Université de Montréal

Théorème de Pleijel pour l'oscillateur harmonique quantique

par

Philippe Charron

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en mathématiques
orientation mathématiques fondamentales

6 octobre 2015

Université de Montréal
Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

Théorème de Pleijel pour l'oscillateur harmonique quantique

présenté par

Philippe Charron

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Octav Cornea
(président-rapporteur)

Iosif Polterovich
(directeur de recherche)

Marlène Frigon
(membre du jury)

(examinateur externe)

Mémoire accepté le

SOMMAIRE

L'objectif de ce mémoire est de démontrer certaines propriétés géométriques des fonctions propres de l'oscillateur harmonique quantique. Nous étudierons les domaines nodaux, c'est-à-dire les composantes connexes du complément de l'ensemble nodal. Supposons que les valeurs propres ont été ordonnées en ordre croissant. Selon un théorème fondamental dû à Courant, une fonction propre associée à la n-ième valeur propre ne peut avoir plus de n domaines nodaux. Ce résultat a été prouvé initialement pour le laplacien de Dirichlet sur un domaine borné mais il est aussi vrai pour l'oscillateur harmonique quantique isotrope. Le théorème a été amélioré par Pleijel en 1956 pour le laplacien de Dirichlet. En effet, on peut donner un résultat asymptotique plus fort pour le nombre de domaines nodaux lorsque les valeurs propres tendent vers l'infini. Dans ce mémoire, nous prouvons un résultat du même type pour l'oscillateur harmonique quantique isotrope. Pour ce faire, nous utiliserons une combinaison d'outils classiques de la géométrie spectrale (dont certains ont été utilisés dans la preuve originale de Pleijel) et de plusieurs nouvelles idées, notamment l'application de certaines techniques tirées de la géométrie algébrique et l'étude des domaines nodaux non-bornés.

Mots clés : oscillateur harmonique quantique, Pleijel, domaine nodal, Faber-Krahn, fonctions propres, conditions de Dirichlet, espaces de Sobolev.

SUMMARY

The aim of this thesis is to explore the geometric properties of eigenfunctions of the isotropic quantum harmonic oscillator. We focus on studying the nodal domains, which are the connected components of the complement of the nodal (i.e. zero) set of an eigenfunction. Assume that the eigenvalues are listed in an increasing order. According to a fundamental theorem due to Courant, an eigenfunction corresponding to the n-th eigenvalue has at most n nodal domains. This result has been originally proved for the Dirichlet eigenvalue problem on a bounded Euclidean domain, but it also holds for the eigenfunctions of a quantum harmonic oscillator. Courant's theorem was refined by Pleijel in 1956, who proved a more precise result on the asymptotic behaviour of the number of nodal domains of the Dirichlet eigenfunctions on bounded domains as the eigenvalues tend to infinity. In the thesis we prove a similar result in the case of the isotropic quantum harmonic oscillator. To do so, we use a combination of classical tools from spectral geometry (some of which were used in Pleijel's original argument) with a number of new ideas, which include applications of techniques from algebraic geometry and the study of unbounded nodal domains.

Keywords : Quantum harmonic oscillator, Pleijel, Nodal domain, Faber-Krahn, Eigenfunctions, Dirichlet boundary conditions, Sobolev spaces

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS

J'aimerais premièrement remercier mon directeur de recherche, M. Iosif Polterovich, pour l'aide qu'il m'a donnée tout au long du processus de recherche. Il m'a fait confiance en m'offrant un problème totalement nouveau et en me laissant énormément de latitude quant aux méthodes que je désirais employer afin de le résoudre. De plus, il m'a accordé beaucoup de flexibilité afin que je puisse continuer d'effectuer mes recherches tout en continuant de compétitionner au badminton à l'échelle internationale. Finalement, son soutien financier a été très apprécié.

Ensuite, je me dois de remercier M. Bernard Helffer de l'Université Paris-Sud qui a suggéré le sujet de recherche. De plus, nos nombreux échanges ont non seulement été bien instructifs, mais m'ont aussi donné de nouveaux défis à résoudre.

Un gros merci à Guillaume Roy-Fortin, dont les commentaires ont été très utiles pour l'écriture de mon mémoire.

Je voudrais remercier les professeurs Dmitris Koukoulopoulos, Andrew Granville et Yvan Saint-Aubin qui m'ont épaulé dans des projets de recherche antérieurs et donné l'envie de persévérer aux cycles supérieurs.

Je me dois de faire un clin d'oeil à l'organisation des Carabins qui m'a toujours soutenu durant ma carrière sportive universitaire. La poursuite de l'excellence académique est une de leurs valeurs et je leur en serai toujours reconnaissant.

Finalement, j'aimerais remercier le FRQNT d'avoir soutenu financièrement mon projet.

INTRODUCTION

La géométrie spectrale est une branche des mathématiques qui s'intéresse au lien entre les propriétés géométriques d'une variété riemannienne et le spectre de certains opérateurs différentiels définis sur cette variété. On y étudie aussi les propriétés géométriques des fonctions propres de ces opérateurs. On y retrouve des méthodes tirées de plusieurs branches des mathématiques : équations aux dérivées partielles, analyse fonctionnelle, géométrie différentielle et géométrie riemannienne, topologie, analyse réelle et autres.

Cette théorie a des applications dans l'étude de certains systèmes en physique. En effet, on y voit apparaître des équations où les fonctions propres déterminent les états stables et les valeurs propres représentent une quantité physique qui leur est associée (fréquence, énergie...).

L'opérateur le plus connu et le plus étudié est sans contredit l'opérateur laplacien, ou opérateur de Laplace-Beltrami : $\Delta f = div(\nabla f)$. Dans le premier chapitre, nous ferons un résumé de certains résultats concernant les propriétés géométriques des fonctions propres de cet opérateur.

Avec l'essor de la physique quantique et spécialement la découverte de l'équation d'onde de Schrödinger en 1926, l'étude du spectre de l'opérateur associé a mené à de nombreuses avancées. Un des opérateurs de Schrödinger les plus simples est l'oscillateur harmonique quantique. Dans le chapitre 2, nous verrons certains résultats qui ont été découverts dans les dernières années à propos de la géométrie des fonctions propres de cet opérateur. Finalement, dans le chapitre 3, nous démontrerons un nouveau résultat concernant le comportement asymptotique des fonctions propres lorsque l'énergie du système tend vers l'infini.

Chapitre 1

SPECTRE DU LAPLACIEN

1.1. Dimension 1

Si on regarde une onde qui se propage dans un fil de longueur finie, la fonction qui décrit la position du fil en fonction du temps et de la distance $f(x,t)$, $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, obéit à la relation suivante :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$
$$f(x,0) = g(x)$$
$$\left.\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = h(x)$$

Ici, v est une constante qui dépend des propriétés physiques du fil (tension, rigidité, masse) et $g(x)$ et $h(x)$ sont les conditions initiales du fil. Évidemment, il existe un grand nombre de solutions à cette équation.

On peut représenter certaines situations en ajoutant des conditions aux frontières : $f(a,t) = f(b,t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ (conditions de Dirichlet) ou $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=a} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=b} = 0$ (conditions de Neumann).

Avec des conditions de Dirichlet, si on veut étudier les modes de vibration du fil, c'est-à-dire les fréquences où le fil vibre de façon périodique, on doit résoudre l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -k^2 f$$

On obtient alors les solutions suivantes :

$$f(x,t) = \sin(\alpha t + \beta)\sin(\pi k \frac{x-a}{b-a})$$

Ici, α et β sont déterminés par $f(x,0)$ et $\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{t=0}$. Si $k \notin \mathbb{N}$, alors $f(a,t)$ et $f(b,t)$ ne peuvent être égales à 0, donc $k \in \mathbb{N}$.

En considérant l'opérateur Δ agissant sur les fonctions dérivables deux fois sur l'intervalle $[a,b]$ telles que $f(a) = f(b) = 0$, on obtient les valeurs propres $n^2, n \in \mathbb{N}$ et les fonctions propres $\sin(\pi n \frac{x-a}{b-a})$. Cela représente les modes de vibration d'un fil attaché aux points $x = a$ et $x = b$, avec la contanste k normalisée à 1. Cela décrit tous les modes de vibration du fil (les fonctions propres), ainsi que toutes les fréquences (les valeurs propres) auquel le fil peut vibrer lors de ces vibrations stationnaires. On voit que les fonctions propres dépendent de la longueur du fil $(b-a)$.

1.2. Dimensions supérieures

On peut généraliser l'équation des ondes à un domaine borné Ω de $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire un ensemble ouvert, simplement connexe et borné. Si on décrit l'évolution d'une onde par $f(x,t)$, $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, où $x = (x_1, x_2 \dots x_n)$, on obtient l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} &= -k^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \\ &= -k^2 \Delta f \\ f(x,0) &= g(x) \\ \left.\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} &= h(x) \end{aligned}$$

Encore une fois, on peut poser les conditions $f| = 0$ sur $\partial\Omega$ (conditions de Dirichlet) ou $\frac{\partial f}{\partial n} = 0$ sur $\partial\Omega$, où n est le vecteur normal pointant vers l'extérieur (conditions de Neumann).

Pour $n = 2$, cela représente une onde se propageant sur une membrane tendue, par exemple un tambour. Si le tambour est attaché sur le bord, cela représente les condition de Dirichlet.

Nous allons encore une fois nous intéresser aux valeurs propres du laplacien avec conditions de Dirichlet. Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$. Nous recherchons une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\begin{aligned} f|_{\partial\Omega} &= 0 \\ -\Delta f &= \lambda f \quad \text{sur } \Omega \end{aligned}$$

Afin d'étudier le problème, de nombreux outils tirés de l'analyse fonctionnelle sont nécessaires. Pour cela, nous aurons besoin de certaines définitions. Soit $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un domaine borné, $k \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{R}, p > 1$. Nous utiliserons la notation suivante :

— $L^p(\Omega) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \quad | \quad \int\limits_\Omega |f|^p < +\infty \right\}$

— $\|f\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int\limits_\Omega |f|^p \right)^{1/p}$

— Si $p = 2$, on obtient un produit scalaire pour l'espace $L^2(\Omega)$:

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int\limits_\Omega uv$$

Donc, $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

— $W^{k,p}(\Omega) := \{ f : \Omega \to \mathbb{R} \quad | \quad D_\alpha f \in L^p(\Omega) \quad \forall |\alpha| \leq k \}$

Ici, les dérivées sont prises au sens faible.

De plus, α est un multi-indice : $\alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ et $D_\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} x_1 \cdots \partial^{\alpha_n} x_n}$.

— On munit $W^{k,p}(\Omega)$ de la norme suivante :

$$\|u\|_{W^{k,p}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p} \tag{1.2.1}$$

Ensuite, on prend comme topologie de $W^{k,p}(\Omega)$ la topologie induite par cette norme.

— $H^p(\Omega) := W^{2,p}(\Omega)$

— $C_c^\infty(\Omega)$ représente l'espace des fonctions infiniment dérivables à support compact sur Ω. On voit bien que $C_c^\infty(\Omega) \subset H^p(\Omega)$ pour tout $p > 1$.

— $H_0^p(\Omega)$ représente la fermeture de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $H^p(\Omega)$. On peut voir $H_0^p(\Omega)$ comme l'ensemble des fonctions de $H^p(\Omega)$ qui s'annulent sur la frontière de Ω.

— $S(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \quad | \quad \forall a, b, \quad \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^b D_a f| < \infty \right\}$

Ici, a et b sont des multi-indices.

Premièrement, on veut trouver des informations générales sur le spectre de $-\Delta$. On commence par citer le théorème spectral :

Théorème 1.2.1 (Hilbert-Schmidt)**.** *Soit A un opérateur agissant sur un espace de Hilbert V. Si A est auto-adjoint et compact, alors il existe une base orthogonale B de V telle que chaque vecteur de B soit un vecteur propre de A. De plus, chaque valeur propre de A est réelle et le spectre est discret.*

Ensuite, on considère l'opérateur $-\Delta$ agissant sur l'espace $L^2(\Omega)$ (au sens des distributions). On construit l'extension de Friedrichs de Δ, puis on construit l'opérateur inverse $(-\Delta)^{-1}$.

On utilise ensuite un des théorèmes de plongement de Sobolev :

Théorème 1.2.2. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine borné de classe C^1. Alors, l'espace $H_0^1(\Omega)$ est un sous-ensemble compact de $L^2(\Omega)$*

Cela donne une haractérisation de l'opérateur $-\Delta$: en effet, on prouve que $(-\Delta)^{-1}$ est un opérateur auto-adjoint et compact. Donc, il existe une base orthogonale de l'espace $L^2(\Omega)$ formée des fonctions propres du laplacien avec les conditions de Dirichlet. De plus, l'ensemble des valeurs propres est discret.

1.2.1. Principe variationnel et valeurs propres

Maintenant, nous allons obtenir une caractérisation des valeurs propres. On définit le quotient de Rayleigh $R(f)$ d'une fonction $f \in H_0^1(\Omega)$ comme suit :

$$\begin{aligned} R(f) := &\frac{(-\Delta f, f)_{L^2(\Omega)}}{(f,f)_{L^2(\Omega)}} \\ = &\frac{\int\limits_\Omega -\Delta f \cdot f}{\int\limits_\Omega f^2} \\ = &\frac{\int\limits_\Omega \nabla f \cdot \nabla f + \oint_{\partial\Omega} f(\nabla f \cdot n)}{\int\limits_\Omega f^2} \\ = &\frac{\int\limits_\Omega \|\nabla f\|^2}{\int\limits_\Omega f^2} \end{aligned}$$

Nous avons utilisé le théorème de la divergence pour le passage de la deuxième à la troisième ligne. Ici, n représente le vecteur normal à la surface $\partial\Omega$ pointant vers l'extérieur.

En particulier, $R(f) > 0$ pour toute fonction f non-nulle qui s'annule sur la frontière. On peut généraliser cet argument de la façon suivante pour n'importe quel domaine Ω borné :

Théorème 1.2.3 (Inégalité de Poincaré)**.** *Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$. Alors, il existe une constante $c(\Omega) > 0$ telle que pour toute fonction $f \in H_0^1(\Omega)$, nous avons l'inégalité suivante :*

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} \leq c(\Omega)\|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}$$

Donc, pour toute fonction qui s'annule sur la frontière, les valeurs propres du laplacien avec conditions de Dirichlet sont toutes négatives. Afin de contourner ce problème, nous allons donner une nouvelle définition du laplacien :

Définition 1.2.1. *On définit le laplacien de Dirichlet comme l'opérateur* $-\Delta$ *agissant sur* $H_0^1(\Omega)$.

On peut maintenant exprimer les valeurs propres du laplacien de Dirichlet à l'aide du quotient de Rayleigh :

$$\lambda_1(\Omega) := \inf_{\substack{f \in H_0^1(\Omega) \\ f \neq 0}} R(f) \tag{1.2.2}$$

À présent, on utilise le fait que $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert et que l'espace engendré par les fonctions propres du laplacien de Dirichlet forment un espace dense dans $L^2(\Omega)$ afin d'exprimer toutes les valeurs propres. Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\lambda_k(\Omega) := \sup_{\substack{V \subset H_0^1(\Omega) \\ dim(V) = k-1}} \inf_{\substack{f \perp u \quad \forall u \in V \\ f \neq 0}} R(f) \tag{1.2.3}$$

Un point important à retenir est que chaque fonction propre est orthogonale à l'espace engendré par les fonctions propres associées à une valeur propre strictement inférieure. De plus, les valeurs propres ont été naturellement disposées en ordre croissant et avec leur multiplicité.

Un des points de départ de l'étude du spectre du laplacien de Dirichlet a été la découverte par Hermann Weyl, en 1911, d'une relation directe entre les propriétés géométriques d'un domaine et le comportement de son spectre.

Théorème 1.2.4 (Loi de Weyl)**.** *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un domaine borné dont la frontière est analytique par morceaux. Soit* $N(x)$ *le nombre de valeurs propres du laplacien de Dirichlet inférieures ou égales à* x. *Alors,*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{N(x)}{x^{n/2}} = (2\pi)^{-n} \sigma_n |\Omega| \tag{1.2.4}$$

Ici, σ_n représente le volume de la boule unité dans $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire :

$$\sigma_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2 + 1)} \tag{1.2.5}$$

1.2.2. Fonctions propres et domaines nodaux

Maintenant, soit f_k une fonction propre du laplacien de Dirichlet associée à la valeur propre λ_k. Soit Z_{f_k} l'ensemble suivant :

$$Z_{f_k} := f_k^{-1}(0) \subset \Omega$$

Nous appellerons Z_{f_k} l'ensemble nodal de f_k. Nous nous intéresserons aux propriétés de cet ensemble et de son complément, $\Omega \cap (Z_{f_k})^c$. Une composante connexe de $\Omega \cap (Z_{f_k})^c$ sera maintenant appelée un domaine nodal.

Premièrement, citons un résultat dû à Aronszajn :

Théorème 1.2.5 (Continuation unique)**.** *Soit f une fonction propre du laplacien de Dirichlet. Si f s'annule sur un ouvert de Ω, alors f est identiquement nulle sur tout Ω.*

On peut maintenant introduire un théorème sur le nombre de domaines nodaux d'une fonction propre du laplacien de Dirichlet. Nous utiliserons la notation suivante : $N(f_k)$ représentera le nombre de domaines nodaux de f_k.

Théorème 1.2.6 (Courant)**.** *Soient $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \ldots$ les valeurs propres du laplacien de Dirichlet sur un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Soient $f_1, f_2, f_3 \ldots$ les fonctions propres associées à ces valeurs propres. Alors, $N(f_k) \leq k$.*

La preuve de ce théorème utilise trois idées principales : le principe variationnel pour les valeurs propres, l'orthogonalité des fonctions propres et la propriété de continuation unique. Si une fonction propre f_k a plus de k domaines nodaux, on construit k fonctions orthogonales entre elles dont le quotient de Rayleigh est inférieur à λ_k. De plus, toutes ces fonctions sont orthogonales à f_k, ce qui contredit la définition ()1.2.3) de λ_k.

Les fonctions f_k telles que $N(f_k) = k$ seront appelées *Courant-sharp.*

Maintenant, une question naturelle se pose : de tous les domaines Ω de $\mathbb{R}^n$ ayant le même volume, lequel minimise la première valeur propre $\lambda_1(\Omega)$?

La réponse a été trouvée indépendamment par Faber et Krahn.

Théorème 1.2.7 (Faber (1923), Krahn (1925))**.** *Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$. Alors,*

$$\lambda_1(\Omega) \geq \lambda_1(\Omega^*) \tag{1.2.6}$$

Ici, Ω^* est la -boule de même volume que Ω dans $\mathbb{R}^\ltimes$.

On peut donner une forme explicite à l'inégalité (1.2.6) :

Théorème 1.2.8 (Krahn (1928))**.** *Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$. Désignons par j_u le premier zéro de la fonction de Bessel du premier type $J_u(x)$. Alors,*

$$\lambda_1(\Omega) \geq \left(\frac{1}{|\Omega|}\right)^{2/n} {\sigma_n}^{2/n} j_{n/2-1}^2 \tag{1.2.7}$$

Encore une fois, σ_n représente le volume de la boule unité dans $\mathbb{R}^n$.

En combinant les théorèmes 1.2.4 et 1.2.8, on peut obtenir le résultat suivant :

Théorème 1.2.9 (Pleijel (1956)). *Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ dont la frontière est analytique par morceaux, $n \geq 2$. Soient $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \dots$ les valeurs propres du laplacien $-\Delta$ avec conditions de Dirichlet et $f_1, f_2, f_3 \dots$ les fonctions propres associées. Alors, il existe une constante $\gamma(n) < 1$ qui dépend seulement de la dimension telle que :*

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{N(f_k)}{k} \leq \gamma(n) = \frac{2^{n-2} n^2 \Gamma(n/2)^2}{j^n_{n/2-1}} \tag{1.2.8}$$

Démonstration. Soit f_k une fonction propre avec valeur propre λ_k et $\Omega_1 \dots \Omega_N$ les domaines nodaux de f_k. Par le principe variationnel pour les valeurs propres, $\lambda_1(\Omega_i) \leq \lambda_k(\Omega)$. En effet, comme f_k s'annule sur la frontière de Ω_i, son quotient de Rayleigh ne peut être inférieur à $\lambda_1(\Omega_i)$.

Donc, par (1.2.7), $|\Omega_i| \geq \frac{\sigma_n j^n_{n/2-1}}{\lambda_k^{n/2}}$. On obtient ensuite l'inégalité suivante :

$$|\Omega| \geq N(f_k) \frac{\sigma_n j^n_{n/2-1}}{\lambda_k^{n/2}} \tag{1.2.9}$$

Finalement, on obtient :

$$N(f_k) \leq \frac{\lambda_k^{n/2} |\Omega|}{\sigma_n j^n_{n/2-1}} \tag{1.2.10}$$

De plus, on peut reformuler la loi de Weyl de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \frac{N(\lambda_k)}{{\lambda_k}^{n/2}} &= (2\pi)^{-n} \sigma_n |\Omega| \\
\lim_{k\to\infty} \frac{k}{{\lambda_k}^{n/2}} &= (2\pi)^{-n} \sigma_n |\Omega| \\
\lim_{k\to\infty} \frac{{\lambda_k}^{n/2}}{k} &= \frac{(2\pi)^n}{\sigma_n |\Omega|} \\
\lim_{k\to\infty} \frac{\lambda_k}{k^{2/n}} &= \frac{(2\pi)^2}{(\sigma_n |\Omega|)^{2/n}} \\
\lambda_k &= k^{2/n} \left(\frac{(2\pi)^2}{(\sigma_n |\Omega|)^{2/n}} + o_k(1) \right)
\end{aligned}$$

En combinant la dernière équation avec (1.2.10), on obtient :

$$N(f_k) \leq k \left(\frac{(2\pi)^n}{\sigma_n^2 j^n_{n/2-1}} + o_k(1) \right) \tag{1.2.11}$$

En utilisant l'identité $\sigma_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}$ et les propriétés de la fonction gamma, on obtient :

$$N(f_k) \leq k\left(\frac{2^{n-2}n^2\Gamma(n/2)^2}{j_{n/2-1}^n} + o_k(1)\right) \tag{1.2.12}$$

On obtient l'inégalité voulue en divisant par k et en faisant tendre k vers l'infini.

□

Ce résultat implique qu'il existe seulement un nombre fini de $k \in \mathbb{N}$ tels que $N(f_k) = k$.

On obtient un résultat similaire lorsqu'on prend des conditions de Neumann en dimension 2.

Théorème 1.2.10 (Polterovich (2009))**.** *Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^2$ dont la frontière est analytique par morceaux. Soient $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \ldots$ les valeurs propres du laplacien $-\Delta$ avec conditions de Neumann et $f_1, f_2, f_3 \ldots$ les fonctions propres associées. Nous avons l'inégalité suivante :*

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{N(f_k)}{k} \leq \gamma(2) = \frac{4}{j_0^2} \approx 0,691\ldots \tag{1.2.13}$$

Notons que la constante $\gamma(2)$ est la même que celle du théorème 1.2.9. De même, aucun résultat de ce type n'a été prouvé pour les dimensions supérieures à 2.

Deux résultats ont été découverts récemment afin d'améliorer la constante $\gamma(n)$. Le premier utilise les propriétés de stabilité de l'inégalité de Faber-Krahn en dimension 2 et le pavage optimal du plan par des disques :

Théorème 1.2.11 (Bourgain, 2013)**.** *Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^2$ dont la frontière est lisse par morceaux. Soient $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \ldots$ les valeurs propres du laplacien $-\Delta$ avec conditions de Dirichlet et $f_1, f_2, f_3 \ldots$ les fonctions propres associées. Alors,*

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{N(f_k)}{k} < \gamma(2) - (3.\ldots) \times 10^{-9} \tag{1.2.14}$$

Le deuxième résultat utilise une autre méthode : utiliser les propriétés du pavage du plan par des domaines de forme variable. Dans [**17**], on prouve une inégalité sur les propriétés géométriques d'un découpage d'un domaine en une union de domaines plus petits. On spécifie que la constante du théorème de Pleijel peut être améliorée à l'aide de ce résultat, mais on ne donne pas d'amélioration explicite.

Chapitre 2

SPECTRE DE L'OSCILLATEUR HARMONIQUE QUANTIQUE

Maintenant, définissons l'oscillateur harmonique quantique isotrope :

$$H : S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R})$$
$$H(f) := -\Delta f + |x^2| f$$

Cet opérateur fait partie de la famille des opérateurs de Schödinger, $H_v = -\Delta + V$ où V est un potentiel positif. L'oscillateur harmonique quantique a deux particularités qui en rendent l'étude particulièrement intéressante : on connait les fonctions propres pour n'importe quelle dimension et on peut approximer n'importe quel potentiel V par un potentiel quadratique au voisinage de zéro.

2.1. Dimension 1

On cherche à trouver $f \in S(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $Hf = \lambda f$. Les solutions à ce problème sont $\lambda_n = 2n + 1/2$ et $f_n = e^{\frac{-x^2}{2}} H_n(x)$, où $H_n(x)$ est le n-ième polynôme d'Hermite :

$$\begin{aligned} H_n(x) &= (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{-\frac{x^2}{2}} \\ &= n! \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^m x^{n-2m}}{m!(n-2m)!2^m} \end{aligned}$$

De plus, les fonctions f_n engendrent un sous-espace dense de $S(\mathbb{R})$.

2.2. Dimensions supérieures

Maintenant, trouvons les valeurs propres et les fonctions propres de l'opérateur H en dimension quelconque.

On peut décomposer l'opérateur H comme suit :

$$H = \sum_{i=1}^{n} -\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + x_i^2$$

On sépare alors les variables et on obtient les fonctions propres suivantes :

$$f_{a_1,a_2\ldots a_n}(x) = e^{-\frac{|x|^2}{2}} \prod_{i=1}^{n} H_{a_i}(x_i)$$

$$\lambda_{a_1,a_2\ldots a_n} = 2\sum_{i=1}^{n} a_i + n/2$$

Donc, pour $\sum_{i=1}^{n} a_i = k$, la valeur propre $\lambda_{a_1,a_2\ldots a_n}$ a une multiplicité égale à $\binom{n+k-1}{k}$. Donc, il y a $\sum_{j=1}^{k} \binom{n+j-1}{j} = \binom{n+k}{k}$ valeurs propres inférieures où égales à $2k + n/2$.

On peut maintenant donner un ordre sur les fonctions propres et les valeurs propres : pour $k \in \left[\binom{n+j-1}{j-1} + 1, \binom{n+j}{j}\right]$, $\lambda_k = 2j + n/2$ et f_k est une combinaison linéaire des fonctions

$$e^{-\frac{|x|^2}{2}} \prod_{\substack{a_1,\ldots a_n \\ \sum_i a_i = k}} H_{a_i}(x_i)$$

2.3. Fonctions propres et domaines nodaux

On connait maintenant plusieurs résultats concernant les propriétés géométriques des fonctions propres de l'oscillateur harmonique quantique en dimension 2.

Il existe plusieurs versions d'un théorème analogue au théorème 1.2.6. On cherche à démontrer que la fonction propre f_k ne peut avoir plus de k domaines nodaux.

Si on considère les fonctions f_k de l'oscillateur harmonique quantique isotrope, nous avons pour $k \in [\frac{j(j+1)}{2} + 1, \frac{(j+1)(j+2)}{2}]$, $f_k = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} g_k(x,y)$ où g_k est un polynôme de degré j. Alors, Z_{f_k} est égal à l'ensemble des zéros de g_k puisque $e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \neq 0$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Donc, Z_{f_k} est une courbe algébrique de degré j.

Une première approche consiste à utiliser les propriétés des courbes algébriques réelles. On se sert de quelques théorèmes liés à la géométrie des courbes et aux propriétés des polynômes.

Théorème 2.3.1 (Bézout)**.** *Soit f et g deux polynômes de deux variables réelles. Soit $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad f(x,y) = g(x,y) = 0\}$. Il existe deux possibilités pour $Card(A)$:*

— *Si f et g ont une composante en commun, $Card(A) = +\infty$.*

— *Si f et g n'ont pas une composante en commun, $Card(A) \leq deg(f) \cdot deg(g)$.*

Une utilisation judicieuse du théorème de Bézout permet de démontrer le résultat suivant :

Théorème 2.3.2 (Harnack)**.** *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un polynôme de degré n. Soit $Z_f := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad f(x,y) = 0\}$. On divise Z_f en une union de courbes lisses, appelées composantes de Z_f. Soient $a_1, a_2 \dots a_m$ les points singuliers de Z_f et $s_1, s_2 \dots s_m$ leur multiplicité. Alors, le nombre de composantes de Z_f est inférieur ou égal à $\frac{(n-1)(n-2)}{2} - \sum_{i=1}^{m} \frac{s_i(s_i-1)}{2} + 1$.*

On utilise maintenant ce résultat afin d'obtenir le théorème suivant :

Théorème 2.3.3. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un polynôme de degré n. Alors, le nombre de domaines nodaux de f est inférieur ou égal à $\frac{n(n-1)}{2} + 1$.*

Pour $k \in [\frac{j(j+1)}{2} + 1, \frac{(j+1)(j+2)}{2}]$, f_k est un polynôme de degré j. Nous obtenons donc que pour $j > 2$, $N(f_k) < k$.

De plus, les seules possiblités de fonctions propres Courant-sharp sont les fonctions de degrés 1 et 2.

Une autre méthode peut être utilisée afin de prouver que $N(f_k) \leq k$. En effet, on sait que les fonctions paires sont naturellement orthogonales aux fonctions impaires. On utilise ensuite un analogue de la propriété de continuation unique.

Théorème 2.3.4 (Bérard, Helffer (2014))**.** *Le nombre de domaines nodaux d'une fonction propre de l'oscillateur harmonique quantique de degré n est inférieur à :*

$$\begin{aligned} 2(r^2+1) \quad & si\ n = 2r \\ 2r(r+1)+2 \quad & si\ n = 2r+1 \end{aligned}$$

Finalement, on peut aussi trouver des fonctions propres ayant très peu de domaines nodaux en dimension 2.

Théorème 2.3.5 (Bérard, Helffer (2014))**.** *Pour tout k impair, il existe une fonction propre f de l'oscillateur harmonique quantique en deux dimensions telle que*

— *La fonction f est de la forme $e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} g(x)$, où g est un polynôme de degré k.*

— $N(f) = 2$

Chapitre 3

THÉORÈME DE PLEIJEL POUR L'OSCILLATEUR HARMONIQUE QUANTIQUE

3.1. Résultat principal

Soit $H : S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ l'opérateur $H(f) := -\Delta f + |x|^2 f$.

Soient maintenant $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$ les valeurs propres de H, avec fonctions propres associées $f_1, f_2, \ldots$, avec $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Soit $N(f_k)$ le nombre de domaines nodaux de f_k dans $\mathbb{R}^n$.

Alors, nous avons le résultat suivant :

Théorème 3.1.1. $\limsup_{k\to\infty} \frac{N(f_k)}{k} \leq \frac{n!\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n}{2}+1)}{j^n_{n/2-1}\Gamma(\frac{n}{2}+\frac{1}{2})}$

Ici, j_a est le premier zéro de la fonction de Bessel du premier type J_a.

3.1.1. Présentation de la preuve

Nous voulons obtenir une inégalité de la forme suivante : $N(f_k)/k \leq C + o(1)$, avec $C < 1$. Cependant, comme les valeurs propres ont une multiplicité plus grande ou égale à 1, nous allons considérer toutes les fonctions propres associées à la même valeur propre.

Si on regarde la preuve du théorème de Pleijel pour les domaines nodaux du laplacien pour le problème de Dirichlet, l'idée principale est de borner inférieurement l'aire de chaque domaine nodal. On divise ensuite l'aire totale par l'aire de chaque domaine nodal afin de donner une borne maximale sur le nombre de ceux-ci.

L'idéal serait de pouvoir utiliser le même type d'argument pour l'oscillateur harmonique quantique. Cependant, nous avons un obstacle majeur : le domaine sur lequel agit l'opérateur n'est pas borné, contrairement au problème de Dirichlet pour le laplacien. Nous devrons donc contourner cette difficulté.

La première étape sera de démontrer que le nombre de domaines nodaux non-bornés augmente de façon contrôlée, puis de montrer que les domaines nodaux bornés sont tous inclus dans une boule de rayon relativement petit.

Nous allons ensuite diviser ce disque en anneaux concentriques. Nous bornerons ensuite le nombre de domaines nodaux intersectant plus d'un anneau à l'aide d'un théorème de Milnor tiré de la théorie de Morse. Finalement, nous utiliserons l'inégalité de Faber-Krahn pour borner inférieurement l'aire d'un domaine nodal se situant totalement à l'intérieur d'un anneau.

En combinant les inégalités obtenues précédemment, nous arriverons au résultat final.

3.2. Preuve du théorème 3.1.1

3.2.1. Préambule

Soit $H : S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$, $H(f) := -\Delta f + |x|^2 f$.

Soient maintenant $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$ les valeurs propres de H, avec fonctions propres associées $f_1, f_2, \ldots$, avec $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Rappelons que $\{f_k\}_{k=1,2\ldots}$, sont les fonctions propres de l'opérateur H. De plus, nous les avons ordonnées avec les valeurs propres en ordre croissant.

Soit $x = (x_1, x_2, \ldots x_n)$.

Pour $k \in [\binom{n+m-1}{n} + 1, \binom{n+m}{n}]$, on a $Hf_k = \lambda_k f_k = (2m + n/2)f_k$. De plus, $f_k(x) = e^{-\frac{|x|^2}{2}} g_k(x)$, où $g_k(x)$ est un polynôme de degré m.

À partir de maintenant, k sera fixé et m sera pris de telle façon que $k \in [\binom{n+m-1}{n} + 1, \binom{n+m}{n}]$.

Nous utiliserons aussi la notation suivante : Ω désignera toujours un domaine nodal de f_k.

Pour toute fonction f, $V(f)$ désignera son ensemble nodal : $V(f) := f^{-1}(0)$.

Finalement, $w_n(r)$ désignera le volume de la boule de rayon r dans $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire :

$$w_n(r) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)} r^n$$

3.2.2. Domaines nodaux non-bornés

Premièrement, étudions les domaines nodaux non-bornés de f_k. Soit Ω un domaine nodal non-borné de f_k. Comme pour tout k, $f_k \in L^2(\mathbb{R}^n)$, on peut utiliser l'égalité suivante :

$$\begin{aligned}
\lambda_k &= \lambda_k \frac{\int\limits_\Omega f_k^2}{\int\limits_\Omega f_k^2} \\
&= \frac{\int\limits_\Omega (-f_k \Delta f_k + |x|^2 f_k^2)}{\int\limits_\Omega f_k^2} \\
&= \frac{\int\limits_\Omega |\nabla f_k|^2 + \int\limits_\Omega |x|^2 f_k^2}{\int\limits_\Omega f_k^2}
\end{aligned} \tag{3.2.1}$$

Ici, nous avons effectué un passage à la limite :

$$\int\limits_\Omega -f_k \Delta f = \lim_{u\to\infty} \int\limits_{\Omega\cap B(0,u)} -f_k \Delta f_k$$

avec $B(0,u)$ la n-boule centrée en 0 de rayon u. Nous utilisons ensuite le théorème de la divergence et le fait que f_k est une fonction à décroissance rapide. En effet, cet argument a déjà été utilisé dans l'article de P. Bérard et B. Helffer [1].

Lemme 3.2.1. *Pour tout domaine nodal Ω, il existe $x \in \Omega$ tel que $|x|^2 \leq \lambda_k$*

Démonstration. Si pour tout $x \in \Omega$, $|x|^2 > \lambda_k$, alors

$$\begin{aligned}
\lambda_k &= \frac{\int\limits_\Omega |\nabla f_k|^2 + \int\limits_\Omega |x|^2 f_k^2}{\int\limits_\Omega f_k^2} \\
&\geq \frac{\int\limits_\Omega |x|^2 f_k^2}{\int\limits_\Omega f_k^2} \\
&> \frac{\int\limits_\Omega \lambda_k f_k^2}{\int\limits_\Omega f_k^2} \\
&= \lambda_k
\end{aligned} \tag{3.2.2}$$

1. [**1**], page 16

□

Donc, pour tout domaine nodal Ω de f_k, il existe $x \in \Omega$ tel que $|x|^2 \leq \lambda_k$. Alors, on peut réduire l'étude des domaines nodaux non-bornés à l'étude des domaines nodaux sur la sphère de rayon λ_k dans $\mathbb{R}^n$.

3.2.3. Domaines nodaux bornés

Maintenant, étudions les domaines nodaux bornés. Comme $f_k(x) = e^{-\frac{|x|^2}{2}} g_k(x)$ et que $e^{-\frac{|x|^2}{2}} \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, nous allons seulement étudier les domaines nodaux de la fonction g_k. Rappelons que les g_k sont des polynômes de degré m en n variables.

Nous allons diviser la région où se trouvent les domaines nodaux bornés en un certain nombre d'anneaux concentriques. Le nombre d'anneaux est important, puisque nous voulons compter le nombre de domaines nodaux de deux façons : ceux qui sont strictement inclus dans un anneau et ceux qui sont inclus dans plus d'un anneau. Plus nous avons d'anneaux, plus on peut restreindre efficacement le nombre de domaines nodaux dans chaque anneau. Cependant, le nombre de domaines nodaux intersectant plus d'un anneau augmentera et nous devrons donc choisir le nombre d'anneaux de manière à minimiser ces deux quantités de façon optimale.

Divisons les domaines nodaux en sous-ensembles. Ici, on étudie seulement les cas $k \geq 4$ pour avoir $\log k \geq 1$. De toute façon, on étudie le comportement asymptotique et cette restriction n'influence pas le résultat final.

(1) Notons
$$A_i := \left\{ \Omega \quad | \quad \forall x \in \Omega, (\frac{(i-1)}{\lfloor \log k \rfloor})^{1/n} \sqrt{\lambda_k} \leq |x| < (\frac{i}{\lfloor \log k \rfloor})^{1/n} \sqrt{\lambda_k} \right\}$$
Ici, i peut prendre les valeurs $1, 2 \ldots \lfloor \log k \rfloor$.

(2) Notons
$$B_j := \left\{ \Omega \quad | \quad \exists x \in \Omega \quad \text{tel que} \quad |x| = (\frac{j}{\lfloor \log k \rfloor})^{1/n} \sqrt{\lambda_k} \right\}$$
Encore une fois, j peut prendre les valeurs $1, 2 \ldots \lfloor \log k \rfloor$.

On voit bien que tous les domaines bornés sont couverts par ces ensembles. En effet, tel que démontré dans le lemme 3.2.1, pour tout domaine nodal Ω, il existe $x \in \Omega$ tel que $|x|^2 \leq \lambda_k$. Donc, s'il existe $x \in \Omega$ tel que $|x|^2 > \lambda_k$, alors il existe $x \in \Omega$ tel que $|x|^2 = \lambda_k$ par la connexité de Ω.

3.2.4. Domaines nodaux intersectant plus d'un anneau

Soit $f : B^n \to \mathbb{R}$ un polynôme de degré k. Ici, B^n représente la boule unité dans $\mathbb{R}^n$. Nous allons borner le nombre de domaines nodaux de f de la façon suivante :

Lemme 3.2.2. *Soit $f : B^n \to \mathbb{R}$ un polynôme de degré d. Le nombre de domaines nodaux de f est borné supérieurement par $(2+d)(1+d)^{n-1}$.*

Soit $F^+ := \{x \in B^n \quad | \quad f(x) > 0\}$. Premièrement, montrons que F^+ a un nombre maximal de composantes connexes. En effet, nous retrouvons le théorème suivant dans [**13**] :

Théorème 3.2.1 (Milnor)**.** *Soit f un polynôme de degré d. On définit V comme suit :*

$$V := \{x \in B^n \quad | \quad f(x) \geq 0\}$$

Alors, la somme des nombres de Betti de V est inférieure ou égale à $\frac{1}{2}(2+d)(1+d)^{n-1}$.

Soit $V_m := \{x \in B^n \quad | \quad f(x) \geq 1/m\}$

Donc, le nombre de composantes connexes de V_m est inférieur ou égal à $\frac{1}{2}(2+d)(1+d)^{n-1}$.

Maintenant, nous avons les inclusions $V_1 \subset V_2 \subset V_3 \ldots$. Aussi, pour tout $m \in \mathbb{N}$, V_m est un ensemble fermé.

De plus, $F^+ = \lim\limits_{m \to \infty} V_m$.

Lemme 3.2.3. *Le nombre de composantes connexes de F^+ est borné par $\frac{1}{2}(2+d)(1+d)^{n-1}$.*

Démonstration. En effet, supposons que F^+ ait plus de $\frac{1}{2}(2+d)(1+d)^{n-1}$ composantes connexes. On choisit les composantes $\{a_i\}, i = 1, 2 \ldots \frac{1}{2}(2+d)(1+d)^{n-1}+1$.

Maintenant, soit $s_i \in a_i$ tel que pour tout $x \in a_i$, $f(x) \leq f(s_i)$. On peut trouver un tel s_i par la compacité de $\overline{a_i}$ et la continuité de f.

On définit $S := inf\left\{f(s_i), i = 1, 2 \ldots \frac{1}{2}(2+d)(1+d)^{n-1}+1\right\}$.

Il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $1/m < S$. Pour chaque composante connexe a_i, il existe une composante connexe $b_i \subset V_m$ telle que $b_i \subset a_i$. Cependant, cela impliquerait que V_m ait au moins $\frac{1}{2}(2+d)(1+d)^{n-1}+1$ composantes connexes, ce qui contredit le théorème 3.2.1. $\square$

Nous pouvons maintenant compléter la preuve du lemme 3.2.2.

Soit $F^- := \{x \in B^n \quad | \quad f(x) < 0\}$. On peut utiliser le même argument que précédemment pour montrer que F^- possède au maximum $\frac{1}{2}(2+d)(1+d)^{n-1}$ composantes connexes.

De plus, F^+ et F^- sont disjoints. Donc, le nombre de domaines nodaux de f est égal au nombre de composantes connexes de $F^- \cup F^+$, qui est inférieur ou égal à $(2+d)(1+d)^{n-1}$, ce qui complète la preuve.

Maintenant, trouvons une borne sur le nombre de domaines nodaux d'un polynôme défini sur une sphère dans $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire la restriction d'un polynôme à n variables à $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$.

Lemme 3.2.4. *Soit $f : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}$ un polynôme de degré d. Alors, le nombre de domaines nodaux de f est borné supérieurement par $2^{2n-1}d^{n-1}$.*

Démonstration. Soit $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$ un polynôme de degré d. Sur $\mathbb{S}^{n-1}$, on peut faire l'identification $x_1^2 = 1 - \sum_{i=2}^n x_i^2$ et on peut donc réécrire f sous la forme suivante :

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g(x_2, x_3, \ldots, x_n) + x_1 \cdot h(x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

Ici, g est un polynôme de degré d et h un polynôme de degré $d-1$.

Soit maintenant $F : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}$ défini comme suit : $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) := g(x_2, x_3, \ldots, x_n) - x_1 \cdot h(x_2, x_3, \ldots, x_n)$. Nous avons

$$\begin{aligned} f \cdot F &= g^2(x_2, x_3, \ldots, x_n) - x_1^2 \cdot h^2(x_2, x_3, \ldots, x_n) \\ &= g^2(x_2, x_3, \ldots, x_n) + (\sum_{i=2}^n x_i^2 - 1) \cdot h^2(x_2, x_3, \ldots, x_n) \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Donc, fF est un polynôme de degré $2d$ en seulement $n-1$ variables défini sur $\mathbb{S}^{n-1}$.

Définissons $\phi : B^{n-1} \to \{x \in \mathbb{S}^{n-1} \quad | \quad x_1 > 0\}$,
$\phi(x_2, \ldots, x_n) = (\sqrt{1 - \sum_{i=1}^n x_i^2}, x_2, \ldots, x_n)$.

Soit $\tilde{f} : B^{n-1} \to \mathbb{R}$, $\tilde{f} = (fF) \circ \phi$. C'est un polynôme de degré $2d$ en $n-1$ variables défini sur la boule unité. Par le lemme 3.2.2, le nombre de domaines nodaux de $\tilde{f}$ est borné supérieurement par $(2+2d)(1+2d)^{n-2}$.

Nous avons :

$$(2+2d)(1+2d)^{n-2} < (4d)(4d)^{n-2}$$

$$= 2^{2n-2}d^{n-1} \tag{3.2.4}$$

Maintenant, la fonction ϕ projette les domaines nodaux de $\tilde{f}$ sur $\mathbb{S}^{n-1}$. Donc, le nombre de domaines nodaux de fF sur la partie supérieure de $\mathbb{S}^{n-1}$ est borné par $2^{2n-2}d^{n-1}$.

Par le même argument, le nombre de domaines nodaux sur la partie inférieure de $\mathbb{S}^{n-1}$ est borné par $2^{2n-2}d^{n-1}$. De plus, chaque domaine nodal est situé soit sur la partie supérieure, soit sur la partie inférieure, soit les deux à la fois.

Donc, le nombre de domaines nodaux de fF est borné supérieurement par $2^{2n-1}d^{n-1}$.

Finalement, on voit que le nombre de domaines nodaux de f est borné supérieurement par le nombre de domaines nodaux de fF, ce qui conclut la preuve.

□

Maintenant, on peut donner une borne sur le nombre de domaines nodaux intersectant plus d'un anneau. Rappelons que $f_k(x) = e^{-\frac{|x|^2}{2}} g_k(x)$ où $g_k(x)$ est un polynôme de degré m, où m est choisi tel que $k \in \left[\binom{n+m-1}{n} + 1, \binom{n+m}{n}\right]$.

Lemme 3.2.5. $Card\left(\cup_{l=1}^{\lfloor \log k \rfloor} B_l\right) \leq 2^{2n-1}m^{n-1}\log k$

En effet, par le lemme 3.2.4, $Card(B_l) \leq 2^{2n-1}m^{n-1}$ pour $1 \leq l \leq \lfloor \log k \rfloor$. Nous avons donc l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} Card\left(\cup_{l=1}^{\lfloor \log k \rfloor} B_l\right) &\leq \sum_{l=1}^{\lfloor \log k \rfloor} Card(B_l) \\ &\leq \sum_{l=1}^{\lfloor \log k \rfloor} 2^{2n-1}m^{n-1} \\ &= 2^{2n-1}m^{n-1}\log k \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

3.2.5. Domaines nodaux à l'intérieur d'un anneau

Maintenant, nous allons donner une borne sur le nombre de domaines nodaux strictement inclus dans un des anneaux.

Nous allons utiliser l'inégalité de Faber-Krahn en dimension n :

$$\frac{\int\limits_{\Omega} |\nabla f|^2}{\int\limits_{\Omega} f^2} \geq \left(\frac{1}{|\Omega|}\right)^{2/n} {\sigma_n}^{2/n} j_{n/2-1}^2 \tag{3.2.6}$$

Pour tout $\Omega \in A_i$,

$$\lambda_k = \frac{\int_\Omega |\nabla f|^2}{\int_\Omega f^2} + \frac{\int_\Omega x^2 f^2}{\int_\Omega f^2}$$

$$\frac{\int_\Omega |\nabla f|^2}{\int_\Omega f^2} < \lambda_k - (\frac{i}{\lfloor \log k \rfloor})^{2/n} \lambda_k. \tag{3.2.7}$$

En combinant (3.2.6) et (3.2.7), on obtient :

$$|\Omega| \geq \frac{\sigma_n j_{n/2-1}^n}{(\lambda_k - (\frac{i}{\lfloor \log k \rfloor})^{2/n} \lambda_k)^{n/2}} \tag{3.2.8}$$

Le volume de la région où se trouvent les $w \in A_i$ est égal à

$$w_n \left(\left(\frac{i}{\lfloor \log k \rfloor} \right)^{1/n} \sqrt{\lambda_k} \right) - w_n \left(\left(\frac{i-1}{\lfloor \log k \rfloor} \right)^{1/n} \sqrt{\lambda_k} \right)$$
$$= w_n \frac{1}{\lfloor \log k \rfloor} \lambda_k^{n/2} \tag{3.2.9}$$

En combinant (3.2.8) et (3.2.9), on obtient :

$$\begin{aligned} Card(A_i) &\leq \frac{\sigma_n \frac{1}{\lfloor \log k \rfloor} \lambda_k^{n/2}}{\frac{\sigma_n j_{n/2-1}^n}{(\lambda_k - (\frac{i}{\lfloor \log k \rfloor})^{2/n} \lambda_k)^{n/2}}} \\ &= \frac{\lambda_k^n}{j_{n/2-1}^n} \frac{(1 - (\frac{i}{\lfloor \log k \rfloor})^{2/n})^{n/2}}{\lfloor \log k \rfloor} \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

On peut en déduire :

$$\begin{aligned} Card(\cup_{i=1}^{\lfloor \log k \rfloor} A_i) &\leq \sum_{i=1}^{\lfloor \log k \rfloor} Card(A_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^{\lfloor \log k \rfloor} \frac{\lambda_k^n}{j_{n/2-1}^n} \frac{(1 - (\frac{i}{\lfloor \log k \rfloor})^{2/n})^{n/2}}{\lfloor \log k \rfloor} \\ = \frac{\lambda_k^n}{j_{n/2-1}^n} &\left(\int_0^1 (1 - x^{2/n})^{n/2} dx + o_k(1) \right) \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

Ici, la fonction $f(x) = (1 - x^{2/n})^{n/2}$ est intégrable au sens de Riemann sur l'intervalle $[0, 1]$, et donc la somme de Riemann avec la partition $\{i/\lfloor \log k \rfloor\}, i = 0 \ldots \lfloor \log k \rfloor$ converge vers l'intégrale lorsque k tend vers l'infini.

On peut résoudre l'intégrale :

$$\int_0^1 (1-x^{2/n})^{n/2}dx = x\,{}_2F_1(-\frac{n}{2},\frac{n}{2};\frac{n}{2}+1;x^{2/n})\Big|_0^1$$
$$= {}_2F_1(-\frac{n}{2},\frac{n}{2};\frac{n}{2}+1;1)$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}2^{-n}\Gamma(\frac{n}{2}+1)}{\Gamma(\frac{n}{2}+\frac{1}{2})} \tag{3.2.12}$$

Ici, ${}_2F_1(a,b;c,x)$ désigne la série hypergéométrique.

On sait que $\lambda_k = 2m + n/2 = 2m + o_k(m)$. Rappelons que m est pris de telle façon que $k \in \left[\binom{n+m-1}{n}+1, \binom{n+m}{n}\right]$. Donc,

$$Card(\cup_{i=1}^{\lfloor \log k \rfloor} A_i) \leq \frac{(2m+o_k(m))^n}{j_{n/2-1}^n}\left(\frac{\sqrt{\pi}2^{-n}\Gamma(\frac{n}{2}+1)}{\Gamma(\frac{n}{2}+\frac{1}{2})}+o_k(1)\right)$$
$$= \frac{m^n}{j_{n/2-1}^n}\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n}{2}+1)}{\Gamma(\frac{n}{2}+\frac{1}{2})}+o_k(m^n) \tag{3.2.13}$$

En combinant l'équation (3.2.13) et le lemme 3.2.5, on obtient l'inégalité finale :

$$\limsup_{k\to\infty}\frac{N(f_k)}{k} \leq \limsup_{k\to\infty}\frac{Card(\cup_{i=1}^{\lfloor \log k \rfloor} A_i)+Card(\cup_{l=1}^{\lfloor \log k \rfloor} B_l)}{k}$$
$$\leq \limsup_{k\to\infty}\frac{\frac{m^n}{j_{n/2-1}^n}\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n}{2}+1)}{\Gamma(\frac{n}{2}+\frac{1}{2})}+o_k(m^n)}{\binom{m+n-1}{n}+1}$$
$$= \frac{n!\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n}{2}+1)}{j_{n/2-1}^n\Gamma(\frac{n}{2}+\frac{1}{2})} \tag{3.2.14}$$

Soit $A(n) = \frac{n!\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n}{2}+1)}{j_{n/2-1}^n\Gamma(\frac{n}{2}+\frac{1}{2})}$.

Cette constante, qui dépend seulement de la dimension, est exactement la même que dans le cas du laplacien sur un domaine borné de $\mathbb{R}^n$. Dans [**2**], on démontre que cette constante est strictement inférieure à 1 pour tout $n \geq 2$ [2].

Si on évalue cette fonction pour les petites valeurs de n avec Mathematica, on obtient :

2. [**2**], page 525. On peut utiliser les propriétés de la fonction gamma pour démontrer l'équivalence entre le $A(n)$ du présent article et $\gamma(n)$ dans [**2**].

n	A(n)
2	0.69166
3	0.455945
4	0.296901
5	0.19294
6	0.125581
7	0.0819815
8	0.0537043
9	0.0353058
10	0.0232913

3.3. Discussion

En utilisant cette méthode, il semble que la constante obtenue ne puisse pas être améliorée. En effet, prendre une partition différente pour découper la boule de rayon $\sqrt{\lambda_k}$ fait ressortir la même intégrale lorsque la partition devient assez fine. De plus, si on tente de trop faire diminuer le nombre de domaines nodaux à l'intérieur de chaque anneau en mettant trop d'anneaux, le terme lié aux A_i devient alors non-négligeable et doit être considéré dans le calcul de la constante.

Il est clair que la constante obtenue n'est pas optimale. Comme dans le cas du laplacien, on compare chaque domaine nodal à une boule d'un certain rayon et on divise l'aire totale par l'aire de cette boule pour trouver le nombre maximal de domaines nodaux dans une région donnée. Cependant, il est impossible de faire un pavage parfait d'un domaine avec des boules de rayon constant.

Dans cette optique, on peut améliorer la constante avec la méthode utilisée dans [**4**] pour $n = 2$ et la méthode utilisée dans [**17**] pour $n \geq 2$.

Bibliographie

[1] Bérard, P. et Helffer, B., *On the number of nodal domains of the 2D isotropic quantum harmonic oscillator - an extension of results of A. Stern, version 1.* Arxiv :1409.2333v1, Math.Sp. 2014.

[2] Bérard, P. et Meyer, D., *Inégalités isopérimétriques et applications* Annales Scientifiques de l'E.N.S., série 4, tome 15, numero 3 (1982), p. 513-541.

[3] Bocknak, J., Coste, M. and Roy, M., *Real Algebraic Geometry* A Series of Modern Surveys in Mathematics, Volume 36, Springer, 1998.

[4] Bourgain, J., *On Pleijel's nodal domain theorem.* IMRN, volume 2015, no. 6, 2013, 1601-1612.

[5] Chavel, I., *Isoperimetric inequalities* Cambridge Tracts in Mathematics, volume 145, Cambridge University Press, 2001.

[6] Coolidge, J. L., *A Treatise on Algebraic Curves* Clarendon Press, 1931.

[7] Courant, R. *Ein allgemeiner Satz zur Theorie der Eigenfunktionen selbstadjungierter Differentialausdrück.* Nachr. Ges. Göttingen, 81-84, 1923.

[8] Karpushkin, V.N., *Topology of the zeroes of eigenfunctions* Funktsional Anal. i Prilozhen, 23.3 1989, 59-60.

[9] Kesavan, S., *Symmetrization and Applications* World Scientific, 2006.

[10] Leydold, J., *On the Number of Nodal Domains of Spherical Harmonics* Department of Applied Statistics and Data Processing, Wirtschaftsuniversität Wien, 1993.

[11] Leydold, J., *Knotenlinien und Knotengebiete von Eigenfunktionen* Diploma thesis, Wien, 1989.

[12] Maz'ya, V., *Sobolev spaces in mathematics 1* International Mathematical Series, volume 8, 2009.

[13] Milnor, J., *On the Betti Numbers of Real Varieties* Proc. Amer. Math. Soc., 15, 275-280, 1964.

[14] Pleijel, A., *Remarks on Courant's nodal theorem.* Comm. Pure. Appl. Math. 9, 543-550, 1956.

[15] Polterovich, I., *Pleijel's nodal domain theorem for free membranes* Proc. Amer. Math. Soc. 137, 2009, 1021-1024.

[16] Blum, G., Gnutzmann, S. and Smilansky, U., *Nodal domains statistics : a criterion for quantum chaos*. Physical Review Letters, 88 (11) :114101, 2002.

[17] Steinerberger, S., *A Geometric uncertainty principle with an application to Pleijel's estimate* Annales Henri Poincaré, 15, 2014, 2299-2319.

[18] Watson, G. N., *A Treatise on the Theory of Bessel Functions* Cambridge University Press, 1922.