu conjointement avec Gallager, montre l'existence d'une borne inférieure sur la charge; ceci permet de router une instance de permutation dans un graphe orienté.

Proposition 2.2 (Pankaj et Gallager, [PG95])

Pour tout graphe orienté G de degrés maximum sortant et entrant Δ^+ , $\Delta^- \geq 2$, avec $\Delta = \max \{ \Delta^+, \Delta^- \}$ et $\delta = \min \{ \Delta^+, \Delta^- \}$, il existe une instance de permutation I telle

$$\text{que : } \omega(\vec{G}, I) \geq \pi(\vec{G}, I) \geq \frac{\lfloor \log_{\Delta}(N-1) \rfloor}{\delta}$$

Il a été démontré, en utilisant le théorème de König-Hall [LP86] que d'une part on peut partitionner une k -relation en k -instances de permutations et d'autre part que l'union de k instances de permutation donne une k -relation. Ainsi, les deux derniers résultats [Pan92] et [PG95] tiennent également pour les k -relations en multipliant chacune des bornes inférieures $\frac{D}{\Delta}$ et $\frac{\lfloor \log_{\Delta}(N-1) \rfloor}{\delta}$ par k .

2.2.3 Diffusion

La diffusion, encore appelé *one-to-all* ou *broadcasting*, est une opération qui consiste à envoyer un message à tous les sommets du graphe à partir d'un sommet initiateur unique. Ainsi, si $|V(G)| = N$, alors la diffusion permet de router et d'attribuer des longueurs d'ondes à $N-1$ instances de requêtes.

$$I_x = \{(x_x, y) \mid y \in V(G), x_x \neq y\} \text{ où } x_x \in V(G)$$

Bermond et al. dans [BGP+96] proposent un algorithme efficace pour résoudre le problème (G, I) avec $\omega(G, I)$ longueurs d'ondes pour toute instance de diffusion I_x dans tout graphe G . De plus, ils prouvent l'existence d'une borne inférieure de la charge du graphe.

Proposition 2.4 (Bermond et al., [BGP+96])

Pour tout graphe orienté G k -arc-connexe et pour une instance de diffusion I_x à partir d'un sommet x de degré sortant k , on a :

$$\varpi(\vec{G}, I_x) = \pi(\vec{G}, I_x) = \lceil \frac{N-1}{k} \rceil$$

2.2.4 Multicast

Le multicast consiste, pour un sommet donné, à diffuser son information à un ensemble précis de sommets.

Beauquier, Hell et Pérennes dans [BHP98] ont prouvé qu'il existe un algorithme qui permet de router une instance de multicast dans un graphe orienté en temps polynomial. Par ailleurs, ils ont conclu que la charge du graphe $\pi(\vec{G}, I_M)$ est égale au nombre minimum de longueurs d'ondes $\omega(\vec{G}, I_M)$.

Théorème 2.5 (Beauquier, Hell et Pérennes, [BHP98])

Pour tout graphe orienté G et toute instance de multicast I_M , le problème de routage optique (G, I_M) peut être résolu de façon optimale en temps polynomial, et de plus, on a :

$$\omega(\vec{G}, I_M) = \pi(\vec{G}, I_M)$$

2.2.5 Échange total

L'échange total, aussi appelé *all-to-all* ou encore *gossiping*, consiste à échanger l'information contenue dans chaque sommet, de manière à ce que tous les sommets soient au courant de toutes les informations des sommets du graphe.

L'échange total peut être considéré comme une diffusion simultanée à partir de tous les sommets.

$$I_A = \{(x, y) \mid x \in V(G), y \in V(G), x \neq y\}$$

Les résultats ci-après établissent l'égalité entre la charge et le nombre minimum de longueurs d'ondes pour l'échange total dans le cas des cycles, de l'hypercube, d'une grille carrée, d'une grille torique carrée et d'un arbre.

Bermond et al. [BGP+96] d'une part et Wilfong [Wil96] d'autre part ont résolu le cas des cycles grâce au résultat suivant :

Théorème 2.6 (Bermond et al., [BGP+96])

Pour tout cycle orienté symétrique C_N et toute instance de l'échange total I_A , on a :

$$\omega(\vec{C}_N, I_A) = \pi(\vec{C}_N, I_A) = \left\lceil \frac{\lfloor N_2 \rfloor - 4}{2} \right\rceil$$

Pankaj dans [Pan92] d'un côté et Bermond et al. dans [BGP+96] de l'autre, ont traité le cas de l'hypercube.

Théorème 2.7 (Pankaj, [Pan92])

Dans tout hypercube orienté symétrique H_n , on a :

$$\omega(\vec{H}_n, I_A) = \pi(\vec{H}_n, I_A) = 2^{n-1}$$

Les trois prochains résultats obtenus dans [Beau99], concernent la somme cartésienne de n graphes complets, la grille torique carrée et la grille carrée. La structure de ces réseaux étant régulière, il a été possible de démontrer de façon algébrique l'égalité entre la charge du graphe π et le nombre minimum de longueurs d'ondes ω .

Théorème 2.8 (Beauquier, [Beau99])

Soient n_1, n_2, \dots, n_d des entiers tels que $2 \leq n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_d$. Soit $K(n_1, n_2, \dots, n_d)$ la somme cartésienne des d graphes complets K_{n_i} ($1 \leq i \leq d$) orientés symétriques.

Alors on a :

$$\omega(\vec{K}(n_1, n_2, \dots, n_d), I_A) = \pi(\vec{K}(n_1, n_2, \dots, n_d), I_A) = \prod_{i=1}^d n_i$$

Dans le cas de la grille torique carrée et de la grille carrée, les résultats obtenus dépendent de la parité de n .

Théorème 2.9 (Beauquier, [Beau99])

Dans toute grille torique carrée C_n^d de dimension d , de côté n et d'ordre $N = n^d$, on

a :

$$\omega(\vec{C}_n^d, I_A) = \pi(\vec{C}_n^d, I_A) = \frac{n^{d-1}}{8} \quad , \text{ si } n \text{ est pair, et sinon,}$$

$$\pi(\vec{C}_n, I_A) = (n^2 - 1) \frac{n^{d-1}}{8} \leq \varpi(\vec{C}_n, I_A) \leq \frac{(n+1)^{d+1}}{8} = \varpi(\vec{C}_{n+1}, I_A)$$

Théorème 2.10 (Beauquier, [Beau99])

Dans toute grille carrée P_n^d de dimension d , de côté n et d'ordre $N = n^d$, on a :

$$\varpi(\vec{P}_n, I_A) = \pi(\vec{P}_n, I_A) = \frac{n^{d+1}}{4}, \text{ si } n \text{ est pair, et sinon,}$$

$$\pi(\vec{P}_n, I_A) = (n^2 - 1) \frac{n^{d-1}}{4} \leq \varpi(\vec{P}_n, I_A) \leq \frac{(n+1)^{d+1}}{4} = \varpi(\vec{P}_{n+1}, I_A)$$

Beauquier, Pérennes et Tòth dans [BPT99] ont abordé le cas des arbres de cycles. Il est à préciser que cette étude traite des graphes munis d'une pondération sur les sommets et donc d'un échange total pondéré.

Théorème 2.11 (Beauquier, Pérennes et Tòth, [BPT99])

Pour tout arbre de cycles pondérés τ et toute instance de l'échange total I_A , on a :

$$\omega(\vec{\tau}, I_A) = \pi(\vec{\tau}, I_A)$$

2.3 Relation entre π et ξ

Dans cette section, nous allons considérer les graphes de Cayley. En effet, ce sont des réseaux sommets-transitifs connus pour leurs propriétés du point de vue du routage : une forte connectivité, une haute tolérance aux pannes et de bons algorithmes de routage. Avant d'aborder les relations entre la charge π sur les arcs et la charge ξ sur les sommets d'un graphe, nous présenterons les liens entre ces deux types de charge et les propriétés d'un routage dans un graphe de Cayley.

Dans [HMOS94], Heydemann, Meyer, Opatrny et Sotteau ont prouvé l'existence d'un routage de plus court chemin cohérent et uniforme sur les sommets dans un graphe de Cayley orienté symétrique :

Théorème 2.12 (Heydemann, Meyer, Opatrny et Sotteau, [HMOS94])

Soit $G = \text{Cay}(\Gamma, S)$ un graphe de Cayley orienté symétrique. Alors G contient un routage de plus courts chemins cohérent et uniforme sur les sommets tel que pour

$$\text{tout } u \in V, \xi(\vec{G}, R, u) = \left(\sum_{\substack{v \in V \\ u \neq v}} d(u, v) \right) - (n - 1)$$

Heydemann, Meyer et Sotteau dans [HMS89], ont pu établir un lien entre la charge sur les arcs et les propriétés d'un routage dans un graphe de Cayley orienté symétrique.

Théorème 2.13 (Heydemann, Meyer et Sotteau, [HMS89])

Soit $G = \text{Cay}(\Gamma, S)$ un graphe de Cayley orienté symétrique, soit $u \in V$. Alors on a :

$$\pi(\vec{G}, I_A) = \frac{1}{|A(G)|} * \sum_{\substack{v \in V \\ u \neq v}} d(u, v) \text{ si et seulement s'il existe un routage de plus courts}$$

chemins cohérent et uniforme dans G pour l'instance de l'échange total I_A .

Il est facile de voir que $\pi(\vec{G}, I_A) \geq \frac{1}{|A(G)|} * \min\left(\sum_{\substack{v \in V \\ u \neq v}} d(u, v)\right)$. Cette borne est atteinte

pour les graphes de Cayley grâce aux théorèmes 2.12 et 2.13. Par ailleurs, étant donné que les graphes de Cayley sont sommet-transitifs, Heydemann, Meyer et Sotteau ([HMS89]) ont proposé la conjecture suivante :

Conjecture :

Tout graphe sommet-transitif et connexe possède un routage uniforme de plus courts chemins.

Cependant, de récents résultats rejettent cette conjecture. En effet, Shim, Širáň et Žerovnik dans [SSZ00], ont construit une infinité de contre-exemples permettant de la réfuter.

Dans [CCRS87], Chung, Coffman, Reiman et Simon se sont penchés sur la relation entre la charge sur les sommets et les propriétés d'un routage dans un graphe.

Théorème 2.14 (Chung, Coffman, Reiman et Simon, [CCRS87])

Soit $G = \text{Cay}(\Gamma, S)$ un graphe de Cayley orienté symétrique, R un routage dans G pour l'instance de l'échange total I_A et $u \in V$. Alors on a :

$$\xi(\vec{G}, R, u) = \left(\sum_{\substack{v \in V \\ u \neq v}} d(u, v) \right) - (n-1) \text{ si et seulement si } R \text{ est un routage de plus courts}$$

chemins cohérent et uniforme sur les sommets.

À partir du théorème 2.13, nous concluons ce qui suit :

Corollaire 2.2

Soit $G = \text{Cay}(\Gamma, S)$ un graphe de Cayley orienté symétrique et soit $u \in V$ tel que

$$\pi(\vec{G}, I_A) = \frac{1}{|A(G)|} * \sum_{\substack{v \in V \\ u \neq v}} d(u, v). \text{ Alors il existe dans } G, \text{ un routage } R \text{ uniforme sur}$$

les sommets pour l'instance de l'échange total I_A .

Preuve

De l'hypothèse, il s'ensuit qu'il existe un routage R de plus courts chemins uniforme et cohérent sur les arcs. Voyons si R est uniforme sur les sommets. Soit Δ et N respectivement le degré et le nombre de sommets de G . Puisque G est un graphe de Cayley, il est transitif et, par conséquent, les degrés entrant et sortant sont tous égaux. Soit le degré commun Δ . Considérons un sommet x quelconque de G . Puisque R est uniforme et cohérent, on peut calculer le nombre total de chemins qui passent par x dans G ; on obtient $2\Delta\pi(\vec{G}, R, I_A)$. Parmi ces chemins, le nombre de

ceux qui ne contribuent pas à la charge du sommet x (on a $N-1$ chemins qui *commencent* et $N-1$ chemins qui *se terminent* au sommet x) est $2(N-1)$. Par conséquent, la charge sur chaque sommet de G est : $2\Delta\pi(\vec{G}, R, I_A) - 2(N-1)$. Donc R est bien un routage de plus courts chemins cohérent et uniforme sur les sommets. \square

Remarque :

La charge sur les sommets se calcule différemment lorsque le graphe de Cayley

$G = \text{Cay}(\Gamma, S)$ est non orienté. En effet :

Soit Δ le degré de G . Soit $|V| = N$.

Soit un sommet x quelconque de G . En calculant le nombre total de chemins qui passent dans le graphe G , on obtient $\Delta\pi(G, R, I_A)$. Parmi ces chemins, le nombre de ceux qui ne contribuent pas à la charge du sommet x est $2(N-1)$.

Par conséquent, la charge sur les sommets est de : $\Delta\pi(G, R, I_A) - 2(N-1)$.

Ce calcul est valable en particulier pour les routages décrits par Heydemann, Meyer et Sotteau dans [HMS89].

Cependant, on pourrait penser que, pour n'importe quel routage R dans un graphe, si R est uniforme sur les sommets alors R est uniforme sur les arcs; ce n'est malheureusement pas le cas.

En effet, prenons l'exemple du graphe $K_2 \square K_3$.

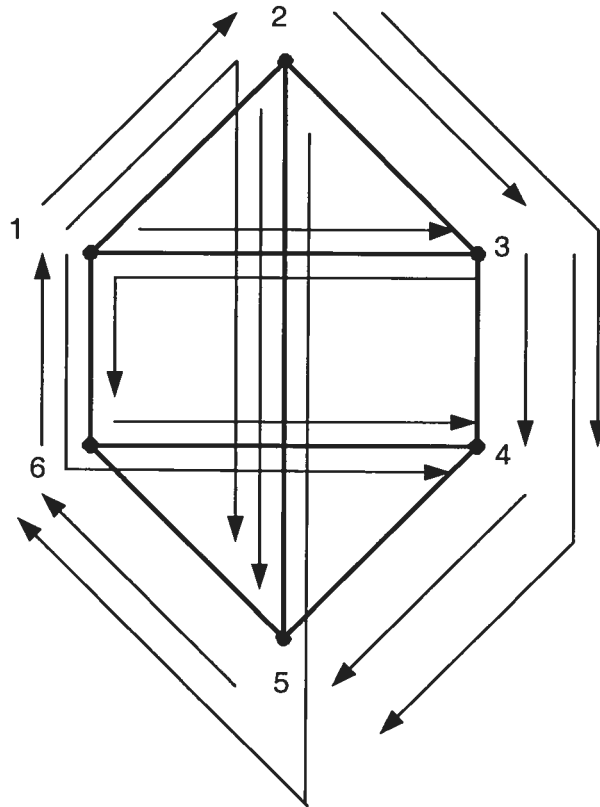


Figure 21 : Routage dans le graphe $K_2 \square K_3$

On voit dans ce cas que la charge ξ est uniforme et est $\xi(\vec{G}, R, u) = 1$ pour tout u de $V(K_2 \square K_3)$ alors que la charge sur les arcs est $\pi(\vec{G}, I_A) = 2$ ou $\pi(\vec{G}, I_A) = 3$.

Dans le même ordre d'idées, un routage R uniforme sur les arcs dans un graphe n'est pas forcément un routage uniforme sur les sommets.

En effet, dans l'exemple suivant, on a le cycle C_4 avec un routage uniforme sur les arcs. Par contre, ce routage n'est pas du tout uniforme sur les sommets.

Notons quand même que les deux exemples sont des graphes de Cayley et que les résultats précédents s'appliquent avec le routage garanti par le théorème 2.12.

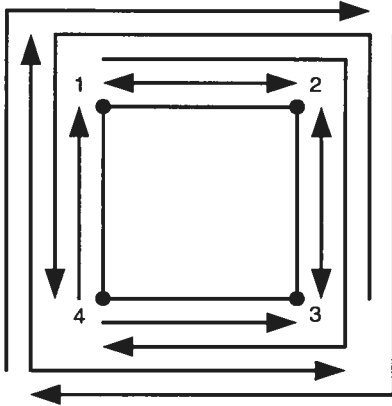


Figure 22 : Routage dans le cycle C_4

$\pi(\vec{G}, I_A) = 4$; pour certains sommets $\xi(\vec{G}, R, u) = 1$ et pour d'autres $\xi(\vec{G}, R, u) = 2$. Ainsi, nous pouvons établir un ordre de grandeur pour la charge sur les arcs et celle sur les sommets dans un graphe de Cayley.

Proposition 2.5

Soit $G = \text{Cay}(\Gamma, S)$ un graphe de Cayley orienté symétrique, une instance de

l'échange total I_A et $u \in V$ tel que $\pi(\vec{G}, I_A) = \frac{1}{|A(G)|} * \sum_{\substack{v \in V \\ u \neq v}} d(u, v)$. Alors, il existe un

routage R tel que $\pi(\vec{G}, I_A) > \xi(\vec{G}, R, u)$.

Preuve

De l'hypothèse, il s'ensuit qu'il existe un routage R de plus courts chemins uniforme et cohérent sur les arcs. Dans le graphe G , on a :

- des chemins de longueur = 1
- des chemins de longueur > 1

Tout chemin de longueur = 1, contribue 1 à la charge $\pi(\vec{G}, I_A)$ des arcs et 0 à la charge $\xi(\vec{G}, R, u)$ des sommets. Par contre, tout chemin de longueur > 1, contribue 1 à la charge $\pi(\vec{G}, I_A)$ des arcs et 1 à la charge $\xi(\vec{G}, R, u)$ des sommets.

Par conséquent : $\pi(\vec{G}, I_A) > \xi(\vec{G}, R, u)$. \square

2.4 Relation entre ω et ξ

Nous présentons ici quelques résultats obtenus sur les relations entre le nombre minimum de longueur d'ondes ω et la charge sur les sommets ξ . De plus, nous démontrons l'existence d'une partition (la partition est décrite plus bas) d'un routage dans les graphes de Cayley.

Étant donné un graphe G orienté symétrique, nous avons démontré que pour router une instance de l'échange total, il faut utiliser au minimum $\xi(\vec{G}, I_A)$ longueurs d'ondes.

Proposition 2.6

Soit un graphe $G = (V, A)$ orienté symétrique, une instance de l'échange total I_A et

$u \in V$ tel que : $\pi(\vec{G}, I_A) = \frac{1}{|A(G)|} * \sum_{\substack{v \in V \\ u \neq v}} d(u, v)$. Alors, il existe un routage tel que

$$\omega(\vec{G}, I_A) > \xi(\vec{G}, I_A)$$

Preuve :

De l'hypothèse, il s'ensuit qu'il existe un routage R de plus courts chemins uniforme et cohérent sur les arcs. De plus, $\pi(\vec{G}, I_A) = \pi(\vec{G}, R, I_A)$. Les $\pi(\vec{G}, I_A)$ chemins qui traversent un même arc, doivent avoir des longueurs d'ondes distinctes.

$$\text{Donc : } \omega(\vec{G}, I_A) \geq \pi(\vec{G}, I_A) \quad (1)$$

Soit u un sommet de V .

$$\text{La proposition 2.5 nous permet de conclure que : } \pi(\vec{G}, I_A) > \xi(\vec{G}, R, u) \quad (2)$$

De (1) et (2), on en déduit que : $\omega(\vec{G}, I_A) > \xi(\vec{G}, I_A)$.

Proposition 2.7

Soit $G = \text{Cay}(\Gamma, S)$ un graphe de Cayley orienté symétrique, une instance de

l'échange total I_A et $u \in V$ tel que : $\pi(\vec{G}, I_A) = \frac{1}{|A(G)|} * \sum_{\substack{v \in V \\ u \neq v}} d(u, v)$. Alors, il existe un

routage tel que $\pi(\vec{G}, I_A, R) = \pi(\vec{G}, I_A)$ et $\omega(\vec{G}, I_A) = \omega(\vec{G}, I_A, R)$.

Preuve :

Montrons d'abord que : $\pi(\vec{G}, I_A, R) = \pi(\vec{G}, I_A)$.

De l'hypothèse, il s'ensuit qu'il existe un routage R de plus courts chemins uniforme

et cohérent sur les arcs et $\pi(\vec{G}, I_A, R) = \pi(\vec{G}, I_A)$.

Montrons ensuite que : $\omega(\vec{G}, I_A) = \omega(\vec{G}, I_A, R)$

On a : $\omega(\vec{G}, I_A) \leq \omega(\vec{G}, R, I_A)$.

$\omega(\vec{G}, I_A) \leq \omega(\vec{G}, R, I_A) \leq \pi(\vec{G}, I_A)$.

Puisque $\pi(\vec{G}, I_A) \leq \omega(\vec{G}, I_A)$ alors $\pi(\vec{G}, I_A) = \omega(\vec{G}, I_A)$. (i)

De même $\pi(\vec{G}, I_A) \leq \omega(\vec{G}, R, I_A)$ alors $\pi(\vec{G}, I_A) = \omega(\vec{G}, R, I_A)$. (ii)

De (i) et (ii), on conclut que $\omega(\vec{G}, I_A) = \omega(\vec{G}, I_A, R)$.

□

Par exemple, dans la figure 23, nous construisons le cycle C_5 avec un routage nous donnant les résultats suivants :

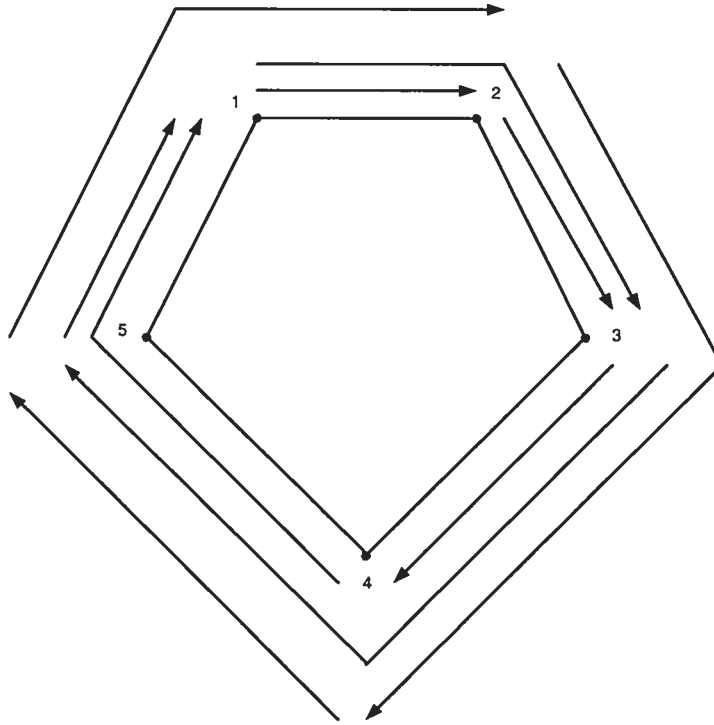


Figure 23 : Routage dans le cycle C_5

$$\pi(\vec{G}, I_A, R) = 3$$

$$\pi(\vec{G}, I_A) = 3$$

$$\omega(\vec{G}, I_A) = 3$$

$$\omega(\vec{G}, I_A, R) = 3$$

Néanmoins il n'existe pas toujours de routage R réalisant une instance I dans un graphe orienté G , tel que $\pi(\vec{G}, I, R) = \pi(\vec{G}, I)$ et $\omega(\vec{G}, I) = \omega(\vec{G}, I, R)$

En effet, le théorème 2.4 le prouve bien.

Nous montrons dans le résultat suivant que l'existence d'une partition d'un routage permet de router une instance de l'échange total avec $\omega(\vec{G}, I_A)$ classes dans un graphe de Cayley.

Proposition 2.8

Soit $G = \text{Cay}(\Gamma, S)$ un graphe de Cayley orienté symétrique et $u \in V$ tel que

$$\pi(\vec{G}, R, I_A) = \frac{1}{|A(G)|} * \sum_{\substack{v \in V \\ u \neq v}} d(u, v). \text{ Alors } \omega(\vec{G}, I_A) = \pi(\vec{G}, I_A) \text{ si et seulement s'il}$$

existe un routage R dans G pour l'instance I_A de l'échange total et une partition de R en $\omega(\vec{G}, I_A)$ classes telles que dans chaque classe les chemins sont deux à deux arc-disjoints.

Preuve :

1) \Leftarrow

Supposons qu'il existe un routage R dans G pour l'instance I_A de l'échange total et une partition du routage R en $\omega(\vec{G}, I_A)$ classes tel que décrit dans l'énoncé. Nous attribuons une longueur d'onde à chaque classe de la partition. On a alors :

$$\omega(\vec{G}, I_A) \leq \omega(\vec{G}, R, I_A) \leq \pi(\vec{G}, R, I_A) = \pi(\vec{G}, I_A).$$

Puisque $\pi(\vec{G}, I_A) \leq \omega(\vec{G}, I_A)$ alors $\pi(\vec{G}, I_A) = \omega(\vec{G}, I_A)$.

2) \Rightarrow

Supposons que $\omega(\vec{G}, I_A) = \pi(\vec{G}, I_A)$

Il existe alors un routage R pour l'instance de l'échange total I_A utilisant $\pi(\vec{G}, R, I_A)$ longueurs d'ondes. Regroupons ensemble les chemins utilisant la même longueur d'onde. Chaque groupe ainsi constitué peut être représenté par un ensemble P_i , où $i = 1 \dots \omega(\vec{G}, I_A)$. Chaque élément de ces ensembles est chemin de R . Il est aisé d'observer que dans chaque ensemble P_i , les chemins sont deux à deux arcs-disjoints et qu'on obtient $\omega(\vec{G}, I_A)$ ensembles. Les longueurs d'ondes étant deux à deux distinctes, les ensembles P_i et P_j sont disjoints pour $i \neq j$.

Notons P la réunion des ensembles P_i .

Pour tout i , $1 \leq i \leq \omega(\vec{G}, I_A)$, $P_i \neq P$.

$$|P| = \omega(\vec{G}, I_A) = \pi(\vec{G}, I_A) = |R|$$

$$P = R.$$

Il s'ensuit qu'on peut constituer $\omega(\vec{G}, I_A)$ classes telles que dans chaque classe, les chemins sont deux à deux arc-disjoints. Donc il existe un routage R dans G pour l'instance I_A de l'échange total et une partition de R en $\omega(G, I_A)$ classes comme décrit ci-dessus.

De tout ce qui précède, on conclut que $\omega(\vec{G}, I_A) = \pi(\vec{G}, I_A)$ si et seulement s'il existe un routage R dans G pour l'instance I_A de l'échange total et une partition de R en $\omega(G, I_A)$ classes telles que dans chaque classe les chemins sont deux à deux arc-disjoints.

□

Reprenons l'exemple de la figure 23.

Le routage R est constitué des éléments suivants :

$$R = \{(1, 2); (2, 3); (3, 4); (4, 1); (1, 3); (3, 5); (5, 1); (2, 4); (4, 5); (5, 2)\}$$

$$\omega(C_5, I_A) = 3 \text{ et } \pi(C_5, I_A) = 3.$$

Ainsi, la partition de R en $\omega(C_5, I_A)$ ensembles de chemins tels que les chemins d'un même ensemble aient la même longueur d'onde, donne les ensembles suivants :

$$\omega_1 = \{(1, 2); (2, 3); (3, 4); (4, 1)\}$$

$$\omega_2 = \{(1, 3); (3, 5); (5, 1)\}$$

$$\omega_3 = \{(2, 4); (4, 5); (5, 2)\}$$

2.5 Bornes sur ω et ω/π

Il est important de pouvoir minimiser le nombre de longueurs d'ondes. Dans ce sens, nous fournissons deux résultats montrant l'un, l'existence d'une borne inférieure et l'autre, l'existence d'une borne supérieure pour le nombre de longueurs d'ondes d'un graphe. Puis nous présentons la synthèse, dans un tableau, des résultats

obtenus sur le rapport entre le nombre minimum de longueurs d'ondes $\omega(G, I)$ et la charge $\pi(G, I)$ de divers graphes tout en précisant, dans chaque cas, leur complexité.

2.5.1 Permutations et K-relations

Les résultats qui suivent, nous montrent qu'on peut router une instance de permutation ou une k-relation avec une limite du nombre minimum de longueurs d'ondes dans un graphe.

En dérivant une borne inférieure sur le nombre de liens utilisés dans le pire cas et une borne supérieure sur le nombre total de liens dans le réseau, Pankaj, dans sa thèse, a obtenu des résultats dans le modèle non-orienté. Ces résultats sont aussi applicables dans le modèle orienté.

Théorème 2.15 (Pankaj, [Pan92])

Pour tout graphe orienté symétrique G de degrés maximum Δ , il existe un pire cas d'une instance de permutation I_1 tel que :

$$\varpi(\vec{G}, I_1) \geq \lfloor \frac{\log_{\Delta} \frac{N}{2}}{2\Delta} \rfloor$$

Dans le modèle non-orienté, Raghavan et Upfal ont montré l'existence d'une borne inférieure entre le nombre de longueur d'onde et l'arc-expansion. Leur résultat nous donne l'existence d'une borne inférieure pour les graphes orientés.

Proposition 2.9 (Raghavan et Upfal, [RU94])

Pour tout $\beta \leq 1$ et tout $1 \leq k \leq N$, il existe un graphe orienté G planaire, de degré borné et d'arc-expansion β , et une k-relation I_k , tels que :

$$\omega(\vec{G}, I_k) \in \Omega\left(\frac{k}{\beta^2}\right)$$

Nous résumons dans le tableau ci-dessous les résultats obtenus, d'après Beauquier dans [Bea00], sur le rapport entre le nombre minimum de longueurs d'ondes et la charge. Pour chaque cas présenté, nous donnons également des informations sur la complexité du calcul de ce rapport.

Graphes	$\omega(G, I)/\pi(G, I)$	Complexité
P_n	1	Temps polynomial
C_n	≤ 2	NP-complet
Arbre T	$\leq 5/3$	NP-complet
Grille	-	NP-complet

CHAPITRE 3

Réseaux généraux

3.1 Indice optique

Soit I_A l'instance de l'échange total. Nous rappelons que l'*arc-indice de transmission* d'un graphe G , est la charge $\pi(\vec{G}, I_A)$ du graphe G . Dans le cas d'un graphe non-orienté G , on utilise le terme *arête-indice de transmission*.

L'indice optique du graphe G est le paramètre $\omega(G, I_A)$. Togni dans [Tog98] présente des résultats obtenus pour le calcul de l'indice optique de quelques réseaux usuels. Ainsi, pour le calcul de l'indice optique du graphe complet K_n , on obtient 1 et celui de l'hypercube H_n donne 2^{n-1} . Nous résumons dans le tableau ci-après, les principaux résultats obtenus pour le calcul de l'indice optique.

Graphes	Indice Optique
P_n	$\frac{1}{2} \times \left\lfloor \frac{n^2}{2} \right\rfloor$
C_n	$\left\lceil \frac{1}{2} \times \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor \right\rceil$
K_n	1
H_n	2^{n-1}
M_n^d , n pair	$\frac{n^{d+1}}{8}$
$C_n \square C_n$, n impair	$\frac{n(n^2 - 1)}{8}$
$P_n \square P_n$	$n \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$

3.2 Réseaux spécifiques

Dans cette partie, nous présentons les résultats de la littérature sur la complexité algorithmique liée à la détermination de routage optimal dans les réseaux spécifiques tels que les cycles, les arbres et les grilles.

3.2.1 Cycles

Wilfong et Winkler dans [WW98], ont récemment obtenu des résultats qui permettent de router toute instance I dans un cycle orienté symétrique C en utilisant un algorithme polynomial. Ils prouvent que la charge $\pi(\vec{C}, I)$ du cycle C pour

l'instance de requête I et $\pi(\vec{C}, I, R)$, le nombre maximum de chemins du routage R utilisant le même arc du cycle sont égaux.

Théorème 3.1 (Wilfong et Winkler dans [WW98])

Pour tout cycle C orienté symétrique et toute instance I , on peut trouver en temps polynomial un routage R réalisant I tel que :

$$\pi(\vec{C}, I, R) = \pi(\vec{C}, I).$$

Ainsi, on peut trouver dans un cycle orienté symétrique, un routage réalisant une instance de requêtes telle que la charge du cycle soit équivalente à la charge maximale d'un arc pour le routage.

Cependant, à partir de ce résultat, pourrions-nous affirmer dans ces mêmes conditions que: $\pi(\vec{C}, I, R) = \pi(\vec{C}, I) = \omega(\vec{C}, I)$? En d'autres termes, est-ce que pour tout cycle orienté symétrique C , tout routage R réalisant une instance I , de charge minimale $\pi(\vec{C}, I, R) = \pi(\vec{C}, I)$ est colorable avec $\omega(\vec{C}, I)$ couleurs ? Ceci n'est pas possible; en effet dans [Beau00], il a été défini une instance de requêtes I_N dans le cycle C_N telle que : $\omega(\vec{C}_N, I_N) = \frac{N}{2} = 2\pi(\vec{C}_N, I_N) - 1$.

Le théorème suivant, qui ressemble au précédent, a été prouvé par Frank et al. dans [FNS+92]. Ils ont montré qu'on peut router une instance de requêtes dans un cycle non orienté en temps linéaire.

Théorème 3.2 (Frank et al. dans [FNS+92])

Pour tout cycle C non-orienté et toute instance I , on peut trouver en temps linéaire un routage R réalisant I tel que : $\pi(C, I, R) = \pi(C, I)$.

Ainsi, la complexité algorithmique pour trouver un routage optimal passe de temps polynomial pour un cycle orienté symétrique à temps linéaire pour un cycle non-orienté.

3.2.2 Arbres

- Une *étoile* est un arbre ayant un seul sommet de degré supérieur à 1. On notera l'étoile orientée symétrique d'ordre $N \geq 3$, S_N .
- Une *subdivision d'étoile* est un arbre ayant au plus un sommet de degré supérieur à 2.

Dans sa thèse [Beau00], Beauquier a traité le cas des arbres orientés symétriques en prouvant qu'un arbre orienté symétrique τ est un arbre ayant au plus un sommet de degré supérieur à 2 si et seulement si pour toute instance I , $\omega(\vec{\tau}, I)$ le nombre minimum de longueurs d'ondes de tous les routages de l'arbre, et sa charge $\pi(\vec{\tau}, I)$ sont égaux.

Théorème 3.3 ([Beau00], Beauquier)

Soit τ un arbre orienté symétrique. Les deux assertions suivantes sont équivalentes.

- 1) τ est une subdivision d'étoile.
- 2) Pour toute instance I , $\omega(\vec{\tau}, I) = \pi(\vec{\tau}, I)$

Preuve :

On peut déduire de sa définition qu'une subdivision d'étoile est formée par la réunion de chemins qui s'intersectent tous en un même sommet. Les chemins de longueurs ≥ 2 et les étoiles sont des subdivisions d'étoiles particulières. On a vu que la condition (2) est satisfaite pour les chemins. Montrons qu'elle l'est aussi pour les étoiles.

Notons $V(S_N) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ l'ensemble des sommets de l'étoile S_N , de telle manière que tous les sommets sauf u_1 soient de degré 1. Soit I une instance de communication dans S_N . On peut supposer sans perte de généralité que le sommet u_1 ne fait partie d'aucune requête de I . Dans le cas contraire, les requêtes concernant u_1

se colorent en dernier facilement et en conservant la propriété désirée. Soit $G(I) = (V_1, V_2, E)$ le multigraphe biparti (on définit un multigraphe G comme étant $G = (V, A, h, t)$ où A est une famille telle que $h : A \rightarrow V$, $t : A \rightarrow V$ avec h , la tête de l'arc et t , sa queue) tel que $V_1 = \{a_i\}_{1 < i \leq N}$, $V_2 = \{b_j\}_{1 < j \leq N}$, et l'arête $[a_i, b_j] \in E(G)$ pour toute requête $(u_i, u_j) \in I$. De cette définition, on en déduit que deux arêtes de $G(I)$ sont adjacentes si et seulement si les deux requêtes correspondantes dans I sont en conflit.

Par conséquent, trouver une coloration des requêtes de I revient à trouver une coloration des arêtes de $G(I)$, telle que deux arêtes adjacentes sont colorées différemment.

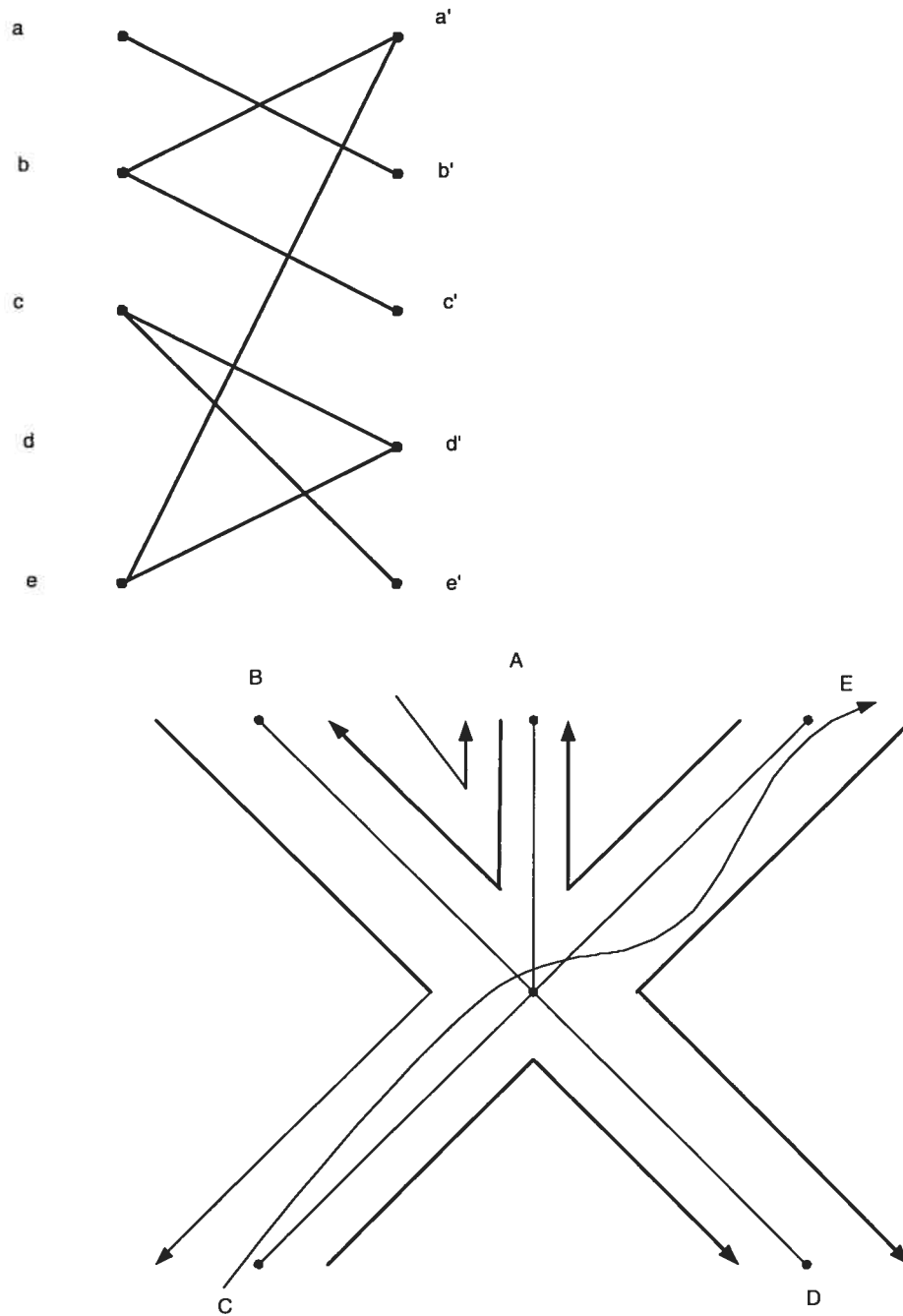


Figure 24 : Routage dans une étoile orientée

En remarquant que le degré maximum de $G(I)$ correspond exactement à la charge maximale des arcs de l'étoile S_N pour l'instance I , on obtient que :

$$\omega(\vec{S}_N, I) = \pi(\vec{S}_N, I)$$

Pour généraliser cette propriété aux subdivisions d'étoiles, la technique employée repose sur une combinaison des deux méthodes appliquées aux étoiles et aux chemins respectivement. Étant donné une instance dans une subdivision d'étoile, on peut colorer les requêtes entre les différentes branches par la technique utilisées pour les étoiles, et les requêtes restantes à l'intérieur des branches par la technique utilisée pour les chemins, de manière à conserver l'égalité entre le nombre de couleurs utilisées et la charge maximale des arcs. L'implication (1) \Rightarrow (2) peut être ainsi démontrée.

Pour montrer la contraposée, il suffit de montrer que si la condition (1) n'est pas satisfaite, alors la condition (2) non plus.

Soit τ un arbre possédant au moins deux sommets de degrés ≥ 3 , notés u et v . Soient u_1, u_2 (resp. v_1 et v_2) deux sommets voisins de u (resp. de v) non situés sur le plus court chemin reliant u et v .

Alors l'instance $I = \{(u_1, v), (u, v_1), (v_2, v_1), (v_2, u_2), (u_1, u_2)\}$ est telle que $\omega(\vec{\tau}, I) = 3$ et $\pi(\vec{\tau}, I) = 2$, comme sur la figure 19.

D'où (2) \Rightarrow (1)

□

Erlebach et Jansen ont prouvé dans [EJ96], l'existence d'un algorithme polynomial permettant de résoudre le problème de routage optique d'un arbre non-orienté lorsque le nombre minimum de longueurs d'ondes est inférieur ou égal à 2.

Théorème 3.4 (Erlebach et Jansen, [EJ96])

Pour tout arbre non-orienté τ et pour toute instance I , le problème de routage optique (τ, I) peut être résolu en temps polynomial en utilisant $\omega(\tau, I)$ longueurs d'ondes si $\omega(\tau, I) \leq 2$ et au plus $\lfloor 1.1\omega(\tau, I) + 0.8 \rfloor$ longueurs d'ondes sinon.

Erlebach et al. dans [EJKP97, EJK+99] ont traité quant à eux, le cas des arbres orientés symétriques. En se basant sur les résultats obtenus dans [EJ96], ils ont démontré que l'on peut trouver un routage optimal en temps polynomial en utilisant

$\lceil \frac{5\pi(\vec{\tau}, I)}{3} \rceil$ longueurs d'ondes dans un arbre orienté symétrique. Ceci est une amélioration considérable par rapport au résultat obtenu dans [MKR95] avec une borne de $\frac{15\pi(\vec{\tau}, I)}{8}$ longueurs d'ondes.

Théorème 3.5 (Erlebach et al., [EJKP97, EJK+99])

Pour tout arbre orienté symétrique τ et pour toute instance I , le problème de routage optique (τ, I) peut être résolu en temps polynomial en utilisant $\lceil \frac{5\pi(\vec{\tau}, I)}{3} \rceil$ longueurs d'ondes.

À partir de leur précédent résultat, ils en déduisent la proposition suivante :

Proposition 3.1 ((Erlebach et al., [EJKP97, EJK+99]))

Pour tout $n > 1$, tout $\varepsilon > 0$ et tout algorithme vorace A , il existe un arbre binaire orienté symétrique τ et une instance I , tels que $\pi(\vec{\tau}, I) = n$ et A résout le problème (τ, I) en utilisant au moins $(5/3 - \varepsilon)n$ longueurs d'ondes.

D'après Kumar et Schwabe dans [KS97], on peut trouver un problème de routage dans un arbre orienté symétrique dont la charge de l'arbre et le nombre minimum de longueur d'onde de tous les routages de l'arbre possèdent une borne inférieure.

Proposition 3.2 (Kumar et Schwabe, [KS97])

Pour tout entier n , il existe un problème (τ, I) dans un arbre orienté symétrique τ , tel que : $\pi(\vec{\tau}, I) \geq n$ et $\omega(\vec{\tau}, I) \geq \frac{5\pi(\vec{\tau}, I)}{4}$

Gargano, Hell et Pérennes [GHP97] ont abordé le cas de l'échange total. Ils ont proposé un algorithme en temps polynomial permettant de résoudre le problème de

routage optique (τ, I_A) en utilisant $\pi(\vec{\tau}, I_A)$ longueurs d'ondes. Cependant, le théorème qu'ils proposent n'est pas vérifié dans le cas non-orienté.

Théorème 3.6 (Gargano, Hell et Pérennes [GHP97])

Pour tout arbre orienté symétrique τ et pour l'instance d'échange total I_A , le problème de routage optique (τ, I_A) peut être résolu de façon optimale en temps polynomial et on a :

$$\omega(\vec{\tau}, I_A) = \pi(\vec{\tau}, I_A).$$

3.2.4 Grilles

Les principaux résultats sur les grilles ont été obtenus par Aumann et Rabani dans [AR95]. Ils ont prouvé que les problèmes de routage optique dans les grilles sont NP-difficiles et il n'existe aucun algorithme d'approximation possédant un facteur plus petit que 2 sauf lorsque $P = NP$. Par ailleurs, ils ont montré l'existence d'un algorithme efficace pour router une instance de requêtes I dans une grille G non orienté de dimension finie et d'ordre N en limitant le nombre minimum de longueurs d'ondes à $O(\log N \log |I| \omega(G, I))$.

Théorème 3.7 (Aumann et Rabani, [AR95])

Il y a un algorithme efficace pour résoudre le problème (G, I) pour une instance I dans toute grille non orientée G de dimension finie et d'ordre N , utilisant au plus $O(\log N \log |I| \omega(G, I))$ longueurs d'ondes.

Après ce premier résultat général obtenu sur les grilles dans ([AR95]), Rabani a poursuivi ses recherches sur les grilles carrées non-orientées dans le but d'en améliorer la borne du nombre minimum de longueurs d'ondes. Ainsi, dans [Rab96], il a proposé un algorithme d'approximation pour résoudre en temps polynomial le problème de routage optique d'une grille carrée non-orientée.

Théorème 3.8 (Rabani, [Rab96])

Pour toute grille carrée non-orientée P_n^d d'ordre $N = n^d$ et pour toute instance I , le problème de routage optique (P_n^d, I) peut être résolu en temps polynomial et en utilisant $f(\log \log N) \cdot \omega(P_n^d, I)$ longueurs d'ondes, où f désigne un polynôme. De plus, $\omega(P_n^d, I)$ peut être calculé à un facteur constant près.

Conclusion

Dans cette thèse, nous avons présenté l'étude de la fibre optique et des techniques utilisées pour la communication dans les réseaux optiques. Cependant, compte tenu des limites liées à la méthode du multiplexage temporel TDM (*Time Division Multiplexing*), nous avons opté pour le choix de la technique du multiplexage en longueurs d'ondes WDM (*Wavelength Division Multiplexing*). En exploitant les avantages du multiplexage en longueur d'ondes, nous avons abordé les problèmes liés à l'optimisation du routage dans les réseaux optiques.

Afin de pouvoir résoudre les problèmes de routage avec multiplexage en longueurs d'ondes dans les réseaux optiques, nous avons utilisé les notions de la théorie des graphes. Ainsi, en modélisant les réseaux par des graphes, nous avons traité le problème de la charge et celui du nombre de longueur d'ondes tout en insistant sur leurs complexités. Alors, nous avons conclu que la complexité du problème de routage optique dans un réseau optique peut varier en passant de temps polynomial à NP-complet ou à NP-difficile en fonction de la topologie du réseau dans lequel le routage est réalisé.

Nous avons également cherché à établir des relations entre divers paramètres caractérisant les réseaux optiques. Ainsi, en utilisant les propriétés des graphes de Cayley de la façon décrite par Heydemann, Meyer et Sotteau dans [HMS89], nous avons obtenu des résultats sur les relations entre la charge π sur les arcs, la charge ξ

sur les sommets et le nombre minimum de longueurs d'ondes ω . De plus, nous avons conclu à l'existence de propriétés sur les routages permettant de résoudre efficacement les problèmes de routage dans les réseaux optiques.

Les perspectives de recherche sont nombreuses et diverses. L'étude des relations entre la charge π et le nombre minimum de longueurs d'ondes ω a permis d'établir que l'égalité $\vec{\pi}(G, I_X) = \vec{\omega}(G, I_X)$ est vraie pour toute instance de diffusion I_X et pour tout graphe orienté G . Par ailleurs, il a été prouvé que le routage optique d'une instance de multicast est polynomial quel que soit le réseau. Mais l'égalité $\vec{\pi}(G, I_A) = \vec{\omega}(G, I_A)$ est-elle aussi vraie pour toute instance de requêtes I_A et pour tout graphe orienté symétrique ? Cette question demeure encore ouverte. Cependant, rappelons que nous avons présenté des résultats montrant que $\vec{\pi}(G, I_A) = \vec{\omega}(G, I_A)$ pour les cycles orientés symétriques, les hypercubes orientés symétriques, la somme cartésienne de graphes complets orientés symétriques.

La relation entre la charge d'un graphe orienté et celle d'un graphe non-orienté a été présentée par Bermond, Beauquier, Gargano, Hell, Pérennes et Vaccaro dans [BBG+97]. En effet, il a été prouvé que $\vec{\pi}(G, I) \leq \pi(G, I) \leq 2\vec{\pi}(G, I)$ pour toute instance de requêtes I . De plus, pour une instance de diffusion I_X , on obtient l'égalité $\vec{\pi}(G, I_X) = \pi(G, I_X)$. Cependant, dans le cas de l'instance de requêtes I_A , il existe encore une question ouverte : « Est-ce que l'égalité $\vec{\pi}(G, I_A) = \left\lceil \frac{\pi(G, I_A)}{2} \right\rceil$ est toujours vraie ? »

Des possibilités de recherche existent également en traitant les arbres. D'une part, dans le cas particulier des arbres orientés, nous avons présenté les résultats de Kumar et Schwabe dans [KS97] qui démontrent que pour tout entier n , il existe un problème (G, I) dans un arbre G tel que $\vec{\pi}(G, I) \geq n$ et $\vec{\omega}(G, I) \geq \frac{5}{4}\vec{\pi}(G, I)$.

Néanmoins, les questions suivantes demeurent toujours ouvertes : « Cette constante

peut-elle être augmentée? », « Y-a-t-il une bonne borne $\vec{\omega}(G, I) \leq c\vec{\pi}(G, I)$? ». D'autre part, l'étude des arbres non-orientés n'est pas encore achevée. En effet, pour un arbre non-orienté G et une instance de l'échange total I_A , déterminer si le problème (G, I_A) peut être efficacement résolu avec exactement $\omega(G, I_A)$ longueurs d'ondes, reste une question ouverte.

L'étude de la borne inférieure du nombre minimum de longueurs d'ondes $\omega(G, I)$, pour une k -relation I_k pour les graphes orientés symétriques, reste encore un problème ouvert. En effet, il a été prouvé par Raghavan et Upfal dans [RU94] que pour tout $\beta \leq 1$ et tout $1 \leq k \leq N$, il existe un graphe orienté G planaire, de degré borné et d'arc-expansion β , et une k -relation I_k , tels que : $\omega(\vec{G}, I_k) \in \Omega\left(\frac{k}{\beta^2}\right)$. Mais il reste à vérifier si ce résultat tient pour les graphes orientés symétriques.

Les problèmes exposés ne couvrent qu'une partie du domaine d'étude que constituent les routages dans les réseaux optiques.

Bibliographie

- [ABNC+94] A. Aggarwal, A. Bar-Noy, D. Coppersmith, R. Ramaswami, B. Schieber, and M. Sudan. Efficient routing and scheduling algorithms for optical networks. *In Proc. Of the 5th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA'94)*, pages 412-423. ACM Press, January 1994.
- [Agr92] G.P. Agrawal. *Fiber-Optic Communication Systems*. Wiley, 1992.
- [AR95] Y. Aumann and Y. Rabani. Improved bounds for all optical routing. *In Proc. Of the 6th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA'95)*, pages 567-576. ACM Press, January 1995.
- [Awa99] Mohamed Awaad. *Symétrie et sens de l'orientation dans les graphes. Thèse de maîtrise*, Université de Montréal, 1999.
- [BBG+97] B. Beauquier, J-C. Bermond, L. Gargano, P. Hell, S. Pérennes, and U. Vaccaro. Graph problems arising from wavelength-routing in all-optical networks. *In Proc. Of IPSS'97, 2nd Workshop on Optics and Computer Science (WOCS'97)*, Genève, April 1997. IEEE Press.

- [Bea98] B. Beauquier. Broadcasting in WDM optical rings and tori. In D-Z. Du P-J. Wan and P.M. Pardalos, editors, Proc. The DIMACS Workshop : « Multichannel Optical Networks : Theory and Practice », volume 46 of DIMACS Series on Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, pages 63-73, Rutgers University, NJ, mars 1998. American Mathematical Society.
- [Bea99] B. Beauquier. All-to-all communication in some wavelength-routed all-optical networks. *Networks*, **33**(1999), 179-187.
- [Bea00] B. Beauquier. *Communication dans les réseaux optiques par multiplexage en longueur d'onde*. PhD thesis, Université de Nice-Sophia Antipolis, Janvier 2000.
- [Ber83] C. Berge. Graphes. Gauthier-Villars, Paris, 1983.
- [BGP+96] J-C. Bermond, L. Gargano, S. Pérennes, A. A. Rescigno, and U. Vaccaro. Efficient collective communication in optical networks. *Lecture Notes in Computer Science*, **1099** (1996), 574-585.
- [BHP98] B. Beauquier, P. Hell, and S. Pérennes. Optical wavelength-routed multicasting. *Discrete Applied Mathematics*, **84** (1998), 15-20.
- [BPT99] B. Beauquier, S. Pérennes, and D. Tóth. All-to-all routing and coloring in weighted trees of rings. In Proc. of 11th ACM Symposium on Parallel Algorithms and Architectures (SPAA '99), Saint-Malo, France, June 1999. ACM Press.

- [Bra90] C.A. Brackett. Dense wavelength division multiplexing networks : principles and applications. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 8(6) :948-964, 1990.
- [CCRS87] F. R. K. Chung, E. G. Coffman, M. I. Reiman, and B. E. Simon. The forwarding index of communication networks. *IEEE Transactions on Information Theory*, 33 (1987), 224-232.
- [dR94] Jean de Rumeur. *Communications dans les Réseaux de Processeurs*. Masson, Paris, collection études et recherche en informatique édition, 1994.
- [Edm72] J. Edmonds. Edge-disjoint branchings. *In R. Ruskin, editor, Combinatorial Algorithms*, pages 91-96. Algorithmic Press, NY, 1972.
- [EIS76] S. Even, A Itai, and A. Shamir. On the complexity of timetable and multicommodity flow problems. *SIAM Journal of Computing*, 5 (1976), 691-703.
- [EJ96] T. Erlebach and K. Jansen. Scheduling of virtual connections in fast networks. *In Proc. of 4th Workshop on Parallel Systems and Algorithms (PASA '96)*, pages 13-32. World Scientific, 1996.
- [EJ97] T. Erlebach and K. Jansen. Call scheduling in trees, rings and meshes. *In Proc. of 30th Hawaii International Conference on System Sciences (HICSS'97)*, 1 (1997), 221-222.
- [FNS+92] A. Frank, T. Nishizeki, N. Saito, H. Suzuki, and E. Tardos. Algorithms for routing around a rectangle. *Discrete Applied Mathematics*, 40 (1992), 363-378.

- [FP94] Pierre Fraigniaud and Joseph G. Peters. Minimum linear gossip graphs and maximal linear (δ, k) -gossip graphs. *Technical Report TR 94-06*, Simon Fraser University, 1994.
- [GHP97] L. Gargano, P. Hell, and S. Pérennes. Colouring paths in directed symmetric trees with applications to WDM routing. *Lecture Notes in Computer Science*, **1256** (1997), 505-515.
- [HMOS94] M-C. Heydemann, J-C. Meyer, J. Opatrny, and D. Sotteau. Forwarding indices of consistent routings and their complexity. *Networks*, **24** (1994), 75-82.
- [HMS89] M-C. Heydemann, J-C. Meyer, and D. Sotteau. On forwarding indices of networks. *Discrete Applied Mathematics*, **23** (1989), 103-123, 1989.
- [Jar99] A. Jarry. Théorie des graphes: chemins disjoints. *Rapport de stage de 1^{ère} année*, École Normale Supérieure de Lyon, July 1999.
- [KG96] Daniel Kofman and Maurice Gagnaire. Réseaux haut débit. Collection Informatiques. Paris : InterEditions, 1996.
- [Kno75] W. Knödel. New gossips and telephones. *Discrete Mathematics*, 1975.
- [KS97] V. Kumar and E. J. Schwabe. Improve access to optical bandwidth in trees. In *Proc. of the 8th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA '97)*, pages 437-444. ACM Press, January 5-7 1997.
- [LP86] L. Lovász and M. D. Plummer, Matching Theory, *Annals of Discrete Mathematics* 29, North-Holland, 1986.

- [LR88] F. T. Leighton and S. Rao. An approximate max-flow min-cut theorem for uniform multicommodity flow problems with applications to approximation algorithms. *In Proc. of 29th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS'88)*, pages 422-431. IEEE, October 1988.
- [MKR95] M. Mihail, C. Kaklamanis and S. Rao. Efficient access to optical bandwidth – wavelength routing on directed fiber trees, rings and trees of rings. *In Proc. Of 36th IEEE Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS'95)*, page 548-557. IEEE Press, October 1995.
- [Pan92] R. K. Pankaj. Architectures for Linear Lightwave Networks. *PhD thesis, dept. of Electrical Engineering and Computer Science, MIT, Cambridge, MA, 1992.*
- [PG95] R. K. Pankaj and R. G. Gallager. Wavelength requirements of all-optical networks. *IEEE/ACM Transactions on Networking*, **3** (1995) 269-280.
- [Rab96] Y. Rabani. Path coloring on the mesh. *In Proc. of 37th IEEE Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS'96)*, October 1996.
- [RU94] P. Raghavan and E. Upfal. Efficient routing in all-optical networks. *In Proc. of the 26th Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC'94)*, pages 134-143. ACM Press, May 1994.
- [Shi79] Y. Shiloach. Edge-disjoint branching in directed multigraphs. *Information Processing Letters*, **8** (1979), 24-27.

- [SSZ00] S. Shim, J. Širáň and J. Žerovník. A counterexample to the uniform shortest path routing conjecture for vertex-transitive graphs. *Prepr. Ser. –Univ. Ljubl. Inst. Math.*38, 2000, no. 708, p.1-7 (to appear in *Discrete Math*).
- [Tog98] O. Togni. *Forces des graphes - Indice optique des réseaux*. PhD thesis, Université de Bordeaux 1, 1998.
- [WW98] G. Wilfong and P. Winkler. Ring routing and wavelength translation. *In Proc. of the 9th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA '98)*, pages 333-341. ACM Press, January 1998.
- [Yoo96] S. J. B. Yoo. Wavelength conversion technologies for WDM network applications. *IEEE/OSA Journal of Lightwave Technology*, 14 (1996), 955-966.