

Université de Montréal

Caractère intrinsèque des matrices de Stokes

par

Jean-François Gagnon

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en mathématiques

20 août 2015

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

Caractère intrinsèque des matrices de Stokes

présenté par

Jean-François Gagnon

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Marlène Frigon

(président-rapporteur)

Christiane Rousseau

(directeur de recherche)

Jacques Bélair

(membre du jury)

Mémoire accepté le

14 octobre 2015

SOMMAIRE

Il est connu qu'une équation différentielle linéaire,

$$x^{k+1}Y' = A(x)Y,$$

au voisinage d'un point singulier irrégulier non-résonant est uniquement déterminée (à isomorphisme analytique près) par :

- (1) sa forme normale formelle,
- (2) sa collection de matrices de Stokes.

La définition des matrices de Stokes fait appel à un ordre sur les parties réelles des valeurs propres du système, ordre qui peut être perturbé par une rotation en x . Dans ce mémoire, nous avons établi le caractère intrinsèque de cette relation : nous avons donc établi comment la nouvelle collection de matrices de Stokes obtenue après une rotation en x qui change l'ordre des parties réelles des valeurs propres dépend de la collection initiale.

Pour ce faire, nous donnons un chapitre de préliminaires généraux sur la forme normale des équations différentielles ordinaires puis un chapitre sur le phénomène de Stokes pour les équations différentielles linéaires. Le troisième chapitre contient nos résultats.

Mots-clés : Phénomène de Stokes, équations différentielles linéaires, singularité irrégulière, monodromie, solutions propres, classification analytique, classification formelle

SUMMARY

It is well known that a linear differential equation,

$$x^{k+1}Y' = A(x)Y,$$

near a non-resonant irregular singular point is uniquely determined (up to analytic isomorphism) by :

- (1) its formal normal form,
- (2) the collection of its Stokes matrices.

By definition, the Stokes matrices depend on an order defined on the real parts of the eigenvalues of the system which can be perturbed by a rotation in the x coordinate. In this paper, we have established the intrinsic character of the dependency : we have described how the new Stokes collection is obtained from the first collection after a rotation in x which changes the order on the real parts of the eigenvalues.

The first chapter contains preliminaries concerning the normal form of an ordinary differential equation and a chapter on the Stokes phenomenon for linear differential equations. The third chapter contains our results.

Keywords : Stokes phenomenon, linear differential equations, irregular singularity, monodromy, eigensolutions, analytic classification, formal classification

TABLE DES MATIÈRES

Sommaire	v
Summary	vii
Remerciements	1
Introduction	3
Chapitre 1. Préliminaires généraux sur les équations différentielles linéaires et les objets formels	7
1.1. Théorème de linéarisation de Poincaré	7
1.1.1. Définitions.....	8
1.1.1.1. Points singuliers	8
1.1.1.2. Germes.....	9
1.1.1.3. Séries formelles	9
1.1.2. Forme normale de Poincaré-Dulac.....	10
Chapitre 2. Préliminaires sur le phénomène de Stokes	15
2.1. Préliminaires	15
2.1.1. Équation en dimension 1.....	15
2.1.1.1. Classification holomorphe.....	18
2.1.2. Équation en dimension n	19
2.1.2.1. Classification formelle.....	19
2.1.3. Normalisation holomorphe	21
2.2. Phénomène de Stokes.....	21
2.2.1. Propriétés des matrices de Stokes	24
2.2.1.1. Forme particulière des matrices de Stokes.....	26
Chapitre 3. Résultats	29
3.1. Nouvel ordre.....	29

3.1.1. Nouvel ordre explicite après avoir traversé plusieurs rayons de séparation dans le cas où $k = 1$	32
3.1.2. Cas général	36
3.2. Valeurs propres, rayons de séparations et secteurs	37
3.3. Matrices	38
Bibliographie	47

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier ma directrice de recherche, Christiane Rousseau, sans qui ce mémoire n'aurait été possible. Ses commentaires toujours pertinents, ses corrections et ses suggestions de rédaction m'ont beaucoup appris et ont fait de ce travail ce qu'il est aujourd'hui. Outre la grande connaissance des mathématiques et la curiosité contagieuse dont elle n'a cessé de faire preuve, je me souviendrai de sa patience et de sa compréhension.

Je suis aussi reconnaissant au conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada (CRSNG) pour sa contribution financière à ma première année de maîtrise, ainsi qu'au programme de prêts et bourses du Québec sans lesquels ces études graduées n'auraient pas été possibles. Je souhaite que les étudiants qui passeront après moi puissent profiter d'un niveau au moins égal d'investissements en sciences et en recherche de la part du gouvernement fédéral et d'une accessibilité aux études maintenue par Québec.

Je voudrais souligner la contribution du département de mathématiques et de statistiques de l'Université de Montréal, tant financière, que de m'avoir offert la chance de donner quelques travaux pratiques qui m'ont fait découvrir l'amour de l'enseignement. Un merci tout particulier à Ismaïl Mili pour ses conseils en pédagogie et à Anne-Marie Dupuis qui su gérer de main de maître mon dossier inhabituel et mes oublis.

Finalement, je tiens à mentionner mes parents qui m'ont donné le goût de la connaissance dès mon plus jeune âge, qui m'ont soutenu financièrement durant mes études et qui ne m'ont jamais fait douter de la fierté qu'ils ont pour moi. Merci aussi à mes amis, en particulier à Amélie, qui ont appris à vivre, bien malgré eux, avec mes mathématiques.

INTRODUCTION

Une équation différentielle linéaire est une équation de la forme

$$Y' = B(x)Y. \tag{0.0.1}$$

On s'intéresse au cas où $B(x)$ est une matrice à coefficients méromorphes sur un ouvert U de \mathbb{C} . Si $B(x)$ est holomorphe au voisinage de x_0 , alors l'équation possède une base de solutions holomorphes sur un voisinage de x_0 . Si, au contraire, x_0 est un pôle de $B(x)$, nous supposons sans perte de généralité que $x_0 = 0$ et réécrivons l'équation comme

$$x^{k+1}Y' = A(x)Y, \quad y \in \mathbb{C}^n \tag{0.0.2}$$

où $A(x)$ est une matrice à coefficients holomorphes sur un voisinage de 0. Nous nous intéressons à savoir quand deux telles équations sont analytiquement (formellement) équivalentes modulo un changement de variables $y \mapsto T(x)y$ où $T(x)$ est une matrice à coefficients holomorphes dans un voisinage de 0. Un outil pour cela est d'utiliser un changement de coordonnées à la forme normale. En effet, si deux équations différentielles linéaires sont analytiquement équivalentes à la même forme normale alors elles sont analytiquement équivalentes entre elles.

Pour une équation de la forme (0.0.2), il existe un changement de variables formel \hat{H} qui la conjugue à sa forme normale — polynomiale et explicitement intégrable. Ce changement est analytique dans un voisinage de 0 si $k = 0$. Par contre, dès que $k \geq 1$, ce n'est presque jamais le cas. Il existe cependant un recouvrement de l'origine par des secteurs ouverts S_j bien choisis tel que sur chaque secteur S_j il existe un changement de variable analytique H_j asymptotique à \hat{H} en 0 et conjuguant (0.0.2) avec sa forme normale. Nous nous limiterons, si $k > 0$ au cas où $A(0)$ a des valeurs propres distinctes, appelé cas non résonant.

En notant par W une matrice fondamentale de solutions fixée de la forme normale

qui soit diagonale, les H_j permettent de définir des matrices fondamentales de solutions W_j sur les S_j par la relation $W_j = H_j W$. Or, sur l'intersection $S_j \cap S_{j+1}$, les matrices fondamentales de solutions W_j et W_{j+1} ne coïncident presque jamais. Néanmoins, elles sont liées par une relation $W_{j+1} = W_j C_j$. La matrice C_j est *une matrice de Stokes* et la collection de toutes ces matrices (modulo une relation d'équivalence), accompagnée de la forme normale formelle, définit entièrement et uniquement le système à équivalence analytique près. La relation d'équivalence sur la collection des matrices de Stokes reflète que les matrices fondamentales de solutions sont uniques à multiplication à droite par une matrice diagonale près.

Remarque 0.0.1. *La collection de Stokes est formée uniquement de matrices diagonales si et seulement si l'équation (0.0.2) est analytiquement équivalente à sa forme normale.*

Remarque 0.0.2. *Les matrices de Stokes, inversibles, sont alternativement triangulaires supérieures et triangulaires inférieures.*

Comme motivation pour notre travail mentionnons l'équation d'Airy qui illustre le phénomène de Stokes,

$$y'' - zy = 0, \quad (0.0.3)$$

qui possède une singularité irrégulière en $z = \infty$. Ses deux solutions sont bien connues sous le nom de première ($Ai(z)$) et seconde ($Bi(z)$) fonctions d'Airy. Elles apparaissent notamment en physique classique (initialement en optique), en physique quantique et dans d'autres domaines (voir [3]). Ces solutions réelles peuvent être étendues au plan complexe par des fonctions entières dont le comportement, pour z grand, change d'oscillatoire à exponentiel en certaines valeurs de $\arg(z)$, illustrant ainsi le phénomène.

Notons que cela demeure vrai en considérant l'équation modifiée

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{2}{x} \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{1}{x^5} y = 0 \quad (0.0.4)$$

obtenue de la première avec le changement $z = 1/x$. L'équation (0.0.4) peut se mettre sous la forme (0.0.2). On prend

$$u = \left(\frac{\partial y}{\partial x}, y \right)$$

ce qui donne

$$x^5 \frac{\partial u}{\partial x} = \begin{pmatrix} -2x^4 & 1 \\ x^5 & 0 \end{pmatrix} u. \quad (0.0.5)$$

Les solutions $\widetilde{A}i(1/z)$ et $\widetilde{B}i(1/z)$ du nouveau système exhibent le phénomène de Stokes pour une singularité à l'origine, c'est-à-dire en $x = 1/z = 0$.

Considérons un système de la forme (0.0.2) pour lequel la matrice $A(0)$ a des valeurs propres distinctes (on dit alors que le point singulier est non résonant). Sa collection de Stokes est définie en supposant que l'ensemble des valeurs propres $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ de la matrice $A(0)$ satisfait à

$$Re(\lambda_1) < \dots < Re(\lambda_n). \quad (0.0.6)$$

Lorsque cela n'est pas le cas, il est coutume dans la littérature [1] de régler le problème en introduisant une rotation en x et en permutant les composantes de y . L'ordre (0.0.6) n'est pas unique et, pour deux ordres différents, nous obtenons deux collections de Stokes différentes. Quelle est alors la relation entre ces deux collections ? À notre connaissance, aucune description explicite n'existait avant que nous n'entreprenions notre travail.

Bien qu'il existe $n!$ permutations possibles sur l'ordre des parties réelles des valeurs propres, nous montrons que toutes ne sont pas réalisables et nous donnons l'expression de la nouvelle collection pour n'importe quelle rotation admissible pour les équations de la forme (0.0.2) avec $k \geq 1$ et $n \geq 2$.

Nous montrons d'abord (par des arguments géométriques) qu'il suffit de considérer l'impact de permutations dont la représentation matricielle P est telle que

$$P_{a,b,c} = \text{diag}(I_a, J_b, I_c)$$

où $a, b, c \in \mathbb{N} \cup 0$, $a + b + c = n$, I_j est la matrice identité de dimension j et J_j est une matrice carrée de dimension j ayant des 1 sur son anti-diagonale et des 0 partout ailleurs. Cela est dû au lemme suivant :

Lemme 0.0.1. *Toute permutation sur les parties réelles des valeurs propres du système obtenue par une rotation en x peut s'écrire comme une combinaison de permutations de la forme $P_{a,b,c}$.*

Nous définissons de nouvelles matrices fondamentales de solutions et nous montrons qu'elles ont le bon comportement asymptotique sur les secteurs définis après la rotation. En les exprimant en fonction des solutions de base, nous

pouvons donner l'expression des nouvelles matrices de Stokes en fonction des anciennes.

Notre résultat principal, énoncé au théorème 3.3.1, dit que lors d'un changement de l'ordre tel que décrit au lemme 0.0.1, les matrices de Stokes s'échangent des morceaux. Si x tourne dans le sens positif, alors chaque matrice de Stokes « emprunte » du matériel à la matrice de Stokes qui la suit en tournant dans le sens positif et en largue à la matrice de Stokes qui la précède. Ce changement est un peu trop technique pour être décrit au niveau de l'introduction. Le processus est bien sûr réversible si on change de sens de rotation.

Chapitre 1

PRÉLIMINAIRES GÉNÉRAUX SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES ET LES OBJETS FORMELS

1.1. THÉORÈME DE LINÉARISATION DE POINCARÉ

Dans ce mémoire, nous considérons un cas particulier de l'équation générale

$$x^m Y' = A(x, Y) \tag{1.1.1}$$

où $A(x, Y)$ est une matrice $n \times n$ en x et $Y : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^n$. Ce cas est celui où A est linéaire en Y , c'est-à-dire qu'il existe une matrice $\hat{A}(x)$, toujours $n \times n$ telle que

$$A(x, Y) = B(x)Y.$$

Dans certains cas, nous pourrons *linéariser* une équation de la forme (1.1.1) par un changement de variable $Z = H(Y)$. Ces conditions seront données à la fin de cette section. Avant nous devons définir quelques concepts nécessaires.

Nous nous affairerons aussi à comprendre les définitions correspondantes pour les séries formelles puisque les n^2 composantes de $B(x)$ seront parfois données sous cette forme et, même en demandant que celles-ci soient holomorphes, nous obtiendrons dans certains cas des solutions qui ne sont définies qu'à l'origine.

Exemple 1.1.1. *Soit l'équation*

$$xy' = y.$$

On cherche une solution de la forme $y = \sum_{j=0} a_j x^j$ et on trouve les restrictions suivantes sur les coefficients : tous les a_j sont nuls sauf a_1 . La solution est donc $y = a_1 x$.

Notons aussi que cette technique a ses limites tel que l'illustre l'exemple suivant.

Exemple 1.1.2. Soit l'équation différentielle

$$x^2 y' = y. \quad (1.1.2)$$

En cherchant une solution sous forme de série, nous trouvons la relation de récurrence suivante sur les a_n :

$$a_{n+1} = n a_n \quad (1.1.3)$$

avec comme conditions initiales $a_0 = a_1 = 0$ ce qui donne $a_n = 0$ pour tout n . Or nous savons que

$$y = e^{-1/x} \quad (1.1.4)$$

est solution de (1.1.2). Le développement en série de MacLaurin de cette solution est identiquement nul, ce qui montre qu'il peut exister des solutions C^∞ que la méthode ne trouve pas. De plus, remarquons que le comportement asymptotique de (1.1.4) change du tout au tout lorsque le signe de la partie réelle de x change.

1.1.1. Définitions

1.1.1.1. Points singuliers

Débutons par définir les concepts de point singulier régulier et irrégulier.

Définition 1.1.1. Le point x_0 est un point singulier de

$$Y' = B(x)Y \quad (1.1.5)$$

si et seulement si $B(x)$ n'y est pas analytique.

Définition 1.1.2. Soit x_0 un point singulier de (1.1.5), alors x_0 est régulier si toute solution de (1.1.5) a une croissance au plus polynômiale au voisinage de x_0 : il existe $C \in \mathbb{R}^+$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que

$$\|Y\| < \frac{C}{|x - x_0|^N}, \quad (1.1.6)$$

au voisinage de x_0 . Si ce n'est pas le cas, le point est irrégulier.

Exemple 1.1.3. Pour une équation du premier degré écrite sous la forme

$$q(x)Y' = Y,$$

les conditions de la définition 1.1.1 deviennent les suivantes. Un point a est singulier si $q(a) = 0$. Si

$$\left. \frac{q(x)}{(x-a)} \right|_{x=a} \neq 0$$

le point est régulier, sinon il est irrégulier.

1.1.1.2. Germes

Les germes sont un outil commode lorsque la connaissance précise du domaine de la fonction n'est pas nécessaire, ce qui est le cas lors de l'étude des phénomènes locaux.

Définition 1.1.3. *Le germe d'une fonction analytique (resp C^∞) f de \mathbb{C}^n à l'origine est la classe d'équivalence à laquelle appartient toute fonction analytique (resp C^∞) qui coïncide avec f sur un voisinage U de 0 . L'ensemble des germes de fonctions analytiques est noté $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n, 0)$. Il est isomorphe à l'ensemble $\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}$ des séries convergentes à l'origine par la définition d'analyticité.*

1.1.1.3. Séries formelles

Les séries formelles sont un outil qui permet de considérer les séries sans se soucier de leur convergence. Elles permettent notamment une encapsulation simple et rapide de relations de récurrence et sont cohérentes avec les séries usuelles lorsque le concept de convergence s'applique. Elles permettent aussi de fournir un représentant unique à chaque germe de fonction analytique.

Pour $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, nous écrirons

$$\begin{aligned} |\alpha| &= \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \\ x^\alpha &= x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}. \end{aligned}$$

Avec cette notation, une série formelle en $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ est une expression de la forme

$$f = \sum_{|\alpha| \geq 0} c_\alpha x^\alpha, \quad c_\alpha \in \mathbb{C}.$$

L'ensemble de toutes les séries formelles à n variables sur le corps des complexes sera noté $\mathbb{C}[[x]]$, ou par $\mathbb{C}[[x_1, \dots, x_n]]$. La multiplication de séries formelles terme à terme est associative, commutative et bilinéaire, faisant de $\mathbb{C}[[x]]$ une algèbre commutative sur \mathbb{C} . Ainsi, tout élément non nul est inversible. Cet ensemble a comme sous-ensemble propre $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n, 0)$.

Il existe une base canonique de $\mathbb{C}[[x]]$ donnée par les monômes x^α . Cette base est ordonnée comme suit : x^α précède x^β si $|\alpha| < |\beta|$ ou si $|\alpha| = |\beta|$ et que α précède β dans l'ordre lexicographique. Soit x^{α_0} le premier élément de la base tel que, pour $f \in \mathbb{C}[[x]]$, $c_{\alpha_0} \neq 0$, alors $|\alpha_0|$ est le *degré* de f .

Finalement, notons qu'évaluer f ailleurs qu'en 0 n'a pas de sens puisque rien n'assure sa convergence.

1.1.2. Forme normale de Poincaré-Dulac

Réécrivons notre équation différentielle

$$x^{k+1}Y' = A(x)Y \quad (1.1.7)$$

sous la forme d'une équation différentielle ordinaire

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = x^{k+1} \quad (1.1.8)$$

$$\frac{dY}{dt} = A(x)Y. \quad (1.1.9)$$

Nous avons donc le champ de vecteurs $(x^{k+1}, A(x)Y)$ sur \mathbb{C}^{n+1} de variables $X = (x, Y)$.

Nous tombons dans le cadre de la forme normale de Poincaré-Dulac d'un champ de vecteurs $\dot{X} = v(X)$ au voisinage d'un point singulier que l'on va supposer, sans perte de généralité, en 0. Celle-ci étudie quand il existe un changement de variables ramenant $\dot{X} = F(X)$ à sa partie linéaire ou, plus généralement, à une forme simple.

On procède degré par degré. Pour ramener à la forme normale jusqu'à un ordre fini, on utilise un changement de variables polynomial. À la limite, le changement de variables est donné par une série formelle qui peut être convergente ou divergente.

Nous étudierons maintenant les conditions sous lesquelles un champ de vecteurs $F(X)$ est équivalent à une forme plus simple $G(X)$. Nous entendons par là que pour

$$F(X) = AX + V_2(X) + V_3(X) + \dots, \quad (1.1.10)$$

il existe un changement de variables $Z = H(X)$ tel que

$$\dot{Z} = \frac{\partial H}{\partial X} \dot{X} = G(Z).$$

Nous nous limiterons au cas où A est diagonalisable. Remarquons que si $A = QDQ^{-1}$ où D est diagonale, alors en appliquant le changement de variables $Z = Q^{-1}X$, on se ramène au cas où A est diagonale. Donc sans perte de généralité, on suppose que A est diagonale dans (1.1.10).

Supposons que nous avons déjà éliminé les termes non linéaires de degré inférieur à r . Nous pouvons alors supposer que F est de la forme

$$F(X) = AX + \sum_{i=r}^{\infty} V_i(X) \quad (1.1.11)$$

où $V_i(X)$ est un champ de vecteurs homogène de degré i . On cherche $H(X)$ qui conjugue $F(X)$ avec un nouveau champ $G(Z)$ dont les termes non linéaires sont de degré $\geq r + 1$. Nous allons procéder à l'envers et chercher $X = K(Z)$ qui conjugue $G(Z)$ avec $F(X)$. D'après la définition de conjugaison, il faudra que

$$D_Z K(Z)G(Z) = F(K(Z)). \quad (1.1.12)$$

Nous prétendons qu'il suffit de prendre $K(Z) = Z + P_r(Z)$ où P_r est un polynôme vectoriel de degré r . En remplaçant les applications par leur expression,

$$(I + D_Z P_r(Z))(AZ + \sum_{k \geq r+1}^{\infty} W_k(Z)) = A(Z + P_r(Z)) + \sum_{k \geq r}^{\infty} V_k(Z + P_r(Z)).$$

En égalisant les termes de degré r nous obtenons, en particulier l'équation suivante

$$D_Z P_r(Z)AZ = AP_r(Z) + V_r(Z). \quad (1.1.13)$$

En isolant $V_r(Z)$, cette équation s'écrit comme

$$D_Z P_r AZ - AP_r(Z) = V_r(Z). \quad (1.1.14)$$

Cette équation justifie l'introduction de l'application suivante. Soit \mathfrak{H}^r l'espace de tous les vecteurs de dimension n dont les composantes sont des polynômes homogènes de dimension r , et soit le crochet de Lie défini par $[F, G](Z) = D_Z G \circ F(Z) - D_Z F \circ G(Z)$. Alors l'équation (1.1.14) peut s'écrire comme

$$[AZ, P_r(Z)] = V_r(Z).$$

Comme la matrice A et $V_r(Z)$ sont connus, nous avons une équation à résoudre qui est linéaire dans les composantes de P_r . Nous aurons une solution de (1.1.14) si V_r est dans l'image de l'opérateur

$$L_A^r : \mathfrak{H}^r \rightarrow \mathfrak{H}^r : Q_r \mapsto L_A^r(Q_r), \quad (1.1.15)$$

où $L_A^r(Q_r)(Z) = [AZ, Q_r(Z)]$. De plus, s'il est surjectif, nous aurons une solution peu importe V_r . Puisque \mathfrak{H}^r est de dimension finie, il est équivalent de s'assurer qu'il est injectif. En effet,

$$\dim \text{Ker} L_A^r + \dim \text{Im} L_A^r = \dim \mathfrak{H}^r.$$

Puisque le déterminant d'une matrice est égal au produit de ses valeurs propres, nous pouvons énoncer le corolaire suivant.

Corollaire 1.1.1. *L'opérateur L_A^r est surjectif si et seulement si $\det A \neq 0$.*

Supposons la matrice A diagonale ($a_{ij} = \lambda_j \delta_{ij}$) et calculons l'image de L_A^r sur une base de \mathfrak{H}^r formée des monômes de la forme

$$Z^\alpha e_m = Z_1^{\alpha_1} \dots Z_n^{\alpha_n} e_m$$

où $|\alpha| = r$ et e_m est le m^e vecteur canonique de \mathbb{C}^n . Cela nous permettra de trouver sous quelles conditions, L_A^r sera surjectif.

Lemme 1.1.1. *Le vecteur $h = Z^\alpha e_m \in \mathfrak{H}^r$ avec $|\alpha| = r$ est un vecteur propre de L_A^r de valeur propre $-\lambda_m + \sum_{l=1}^n \lambda_l \alpha_l$.*

PREUVE.

$$L_A^r(h) = [AZ, h] = D_Z h A Z - A h.$$

Pour obtenir une expression simple pour $D_Z h$, remarquons que

$$\frac{\partial Z^\alpha}{\partial Z_k} = \alpha_k Z^{\alpha_1} \dots Z^{\alpha_{k-1}} Z^{\alpha_{k+1}} \dots Z^{\alpha_n} = \frac{\alpha_k Z^\alpha}{Z_k},$$

et donc que

$$\frac{\partial Z^\alpha}{\partial Z} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_1 \frac{Z^\alpha}{Z_1} & \alpha_2 \frac{Z^\alpha}{Z_2} & \dots & \alpha_n \frac{Z^\alpha}{Z_n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.1.16)$$

De plus, comme A est supposée diagonale, $AZ = (\lambda_1 Z_1, \dots, \lambda_n Z_n)^T$ et alors

$$D_Z h \cdot AZ = Z^\alpha (0, \dots, 0, \sum_{l=1}^n \lambda_l \alpha_l, 0, \dots, 0)^T = Z^\alpha \left(\sum_{l=1}^n \lambda_l \alpha_l \right) e_m. \quad (1.1.17)$$

On voit aussi facilement que

$$A(0, \dots, 0, Z^\alpha, 0, \dots, 0)^T = (0, \dots, 0, \lambda_m Z^\alpha, 0, \dots, 0)^T = \lambda_m Z^\alpha e_m. \quad (1.1.18)$$

En combinant ces expressions,

$$\begin{aligned}
L_A^r(h) &= [AZ, (0, \dots, 0, Z^\alpha, 0, \dots, 0)^T] \\
&= Z^\alpha(0, \dots, 0, \sum_{l=1}^n \lambda_l \alpha_l, 0, \dots, 0)^T - (0, \dots, 0, \lambda_m Z^\alpha, 0, \dots, 0)^T \\
&= \left(\sum_{l=1}^n \lambda_l \alpha_l - \lambda_m \right) (0, \dots, 0, Z^\alpha, 0, \dots, 0) \\
&= \left(-\lambda_m + \sum_{l=1}^n \lambda_l \alpha_l \right) h.
\end{aligned} \tag{1.1.19}$$

Le vecteur est donc bien un vecteur propre et il est associé à la valeur propre

$$-\lambda_m + \sum_{l=1}^n \lambda_l \alpha_l.$$

□

Ainsi, si cette quantité est non-nulle pour tous les vecteurs de la base de vecteurs propres, l'application sera surjective et nous pourrions faire disparaître les termes d'ordre r . Si cela n'est pas le cas, nous pourrions quand même faire disparaître tous les monômes pour lesquels cette quantité est non nulle.

Définition 1.1.4. *Un ensemble de nombres complexes est dit résonant s'il satisfait la condition*

$$\lambda_m = \sum_{l=1}^n \lambda_l \alpha_l \tag{1.1.20}$$

pour un certain $m \in \{1, 2, \dots, n\}$ et un certain $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ avec $|\alpha| \geq 2$. Une matrice carrée est résonante si l'ensemble formé de ses valeurs propres est résonant.

Théorème 1.1.1 (Théorème de linéarisation formelle de Poincaré). *Un champ de vecteurs $F(X)$ non-résonant est formellement équivalent à sa linéarisation $D_X F(X) = AX$.*

PREUVE. Il ne reste qu'à montrer que la suite de composition d'applications polynomiales converge vers une application formelle. En notant par K^{m-1} la composition des applications jusqu'à l'ordre $m-1$, nous avons

$$K^m = K_m \circ K^{m-1} = K^{m-1} + P_m(K^{m-1}).$$

Les nouveaux termes de K^m ont un degré minimal de m et la composition laisse donc inchangés tous les termes de degré inférieur ou égal à $m-1$. Ainsi $\forall N \in \mathbb{N}$, en se restreignant aux N premiers termes des applications, nous avons convergence

des coefficients de K . Or cela est précisément la condition de convergence pour les séries formelles et donc $\lim_{m \rightarrow \infty} K^m$ converge vers une série formelle. \square

Dans le cas non linéarisable, nous avons les deux théorèmes suivants.

Théorème 1.1.2 (Poincaré-Dulac). *Un champ formel avec le linéarisé A sous forme diagonale est formellement équivalent à un champ*

$$AZ + \sum W_j(Z), \quad (1.1.21)$$

où les $W_j(Z)$ sont des monômes résonants. Dans ce cas, les monômes résonants sont de la forme $aZ^\alpha e_m$ où $\lambda_m = \sum \alpha_l \lambda_l$.

Ce deuxième théorème donne des conditions sous lesquelles il existe un changement de variables analytique à la forme normale. Nous l'énonçons sans preuve.

Théorème 1.1.3 (Théorème de Poincaré). *On considère un champ de vecteurs analytique de la forme (1.1.10) avec un point singulier à l'origine. Si toutes ses valeurs propres sont dans un même demi-plan ouvert borné par une droite passant par l'origine, alors un germe de champ de vecteurs analytique est analytiquement équivalent à sa forme normale qui ne contient qu'un nombre fini de monômes résonants.*

Chapitre 2

PRÉLIMINAIRES SUR LE PHÉNOMÈNE DE STOKES

Dans le présent chapitre, nous présentons le phénomène de Stokes et quelques résultats principaux qui s'y rattachent.

Les équations considérées sont toutes des cas particuliers de l'équation

$$x^m Y' = A(x)Y, \quad x \in \mathbb{C}^n, \quad Y : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n, \quad A : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}. \quad (2.0.1)$$

Nous nous limiterons au cas où $A(0)$ est diagonalisable avec ses valeurs propres distinctes.

2.1. PRÉLIMINAIRES

2.1.1. Équation en dimension 1

Soit $x \in \mathbb{C}, y \in \mathbb{C}$ et soit l'équation différentielle linéaire à une dimension

$$x^m y' = a(x)y \quad (2.1.1)$$

où $2 \leq m \in \mathbb{N}$ et $a(x) = \lambda + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$ est le germe d'une fonction holomorphe et non nulle en $x = 0$. L'entier $m - 1$ est appelé *rang de Poincaré* de la singularité. La solution d'un tel système est

$$y = C \exp \int \frac{a(x)}{x^m} dx.$$

L'intégrant est

$$x^{-m}(\lambda + a_1 x + a_2 x^2 + \dots) = x^{-m}(\lambda + \dots + a_{m-2} x^{m-2}) + \frac{a_{m-1}}{x} + g(x),$$

pour une certaine fonction holomorphe $g(x) = a_m + a_{m+1}x + \dots$. L'intégrale peut ainsi s'écrire

$$x^{1-m} \left(\lambda(1-m)^{-1} + a_1(2-m)^{-1}x + \dots + a_{m-2}(-1)^{-1}x^{m-2} \right) + a_{m-1} \ln(x) + G(x).$$

En posant $h(x) = \exp G(x)$,

$$y(x) = \exp \left(-x^{1-m}(\lambda(m-1)^{-1} + \dots + a_{m-2}x^{m-2}) \right) x^{a_{m-1}} h(x) \quad (2.1.2)$$

$$= e^{\zeta(x)} x^{a_{m-1}} h(x), \quad (2.1.3)$$

où $\zeta(x)$ est un polynôme de degré non nul plus petit ou égal à $m-1$ en $\frac{1}{x}$. La solution y se comprend en étudiant ses trois composantes. D'abord, $h(x)$ est holomorphe. La fonction $e^{\zeta(x)}$ a l'origine comme singularité essentielle, mais est holomorphe dans le reste du plan complexe. Finalement, $x^{a_{m-1}}$ est ramifié dès que $a_{m-1} \notin \mathbb{Z}$ et sa croissance est au plus polynomiale à l'origine si on l'approche le long d'une demi-droite. C'est-à-dire que

$$|x^{a_{m-1}}| < |x|^{-N},$$

pour un certain $N \in \mathbb{Z}$.

Le grand théorème de Picard énonce qu'une fonction holomorphe possédant une singularité essentielle à l'origine prendra comme valeur tout nombre complexe, sauf peut-être un, une infinité de fois, et ce, dans tout voisinage de 0. Le comportement de la solution est donc loin d'être trivial. Néanmoins, selon les trajectoires d'approche, nous pouvons qualifier le comportement asymptotique de la solution.

Nous montrerons que le comportement asymptotique de la solution est déterminé par $\exp(-(m-1)^{-1}\lambda/x^{m-1})$. La partie réelle de λ/x^{m-1} détermine le module et sa partie imaginaire, l'argument. Donnons d'abord une définition pour alléger l'étude qui suit.

Définition 2.1.1. *Nous dirons qu'une fonction y est plate sur un secteur S si, sur celui-ci, son module diminue plus rapidement que n'importe quelle puissance de x lorsque $x \rightarrow 0$ et qu'il en est de même pour toutes ses dérivées. Elle sera dite verticale si son inverse multiplicatif est plat.*

Soit $\rho \in S^1 \subset \mathbb{C}$ et $\rho\mathbb{R}_+$ le rayon associé. Pour considérer le comportement de (2.1.2) lorsque x tend vers 0 le long de rayons, nous introduisons la nouvelle variable $\omega = x^{m-1}$ qui tend aussi vers 0 puisque nous avons restreint notre étude au cas $m \geq 2$. Comme l'opération de puissance entière est bien comprise, nous pourrons en terminant retourner à la variable de départ x .

Le comportement du module de $y(\omega)$ dépend principalement de

$$\text{sign}(\text{Re}(-(m-1)^{-1}\lambda/\omega)) = -\text{sign}(\text{Re}(\lambda\bar{\omega})) \quad (2.1.4)$$

$$= -\text{sign}(\text{Re}(\lambda)\text{Re}(\omega) + \text{Im}(\lambda)\text{Im}(\omega)). \quad (2.1.5)$$

En utilisant l'identification usuelle $\mathbb{C} \sim \mathbb{R}^2$, nous pouvons voir que le signe est l'inverse de celui du produit scalaire de λ et ω .

- (1) Si $\lambda \cdot \omega > 0$, y est plate.
- (2) Si $\lambda \cdot \omega < 0$, y est verticale.

Dans le cas où $\lambda \cdot \omega = 0$, le module de (2.1.2) est déterminé par le premier terme de l'exponentielle dont la partie réelle ne s'annule pas sur le rayon considéré. S'ils sont tous nuls alors la solution est dominée par $\omega^{a_{m-1}/m-1}$. Remarquons aussi que le comportement de la solution passe de plat à vertical (ou l'inverse) lorsque x traverse un rayon pour lequel $\lambda \cdot \omega = 0$.

La réflexion est similaire pour la partie imaginaire. En effet, c'est encore le signe de celle-ci qui détermine le sens de rotation ou si même il y a rotation. Nous avons que

$$-\text{sign}(\text{Im}(\lambda\bar{\omega})) = \text{sign}(\text{Re}(\lambda)\text{Im}(\omega) - \text{Im}(\lambda)\text{Re}(\omega)) = \text{sign}(\lambda \cdot (-i\omega)),$$

où le produit scalaire est pris sur les vecteurs correspondants de \mathbb{R}^2 . Le signe de la partie imaginaire est donc déterminé directement par l'angle entre λ et $-i\omega$ ou, plus directement, par l'angle entre λ et ω . Pour les classifications suivantes, nous dirons que ω est à gauche de λ s'il se trouve dans le demi-plan ouvert

$$H_+^\lambda := \{re^{i\theta\pi}\lambda \in \mathbb{C} \mid r \in \mathbb{R}_+, \theta \in]0, 1[\},$$

et à droite s'il est dans $H_-^\lambda = -H_+^\lambda$. Remarquez que si ω est à gauche de λ alors $\lambda \cdot (-i\omega)$ est positif. Ainsi,

- (1) Si ω est à gauche de λ , l'argument de (2.1.2) augmente de plus en plus rapidement vers l'infini quand $\omega \rightarrow 0$ le long de $\rho\mathbb{R}^+$.
- (2) Si ω est à droite de λ alors l'argument de (2.1.2) tend vers $-\infty$ quand $\omega \rightarrow 0$ le long de $\rho\mathbb{R}^+$.

En utilisant les qualifications données sur le module et l'argument, nous obtenons une qualification des solutions lorsque $\omega \rightarrow 0$ le long de $\rho\mathbb{R}_+$.

Soit θ le plus petit angle positif qu'il faut parcourir pour aller de λ à ρ dans le plan ω . Alors, si

- (1) $0 < \theta < \pi/2 \Rightarrow y$ est plate et oscille positivement.

- (2) $\pi/2 < \theta < \pi \Rightarrow y$ est verticale et oscille positivement.
- (3) $\pi < \theta < 3\pi/2 \Rightarrow y$ est verticale et oscille négativement.
- (4) $3\pi/2 < \theta < 2\pi \Rightarrow y$ est plate et oscille négativement.

Nous pouvons terminer l'étude en appliquant aux 4 secteurs définis dans la dernière énumération, la transformation géométrique $\omega \rightarrow \omega^{1/(m-1)}$ qui envoie le revêtement de \mathbb{C} à $m-1$ feuilles trouées à l'origine sur \mathbb{C} . Nous ne traiterons pas plus longuement de cette transformation puisqu'elle est bien connue. Remarquons néanmoins que les 4 rayons particuliers associés aux valeurs $\lambda, -\lambda, i\lambda$ et $-i\lambda$ sont devenus $4(m-1)$ rayons identiquement espacés de $\pi/2(m-1)$ radians. Les changements drastiques de module se produisent à un rayon sur deux et surviennent à chaque $\pi/(m-1)$ radians à partir de $(\pi/2)/(m-1)$. En fait, tel que nous le verrons plus tard, l'apparition de ces changements drastiques de comportement alors que certains termes négligeables deviennent prédominants est appelée *phénomène de Stokes*.

2.1.1.1. Classification holomorphe

Intéressons-nous à la relation d'équivalence entre deux systèmes (2.1.1). Il serait bien de pouvoir dire que deux systèmes sont équivalents à un niveau plus général que l'égalité de tous les coefficients de $a(x)$. Dans cette section, nous traiterons de *l'équivalence holomorphe*. Plus précisément,

Définition 2.1.2. *Deux germes de systèmes $x^m Y' = a(x)Y$ et $x^n Z' = \bar{a}(x)Z$ sont holomorphiquement équivalents s'il existe un germe de transformation holomorphe $Z = t(x)Y$ qui transforme le premier dans le second.*

Proposition 2.1.1. *Deux systèmes méromorphes à une dimension $x^m y' = a(x)y$ et $x^n z' = \bar{a}(x)z$ sont holomorphiquement équivalents si et seulement si $m = n$ et $a(x) - \bar{a}(x)$ est m -plat à l'origine.*

PREUVE. Montrons d'abord que le rang de Poincaré est invariant sous un changement de variables linéaire et analytique. Soit

$$x^m y' = a(x)y, \quad a(0) \neq 0$$

et soit $y = t(x)\bar{y}$ avec $t(x)$ analytique et inversible en $x = 0$. Alors

$$x^m (t'(x)\bar{y} + t(x)\bar{y}') = a(x)t(x)\bar{y}. \quad (2.1.6)$$

Donc,

$$x^m \bar{y}' = t^{-1}(x)(a(x)t(x) - x^m t'(x))\bar{y}. \quad (2.1.7)$$

Il est clair que $f(x) = t^{-1}(x)(a(x)t(x) - x^m t'(x))$ est analytique à l'origine puisque $t(0) \neq 0$. Aussi, $f(0) \neq 0$ et $f(x)$ est donc inversible en 0. Le rang de Poincaré est donc préservé par tout changement de variables linéaire analytique et inversible à l'origine. Maintenant si on veut que le membre de droit de cette nouvelle équation soit égal à $\bar{a}(x)\bar{y}$, il faut

$$t^{-1}(x)(a(x)t(x) - x^m t'(x)) = \bar{a}(x), \quad (2.1.8)$$

ce qui entraîne

$$x^{-m}(a(x) - \bar{a}(x)) = t^{-1}(x)t'(x). \quad (2.1.9)$$

Le membre de gauche est holomorphe si et seulement si $a(x) - \bar{a}(x)$ n'a pas de terme de degré inférieur à m . De plus, l'équation

$$x^{-m}(a(x) - \bar{a}(x)) = t'(x)/t(x)$$

est à variables séparables et la solution est

$$t(x) = \exp \int x^{-m}(a(x) - \bar{a}(x))dx.$$

Il y a donc équivalence entre le caractère m -plat de $a(x) - \bar{a}(x)$ et le caractère holomorphe de $t(x)$, puisque l'intégrant dans le membre de droite ne doit pas contenir de terme de degré négatif. \square

Remarque 2.1.1. *Si $a(x)$ était une série formelle, la preuve fonctionnerait encore avec $t(x)$ une série formelle inversible (i.e. $t(0) \neq 0$).*

Corollaire 2.1.1. *Une équation linéaire du type (2.1.1) est holomorphiquement équivalente à exactement une équation du type*

$$x^m y' = (\lambda + p_1 x + \dots + p_{m-1} x^{m-1})y, \quad p_i \in \mathbb{C}. \quad (2.1.10)$$

2.1.2. Équation en dimension n

Généralisons notre étude aux équations de dimension n (ie. $Y : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^n$) de la forme

$$x^m Y' = A(x)Y, \quad A \in \text{Mat}(n, O(\mathbb{C}, 0)). \quad (2.1.11)$$

2.1.2.1. Classification formelle

Afin de classifier les équations du type (2.1.11) où $m \geq 2$ selon la relation d'équivalence donnée par un changement de variables formel à l'origine, nous la réécrivons comme un système à $n + 1$ dimensions en introduisant une nouvelle

variable t telle que

$$\frac{dx}{dt} = x^m.$$

On utilise alors le fait que

$$\frac{dY}{dx} = \frac{dY/dt}{dx/dt}$$

pour séparer le système ainsi :

$$\begin{cases} \dot{x} = x^m \\ \dot{Y} = A_0 Y + x A_1 Y + x^2 A_2 Y + \dots \end{cases} \quad (2.1.12)$$

Son spectre de linéarisation à l'origine est donné par $\lambda = (0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$. En appliquant les étapes de la preuve par induction du théorème 1.1.1 nous pouvons éliminer tous les termes non résonants de son développement de Taylor. Les seuls que nous ne pourrions faire disparaître sont ceux de la forme

$$x^k Y_i \frac{\partial}{\partial Y_j}.$$

En effet, le seul exposant possible pour Y_i est 1 puisque le système initial est linéaire. Cela nous permet de définir la condition de résonance pour ce genre de systèmes et d'en offrir une version plus concise en utilisant le fait que $\lambda_0 = 0$. Ainsi,

$$\lambda_j = k\lambda_0 + \lambda_i \Leftrightarrow \lambda_i = \lambda_j.$$

Définition 2.1.3. *Un système de la forme (2.1.11) où $m \geq 2$ est dit résonant si $\exists i \neq j$ tels que $\lambda_i = \lambda_j$.*

Théorème 2.1.1. *Un système non-résonant de la forme (2.1.11) pour lequel l'origine est une singularité de rang de Poincaré ≥ 2 est formellement équivalent à $x^m Y' = \Lambda(x)Y$ où $\Lambda(x) = \text{diag}(p_1(x), \dots, p_n(x))$ avec $\deg(p_j) < m$ et $p_j(0) = \lambda_j$.*

PREUVE. Comme le système est non-résonant, nous pouvons enlever tous les termes qui ne sont pas diagonaux et nous ramener à n systèmes de la forme

$$x^m y_j' = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_{ij} x^i \right) y_j.$$

Le théorème suit alors directement de la remarque 2.1.1. □

La série qui est utilisée pour normaliser le système n'est en général pas convergente et c'est pourquoi nous parlons simplement de classification formelle. Néanmoins le système normalisé est toujours intégrable.

2.1.3. Normalisation holomorphe

Nous serions intéressés à normaliser le système avec une transformation holomorphe qui pourrait s'appliquer sur un voisinage de l'origine mais cela n'est pas toujours possible. Néanmoins, nous pourrions trouver une telle transformation sur des secteurs.

Rappelons que pour une équation du type $x^m y' = a(x)y$, $a(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ le *comportement asymptotique* de la solution est dominé par un facteur de la forme $\exp(\operatorname{Re}(\lambda/x^{m-1}))$ (sauf sur un nombre fini de rayons). Ce type de facteur change brusquement de comportement pour certaines valeurs de l'argument de x . Nous verrons dans les prochaines lignes que cette réflexion s'applique aussi au quotient des composantes dominantes de deux vecteurs solutions.

Nous venons de voir que lorsque le système est non résonant, il peut être mis sous une forme normale diagonale pour laquelle nous pouvons donner une base de solutions de la forme

$$B = \{Y_1, \dots, Y_n\}.$$

Pour chaque vecteur Y_j , la seule composante non nulle est la j^e , que nous noterons y_{jj} . Le quotient entre deux tels éléments y_{jj} et y_{kk} change brusquement de comportement asymptotique lorsque x traverse certains rayons. Nous explorons ce fait dans la prochaine section.

2.2. PHÉNOMÈNE DE STOKES

Définition 2.2.1. Soit λ_i et λ_j deux valeurs propres d'un même système. Nous appelons rayons de séparation associés à la paire (λ_j, λ_i) les $2(m-1)$ rayons $\rho \in S^1$ où ρ est solution de

$$\operatorname{Re} \left(\frac{\lambda_j - \lambda_k}{\rho^{m-1}} \right) = 0. \quad (2.2.1)$$

Proposition 2.2.1. Pour deux valeurs propres distinctes λ_j et λ_i , le quotient des composantes y_{jj} et y_{kk} des solutions respectives de la forme normale associée dans un secteur $S = \{\arg x \in]a, b[\}$ ne contenant aucune solution de l'équation (2.2.1) est soit vertical soit plat.

PREUVE. Le ratio près de 0 est dominé par un terme de la forme

$$\exp \left(-(\lambda_j - \lambda_k)(m-1)^{-1} x^{1-m} \right) \quad (2.2.2)$$

qui a un changement de comportement drastique (vertical à plat) le long des rayons de séparations, la partie réelle de (2.2.2) passant de positive à négative. \square

Il sera donc normal que les rayons de séparation fassent partie des critères lorsque viendra le temps de qualifier les régions sur lesquelles on peut normaliser le système avec une transformation holomorphe.

Notation 2.2.1. Si $\hat{H}(x)$ est une série formelle, nous noterons $H_N(x)$ la série tronquée à l'ordre N .

Définition 2.2.2. Soit $\hat{H} \in \text{Mat}(n, \mathbb{C}[[x]])$ une matrice dont toutes les entrées sont des séries formelles en x . Soit $H \in \text{Mat}(n, O(S))$ une fonction matricielle dont les entrées sont des fonctions holomorphes sur un secteur ouvert S tel que $0 \in \bar{S}$. On dira que H étend \hat{H} sur S si \hat{H} est le développement asymptotique de H sur S , c'est-à-dire :

$$\| H(x) - \hat{H}_N(x) \| = o(|x|^{-N}).$$

Pour les prochains théorèmes nous ferons référence au système suivant pour lequel nous supposons $m \geq 2$.

$$x^m Y' = A(x)Y, \quad A(x) \in \text{Mat}(n, O(\mathbb{C}, 0)). \quad (2.2.3)$$

Théorème 2.2.1. Soit un système (2.2.3) pour lequel $A(0)$ est non-résonant et $m \geq 2$. Soit un secteur ouvert S borné par deux rayons $a\mathbb{R}_+$ et $b\mathbb{R}_+$ (avec $a, b \in S^1$) qui ne sont pas des rayons de séparation pour aucune paire de valeurs propres. Supposons de plus que S ne contient pas deux rayons de séparation associés à la même paire de valeurs propres.

Alors tout changement de variables du théorème 2.1.1,

$$\hat{H} \in GL(n, \mathbb{C}[[x]]),$$

qui conjugue (2.2.3) avec sa forme normale $x^m Y' = \Lambda(x)Y$, peut être étendu sur S à une conjugaison holomorphe

$$H_S \in GL(n, O(S))$$

entre (2.2.3) et sa forme normale sur S . Si l'angle entre les rayons bordant S est plus grand que $\pi/(m-1)$ alors H_S est unique.

Nous savons donc maintenant que sur un secteur de bonne ouverture (un peu plus de $\pi/(m-1)$) non seulement la normalisation formelle peut être étendue à une normalisation holomorphe, mais en plus, elle est unique. Maintenant, en prenant des secteurs d'ouverture $\pi/(m-1) + 2\delta$ nous pouvons couvrir un voisinage troué de l'origine par $2(m-1)$ secteurs $S_1, \dots, S_{2(m-1)}$ qui se superposent sur de

fins secteurs de largeur 2δ (voir figure 2.1).

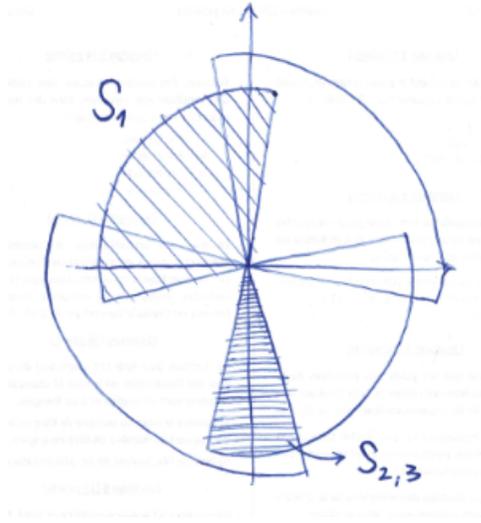


FIGURE 2.1. Exemple des secteurs S_j et des intersections $S_{j,j+1}$ pour $k = 2$

Définition 2.2.3. Une matrice fondamentale de solutions du système (2.1.11), est une matrice

$$W(x) = (w_1(x), \dots, w_n(x))$$

dont les colonnes sont les vecteurs d'une base de solutions du système (2.1.11).

Soit $S_{j,j+1} := S_j \cap S_{j+1}$ (avec l'addition prise modulo $2k$). Alors sur ce secteur cohabitent deux normalisations holomorphes H_j et H_{j+1} . On peut donc définir un automorphisme de la forme normale sur ce secteur fin par la composition

$$F_j = H_j H_{j+1}^{-1}.$$

C'est un changement de variables qui permet de passer d'une base de solutions sur S_{j+1} représentée par sa matrice fondamentale des solutions $W_{j+1}(x)$ à une base de solutions sur S_j représentée par $W_j(x)$.

Le système sous forme normale possède la solution diagonale canonique sur S_{j+1} que nous fixons et noterons par $W_{j+1}(x)$. Par le fait même, cela fixe les représentations matricielles des automorphismes F_j par l'égalité

$$W_{j+1} = F_j W_j = W_j C_j, \quad C_j \in \text{Mat}(n, \mathbb{C}).$$

Définition 2.2.4. La matrice C_j représentant l'automorphisme $F_j = H_j H_{j+1}^{-1}$ sur $S_{j,j+1}$ est appelée sa matrice de Stokes. Elle exprime la nouvelle base de solutions

donnée par les colonnes de $W_{j+1} = F_j W_j(x)$ comme une combinaison linéaire des vecteurs colonnes de $W_j(x)$, la base de solution sur S_j , les coefficients étant donnés par les entrées de C_j . La collection ordonnée des $2(m-1)$ matrices de Stokes est appelée la collection de Stokes du système initial.

Le lecteur pourrait alors se demander quel est l'impact du choix de la solution particulière sur la collection de Stokes $\{C_j\}$. Premièrement rappelons que la solution diagonale est uniquement définie modulo la multiplication par une matrice constante diagonale. Ainsi, il suffit de considérer l'impact de

$$W_j(x) \longrightarrow W_j(x)D_j = \widehat{W}_j(x), \quad D_j \text{ diagonale,}$$

sur la collection $\{C_j\}$. Pour une nouvelle solution $\widehat{W}_j = W_j(x)D_j$, nous trouvons la nouvelle matrice de Stokes ainsi :

$$\widehat{W}_{j+1} = W_{j+1}D_{j+1} = W_j(x)C_jD_{j+1} = \widehat{W}_jD_j^{-1}C_jD_{j+1}.$$

Et donc,

$$\widehat{C}_j = D_j^{-1}C_jD_{j+1}.$$

Nous pouvons donc dire que chaque élément de la collection de Stokes d'un système est uniquement défini modulo conjugaison par des matrices diagonales, une par secteur. Bien entendu, cela n'est plus valable lorsque nous permettons les rotations en x .

2.2.1. Propriétés des matrices de Stokes

En supposant la non-résonance du système, nous savons que $\lambda_j \neq \lambda_l$ pour $j \neq l$. Nous ferons ici une hypothèse supplémentaire. C'est en fait cette hypothèse qui est le cœur de notre présente étude. Elle s'énonce comme suit.

Hypothèse 2.2.1. *Les valeurs propres du systèmes sont ordonnées de sorte que*

$$Re \lambda_1 < \dots < Re \lambda_n. \quad (2.2.4)$$

Remarquons dans un premier temps que cette hypothèse n'est pas restrictive puisque, comme le nombre de valeurs propres est fini, elle peut être satisfaite par une rotation en x et permutation des coordonnées de Y . Or le choix de ces transformations n'est bien entendu pas unique et c'est l'impact précis de ce choix sur la collection de Stokes que nous étudions dans ce mémoire.

Remarquons aussi que l'hypothèse que les parties réelles des valeurs propres

du système sont distinctes n'est pas une conséquence directe du caractère non-résonant du système.

Exemple 2.2.1. *Le système*

$$x^2 Y' = (\text{diag}(1 + i, 1 - i) + O(x)) Y$$

est non-résonant et ses valeurs propres ne peuvent pas être ordonnées selon leur partie réelle.

Supposons pour le moment (2.2.4) satisfait. \mathbb{R}_+ n'est pas un rayon de séparation pour le système. Sur ce dernier, les solutions peuvent être ordonnées selon leur ordre de *platitude* \prec .

Définition 2.2.5. *Soit deux fonctions $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Nous dirons que f est plus plate que g sur un secteur S , et écrirons $f \prec g$, si f/g est plate à l'origine sur tous les rayons*

$$\rho \mathbb{R}^+, \quad \rho \in S.$$

Nous désirons maintenant montrer que si les composantes diagonales de la matrice fondamentale de solutions sont ordonnées par ordre de platitude sur $S_{1,2}$, alors elles sont ordonnées dans le même ordre sur les secteurs fins $S_{2k-1,2k}$ et dans le sens inverse sur les $S_{2k,2k+1}$.

Théorème 2.2.2. *Soit $\rho \in S^1$ et $R = \rho \mathbb{R}_+$ le rayon associé. Soit $W_\rho(x)$ la matrice fondamentale diagonale des solutions de la forme normale le long de R et soit $w_i(x)$ et $w_j(x)$ deux éléments diagonaux distincts de $W(x)$. Si la condition (2.2.4) est respectée, nous avons sur \mathbb{R}_+ que*

$$w_n(x) \prec \dots \prec w_1(x).$$

De plus, si R n'est pas un rayon de séparation, il existe une permutation σ des n premiers entiers telle que sur R nous ayons

$$w_{\sigma(1)} \prec \dots \prec w_{\sigma(n)}.$$

Finalement, si entre \mathbb{R}_+ et R il y a un nombre égal, N , de rayons de séparation pour chaque paire de valeurs propres, la permutation σ est l'identité si N est pair et $\sigma(j) = n - j + 1$ sinon.

PREUVE. D'abord, comme nous supposons que l'hypothèse (2.2.4) est vérifiée, nous avons comme conséquence directe que pour $k > j$, $\text{Re } \lambda_k > \text{Re } \lambda_j$ et alors

que

$$\frac{w_k(x)}{w_j(x)} = \frac{\exp[-x^{1-m}(\lambda_k(1-m)^{-1} + o(1))]}{\exp[-x^{1-m}(\lambda_j(1-m)^{-1} + o(1))]} = \exp[x^{1-m}((\lambda_j - \lambda_k)(1-m)^{-1} + o(1))]$$

est plat sur \mathbb{R}_+ . Ainsi $w_k(x) \prec w_j(x)$ si $k > j$. On a donc l'ordre total sur les n composantes.

Sur R tel que défini ci-haut, nous savons que $\forall k, j \operatorname{Re}(\rho^{1-m}(\lambda_k - \lambda_j)) \neq 0$ et donc que le rapport est soit toujours positif soit toujours négatif, rendant plat exactement un des quotients $w_i(x)/w_j(x)$ ou $w_j(x)/w_i(x)$.

Finalement, montrons qu'après avoir parcouru un angle de $N\pi/(m-1)$, l'ordre de platitude est identique à celui de départ (celui sur \mathbb{R}_+) ou exactement l'inverse. Nous avons que

$$\operatorname{sign}(\operatorname{Re}(\lambda x^{-1})) = \operatorname{sign}(\lambda \cdot \bar{x}) = \operatorname{sign}(|\lambda| |\bar{x}| \cos(\theta)) = \operatorname{sign}(\cos(\theta)),$$

où θ est l'angle entre λ et \bar{x} . En utilisant $\lambda = \lambda_k - \lambda_j$ nous voyons que le signe de $w_k(x)/w_j(x)$ change obligatoirement lorsqu'il s'annule. Passer exactement une fois par ce genre de changement pour chaque paire de valeur propres fait que toutes les relations d'ordre sont inversées. $w_n(x) \prec \dots \prec w_1(x)$ devient $w_1(x) \prec \dots \prec w_n(x)$. Cela se produit en particulier après avoir parcouru $\pi/(m-1)$ radians. En réappliquant l'argument on observe l'alternance entre l'identité et $\sigma(j) = n - j + 1$, selon la parité de N .

Le cas où un rayon du plan complexe est un rayon de séparation pour plus qu'une paire de valeurs propres est traité dans la section *Résultats* au lemme 3.1.1. \square

2.2.1.1. Forme particulière des matrices de Stokes

Les différents ordres de platitude des composantes diagonales de la matrice fondamentale des solutions, $W(x)$, permettent de donner plus de précisions sur la forme des matrices de Stokes. En utilisant la définition,

$$F_j(x)W_j(x) = W_j(x)C_j,$$

nous pouvons préciser la forme particulière de C_j . Rappelons que $F_j(x)$ est un automorphisme de la forme normale de (2.1.11) sur $S_{j,j+1}$. En l'isolant, nous obtenons

$$F_j(x) = W_j(x)C_j(x)W_j^{-1}(x).$$

Ignorons les indices pour simplifier l'écriture (i.e. $F(x) = F_j$, $C(x) = C_j(x)$ et $S = S_{j,j+1}$). Nous pouvons écrire que

$$f_{l,m}(x) = w_{l,l}(x)c_{l,m} \frac{1}{w_{m,m}(x)} = \frac{w_{l,l}(x)}{w_{m,m}(x)}c_{l,m}.$$

Comme $F(x)$ est un automorphisme de la forme normale sur S , il est entendu que ses composantes $f_{l,m}$ ne peuvent pas y être *verticales*. Si $w_j(x) \succ w_m(x)$ pour un certain rayon $\rho\mathbb{R}_+ \subset S$, alors $c_{l,m} = 0$. De cette observation, on tire que si S contient un rayon de séparation pour la paire λ_l, λ_m alors $c_{l,m} = 0 = c_{m,l}$.

En supposant l'hypothèse (2.2.4) vérifiée, l'ordre total sur les composantes diagonales de $W(x)$ se donne directement sur \mathbb{R}_+ . Pour chaque ligne,

$$\forall l < m \Rightarrow w_l(x) \succ w_m(x).$$

Ainsi, il faut que

$$\forall l < m \Rightarrow c_{l,m} = 0$$

pour que $F(x)$ soit asymptotique à son développement formel, c'est-à-dire pour qu'aucune de ses composantes ne soit verticale. Notons que puisque toutes les paires de valeurs propres ont exactement un rayon de séparation dans le secteur compris entre \mathbb{R}_+ et $e^{i\pi/(k+1)}\mathbb{R}_+$ (k étant le rang de Poincaré de la singularité), la proposition 2.2.2 assure que l'ordre total sur les $w_k(x)$ est complètement inversé. La matrice de Stokes C_0 est triangulaire inférieure et la suivante, C_1 est triangulaire supérieure. Cet argument peut se répéter pour faire le tour de l'origine et se synthétise par le lemme suivant.

Lemme 2.2.1. *En supposant l'hypothèse 2.2.4, la matrice de Stokes $C_j(x)$ définie sur $S_{j,j+1}$ est triangulaire supérieure si j est pair et triangulaire inférieure sinon.*

Chapitre 3

RÉSULTATS

Maintenant que les concepts fondamentaux sont définis, nous énonçons dans cette section les résultats directement liés à notre question de recherche : "Comment décrire les matrices de Stokes d'un nouveau système obtenu d'un ancien par une rotation dans la variable indépendante?" Nous allons donner les impacts d'un tel changement sur les valeurs propres du système, sur les rayons de Stokes, sur les secteurs admissibles et sur les solutions propres de l'équation déployée. Nous terminons en énonçant comment trouver les nouvelles matrices de Stokes à partir des matrices de Stokes de l'ancien système.

3.1. NOUVEL ORDRE

Nous avons promis de traiter le cas où un rayon de séparation est associé à plusieurs paires de valeurs propres. Nous redonnons d'abord le théorème présenté au chapitre 2 puis nous traitons du lemme qui nous intéresse.

Théorème 3.1.1. *Soit $\rho \in S^1$ et $R = \rho\mathbb{R}_+$ le rayon associé. Soit $W_\rho(x)$ la matrice fondamentale diagonale des solutions de la forme normale le long de R et soit $w_i(x)$ et $w_j(x)$ deux éléments diagonaux distincts de $W(x)$. Si la condition (2.2.4) est respectée, nous avons sur \mathbb{R}_+ que*

$$w_n(x) \prec \dots \prec w_1(x).$$

De plus, si R n'est pas un rayon de séparation, il existe une permutation σ des n premiers entiers telle que sur R nous avons

$$w_{\sigma(1)} \prec \dots \prec w_{\sigma(n)}.$$

Finalement, si entre \mathbb{R}_+ et R il y a un nombre égal, N , de rayons de séparation pour chaque paire de valeurs propres, la permutation σ est l'identité si N est pair et $\sigma(j) = n - j + 1$ sinon.

Lemme 3.1.1. Soit $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ un ensemble de valeurs propres tel que le rayon fixé, $\rho = e^{i\theta}\mathbb{R}^+$, soit un rayon de séparation pour toute paire d'éléments dans Λ . Alors, si

$$\operatorname{Re}(\lambda_1 e^{-i\psi}(m-1)) < \dots < \operatorname{Re}(\lambda_k e^{-i\psi}(m-1))$$

pour des arguments ψ un peu plus petits que θ , nous aurons, pour des arguments ϕ un peu plus grands que θ , que

$$\operatorname{Re}(\lambda_1 e^{-i\phi}(m-1)) > \dots > \operatorname{Re}(\lambda_k e^{-i\phi}(m-1)).$$

Voir figure 3.1.

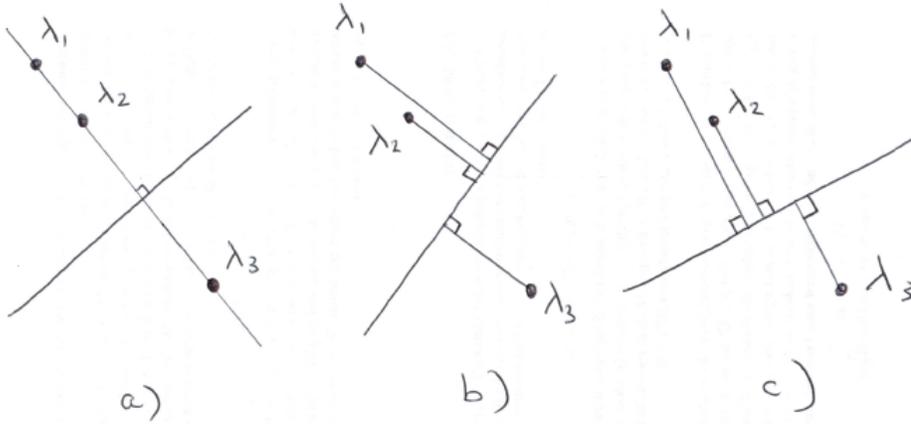


FIGURE 3.1. a) Sur un rayon de séparation. b) Un peu après. c) Un peu avant.

DÉMONSTRATION. Nous avons que

$$A = \operatorname{Re} \left(\frac{-\lambda_1}{(m-1)\rho^{m-1}} \right) = \dots = \operatorname{Re} \left(\frac{-\lambda_k}{(m-1)\rho^{m-1}} \right). \quad (3.1.1)$$

Cette condition est en fait une réécriture de

$$\operatorname{Re} \left(\frac{\lambda_p - \lambda_q}{(m-1)\rho^{m-1}} \right) = 0 \quad \forall p, q \in \{1, \dots, k\}$$

qui est équivalent à

$$\operatorname{Re} \left(\frac{\lambda_1}{\rho^{m-1}} \right) = \dots = \operatorname{Re} \left(\frac{\lambda_k}{\rho^{m-1}} \right). \quad (3.1.2)$$

D'abord, les parties réelles utilisées dans (3.1.2) sont en fait des projections sur la droite $\rho^{m-1}\mathbb{R}$. En effet

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\lambda_j}{\rho^{m-1}}\right) = \operatorname{Re}\left(\lambda_j \rho^{1-m}\right) \quad (3.1.3)$$

$$= \operatorname{Re}\left(|\lambda_j| |\rho| \exp\left(i(\arg(\lambda_j) + \arg(\rho^{1-m}))\right)\right) \quad (3.1.4)$$

$$= |\lambda_j| \cos[\arg(\lambda_j) - (m-1)\psi]. \quad (3.1.5)$$

où $\rho = e^{i\psi}$. Nous obtenons bien la longueur de la projection de λ_j dans la direction de ρ^{m-1} . De plus, comme la projection est orthogonale et que les longueurs des projections sont par hypothèse toutes égales pour $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, nous pouvons affirmer que ces valeurs propres sont toutes situées sur une même droite. Cette droite doit au moins inclure le point

$$\vec{p} = \rho^{m-1}A,$$

où A est défini dans (3.1.1). De plus, \vec{p} est normal à la droite contenant les λ_j . On peut donc prendre comme vecteur directeur $e^{i(m-1)\psi+\pi/2}$ qu'on peut vérifier être perpendiculaire à \vec{p} . On peut ainsi affirmer que toutes les valeurs propres considérées sont sur la droite d'équation :

$$D = \left\{ p + te^{i(m-1)\psi+\pi/2} \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

La distance entre une valeur propre λ_j et D est donnée par

$$d(\lambda_j, D) = |\lambda_j| \left| \sin\left(\arg(\lambda_j) - \arg(\rho^{m-1})\right) \right|.$$

Maintenant, posons $\theta_0 = \arg(\rho^{m-1})$ puis regardons ce qui se passe pour des valeurs θ très près de cet angle. D'abord, les rayons de séparation sont en nombre fini, ce qui fait que l'ensemble formé de leur argument ne possède pas de point d'accumulation. De plus, comme les valeurs propres sont supposées distinctes, on peut supposer que pour des variations de θ assez petites, θ_0 est le seul angle pour lequel le rayon associé est un rayon de séparation.

Supposons, sans perte de généralité, que pour des angles un peu plus petits que θ_0 nous ayons

$$\operatorname{Re}\left(\frac{-\lambda_1}{(m-1)\rho^{m-1}}\right) < \dots < \operatorname{Re}\left(\frac{-\lambda_k}{(m-1)\rho^{m-1}}\right).$$

Trouvons la partie linéaire dans le développement de Taylor de la projection orthogonale afin de trouver l'ordre qu'auront ces parties réelles pour des angles un peu plus grands que θ_0 . Nous avons, en notant l'argument de λ_j par ϕ_j que

$|\lambda_j| \cos(\phi_j - \theta)$ devient

$$|\lambda_j| \left[\cos(\phi_j - \theta_0) + \sin(\phi_j - \theta_0)(\theta - \theta_0) + O((\theta - \theta_0)^2) \right]. \quad (3.1.6)$$

Puisque $|\lambda_j| \cos(\phi_j - \theta_0)$ est constant et, surtout, indépendant de j pour les valeurs propres que nous considérons, nous pouvons nous concentrer sur le coefficient de $(\theta - \theta_0)$, soit $|\lambda_j| \sin(\phi_j - \theta_0)$. En fait, c'est exactement la distance $d(\lambda_j)$ définie plus tôt à laquelle nous avons rajouté un signe qui prend en compte si une augmentation de θ rapproche le rayon de λ_j ou s'il l'éloigne.

Nous pouvons affirmer maintenant que tous les coefficients $|\lambda_j| \sin(\phi_j - \theta_0)$ sont distincts. En effet, comme toutes les valeurs propres sont sur la même droite D , que deux d'entre elles aient la même distance signée à un point de cette droite contredirait l'hypothèse que les valeurs propres sont distinctes.

Voir la figure 3.1.

Les parties linéaires de ces approximations étant toutes différentes, nous pouvons modéliser le comportement près de θ_0 par k droites distinctes de pentes distinctes. Ainsi si l'ordre qui précède θ_0 est

$$\operatorname{Re} \left(\frac{-\lambda_1}{(m-1)x^{m-1}} \right) < \dots < \operatorname{Re} \left(\frac{-\lambda_k}{(m-1)x^{m-1}} \right).$$

alors, après θ_0 , il devient exactement

$$\operatorname{Re} \left(\frac{-\lambda_1}{(m-1)x^{m-1}} \right) > \dots > \operatorname{Re} \left(\frac{-\lambda_k}{(m-1)x^{m-1}} \right).$$

□

Remarquez que nous n'avons pas traité le cas où un rayon de séparation serait associé à deux paires de valeurs distinctes $\lambda_{j_1}, \lambda_{j_2}$ et $\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}$ pour lesquelles nous avons que,

$$\operatorname{Re}(\lambda_{j_1} e^{-i\theta(m-1)}) \neq \operatorname{Re}(\lambda_{k_1} e^{-i\theta(m-1)}).$$

En effet, bien que le rayon soit commun au deux paires, l'inversion d'ordre de grandeur des parties réelles s'opère pour chaque paire indépendamment de l'autre.

3.1.1. Nouvel ordre explicite après avoir traversé plusieurs rayons de séparation dans le cas où $k = 1$

Soit

$$\lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$$

l'ensemble des valeurs propres d'un système organisées telles que

$$Re(\lambda_1) < \dots < Re(\lambda_n).$$

On se propose de considérer l'ordre sur les parties réelles de

$$\lambda_\theta = \{e^{i\theta}\lambda_1, \dots, e^{i\theta}\lambda_n\}.$$

Nous avons déjà montré que l'ordre sur les parties réelles de deux valeurs propres λ_j, λ_k s'inverse lorsque θ est perpendiculaire à $\lambda_j - \lambda_k$. Nous avons aussi montré qu'un tel angle θ peut être associé à plusieurs paires de valeurs propres et qu'alors la permutation produite en dépassant θ inverse totalement une sous-chaîne d'éléments consécutifs en laissant le reste intact. En d'autres mots, la matrice de permutation qui associe l'ordre *juste après* θ à l'ordre *juste avant* est de la forme

$$P_{(a,b,c)} = \text{diag}(I_a, J_b, I_c), \quad a + b + c = n, \quad a, b, c \geq 0$$

où I_k est la matrice identité de dimension k et J_k est la matrice dont tous les éléments sont nuls sauf pour ceux sur l'anti-diagonale qui valent 1. Nous donnons maintenant l'ordre dans lequel ces permutations s'opèrent.

Soit

$$\theta(\lambda_j, \lambda_k) = \{arg(\lambda_j - \lambda_k) + \pi(1/2 + s) \mid s \in \mathbb{Z}\} \cap [0, \pi[. \quad (3.1.7)$$

Alors $\rho = e^{i\theta(\lambda_j, \lambda_k)}$ est perpendiculaire à $\lambda_j - \lambda_k$. L'ordre sur les parties réelles de ces deux valeurs propres s'inverse en traversant le rayon $\rho\mathbb{R}^+$ et pour aucun autre inclus dans $\{z \in \mathbb{C} \mid arg(z) \in [0, \pi[\}$.

Notation 3.1.1. *Notons*

$$\lambda_*^2 = \{\{\lambda_r, \lambda_s\} \mid r \neq s\}$$

l'ensemble des paires de valeurs propres distinctes et

$$\theta(\lambda_*^2) = \{\theta(\lambda_j, \lambda_k) \mid \{\lambda_j, \lambda_k\} \in \lambda_*^2\}$$

l'ensemble des angles dans $[0, \pi[$ pour lesquels l'ordre est modifié. Pour chaque élément ϕ de $\theta(\lambda_^2)$, définissons sa préimage comme étant*

$$\theta^{-1}(\phi) = \{\{\lambda_j, \lambda_k\} \in \lambda_*^2 \mid \theta(\{\lambda_j, \lambda_k\}) = \phi\}.$$

L'expression $\theta^{-1}(\phi)$ représente donc toutes les paires de valeurs propres qui ont le rayon $\phi\mathbb{R}^+$ comme rayon de séparation. Notons finalement que

$$\theta(\lambda_j, \lambda_k) = A = \theta(\lambda_j, \lambda_l) \Rightarrow \theta(\lambda_k, \lambda_l) = A. \quad (3.1.8)$$

Lemme 3.1.2. *Supposons que $\theta^{-1}(\phi)$ soit formé d'une seule paire de valeurs propres $\{\lambda_j, \lambda_k\}$. Supposons de plus que λ_j soit à la position s dans l'ordre juste avant ϕ et que λ_k soit à la position $s + 1$. La représentation matricielle de la permutation sur l'ordre des valeurs propres obtenue en traversant le rayon $e^{i\phi}\mathbb{R}^+$ est*

$$P_{s-1,2,n-s-1}.$$

PREUVE. D'abord, le lemme (3.1.1) nous assure que de supposer que la position de λ_k soit $s+1$ se fait sans perte de généralité. La permutation est alors l'inversion de l'ordre sur ces deux valeurs propres. Elle laisse intacts les $s - 1$ premiers éléments, inverse les 2 suivants et conserve les $n - s - 2$ derniers. \square

Le cas où $|\theta^{-1}(\phi)| \geq 2$ demande plus de réflexion. Rappelons que l'ordre sur les valeurs propres change lorsque les projections de certaines d'entre elles sur la droite $e^{i\phi}\mathbb{R}$ coïncident. Étudions le cas avec 4 valeurs propres, les autres en étant des généralisations simples.

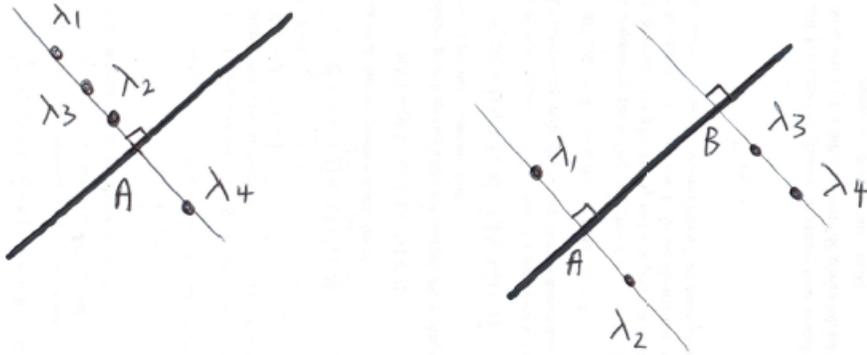


FIGURE 3.2. 2 cas avec 4 valeurs propres

Dans le cas 1 (figure 3.2 partie de gauche), les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ sont colinéaires et se projettent toutes au même endroit sur la droite $e^{i\phi}\mathbb{R}$. Leur ordre sera complètement inversé en traversant le rayon $e^{i\phi}\mathbb{R}$.

Lemme 3.1.3. *Supposons que les valeurs propres $\lambda_{j_1}, \dots, \lambda_{j_r}$ soient colinéaires et soient les seuls éléments contenus dans la collection de paires de valeurs propres $\theta^{-1}(\phi)$. Alors, la représentation matricielle de la permutation sur l'ordre des valeurs propres obtenue en traversant le rayon $e^{i\phi}\mathbb{R}^+$ est*

$$P_{s-1,r,n-(s+r)+1}.$$

Dans le cas 2 (figure 3.2 partie de droite), il se produit 2 changements de type *cas 1* simultanément. Comme les points de projection (A et B) sont distincts, on sait qu'en étant assez près de ϕ , les deux changements d'ordre se font indépendamment l'un de l'autre.

Lemme 3.1.4. *Un changement d'ordre pour lequel $|\theta^{-1}(\phi)| = m \geq 2$ peut être traité comme m changements de type cas 1. La permutation résultante est la multiplication des m matrices définies dans le corollaire (3.1.3).*

PREUVE. Après avoir accepté que pour chaque point de la projection nous pouvons utiliser une permutation du type *cas 1*, il suffit de montrer la commutativité de la multiplication pour ces matrices de permutation.

Pour deux points distincts p_1 et p_2 de l'image de la projection les ensembles de valeurs propres qui s'y projettent (Λ_1 et Λ_2) sont disjoints par unicité de la projection. Dans *l'ordre avant* ϕ , les éléments de Λ_j sont consécutifs. En effet, puisque l'ordre est donné par les longueurs signées des projections des valeurs propres sur un rayon et que celles-ci sont égales sur $e^{i\phi}$, elles doivent être consécutives lorsque nous sommes près de cet angle. Si ce n'est pas le cas, il existe une autre valeur propre du système qui tende vers le même point, mais alors elle est déjà dans Λ_j et les éléments sont consécutifs.

Λ_1 et Λ_2 sont disjoints et consécutifs dans l'ordre donné par des angles près de ϕ . Par conséquent, les matrices de permutations associées à chacun, que nous noterons $P_{(a,b,c)}$ et $P_{d,e,f}$, satisfont $a+b \leq d$ ou $d+e \leq a$. Ces matrices engendrent donc des sous-groupes cycliques et disjoints du groupe de permutation, et donc, elles commutent. \square

Remarque 3.1.1. *Pour obtenir la matrice de passage de l'ordre initial à l'ordre issu de la projection sur $e^{i\psi}$, il faut multiplier dans l'ordre les matrices de permutations associées aux angles compris dans l'intervalle $]0, \psi]^1$. Nous obtenons ces matrices ainsi que l'ordre dans lequel les multiplier en utilisant l'application θ^{-1} , les seules ambiguïtés étant levées par le lemme (3.1.4).*

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème principal de cette sous-section. Il nous permettra de ne considérer que l'impact de permutation de la forme $P_{(a,b,c)}$ sur les matrices de Stokes.

Théorème 3.1.2. *Toute rotation dans la variable x produit un nouvel ordre sur les valeurs propres qui s'obtient de l'ordre initial par une permutation dont la*

1. L'hypothèse sur les parties réelles des valeurs propres nous assure que 0 n'est pas un angle critique pour aucune paire de valeurs propres.

représentation matricielle est une composition de matrices de la forme

$$P_{(a,b,c)} = \text{diag}(I_a, J_b, I_c), \quad a + b + c = n, \quad a, b, c \geq 0 \quad (3.1.9)$$

définie plus haut.

DÉMONSTRATION. La preuve est une conséquence directe des 3 lemmes précédents et de la remarque (3.1.1) \square

Exemple 3.1.1. Soit l'ensemble λ des valeurs propres d'un système défini comme $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-1, i, 1)$. L'ordre initial donné par les longueurs des projections sur le rayon $e^{i0}\mathbb{R}^+$ est simplement l'ordre sur les parties réelles des valeurs propres :

$$\text{Re}(\lambda_1) < \text{Re}(\lambda_2) < \text{Re}(\lambda_3).$$

L'ensemble des angles critiques est

$$\theta(\lambda_*^2) = \{\pi/4, \pi/2, 3\pi/4\}.$$

Les ordres consécutifs obtenus sont

$$(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 3, 1), (3, 2, 1).$$

Les ordres $(3, 1, 2)$ et $(2, 1, 3)$ ne sont jamais atteints.

3.1.2. Cas général

Nous avons dit que l'ordre sur les valeurs propres est défini par la longueur signée de leur projection sur la droite que sous-tend le vecteur $e^{i\theta}$. Lorsque l'angle θ augmente progressivement, les projections évoluent continuellement et l'ordre change. Supposons que pour un angle fixé θ_0 , nous ayons l'ordre de platitude suivant sur le rayon $e^{i\theta_0}\mathbb{R}^+$

$$w_{j_1} \prec \dots \prec w_{j_n}. \quad (3.1.10)$$

Faisons augmenter θ . La prochaine permutation sur l'ordre de platitude des solutions sera obtenue en dépassant un angle critique de θ_c et produira le nouvel ordre suivant

$$\begin{aligned} w_{j_1} \prec w_{j_2} \prec \dots \prec w_{j_{k-2}} \prec w_{j_{k-1}} \\ \prec w_{j_{k+s}} \prec w_{j_{k+s-1}} \prec \dots \prec w_{j_{k+1}} \prec w_{j_k} \\ \prec w_{j_{k+s+1}} \prec w_{j_{k+s+2}} \prec \dots \prec w_{j_{n-1}} \prec w_{j_n}. \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

si et seulement si les valeurs propres associées aux solutions $w_{j_k}, \dots, w_{j_{k+s}}$ sont toutes sur la même droite, cette droite ne contient aucune autre valeur propre du

système et θ_c est le prochain zéro de

$$\prod_{1 \leq l, m \leq n} (\lambda_l - \lambda_m) \cdot e^{i\theta} \quad (3.1.12)$$

rencontré pour des angles plus grands que θ_0 . En d'autres mots, la droite qui supporte ces valeurs propres sera perpendiculaire à celle soutenue par $e^{i\theta_c}$ et aucun autre groupe de valeurs propres ne se trouve sur une droite parallèle.

3.2. VALEURS PROPRES, RAYONS DE SÉPARATIONS ET SECTEURS

Reprenons l'équation

$$x^{k+1}Y' = (\Lambda + A(x) + x^{k+1}R(x))Y \quad (3.2.1)$$

avec

$$A(x) = A_1x + A_2x^2 + \dots + A_kx^k \quad (3.2.2)$$

où les A_j sont diagonaux et constants. Introduisons le changement de variables $\hat{x} = e^{i\theta}x$. En posant $\hat{Y}(\hat{x}) = Y(e^{-i\theta}\hat{x}) = Y(x)$, nous obtenons

$$\frac{dY}{dx} = \frac{d\hat{Y}}{d\hat{x}} \frac{d\hat{x}}{dx} = \frac{d\hat{Y}}{d\hat{x}} e^{i\theta}.$$

En substituant dans (3.2.1),

$$(e^{-i\theta}\hat{x})^{k+1} \frac{d\hat{Y}}{d\hat{x}} e^{i\theta} = (\Lambda + A(e^{-i\theta}\hat{x}) + (e^{-i\theta}\hat{x})^{k+1}R(e^{-i\theta}\hat{x}))\hat{Y} \quad (3.2.3)$$

$$\hat{x}^{k+1} \frac{d\hat{Y}}{d\hat{x}} = \left(e^{i\theta k} \Lambda + \sum_{j=1}^k A_j e^{i\theta(k-j)} \hat{x}^j + (e^{-i\theta}\hat{x})^{k+1} R(e^{-i\theta}\hat{x}) \right) \hat{Y}. \quad (3.2.4)$$

En notant les composantes de Λ par λ_j , les nouvelles valeurs propres s'écrivent

$$\hat{\lambda}_j = e^{i\theta k} \lambda_j.$$

Décrivons les nouveaux rayons de Stokes du système. Si $\rho \in S^1$ satisfaisait pour $j \neq k$

$$Re \left(\frac{\lambda_j - \lambda_k}{\rho^k} \right) = 0$$

alors, pour les nouvelles valeurs propres, le vecteur unitaire qui supporte le nouveau rayon de Stokes devient $\hat{\rho} = e^{i\theta}\rho$. En effet,

$$Re \left(\frac{e^{i\theta k} \lambda_j - e^{i\theta k} \lambda_k}{\hat{\rho}^k} \right) = Re \left(\frac{e^{i\theta k} (\lambda_j - \lambda_k)}{(e^{i\theta} \rho)^k} \right) = Re \left(\frac{\lambda_j - \lambda_k}{\rho^k} \right) = 0.$$

Le changement de variables tourne les rayons de Stokes de θ radians. Si on souhaite que ce soit les valeurs propres qui pivotent de θ radians, on utilise le changement de variables $\hat{x} = e^{i\theta/k}x$.

Exemple 3.2.1. *Dans le cas particulier où $k = 1$, les nouvelles valeurs propres subissent la même rotation que les rayons de Stokes : une rotation de θ radians.*

Rappelons que la raison pour laquelle on suppose que les parties réelles des valeurs propres du système sont distinctes est de s'assurer qu'il existe un mince secteur contenant le rayon \mathbb{R}^+ et ne contenant aucun rayon de séparation du système. Nous savons maintenant qu'il est possible de faire tourner les rayons de séparation du système d'un angle de θ . Afin de simplifier la réflexion, nous représenterons une rotation $x \mapsto e^{-i\theta/k}$ en laissant les rayons de séparation intacts en en faisant tourner les secteurs S_j de θ degrés dans le sens positif. Le rayon \mathbb{R}^+ est envoyé sur $e^{i\theta}\mathbb{R}^+$.

3.3. MATRICES

Notation 3.3.1 (Rappel). *Nous notons*

$$P_{a,b,c} = \begin{pmatrix} I_a & 0 & 0 \\ 0 & J_b & 0 \\ 0 & 0 & I_c \end{pmatrix} \quad (3.3.1)$$

où J_b a des 1 sur son antidiagonale et des 0 ailleurs.

Notation 3.3.2. *Lorsque les valeurs de r et s sont fixées, nous utiliserons la notation de matrices en blocs suivante :*

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} \quad (3.3.2)$$

où l'indice 1 représente l'ensemble $\{1, \dots, r-1\}$, l'indice 2 l'ensemble $\{r, \dots, r+s\}$ et 3 représente $\{r+s+1, \dots, n\}$.

Théorème 3.3.1. *Soit*

$$x^2Y' = A(x)Y \quad (3.3.3)$$

une équation pour laquelle l'origine est une singularité de rang de Poincaré $k = 1$. Supposons que $A(x) = A_0 + A_1x + \dots$ est holomorphe et a des valeurs propres de parties réelles distinctes satisfaisant

$$Re(\lambda_1) < \dots < Re(\lambda_n). \quad (3.3.4)$$

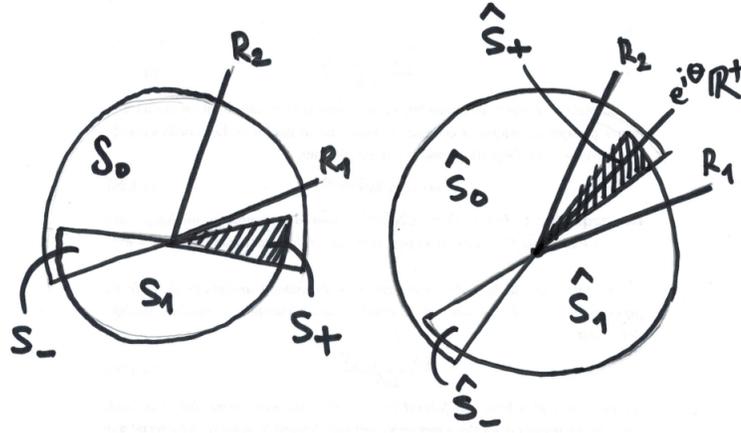


FIGURE 3.3. Les secteurs avant et après rotation

Soit S_0 et S_1 des secteurs ouverts tels que les rayons $\pm\mathbb{R}^+$ soient inclus respectivement dans les intersections S_+ et S_- et que ces dernières ne contiennent aucun rayon de Stokes du système (voir fig.3.3). Soient C_+ et C_- des matrices de Stokes définies respectivement sur S_+ et S_- . Soit R_1 et R_2 les deux premiers rayons de Stokes.

Soit $x \mapsto \hat{x} = e^{i\theta}x$ tel que $e^{i\theta}\mathbb{R}^+$ est entre R_1 et R_2 . Supposons que les projections des valeurs propres λ_r à λ_{r+s} sur R_1 soient égales. En notant par des chapeaux les éléments du nouveau système, une collection de Stokes du nouveau système est donnée par

$$\hat{C}_\pm = P \begin{pmatrix} I_{r-1} & 0 & 0 \\ 0 & (C_{22}^\pm)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-r-s} \end{pmatrix} C_\pm \begin{pmatrix} I_{r-1} & 0 & 0 \\ 0 & C_{22}^\mp & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-r-s} \end{pmatrix} P, \quad (3.3.5)$$

où $P = P_{r-1, s+1, n-r-s}$ est la matrice de permutation qui inverse les éléments r à $r+s$ et laisse les autres intacts.

PREUVE. Soient $W_0 = \text{diag}(w_1^0, \dots, w_n^0)$ et $W_1 = \text{diag}(w_1^1, \dots, w_n^1)$ des matrices fondamentales de solutions définies respectivement sur S_0 et S_1 . Soit S_+ et S_- tels que sur la figure 3.3. Sur S_+

$$w_1^0 \succ \dots \succ w_n^0 \quad \text{et} \quad w_1^1 \succ \dots \succ w_n^1 \quad (3.3.6)$$

et sur S_-

$$w_1^0 \prec \dots \prec w_n^0 \quad \text{et} \quad w_1^1 \prec \dots \prec w_n^1. \quad (3.3.7)$$

Comme \hat{S}_+ (voir fig. 3.3) ne contient pas de rayon de Stokes, l'ordre de platitude des w_j^0 y est bien défini pour $j \notin \{r, \dots, r+s\}$. On sait que $w_1^0 \succ \dots \succ w_{r-1}^0$ et que $w_{r+s+1}^0 \succ \dots \succ w_n^0$. On sait aussi que (sur \hat{S}_+) les w_r^0, \dots, w_{r+s}^0 sont moins plats

que les premiers et plus plats que les seconds, mais on ne peut pas nécessairement les comparer entre eux.

Nous cherchons une base \widehat{W}_0 définie sur \widehat{S}_0 dont les éléments \widehat{w}_j^0 sont ordonnés sur \widehat{S}_+ tels que

$$\widehat{w}_1^0 \succ \dots \succ \widehat{w}_n^0 \quad (3.3.8)$$

et sur \widehat{S}_- tels que

$$\widehat{w}_1^0 \prec \dots \prec \widehat{w}_n^0. \quad (3.3.9)$$

On commence donc par construire une base intermédiaire \widetilde{W}_0 telle que sur \widehat{S}_- on a

$$\widetilde{w}_1^0 \succ \dots \widetilde{w}_{r-1} \succ \widetilde{w}_{r+s} \succ \dots \succ \widetilde{w}_r \succ \widetilde{w}_{r+s+1} \succ \dots \succ \widetilde{w}_n^0 \quad (3.3.10)$$

et sur \widehat{S}_+ tels que

$$\widetilde{w}_1^0 \prec \dots \widetilde{w}_{r-1} \prec \widetilde{w}_{r+s} \prec \dots \prec \widetilde{w}_r \prec \widetilde{w}_{r+s+1} \prec \dots \prec \widetilde{w}_n^0. \quad (3.3.11)$$

Cette base sera unique modulo la multiplication de ses éléments par des constantes. Pour trouver \widehat{W} , il suffira ensuite d'inverser l'ordre des éléments du milieu.

On peut exprimer \widetilde{W}_0 (resp. \widetilde{W}_1) en fonction des éléments de W_0 (resp. W_1). Pour $j \notin \{r, r+1, \dots, r+s\}$, les solutions $\widetilde{w}_j^0 = w_j^0$ feront l'affaire. Pour les solutions restantes (celles d'indices compris entre r et $r+s$), nous utiliserons une partie de la matrice de Stokes C^- , plus précisément le bloc dont les indices de lignes et de colonnes sont compris (inclusivement) entre r et $r+s$.

La matrice \widetilde{W}_0 est donnée par

$$\widetilde{W}_0 = W_0 \begin{pmatrix} I_{r-1} & 0 & 0 \\ 0 & C_{22}^+ & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-(r+s)} \end{pmatrix}. \quad (3.3.12)$$

Trouvons l'ordre de platitude des colonnes r à $r+s$. La j^e colonne de \widetilde{W}_0 , pour $j = r, \dots, r+s$, est

$$\widetilde{w}_j = \sum_{m=r}^j c_{m,j}^- w_m^0. \quad (3.3.13)$$

Regardons son comportement avant et après $-R_1$ sur \widehat{S}^+ .

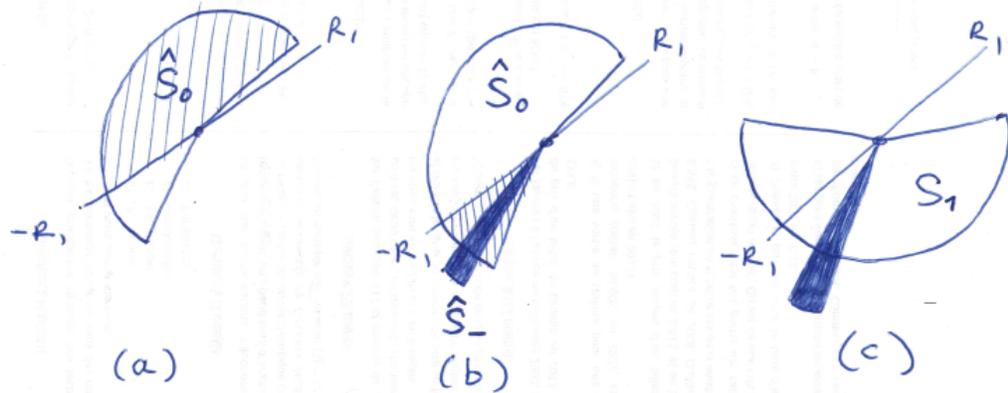


FIGURE 3.4. Secteurs de la preuve du théorème

Avant $-R_1$ (partie (a) de la figure 3.4), comme nous avons dépassé R_1 , les solutions respectent $\tilde{w}_r^0 \prec \dots \prec \tilde{w}_{r+s}^0$. Ainsi les solutions \tilde{w}_j^0 ont le bon comportement asymptotique puisqu'on les a corrigées comme au passage de S_- .

Pour montrer que l'ordre est aussi le bon après $-R_1$ (partie (b) de la figure 3.4), il suffit de montrer qu'il est le bon sur \hat{S}^- . Comme ce secteur appartient à S_1 (voir partie (c)), nous savons que les solutions données par $W_1 = W_0 C^-$ y ont le bon ordre de platitude. Nous désirons montrer que les solutions \tilde{w}_j^0 ont le même ordre de platitude lorsqu'on tend vers 0 le long de rayons dans \hat{S}^- . En se rappelant que C_- est triangulaire supérieure, on peut écrire que les colonnes aux positions $j = r, \dots, r + s$ sont de la forme

$$w_j^1 = \sum_{m=1}^j c_{m,j}^- w_m^0. \quad (3.3.14)$$

Cette sommation peut être séparée pour obtenir

$$w_j^1 = \tilde{w}_j^0 + \sum_{m=1}^{r-1} c_{m,j}^- w_m^0. \quad (3.3.15)$$

La somme complètement à droite ne contient que des composantes qui sont plus plates que \tilde{w}_j^0 sur \hat{S}^- et les ordres de platitude de w_j^1 et \tilde{w}_j^0 y sont donc équivalents quand on les compare aux autres ordres $l \in \{r, \dots, r + s\}$. Comme les ordres de platitude sur ces nouvelles solutions sont

$$\tilde{w}_r^0 \prec \dots \prec \tilde{w}_{r+s}^0 \quad (3.3.16)$$

sur \hat{S}^+ et

$$\tilde{w}_r^0 \succ \dots \succ \tilde{w}_{r+s}^0 \quad (3.3.17)$$

sur \hat{S}^- , il suffit d'inverser leur ordre pour obtenir les ordres de platitude voulus pour \widehat{W}_0 .

On obtient donc

$$\widehat{W}_0 = \widetilde{W}_0 P_{r-1, s+1, n-(r+s)}. \quad (3.3.18)$$

La nouvelle base a donc l'ordre souhaité sur chacun des secteurs S_\pm . De façon équivalente,

$$\widehat{W}_1 = W_1 \begin{pmatrix} I_{r-1} & 0 & 0 \\ 0 & C_{22}^+ & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-(r+s)} \end{pmatrix} D_- P_{r-1, s+1, n-(r+s)}. \quad (3.3.19)$$

Sur S_+ , $W_0 = W_1 C^+$. En remplaçant ces bases par leur expression en fonction des nouvelles bases,

$$\widehat{W}_0 \left[\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & C_{22}^- & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} P \right]^{-1} = \widehat{W}_1 \left[\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & C_{22}^+ & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} P \right]^{-1} C^+. \quad (3.3.20)$$

Isolons \widehat{W}_0 :

$$\widehat{W}_0 = \widehat{W}_1 P^{-1} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & (C_{22}^+)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} C^+ \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & C_{22}^- & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} P \quad (3.3.21)$$

Notre nouvelle matrice de Stokes s'écrit

$$\widehat{C}_+ = P \begin{pmatrix} C_{11}^+ & C_{12}^+ C_{22}^- & C_{13}^+ \\ 0 & C_{22}^- & (C_{22}^+)^{-1} C_{23}^+ \\ 0 & 0 & C_{33}^+ \end{pmatrix} P. \quad (3.3.22)$$

De même pour \widehat{C}_- . Ce qui prouve le théorème. \square

Exemple 3.3.1. Soit un système pour lequel les valeurs propres sont sur la même droite. Alors, l'ensemble des valeurs propres est associé à un seul rayon de Stokes noté R_1 . En passant R_1 , l'ordre sur les projections des valeurs propres (et l'ordre de platitude des solutions) est complètement inversé. Le théorème 3.3.1 dit

$$\widehat{C}_\pm = P(C^\pm)^{-1} C^\pm C^\mp P = PC^\mp P \quad (3.3.23)$$

où $P = P_{0,n,0}$. On obtient donc la matrice de gauche de celle de droite en permutant ses lignes et ses colonnes. En continuant de parcourir le plan dans le sens positif, on croisera le rayon $-R_1$. On pourra de nouveau prendre les secteurs S_\pm de départ et les matrices de Stokes initiales. Les nouvelles matrices de Stokes obtenues sont équivalentes à celles de départ.

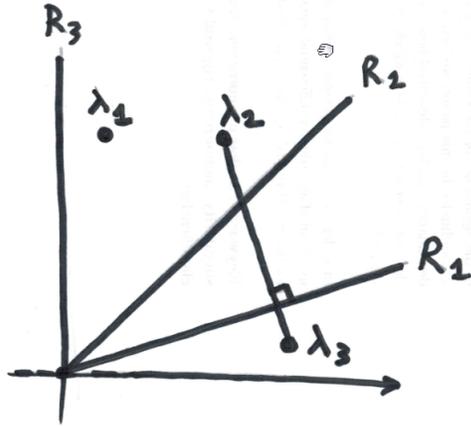


FIGURE 3.5. Exemple 2

Exemple 3.3.2. Soit $n = 3$ et notons $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les valeurs propres qu'on supposera (comme précédemment) de parties réelles distinctes. L'exemple 1 traite du cas où le système ne possède qu'un rayon de Stokes dans le demi-plan supérieur. Supposons donc, sans perte de généralité, que les rayons R_1 (associé à la paire (λ_2, λ_3)), R_2 (pour (λ_1, λ_3)) et R_3 (pour (λ_1, λ_2)) sont distincts et se rencontrent dans cet ordre en partant de \mathbb{R}^+ (voir fig 3.5).

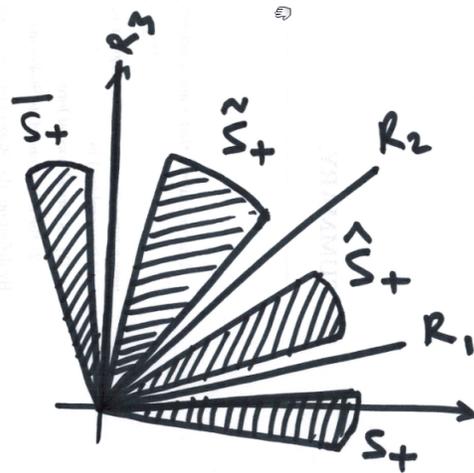


FIGURE 3.6. Les secteurs de l'exemple 2

Par le théorème 3.3.1, on définit des matrices de Stokes sur les secteurs successifs $S_+, \hat{S}_+, \tilde{S}_+$ et \bar{S}_+ de la figure 3.6. Ce dernier secteur pouvant être pris égal à S_- .

Rappelons qu'il est possible de simplifier la présentation en composant par des

matrices diagonales à chaque étape. Ceci étant dit, on part de C_{\mp} données par

$$C_- = \begin{pmatrix} c_{11}^- & c_{12}^- & c_{13}^- \\ 0 & c_{22}^- & c_{23}^- \\ 0 & 0 & c_{33}^- \end{pmatrix}, \quad C_+ = \begin{pmatrix} c_{11}^+ & 0 & 0 \\ c_{21}^+ & c_{22}^+ & 0 \\ c_{31}^+ & c_{32}^+ & c_{33}^+ \end{pmatrix}, \quad (3.3.24)$$

puis on applique 3 fois le théorème.

En notant $P = P_{1,2,0}$, les étapes pour l'obtention de \hat{C}_- sont

$$\hat{C}_- = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{22}^- & c_{23}^- \\ 0 & 0 & c_{33}^- \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} c_{11}^- & c_{12}^- & c_{13}^- \\ 0 & c_{22}^- & c_{23}^- \\ 0 & 0 & c_{33}^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{22}^+ & 0 \\ 0 & c_{32}^+ & c_{33}^+ \end{pmatrix} P \quad (3.3.25)$$

$$= P \begin{pmatrix} c_{11}^- & c_{12}^- & c_{13}^- \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{22}^+ & 0 \\ 0 & c_{32}^+ & c_{33}^+ \end{pmatrix} P \quad (3.3.26)$$

$$= P \begin{pmatrix} c_{11}^- & c_{22}^+ c_{12}^- + c_{32}^+ c_{13}^- & c_{13}^- c_{33}^+ \\ 0 & c_{22}^+ & 0 \\ 0 & c_{32}^+ & c_{33}^+ \end{pmatrix} P \quad (3.3.27)$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11}^- & c_{13}^- c_{33}^+ & c_{22}^+ c_{12}^- + c_{32}^+ c_{13}^- \\ 0 & c_{33}^+ & c_{32}^+ \\ 0 & 0 & c_{22}^+ \end{pmatrix} \quad (3.3.28)$$

$$(3.3.29)$$

De la même façon,

$$\hat{C}_+ = \begin{pmatrix} c_{11}^+ & 0 & 0 \\ \frac{c_{22}^+ c_{31}^+ - c_{32}^+ c_{21}^+}{c_{22}^+ c_{33}^+} & c_{33}^- & 0 \\ \frac{c_{21}^+}{c_{22}^+} & c_{23}^- & c_{22}^- \end{pmatrix}. \quad (3.3.30)$$

Pour les autres matrices, nous obtenons

$$\tilde{C}_- = \begin{pmatrix} c_{33}^- & \frac{c_{22}^+ c_{31}^+ - c_{21}^+ c_{32}^+}{c_{22}^+ c_{33}^+} & c_{32}^+ \\ 0 & c_{11}^+ & \frac{c_{22}^+ c_{12}^-}{c_{11}^+} \\ 0 & 0 & c_{22}^+ \end{pmatrix}, \quad \tilde{C}_+ = \begin{pmatrix} c_{33}^+ & 0 & 0 \\ c_{33}^+ c_{13}^- & c_{11}^- & 0 \\ c_{33}^+ \left(\frac{c_{21}^+ c_{13}^-}{c_{22}^+} + c_{23}^- \right) & \frac{c_{21}^+ c_{11}^-}{c_{22}^+} & c_{22}^- \end{pmatrix} \quad (3.3.31)$$

$$\bar{C}_- = \begin{pmatrix} c_{33}^- & \frac{c_{32}^+ c_{22}^-}{c_{33}^+} & \frac{c_{31}^+ c_{11}^-}{c_{33}^+} \\ 0 & c_{22}^- & \frac{c_{21}^+ c_{11}^-}{c_{22}^-} \\ 0 & 0 & c_{11}^- \end{pmatrix}, \quad \bar{C}_+ = \begin{pmatrix} c_{33}^+ & 0 & 0 \\ \frac{c_{33}^+ c_{23}^-}{c_{22}^-} & c_{22}^+ & 0 \\ \frac{c_{33}^+ c_{13}^-}{c_{11}^-} & \frac{c_{22}^+ c_{12}^-}{c_{11}^-} & c_{11}^+ \end{pmatrix} \quad (3.3.32)$$

On s'attend à ce que \bar{C}_\mp soit égale à $P_{0,3,0}C_\pm P_{0,3,0}$. À première vue, ce n'est pas le cas. Néanmoins, ces matrices sont uniques à multiplication à droite et à gauche par des matrices diagonales. En choisissant bien,

$$D\bar{C}_+D_*^{-1} = \begin{pmatrix} c_{33}^- & 0 & 0 \\ 0 & c_{22}^- & 0 \\ 0 & 0 & c_{11}^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{33}^+ & 0 & 0 \\ \frac{c_{33}^+c_{23}^-}{c_{22}^-} & c_{22}^+ & 0 \\ \frac{c_{33}^+c_{13}^-}{c_{11}^-} & \frac{c_{22}^+c_{12}^-}{c_{11}^-} & c_{11}^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{33}^+ & 0 & 0 \\ 0 & c_{22}^+ & 0 \\ 0 & 0 & c_{11}^+ \end{pmatrix}^{-1} \quad (3.3.33)$$

$$= \begin{pmatrix} c_{33}^- & 0 & 0 \\ c_{23}^- & c_{22}^- & 0 \\ c_{13}^- & c_{12}^- & c_{11}^- \end{pmatrix} = P_{0,3,0}C_-P_{0,3,0}. \quad (3.3.34)$$

De même on montre que $D_*\bar{C}_-D^{-1} = P_{0,3,0}C_+P_{0,3,0}$.

Théorème 3.3.2. Soit un système de la forme

$$x^{k+1}Y' = A(x)Y \quad (3.3.35)$$

où $A(x)$ est holomorphe et de rang de Poincaré $k > 1$. Notons par S_j , $j \in \{0, \dots, 2k-1\}$ les $2k$ secteurs sur lesquels sont définis les bases W_j et soient les intersections $S_j \cap S_{j+1}$ où l'addition est prise modulo $2k$. Soit R_m , les rayons de Stokes sur S_0 en ordre croissant d'arguments. On suppose que les valeurs propres respectent

$$\operatorname{Re}(\lambda_1) < \dots < \operatorname{Re}(\lambda_n). \quad (3.3.36)$$

On suppose aussi que $\lambda_r, \dots, \lambda_{r+s}$ se projettent sur le même point de R_1 et que toutes les autres projections sont distinctes.

Soit C^j une matrice de Stokes sur $S_j \cap S_{j+1}$. Soit θ tel que $e^{i\theta}$ soit entre R_1 et R_2 et considérons le nouveau système obtenu par $x \mapsto \hat{x} = e^{i\theta}x$. Alors, les matrices suivantes forment une collection de Stokes pour le nouveau système dont les secteurs \hat{S}_j sont simplement $\hat{S}_j = e^{i\theta}S_j$.

$$\hat{C}^j = P \begin{pmatrix} I_{r-1} & 0 & 0 \\ 0 & (C_{22}^j)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-r-s} \end{pmatrix} C^j \begin{pmatrix} I_{r-1} & 0 & 0 \\ 0 & C_{22}^{j+1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-r-s} \end{pmatrix} P \quad (3.3.37)$$

où $P = P_{r-1, s+1, n-r-s}$.

PREUVE. Comme pour la preuve dans le cas $k = 1$, il nous suffit de montrer que des bases de la forme

$$\widehat{W}_j = W_j \begin{pmatrix} I_{r-1} & 0 & 0 \\ 0 & C_{22}^j & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-r-s} \end{pmatrix} P \quad (3.3.38)$$

ont le bon ordre de platitude sur $\widehat{S}_{j-1} \cap \widehat{S}_j$ et sur $\widehat{S}_j \cap \widehat{S}_{j+1}$. Or cela se montre avec les mêmes arguments que ceux utilisés dans la preuve du théorème 3.3.1. \square

Bibliographie

- [1] Y. Ilyashenko, S. Yakovenko, *Lecture on analytic differential equations*, Graduate Studies in Mathematics, 86, American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.
- [2] C. Lambert, C. Rousseau, *The Stokes Phenomenon in the confluence of the hypergeometric equation using Riccati equation*, J. Differential Equations 244 (2008), n° 10, 2641-2664
- [3] O. Vallée, M. Soares, *Airy functions and Applications to Physics*, Imperial College Press, 2004