

Université de Montréal

**Énergie des vortex dans un modèle abélien de Higgs en 2+1 dimensions avec un potentiel  
d'ordre six**

par  
Marie-Lou Gendron Marsolais

Département en physique  
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures  
en vue de l'obtention du grade de Maître ès sciences (M.Sc.)  
en physique

août, 2014

© Marie-Lou Gendron Marsolais, 2014.

Université de Montréal  
Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé:

**Énergie des vortex dans un modèle abélien de Higgs en 2+1 dimensions avec un potentiel  
d'ordre six**

présenté par:

Marie-Lou Gendron Marsolais

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes:

Luc Vinet,	président-rapporteur
Richard MacKenzie,	directeur de recherche
Michel Côté,	membre du jury

Mémoire accepté le: .....

## RÉSUMÉ

Dans ce travail, j'étudierai principalement un modèle abélien de Higgs en 2+1 dimensions, dans lequel un champ scalaire interagit avec un champ de jauge. Des défauts topologiques, nommés vortex, sont créés lorsque le potentiel possède un minimum brisant spontanément la symétrie  $U(1)$ . En 3+1 dimensions, ces vortex deviennent des défauts à une dimension. Ils apparaissent par exemple en matière condensée dans les supraconducteurs de type II comme des lignes de flux magnétique.

J'analyserai comment l'énergie des solutions statiques dépend des paramètres du modèle et en particulier du nombre d'enroulement du vortex. Pour le choix habituel de potentiel (un polynôme quartique dit « BPS »), la relation entre les masses des deux champs mène à deux types de comportements : type I si la masse du champ de jauge est plus grande que celle du champ scalaire et type II inversement. Selon le cas, la dépendance de l'énergie au nombre d'enroulement,  $n$ , indiquera si les vortex auront tendance à s'attirer ou à se repousser, respectivement. Lorsque le flux emprisonné est grand, les vortex présentent un profil où la paroi est mince, permettant certaines simplifications dans l'analyse.

Le potentiel, un polynôme d'ordre six (« non-BPS »), est choisi tel que le centre du vortex se trouve dans le vrai vide (minimum absolu du potentiel) alors qu'à l'infini le champ scalaire se retrouve dans le faux vide (minimum relatif du potentiel). Le taux de désintégration a déjà été estimé par une approximation semi-classique pour montrer l'impact des défauts topologiques sur la stabilité du faux vide. Le projet consiste d'abord à établir l'existence de vortex classiquement stables de façon numérique. Puis, ma contribution fut une analyse des paramètres du modèle révélant le comportement énergétique de ceux-ci en fonction du nombre d'enroulement. Ce comportement s'avèrera être différent du cas « BPS » : le ratio des masses ne réussit pas à décrire le comportement observé numériquement.

**Mots clés: défauts topologiques, modèle abélien Higgs, brisure spontanée de symétrie, vortex, soliton.**

## ABSTRACT

I will consider a generalization of the Abelian Higgs model in 2+1 dimensions. The model describes a scalar field interacting with a  $U(1)$  gauge field and gives rise to vortex solutions carrying magnetic flux. In 3+1 dimensions, the vortex becomes a one-dimensional topological defect which appears in condensed matter physics as a vortex line in type-II superconductors. For a strong magnetic flux (large winding number), the vortex presents a thin-wall profile, which gives rise to certain simplifications in the analysis.

I will present how the energy of the static configuration depends on the parameters of the model and in particular on the winding number of the vortex. For the usual choice of potential (quartic, called « BPS »), the relation between the masses of the two fields will lead to a type-I or a type-II vortex, as the energy dependence on the winding number show that vortices attract or repel each other respectively.

The potential chosen here is a sixth-order polynomial (« non-BPS ») such that the core of the vortex is the true vacuum (absolute minimum) while the field at infinity goes to the false vacuum (local minimum of the potential). Their decay rate into an instable classical configuration with growing radius has already been estimated by a semi-classical approximation to show their impact on the stability of the false vacuum. The classical existence of vortex solutions will be shown numerically. My contribution to this work is a scan of the parameters of the model revealing the energetic behavior of the vortices. This behavior will be different from the « BPS » case : the masses ratio will not describe correctly the numerical calculation of the energy.

**Keywords : topological defects, abelian Higgs model, spontaneously broken symmetry, vortex, solitons.**

## TABLE DES MATIÈRES

<b>RÉSUMÉ</b> . . . . .	<b>iii</b>
<b>ABSTRACT</b> . . . . .	<b>iv</b>
<b>TABLE DES MATIÈRES</b> . . . . .	<b>v</b>
<b>LISTE DES FIGURES</b> . . . . .	<b>vii</b>
<b>LISTE DES ANNEXES</b> . . . . .	<b>ix</b>
<b>NOTATION</b> . . . . .	<b>x</b>
<b>DÉDICACE</b> . . . . .	<b>xi</b>
<b>REMERCIEMENTS</b> . . . . .	<b>xii</b>
<b>CHAPITRE 1 : INTRODUCTION</b> . . . . .	<b>1</b>
1.1 Brisure spontanée de symétrie . . . . .	3
1.2 Les défauts topologiques . . . . .	4
1.3 Désintégration des vortex . . . . .	6
1.4 Sommaire du mémoire . . . . .	7
<b>CHAPITRE 2 : LES SOLITONS</b> . . . . .	<b>8</b>
2.0.1 Un exemple d'onde solitaire en 1+1 dimensions : le kink . . . . .	10
2.0.2 Indices topologiques . . . . .	14
<b>CHAPITRE 3 : MODÈLE ABÉLIEN DE HIGGS EN 2+1 DIMENSIONS</b> . . . . .	<b>17</b>
3.1 Comportement asymptotique des solutions . . . . .	20
3.2 Solutions numériques des équations de mouvement statiques . . . . .	21
<b>CHAPITRE 4 : DÉSINTÉGRATION D'UN FAUX VIDE : LA MÉTHODE DE S. COLEMAN</b> . . . . .	<b>25</b>
4.1 Effet tunnel en mécanique quantique . . . . .	26

4.2	Effet tunnel en théorie des champs . . . . .	30
4.2.1	Solutions invariantes sous $O(4)$ . . . . .	31
4.3	Approximation « thin-wall » . . . . .	34
4.4	En résumé . . . . .	39
<b>CHAPITRE 5 : DÉSINTÉGRATION DU FAUX VIDE DANS UN MODÈLE ABÉLIEN-HIGGS . . . . .</b>		<b>40</b>
5.1	Approximation du mur épais pour $n=1$ . . . . .	40
5.2	Approximation du mur mince, pour $n$ beaucoup plus grand que 1 . . . . .	46
5.3	Désintégration d'un faux vide sans vortex . . . . .	60
5.4	Approximation du mur mince et limite de dissociation . . . . .	63
5.5	Calculs numériques de l'action euclidienne dans l'approximation du mur mince . . . . .	66
<b>CHAPITRE 6 : ÉNERGIE DES VORTEX . . . . .</b>		<b>68</b>
6.1	Modèle de Chern-Simons . . . . .	69
6.2	Factorisation de Bogomolny . . . . .	70
6.2.1	Modèle abélien de Higgs . . . . .	70
6.2.2	Modèle de Chern-Simons . . . . .	72
6.3	Approximation du mur mince dans un modèle abélien de Higgs . . . . .	73
6.3.1	Potentiel d'ordre quatre . . . . .	74
6.3.2	Potentiel d'ordre six . . . . .	76
6.4	Approximation du mur mince dans un modèle avec terme de Chern-Simons . . . . .	77
6.4.1	Potentiel d'ordre six « BPS » . . . . .	79
6.4.2	Potentiel d'ordre six général . . . . .	79
6.5	Sommaire de l'approximation du mur mince . . . . .	81
6.6	Calculs numériques de l'énergie en fonction du nombre d'enroulement . . . . .	82
6.6.1	Modèle abélien de Higgs . . . . .	83
6.6.2	Modèle de Chern-Simons . . . . .	88
6.7	Sommaire des résultats numériques . . . . .	95
<b>CHAPITRE 7 : CONCLUSION . . . . .</b>		<b>96</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE . . . . .</b>		<b>98</b>

## LISTE DES FIGURES

1.1	Potentiel d'une théorie de champs classique possédant deux minima. . . .	1
1.2	Le potentiel effectif d'une théorie pour les deux types de transitions de phase (source :[8]). . . . .	3
1.3	Le potentiel $V(\phi)$ , variant de l'habituel polynôme d'ordre quatre (A) au polynôme d'ordre six qui sera utilisé dans le modèle (D). . . . .	6
2.1	Potentiel inversé possédant un ou plusieurs minima. . . . .	12
2.2	La solution kink et sa densité d'énergie. . . . .	14
3.1	Le potentiel $V( \phi )$ , équation (3.4), avec $\varepsilon = 0.1$ . . . . .	19
3.2	Solutions numériques pour $f(r)$ et $a(r)$ obtenues avec la méthode « relaxation » pour différents paramètres. . . . .	22
3.3	Densité d'énergie totale calculée à partir des solutions numériques ainsi que les contributions à celle-ci pour différentes valeurs de paramètres. . .	23
3.4	Les solutions numériques pour $n = 1, e = 1, \varepsilon = 0.179$ et pour $n = 1, e = 1, \varepsilon = 0.180$ . . . . .	24
3.5	Les solutions numériques pour $n = 50, e = 1, \varepsilon = 0.01050$ et pour $n = 50, e = 1, \varepsilon = 0.01055$ . . . . .	24
4.1	Le potentiel $V(\phi)$ possédant un vrai vide à $\phi_-$ et un faux vide à $\phi_+$ . . . .	26
4.2	Le potentiel $V(q)$ de la particule. . . . .	26
4.3	Le rebond invariant sous $O(4)$ dans le plan $\rho$ - $\tau$ . . . . .	32
4.4	Le potentiel $-V(\phi)$ de la particule. . . . .	33
4.5	Les potentiels $V(\phi)$ de l'équation (4.8) et $V_+(\phi)$ de l'équation (4.7); avec $\mu = 2, \lambda = 5$ et $\varepsilon = 0.1$ . . . . .	35
4.6	La solution « kink » avec les paramètres $\mu = 2$ et $\lambda = 5$ . . . . .	37
4.7	Paramétrisation de la solution dans l'approximation du mur mince, avec les paramètres $\mu = 2$ et $\lambda = 5$ et $\varepsilon = 0.1$ . . . . .	38
5.1	Comparaison entre la solution numérique pour $f(r)$ et $a(r)$ avec $n = 1, e = 1$ et $\varepsilon = 0.1$ et la configuration du mur épais. . . . .	42

5.2	Configuration du mur épais et l'énergie $E(R)$ . . . . .	44
5.3	Comparaison entre la solution numérique pour $f(r)$ et $a(r)$ avec $n = 50$ , $e = 1$ et $\varepsilon = 0.005$ et la configuration du mur mince. . . . .	49
5.4	L'énergie $E(R)$ pour $n = 50$ , $e = 1$ et deux valeurs différentes pour $\varepsilon$ . . .	53
5.5	Ce graphique présente l'action euclidienne calculée numériquement en fonction du paramètre $\varepsilon$ . . . . .	67
6.1	Comparaison entre la solution numérique pour $f(r)$ et $a(r)$ avec $n = 80$ , $e = 1$ et $\alpha = 0.5$ et la configuration du mur mince. . . . .	76
6.2	Les résultats numériques de l'intégration de l'énergie dans le modèle abé- lien de Higgs avec potentiel général d'ordre quatre. . . . .	83
6.3	L'énergie des vortex en fonction de $n$ selon une intégration numérique comparée à deux approximations . . . . .	86
6.4	L'énergie des vortex en fonction de $n$ selon une intégration numérique. . .	87
6.5	Solutions numériques pour $f(r)$ et $a(r)$ obtenues avec la méthode « re- laxation » pour différents paramètres. . . . .	89
6.6	Densité d'énergie totale (équation (6.19)) calculée à partir des solutions numériques pour différentes valeurs de paramètres. . . . .	89
6.7	Les résultats numériques de l'intégration de l'énergie dans le modèle de Chern-Simons avec $m = 2$ et $\beta = 0$ . . . . .	90
6.8	L'énergie divisée par $2\pi n$ en fonction du nombre d'enroulement du vortex avec $m = 2$ , $\alpha = 0.35$ et $\beta = 0.03$ . . . . .	91
6.9	Variation des valeurs de $n_0$ et $n_1$ selon les paramètres. . . . .	92
6.10	L'énergie en fonction du nombre d'enroulement du vortex avec $m = 2$ . . .	94

## LISTE DES ANNEXES

<b>Annexe I :</b>	<b>Annexe 1 . . . . .</b>	<b>xiii</b>
-------------------	---------------------------	-------------

## NOTATION

- $\hbar = c = 1$  à moins qu'il soit spécifié autrement.
- Les indices grecs prendront toujours les valeurs 0,1,2,3 pour  $t, x, y, z$ .
- Les indices romains ( $i, j$ , etc.) ne désignent que les composantes spatiales.
- Dans tout les cas, les indices répétés sont sommés.
- Le quadri-vecteur d'espace-temps s'écrit :  $x^\mu = (t, \mathbf{x})$ .
- L'opérateur dérivé s'écrit :  $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left( \frac{\partial}{\partial x^0}, \nabla \right)$
- La métrique utilisée sera :  $g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

À ma famille et à Max.

## REMERCIEMENTS

Au cours de ces deux dernières années passées à l'Université de Montréal, j'ai eu la chance d'être entourée de gens incroyables. Je souhaite remercier tous ceux que j'ai côtoyés au cours de ma maîtrise et avec qui j'ai eu le plaisir de partager ma passion pour la physique. Je voudrais également remercier mon superviseur Richard MacKenzie pour m'avoir donné l'opportunité d'entrer dans le monde de la recherche. Merci pour tes conseils, ta rigueur, ta sincérité et ton humour. Merci à ma super « team » de recherche : Yan, Éric et Yvan. À travers nos discussions, vos idées et vos conseils m'ont guidé et inspiré. Merci à ma famille qui m'a supporté en tout temps ; je vous adore. Merci Max, pour ton support indéfectible, tes encouragements, ta présence, ton amour.

# CHAPITRE 1

## INTRODUCTION

Il est possible, dans une théorie des champs classique ayant un potentiel tel que celui de la figure 1.1, d'avoir deux états stables avec des densités d'énergie différentes. Dans la version quantique de cette théorie, par contre, l'état de plus haute densité d'énergie devient métastable sous effet tunnel quantique. Ce processus a un parallèle en mécanique statistique : la transition

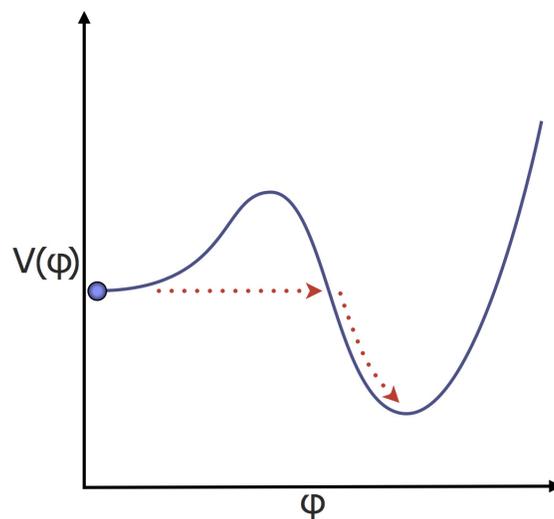


Figure 1.1 – Potentiel d'une théorie de champs classique possédant deux minima : un minimum relatif, le faux vide, et un minimum absolu, le vrai vide.

entre un liquide surchauffé, c'est-à-dire chauffé à une température plus grande que son point d'ébullition, et sa phase vapeur. Dans la figure 1.1,  $V(\phi)$  serait alors semblable à l'énergie libre de Gibbs du liquide en fonction de sa densité. Le minimum relatif du potentiel (appelé « faux vide ») correspond ici à la phase surchauffée et le minimum absolu (le « vrai vide »), à la phase vapeur.

Des fluctuations thermodynamiques vont continuellement causer l'apparition de bulles de vapeur dans la phase liquide, car il est énergétiquement favorable de créer des bulles de vapeur. Cependant, le passage de la densité du liquide par-dessus la barrière de potentiel jusqu'au vrai vide dépense de l'énergie : les murs de la bulle auront une tension de surface. Si la bulle créée est trop petite, la diminution d'énergie par le vrai vide à l'intérieur est plus que compen-

sée par la tension du mur et la bulle disparaît. Par contre, il se formera à l'occasion des bulles assez grandes pour qu'il soit énergétiquement favorable pour elles de prendre de l'expansion. En effet, l'énergie de la paroi de la bulle augmente comme l'aire d'une sphère ( $4\pi r^2$ ), mais la contribution négative de l'intérieur augmente plus rapidement, comme le volume d'une sphère ( $4\pi r^3/3$ ), la bulle grandira donc jusqu'à ce que toute l'eau soit devenue vapeur.

En cosmologie, les fluctuations quantiques remplacent les fluctuations thermodynamiques, mais c'est essentiellement le même processus : une bulle de vrai vide assez grande se formera et s'agrandira, convertissant le faux vide en vrai. À l'époque de l'univers primordial, l'énergie par unité de volume était très élevée, l'état de l'univers devait être très loin de tout vide, vrai ou faux. À mesure qu'il prend de l'expansion et se refroidit, il pourrait être tombé dans un faux vide à la place d'un vrai.

Ce type de transition de phase est appelé « transition de premier ordre ». Toute transition de phase est décrite en terme d'un paramètre d'ordre, distinguant les phases. Dans notre cas, le paramètre d'ordre est la valeur moyenne de  $\phi$ . Il existe deux types de transitions de phases :

1. Les transitions de premier ordre se produisent lorsque  $\phi = 0$  est un minimum local du potentiel effectif (voir figure 1.2a). La transition de phase s'effectue alors par effet tunnel quantique à travers une barrière de potentielle. Le paramètre d'ordre saute de façon discontinue dans le temps de sa valeur dans la première phase à sa valeur dans la seconde.
2. Les transitions de deuxième ordre procèdent de façon plus douce : l'ancienne phase se transforme en nouvelle phase de façon continue. Elles se produisent lorsque  $\phi = 0$  est un maximum local du potentiel effectif, le paramètre d'ordre change alors de façon continue (voir figure 1.2b).

L'objectif de ce mémoire est de présenter l'étude d'un modèle de l'univers dans un potentiel semblable à celui de la figure 1.1. Nous nous concentrerons principalement sur un modèle abélien de Higgs en 2+1 dimensions, dans lequel un champ scalaire interagit avec un champ de jauge. Des défauts topologiques, nommés vortex, sont créés dans un tel modèle et le but est de trouver si leur existence peut être une source additionnelle de métastabilité. Pour comprendre

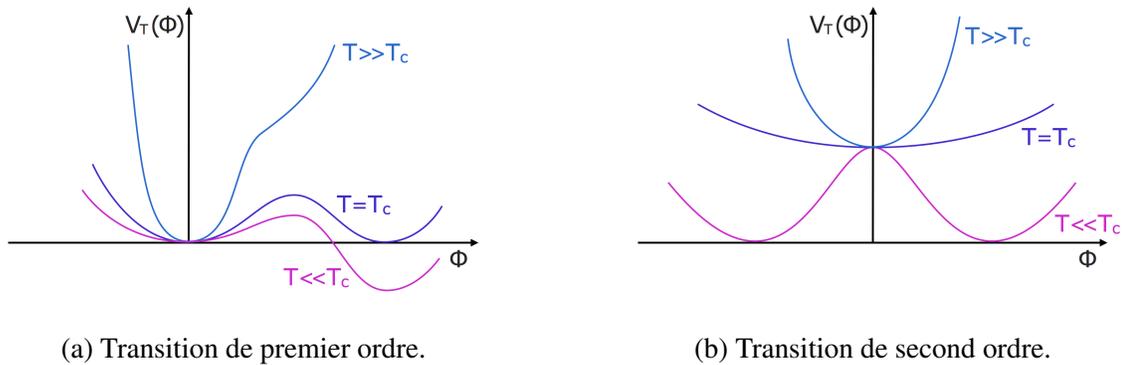


Figure 1.2 – Le potentiel effectif d’une théorie pour les deux types de transitions de phase (source :[8]).

ce que sont les défauts topologiques, attardons-nous d’abord à la notion de brisure spontanée de symétrie.

### 1.1 Brisure spontanée de symétrie

Il est très utile de remarquer que les lois de la nature peuvent posséder des symétries qui ne nous sont pas manifestes parce que le vide n’est pas invariant sous elles. Prenons un exemple très simple : une balle de tennis se trouvant en équilibre instable sur le haut d’une colline. La colline est symétrique sous rotation. Si la balle se trouve au sommet, c’est un état parfaitement symétrique : la balle n’a pas de « préférence » pour rouler à gauche ou à droite. Par contre, toute perturbation fera rouler la balle d’un côté, choisi aléatoirement, et le résultat final sera un état asymétrique, qui n’est plus invariant sous rotation (une rotation déplacera la balle). La symétrie a été brisée, sans que le système (la colline) soit asymétrique. Cette situation est appelée brisure spontanée de symétrie.

Un autre exemple fréquemment utilisé pour expliquer ce processus est celui du matériau ferromagnétique. Les atomes d’un matériau ferromagnétique interagissent par une interaction entre les spins des plus proches voisins de telle sorte qu’ils ont tendance à s’aligner pour une température plus basse qu’une certaine valeur, appelée température de Curie. L’hamiltonien (le système) est invariant sous rotation, mais l’état fondamental (où tous les dipôles sont alignés) ne l’est pas. Tel que présenté dans [12] par S. Coleman, un « petit expérimentateur » vivant dans un matériau ferromagnétique aurait beaucoup de difficulté à détecter l’invariance sous rotation

des lois de la nature ; toutes ses expériences seraient influencées par le champ magnétique, il n'aurait pas de raison de croire que l'invariance sous rotation est une symétrie exacte. Dans une brisure spontanée de symétrie, la symétrie n'est pas vraiment « brisée », elle est seulement cachée.

C'est le même processus pour notre univers : il commence dans une phase plus symétrique et passe au travers d'une succession de transitions de phase jusqu'à ce que, à basse température, on retombe sur nos particules élémentaires familières. La symétrie connue des particules élémentaires résulte donc d'un plus grand groupe de symétrie (un groupe  $G$ ). Lors d'une transition de phase, une partie de la symétrie est perdue, alors le groupe de symétrie change :  $G \rightarrow H \rightarrow \dots \rightarrow SU(3) \times SU(2) \times U(1) \rightarrow SU(3) \times U(1)$ . Dans cette expression, chaque flèche représente une transition de phase avec brisure de symétrie. Le dernier groupe représente la symétrie actuelle de la nature. Dans le groupe  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ ,  $SU(3)$  correspond à la force forte et  $SU(2) \times U(1)$  à l'interaction électrofaible. Celle-ci est brisée à la symétrie  $U(1)$  résiduelle qui correspond à la force électromagnétique.

Les transitions de phase peuvent avoir une variété d'implications importantes, incluant la formation de défauts topologiques ou le déclenchement d'une période d'expansion exponentielle de l'Univers (l'inflation).

## 1.2 Les défauts topologiques

Les défauts topologiques sont des configurations stables de matière formées lors de transitions de phase dans l'univers primordial. Ceux-ci se forment selon le mécanisme de Kibble. Les régions de l'univers séparées par une distance plus grande que leur horizon ne peuvent rien « savoir » les unes des autres en raison de la vitesse finie de propagation de l'information. Dans une transition de phase où la symétrie est brisée, différentes régions de l'univers tomberont dans différents minima de l'ensemble des états possibles. Les défauts topologiques sont précisément les frontières entre ces régions avec différents choix de minimum. Leur formation est une conséquence inévitable du fait que différentes régions ne peuvent « s'entendre » sur leur choix.

À mesure que l'univers se refroidit et prend de l'expansion, les symétries dans les lois de la

physique commencent à se briser dans des régions qui s'étendent à la vitesse de la lumière. Les défauts topologiques apparaissent lorsque différentes régions entrent en contact les unes avec les autres. La matière contenue à l'intérieur de ces défauts est dans la phase symétrique originale, qui persiste après que la transition vers la phase asymétrique soit complétée. Selon la nature de la symétrie brisée, différents défauts auront été formés à l'époque de l'univers primordial :

- Les murs de domaine : membranes bidimensionnelles spatiales formées lors de la brisure d'une symétrie discrète. Un réseau de murs de domaine partagera l'univers en plusieurs cellules.
- Les cordes cosmiques : lignes unidimensionnelles se formant lors de la brisure d'une symétrie axiale ou cylindrique.
- Les monopôles : points se formant lorsqu'une symétrie sphérique est brisée, possède une charge magnétique.
- Les textures : se forment lorsqu'un groupe plus grand et plus compliqué est brisé

Les défauts topologiques formés au début de l'Univers sont des phénomènes extrêmement énergétiques et ne pourraient être reproduits sur Terre, mais pourraient, en théorie, être observés...mais ne l'ont encore jamais été. Certains types de défauts topologiques ne sont pas compatibles avec les observations actuelles : les murs de domaine et les monopôles mèneraient à d'importantes déviations par rapport aux observations. Les théories prédisant l'existence de telles structures stables dans l'univers observable doivent être éliminées ou doivent inclure une période d'inflation suivant la formation de ces défauts. Les cordes cosmiques et (peut-être) les textures pourraient être les premières « sources » de gravité autour desquelles les grandes structures de matière se sont condensées.

On souhaite donc décrire mathématiquement une solution reliant deux minima différents d'un potentiel après une transition de phase brisant la symétrie de la phase initiale. Il se trouve que dans le modèle qui nous intéresse (le modèle abélien de Higgs), les défauts topologiques seront des solutions de systèmes d'équations différentielles non linéaires et dispersifs, des solitons. Ceux-ci seront présentés au chapitre 2.

### 1.3 Désintégration des vortex

Nous allons nous attarder à un modèle abélien Higgs en 2+1 dimensions, décrivant un champ de jauge, un champ scalaire complexe ainsi que leurs interactions. Le modèle sera présenté en détail au chapitre 3. Avec un potentiel comme la courbe (A) de la figure 1.3, des défauts topologiques différents seront formés : des vortex. Si cette transition de phase est suivie par une autre transition rétablissant la symétrie, par exemple, si le potentiel est modifié et devient comme la courbe (D) de la figure 1.3, alors l'univers, piégé dans un faux vide à  $|\phi| = 1$ , sera métastable et se désintégrera éventuellement par le processus de création de bulles décrit précédemment. Le taux de désintégration sera discuté au chapitre 4. Qu'arrive-t-il aux vortex déjà présents ? Comme le centre des vortex demeure dans la phase initiale (à  $|\phi| = 0$ ), ceux-ci pourraient être une source additionnelle de métastabilité et influencer le taux de désintégration du faux vide. Cette question fut étudiée dans [24].

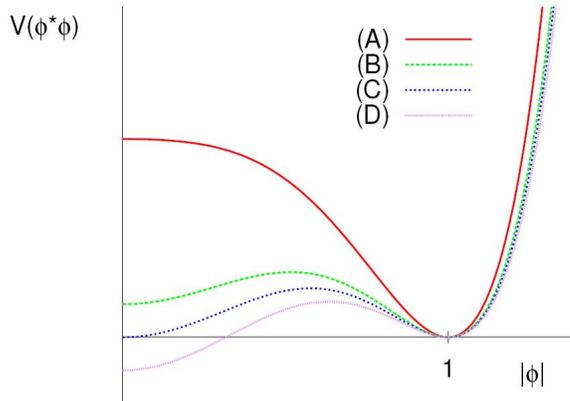


Figure 1.3 – Le potentiel  $V(\phi)$ , variant de l'habituel polynôme d'ordre quatre (A) au polynôme d'ordre six qui sera utilisé dans le modèle (D).

L'étude de l'impact des défauts topologiques sur la désintégration d'un faux vide a déjà été menée sur les monopôles dans [3] pour une théorie de jauge  $SU(2)$  avec un triplet de champs scalaires et un potentiel possédant un minimum local brisant la symétrie à  $U(1)$ . Dans cet article, il a effectivement été trouvé que les monopôles catalysent la désintégration d'un faux vide pour certaines valeurs des paramètres. Dans [23], une généralisation en 3+1 dimensions de l'article [24], la même analyse fut appliquée au modèle abélien Higgs avec un potentiel dont le minimum local brise  $U(1)$  et dans lequel les vortex deviennent des défauts à une dimension, des cordes cosmiques. Encore une fois, pour certaines valeurs des paramètres du modèle, ces

défauts accélèreraient la désintégration du faux vide.

## 1.4 Sommaire du mémoire

Pour commencer, une introduction au concept de soliton sera présentée au chapitre 2. Dans le chapitre (3), le modèle qui nous intéresse (le modèle abélien Higgs) sera présenté en détail, ainsi que les solutions numériques décrivant les défauts topologiques. Puis, dans le chapitre (4), nous verrons une technique (produite par Coleman dans [11]) pour le calcul du taux de désintégration d'un faux vide sans la présence de vortex dans un modèle à un champ scalaire. Le chapitre suivant (5) présente les résultats de l'article [24], qui est essentiellement une généralisation de cette technique au modèle abélien Higgs ainsi qu'aux vortex afin de comparer les taux de désintégration et d'évaluer si cette voie alternative de désintégration s'avère être plus rapide que la désintégration du faux vide sans vortex. Je présenterai des calculs numériques évaluant la validité des approximations effectuées dans cet article. Enfin, le chapitre 6 présente une analyse des paramètres du modèle révélant le comportement énergétique des vortex de l'article [24] en fonction du nombre d'enroulement.

Mes contributions à ces travaux sont la comparaison entre les calculs numériques des taux de désintégration et certaines approximations utilisée dans l'article [24] (section 5.5) ainsi que l'analyse du comportement de l'énergie des vortex en fonction du nombre d'enroulement du chapitre 6. Cette analyse révèle que les vortex avec un potentiel tel que celui de la courbe (A) de la figure 1.3 (potentiel dit « BPS ») ont un comportement énergétique différent lorsque le potentiel est de la forme (D) de la figure 1.3 (« non-BPS »)

## CHAPITRE 2

### LES SOLITONS

Les solitons, ou ondes solitaires, sont des solutions spéciales d'équation d'onde non linéaire. Pour débiter, prenons l'équation d'onde

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0, \quad (2.1)$$

une équation linéaire et non dispersive décrivant la propagation d'une onde. Toute fonction de la forme  $f(x \pm ct)$  est une solution. Les ondes planes  $\cos(kx \pm \omega t)$  et  $\sin(kx \pm \omega t)$ , où  $\omega = kc$ , forment un ensemble complet de solutions. De plus, en choisissant une fonction  $f$  localisée, il est possible de construire un paquet d'ondes localisé voyageant à une vitesse uniforme  $\pm c$  sans déformation dans sa forme puisque toutes ces composantes, les ondes planes, se propagent à la même vitesse  $c = \omega/k$ . Également, la linéarité de cette équation permet que la somme  $f_3(x - ct) = f_1(x - ct) + f_2(x - ct)$  de deux paquets d'ondes localisés,  $f_1(x - ct)$  et  $f_2(x + ct)$  soit aussi une solution. À  $t \rightarrow -\infty$ , il s'agit de deux paquets s'approchant l'un vers l'autre sans être déformés ; il y a ensuite collision, et, à  $t \rightarrow +\infty$ , les deux paquets retrouvent leurs formes et leurs vitesses initiales. Ces deux propriétés,

1. forme et vitesse constante d'un paquet d'ondes,
  2. forme et vitesse asymptotiquement retrouvées après la collision de deux paquets d'ondes,
- peuvent-elles être retrouvées pour des solutions d'équations différentielles plus complexes que l'équation (2.1) ?

Considérons maintenant l'équation de Klein-Gordon en 1+1 dimensions :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + mc^2 \phi = 0. \quad (2.2)$$

Celle-ci est linéaire, mais possède un terme dispersif. Les ondes planes  $\cos(kx \pm \omega t)$  et  $\sin(kx \pm \omega t)$  forment encore un ensemble complet de solutions, mais ici  $\omega^2 = k^2 c^2 + m^2 c^4$ , c'est-à-dire que différentes longueurs d'onde voyagent à différentes vitesses  $\omega(k)/k$ . Un paquet d'ondes se

dispersera donc dans le temps.

Heureusement, il est tout de même possible, pour certains systèmes d'équations différentielles partielles à la fois non linéaires et dispersifs, que ces deux effets s'équilibrent et que des solutions possédant la première propriété existent : ce sont des ondes solitaires. Si les solutions respectent également la deuxième propriété, ce sont des solitons (selon la définition de [33], mais nous ne nous attarderons qu'aux ondes solitaires, qui seront parfois aussi nommées « solitons »).

En terme de densité d'énergie, de telles solutions localisées ont une densité d'énergie  $\varepsilon(x, t)$  localisée dans l'espace à tout temps  $t$ , c'est-à-dire que  $\varepsilon(x, t)$  est fini dans une région finie de l'espace et tombe à zéro à  $x \rightarrow \pm\infty$  suffisamment rapidement pour que l'énergie totale soit finie. Par exemple, pour une équation de mouvement telle que

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \phi^3 = 0 .$$

la fonctionnelle de l'énergie

$$E[\phi] = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[ \frac{1}{2c^2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{4} \phi^4 \right] ,$$

est minimisée lorsque  $\phi(x, t) = 0$ . Une solution localisée devrait donc atteindre  $\phi(x, t) = 0$  lorsque  $x \rightarrow \pm\infty$  à tout temps  $t$  et les dérivées devraient également tendre vers zéro dans cette limite. Par contre, pour une équation de mouvement telle que

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \phi + \phi^3 = 0 ,$$

la fonctionnelle de l'énergie

$$E[\phi] = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[ \frac{1}{2c^2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{4} (\phi^2 - 1)^2 \right] ,$$

est minimisée cette fois lorsque  $\phi(x, t) = \pm 1$ . Une solution localisée devrait atteindre  $\phi = \pm 1$  lorsque  $x \rightarrow \pm\infty$  à tout temps  $t$ . Ceci est un cas très simple de brisure spontanée de symétrie.

Ainsi, si  $E[\phi]$  n'est zéro que lorsque  $\phi_i(x,t) = 0$ , une solution localisée telle que définie ici sera aussi une solution localisée dans l'espace. De cette façon, une onde solitaire est une solution localisée non singulière d'équations de champs non linéaires dont la densité d'énergie, en plus d'être localisée, est de la forme :

$$\varepsilon(\mathbf{x}, t) = \varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{u}t) ,$$

où  $\mathbf{u}$  est un vecteur de vitesse : la densité d'énergie ne change pas à vitesse constante. Toutes solutions statiques localisées sont des ondes solitaires (avec  $\mathbf{u} = 0$ ).

### 2.0.1 Un exemple d'onde solitaire en 1+1 dimensions : le kink

Considérons un champ scalaire en 1+1 dimensions avec la densité lagrangienne suivante :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\dot{\phi})^2 - \frac{1}{2}(\phi')^2 - V(\phi) \quad (2.3)$$

(ici,  $c = 1$ ). À partir du principe de moindre action, on trouve l'équation de mouvement :

$$\ddot{\phi} - \phi'' = -\frac{dV}{d\phi} . \quad (2.4)$$

On reconnaît notre équation d'onde précédente ((2.1)), mais avec des termes non-linéaires et dispersifs qui dépendent de  $V(\phi)$ . La fonctionnelle de l'énergie est, dans ce cas,

$$E[\phi] = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[ \frac{1}{2}(\dot{\phi})^2 + \frac{1}{2}(\phi')^2 + V(\phi) \right] .$$

Posons que  $V(\phi)$  possède  $M$  minima absolus qui soient également ses zéros :

$$V(\phi) = 0 \quad \text{pour} \quad \phi = g^i \quad , \quad \text{où} \quad i = 1, \dots, M .$$

L'énergie est alors minimisée par la solution triviale  $\phi(x,t) = g^i$ , donnant une énergie de  $E[\phi] = 0$ . Les solutions statiques devront respecter :

$$\phi'' = \frac{dV}{d\phi} . \quad (2.5)$$

On est à la recherche de solutions non triviales, mais d'énergie finie, de densité d'énergie localisée : lorsque  $x \rightarrow \pm\infty$ , le champ doit tendre vers l'une des valeurs  $g^i$ . S'il y a plus d'un minimum ( $M > 1$ ),  $\phi(x)$  doit tendre vers l'un d'eux à  $x \rightarrow -\infty$  et à  $x \rightarrow +\infty$ , mais pas nécessairement vers le même minimum.

On peut faire un analogie entre l'équation (2.5) et le mouvement d'une particule ponctuelle de masse unitaire se déplaçant selon la coordonnée  $\phi$  dans le temps  $x$  selon un potentiel  $-V(\phi)$ . L'énergie totale d'un tel mouvement est

$$W \equiv \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 - V(\phi) .$$

Selon les conditions frontières imposées (lorsque  $x \rightarrow \pm\infty$ ,  $V(\phi) \rightarrow 0$  et  $d\phi/dx \rightarrow 0$ ),  $W$ , conservé dans le temps  $x$ , est zéro. Dans cette analogie, l'énergie statique

$$E[\phi] = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 + V(\phi) \right] ,$$

est l'action du mouvement de la particule. En multipliant (2.5) par  $\phi'$ , on peut écrire :

$$\begin{aligned} \phi' \phi'' &= \frac{d\phi}{dx} \frac{dV}{d\phi} \\ \frac{d}{dx} \left( \frac{\phi'^2}{2} \right) &= \frac{dV}{dx} \\ \phi' &= \pm \sqrt{2V} , \end{aligned}$$

que l'on peut intégrer :

$$\int_{x_0}^x d\bar{x} = x - x_0 = \pm \int_{\phi(x_0)}^{\phi(x)} \frac{d\bar{\phi}}{\sqrt{2V(\bar{\phi})}} .$$

Considérons un cas où le potentiel n'aurait qu'un seul minimum (figure 2.1a), à  $\phi_1$ , où  $V(\phi_1) = 0$  : dans le potentiel inversé, la particule ne verrait alors qu'un maximum à  $\phi_1$ . Si cette dernière doit partir de là à un temps  $x = -\infty$  et y revenir à  $x = +\infty$ , il n'y a aucune trajectoire non triviale possible, car dès qu'elle quitte la position  $\phi_1$ , elle ne pourra jamais y revenir.

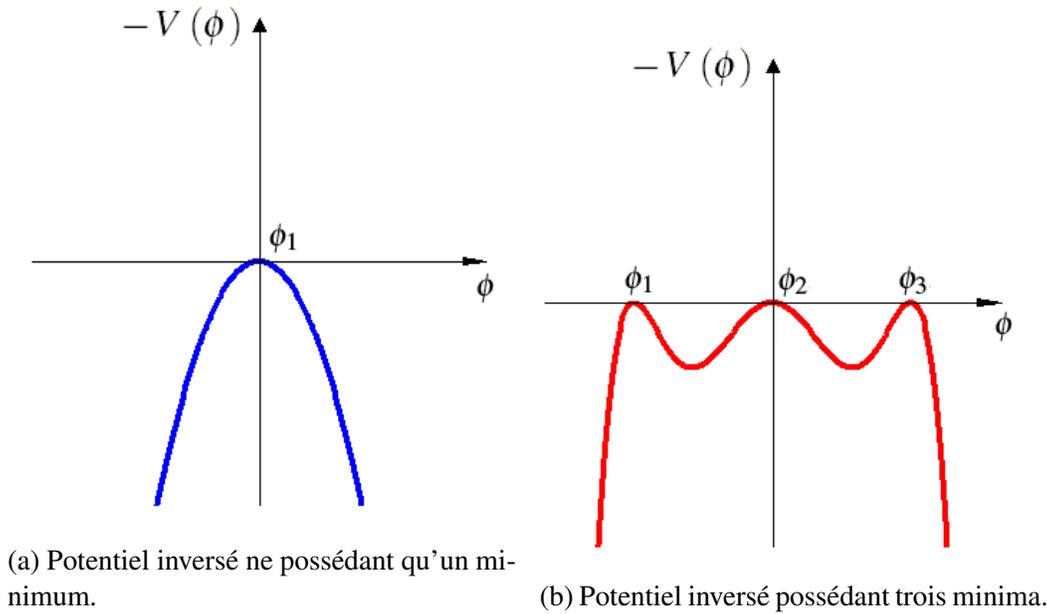


Figure 2.1

En terme du champ  $\phi(x)$ , si on fixe la condition  $\phi(x \rightarrow -\infty) = \phi_1$  et  $d\phi/dx(x \rightarrow -\infty) = 0$ , on ne peut fixer la même condition à  $x \rightarrow +\infty$  si l'on cherche des solutions non triviales. Ainsi, si le potentiel n'a qu'un seul minimum, il ne peut y avoir d'onde solitaire, car seule la solution triviale  $\phi(x) = \phi_1$  est permise. Maintenant, prenons un potentiel avec trois minima dégénérés (figure 2.1b), où  $V(\phi_1) = V(\phi_2) = V(\phi_3) = 0$ . Du point de vue de la particule, il est maintenant possible de, par exemple, passer de  $\phi(x \rightarrow -\infty) = \phi_1$  à  $\phi(x \rightarrow +\infty) = \phi_2$ , ou le contraire. Il lui est également possible de rouler de  $\phi(x \rightarrow -\infty) = \phi_2$  à  $\phi(x \rightarrow +\infty) = \phi_3$ , ou le contraire. Quatre trajectoires non triviales sont donc possibles. Les autres chemins, comme passer de  $\phi_1$  à  $\phi_2$  puis retourner à  $\phi_1$ , ou bien continuer vers  $\phi_3$ , lui sont interdits, car, à  $\phi_2$ ,

$$V(\phi_2) = \left. \frac{dV}{d\phi} \right|_{\phi_2} = 0,$$

alors,

$$\begin{aligned}
\phi' &= \pm\sqrt{2V(\phi_2)} = 0 \\
\phi'' &= \frac{dV}{d\phi}(\phi_2) = 0 \\
\phi''' &= \frac{d}{dx} \left( \frac{dV}{d\phi} \right) = \frac{d^2V}{d\phi^2} \phi' = 0 \\
\phi'''' &= \frac{d^2V}{d\phi^2} \phi'' + \frac{d^3V}{d\phi^3} \phi'^2 = 0 \quad , \text{ etc.}
\end{aligned}$$

Bref, toutes les dérivées sont nulles à  $\phi_2$ . La particule s'immobilise à  $\phi_2$  à  $x \rightarrow +\infty$  et ne peut ni retourner à  $\phi_1$ , ni continuer vers  $\phi_3$ . Ainsi, lorsque le potentiel possède  $n$  minima dégénérés,  $n > 1$ , il y a  $2(n-1)$  types de solutions non triviales possibles connectant des minima voisins.

Choisissons

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4} \left( \phi^2 - \frac{m^2}{\lambda} \right)^2, \quad (2.6)$$

(voir références [34] et [17]) où  $\lambda$  et  $m^2$  sont des constantes positives. Ce potentiel possède deux minima dégénérés  $\phi = \pm m/\sqrt{\lambda}$ . Une solution localisée devra donc tendre vers  $\pm m/\sqrt{\lambda}$  lorsque  $x \rightarrow \pm\infty$ . L'équation de mouvement devient :

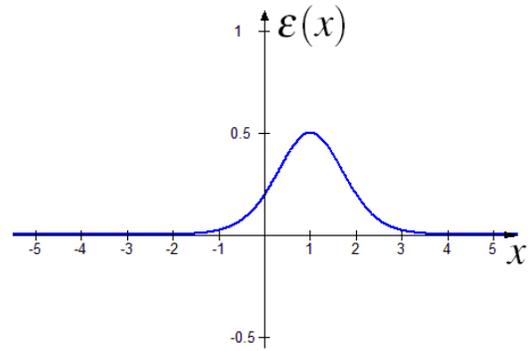
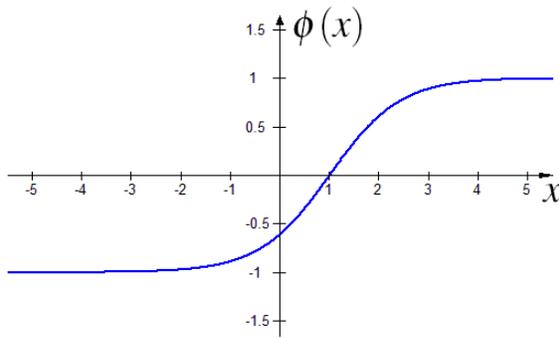
$$\ddot{\phi} - \phi'' = m^2\phi - \lambda\phi^3.$$

Deux types de solutions seront alors possibles : soit de  $\phi(x \rightarrow -\infty) \rightarrow +m/\sqrt{\lambda}$  à  $\phi(x \rightarrow +\infty) \rightarrow -m/\sqrt{\lambda}$  ou bien de  $\phi(x \rightarrow -\infty) \rightarrow -m/\sqrt{\lambda}$  à  $\phi(x \rightarrow +\infty) \rightarrow +m/\sqrt{\lambda}$ . En fait, la solution statique est :

$$x - x_0 = \pm \int_{\phi(x_0)}^{\phi(x)} \frac{d\bar{\phi}}{\sqrt{\frac{\lambda}{2} \left( \bar{\phi}^2 - \frac{m^2}{\lambda} \right)}}.$$

Choisissant  $\phi(x_0) = 0$ , on trouve (voir le graphique 2.2a) :

$$\phi(x) = \pm \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \tanh \left[ \frac{m}{\sqrt{2}} (x - x_0) \right]. \quad (2.7)$$



(a) La solution (2.7) avec  $m = 1$ ,  $\lambda = 1$  et  $x_0 = 1$ .

(b) La densité d'énergie de cette solution.

Figure 2.2

La solution avec le signe positif est appelée « kink » et celle avec le signe négatif, « anti-kink ». Varier  $x_0$  en gardant  $\phi(x_0)$  déplace la solution en  $x$  et démontre l'invariance sous translation du système. La densité d'énergie,

$$\begin{aligned} \varepsilon(x) &= \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 + V(\phi) = 2V(\phi) = \frac{\lambda}{2} \left( \frac{m^2}{\lambda} \tanh \left[ \frac{m}{\sqrt{2}} (x - x_0) \right]^2 - \frac{m^2}{\lambda} \right)^2 \\ &= \frac{m^4}{2\lambda} \operatorname{sech}^4 \left[ \frac{m}{\sqrt{2}} (x - x_0) \right]. \end{aligned}$$

comme on voit sur le graphique 2.2b, est localisée autour de  $x_0$  et son énergie totale est donc finie :

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} dx [\varepsilon(x)] = \frac{2\sqrt{2} m^3}{3 \lambda}.$$

Le kink et l'anti-kink sont donc des ondes solitaires, mais pas des solitons. Comme le système est invariant sous les transformations de Lorentz, on obtient un kink se déplaçant avec une vitesse  $u$  ( $-1 < u < 1$ ), et qui est aussi solution de l'équation de mouvement :

$$\phi(x) = \pm \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \tanh \left[ \frac{m}{\sqrt{2}} \frac{(x - x_0) - u \cdot t}{\sqrt{1 - u^2}} \right].$$

## 2.0.2 Indices topologiques

Il serait utile de classer topologiquement les solutions d'un système d'équations donné. L'idée est de définir un indice topologique conservé dans le temps. Comme d'autres quantités

conservées, celui-ci jouerait le rôle de « nombre quantique » pour une particule dans la théorie de champs quantiques correspondante. Il aurait, par contre, une origine très différente des autres quantités conservées et nombres quantiques.

Nous avons vu que des solutions non singulières d'énergie finie demandent à ce que le champ, statique ou pas, tende vers un minimum du potentiel où ce dernier est nul, en tout temps  $t$ , en tout point à l'infini. Considérons, par exemple, une dimension spatiale, où l'infini consiste en deux points ( $x = \pm\infty$ ). À un instant  $t_0$ ,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \phi(x, t_0) = \phi_1, \text{ où } \phi_1 \text{ est un minimum de } V(\phi).$$

À mesure que le temps change, le champ  $\phi(x, t)$  évoluera de façon continue dans le temps en  $x$  selon l'équation de mouvement  $\ddot{\phi} - \phi'' = -\partial V / \partial \phi$ . Par contre,  $\phi(\infty, t)$  doit toujours être un des minima du potentiel, pour garder l'énergie finie. Sa valeur ne peut pas passer d'un minimum  $\phi_1$  à un autre en variant de façon continue dans le temps. Cela force  $\phi(\infty, t) = \phi_1$  et  $\phi(-\infty, t) = \phi_2$ , où  $\phi_2$  est un autre minimum de  $V(\phi)$ . L'espace de toutes les solutions non singulières d'énergie finie se retrouve divisé en secteurs, caractérisés par deux indices, soient les valeurs de  $\phi(\infty, t)$  et  $\phi(-\infty, t)$ , toutes deux indépendantes du temps. Ces secteurs se retrouvent topologiquement déconnectés, car la solution d'un des secteurs ne peut être déformée de façon continue pour tomber sur la solution d'un autre secteur en gardant l'énergie de la solution finie. Comme l'évolution temporelle est continue, une solution se trouvant dans un secteur y restera en tout temps.

Par exemple, le système décrit dans la section précédente, où le potentiel avait deux minima dégénérés  $\pm m / \sqrt{\lambda}$ , donne lieu à quatre secteurs topologiques caractérisés par les indices  $(\phi(-\infty, t), \phi(+\infty, t))$ , soient :

$$\left\{ \begin{array}{l} (-m/\sqrt{\lambda}, m/\sqrt{\lambda}) \\ (m/\sqrt{\lambda}, -m/\sqrt{\lambda}) \\ (-m/\sqrt{\lambda}, -m/\sqrt{\lambda}) \\ (m/\sqrt{\lambda}, m/\sqrt{\lambda}) \end{array} \right. .$$

Ce sont, respectivement le kink, l'anti-kink et les solutions triviales  $\phi(x, t) = \pm m / \sqrt{\lambda}$ . On peut

définir une charge topologique, définie dans ce cas comme :

$$Q = \frac{\sqrt{\lambda}}{m} [\phi(\infty, t) - \phi(-\infty, t)] , \quad (2.8)$$

auquel on associe un courant

$$k^\mu = \frac{\sqrt{\lambda}}{m} \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi . \quad (2.9)$$

Ainsi,

$$\partial_\mu k^\mu = \frac{\sqrt{\lambda}}{m} \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi = 0 \quad \text{et} \quad Q = \int_{-\infty}^{\infty} dx k_0 . \quad (2.10)$$

Ici, l'indice topologique  $Q$  est très simple, il sera défini différemment dans d'autres systèmes. Dans le modèle abélien de Higgs, cet indice sera le « nombre d'enroulement ». Il est à noter que ses indices topologiques sont différents des quantités conservées telles que l'énergie, la quantité de mouvement, la charge, etc. Ces quantités conservées proviennent de l'existence de symétries continues du lagrangien, telles que la translation dans le temps et l'espace, des groupes de symétrie internes, etc. Les indices topologiques résultent des conditions frontières, conservés puisqu'on exige que l'énergie soit finie.

## CHAPITRE 3

### MODÈLE ABÉLIEN DE HIGGS EN 2+1 DIMENSIONS

L'article [24] considère un modèle abélien de Higgs dans lequel un champ scalaire complexe,  $\phi$ , interagit avec un champ de jauge  $A_\mu$  et dont la densité Lagrangienne a la forme :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) - V(\phi^*\phi), \quad (3.1)$$

où

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$
$$D_\mu = (\partial_\mu - ieA_\mu).$$

Ici, le lagrangien est invariant sous une transformation locale  $U(1)$  :

$$\phi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)}\phi(x) \quad \text{et} \quad A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x).$$

Si le potentiel a un minimum à  $|\phi| = 0$ , celui-ci est invariant sous cette symétrie. Par contre, si le potentiel a un minimum à  $|\phi| = v \neq 0$ , ce minimum n'est pas invariant sous  $U(1)$  : il y a brisure spontanée de symétrie.

Contrairement au potentiel habituellement utilisé dans ce type de modèle,

$$V(\phi^*\phi) = \lambda(|\phi|^2 - 1)^2, \quad (3.2)$$

les auteurs de l'article [24] choisissent un potentiel d'ordre six ayant la forme suivante

$$V(\phi^*\phi) = \lambda(|\phi|^2 - \varepsilon v^2)(|\phi|^2 - v^2)^2. \quad (3.3)$$

Dans ce cas, les champs  $\phi$  et  $A_\mu$ ,  $v$  ainsi que la charge  $e$  ont tous des dimensions de masse à la  $1/2$  ; les constantes  $\varepsilon$  et  $\lambda$  sont des paramètres sans dimension contrôlant la force de l'interaction du champ scalaire avec lui-même. La valeur du paramètre  $\varepsilon$  détermine la différence d'énergie

entre le vrai vide et le faux vide et doit se trouver entre 0 et 1. Ce potentiel est choisi afin que le faux vide brisant la symétrie ( $|\phi| = 1$ ) soit séparé du vrai vide ( $|\phi| = 0$ ) par une barrière de potentiel et que le vrai vide restaure la symétrie brisée. Pour rendre les champs, les constantes ainsi que les coordonnées d'espace temps sans dimension, il suffit de les redéfinir comme :

$$\begin{aligned} \phi &= v\hat{\phi} & , & & A_\mu &= v\hat{A}_\mu \\ e &= \sqrt{\lambda}v\hat{e} & , & & x_\mu &= \frac{\hat{x}_\mu}{\sqrt{\lambda}v^2} . \end{aligned}$$

Avec ces changements, le lagrangien devient :

$$\mathcal{L} = \lambda v^6 \left[ -\frac{1}{4} \hat{F}_{\mu\nu} \hat{F}^{\mu\nu} + (\hat{D}_\mu \hat{\phi})^* (\hat{D}^\mu \hat{\phi}) - (|\hat{\phi}|^2 - \varepsilon)(|\hat{\phi}|^2 - 1)^2 \right] \equiv \lambda v^6 \hat{\mathcal{L}} ,$$

et l'action

$$S = \int d^3x_\mu \mathcal{L} = \left( \frac{1}{\sqrt{\lambda}v^2} \right)^3 \lambda v^6 \int d^3\hat{x}_\mu \hat{\mathcal{L}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int d^3\hat{x}_\mu \hat{\mathcal{L}} .$$

Ainsi, le lagrangien conservera sa forme (3.1), mais sera multiplié par un facteur  $\lambda^{-1/2}$ . Cette constante n'affectera pas les équations de mouvement et sera absorbée par une redéfinition appropriée de  $\hbar$  dans la théorie quantique. Avec ces changements, et en abandonnant la notation «  $\hat{\phantom{x}}$  », le potentiel sera (voir figure 3.1) :

$$V(\phi^* \phi) = (|\phi|^2 - \varepsilon)(|\phi|^2 - 1)^2 . \quad (3.4)$$

Nous avons vu en introduction que dans un Univers piégé dans un faux vide des défauts topologiques (ici des vortex) peuvent exister. Recherchons des solutions symétriques sous rotation pour  $\phi$  et  $A_\mu$ , en coordonnées polaires  $(r, \theta, t)$ . L'ansatz dépendant du temps utilisé pour décrire un vortex de nombre d'enroulement  $n$  sera :

$$\phi(r, \theta, t) = f(r, t) e^{in\theta} \quad A_i(r, \theta, t) = -\frac{n \varepsilon^{ij} x_j}{e r^2} a(r, t) , \quad (3.5)$$

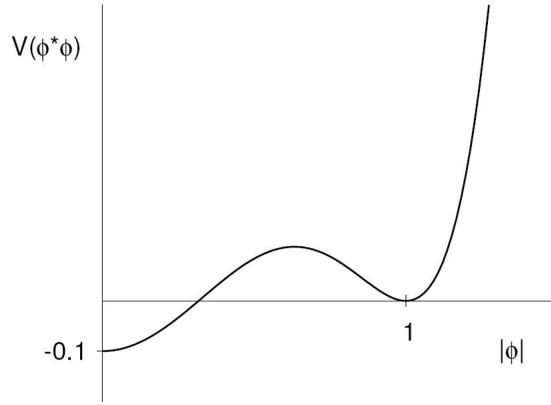


Figure 3.1 – Le potentiel  $V(|\phi|)$ , équation (3.4), avec  $\varepsilon = 0.1$ .

où  $\varepsilon^{ij}$  est le symbole de Levi-Civita en deux dimensions. La fonctionnelle de l'énergie pour le vortex a la forme :

$$E[A_u, \phi] = \int d^2x \left[ \frac{1}{2} F_{0i} F^{0i} + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} + (D_0 \phi)^* (D^0 \phi) + (D_i \phi)^* (D^i \phi) + V(\phi^* \phi) \right]. \quad (3.6)$$

Substituant l'ansatz (3.5), on obtient :

$$E = 2\pi \int_0^\infty dr r \left[ \frac{n^2 \dot{a}^2}{2e^2 r^2} + \frac{n^2 a'^2}{2e^2 r^2} + f^2 + f'^2 + \frac{n^2}{r^2} (1-a)^2 f^2 + V(f^2) \right]. \quad (3.7)$$

La solution de vortex statique est le minimum de cette fonctionnelle (sans les termes de dérivées temporelles) ; les équations du mouvement statiques sont donc :

$$\begin{aligned} f'' + \frac{f'}{r} - \frac{n^2}{r^2} (1-a)^2 f - \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial f} &= 0 \\ a'' - \frac{a'}{r} + 2e^2 (1-a) f^2 &= 0, \end{aligned} \quad (3.8)$$

et doivent respecter les conditions frontières suivantes :

$$\begin{aligned} f(r) \rightarrow 0, \quad a(r) \rightarrow 0 & \text{ lorsque } r \rightarrow 0 \\ f(r) \rightarrow 1, \quad a(r) \rightarrow 1 & \text{ lorsque } r \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Ces conditions sont imposées pour la continuité des champs à  $r = 0$  et pour avoir une énergie finie (à  $r \rightarrow \infty$ ,  $\phi$  doit tendre vers un minimum). En effet, à  $r \rightarrow \infty$ , pour que le quatrième terme dans l'énergie (3.6),

$$\int dr^2 \left| \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - ieA_\theta \right) \phi \right|^2 ,$$

soit fini il faut que :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} A_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (n\theta) + \dots ,$$

avec des corrections diminuant plus rapidement que  $1/r$ , sinon l'énergie divergera de façon logarithmique à  $r \rightarrow \infty$  (voir [30]). Le flux total au travers du plan est calculé en utilisant le théorème de Stokes et donne :

$$\Phi = \oint rd\theta A_\theta = \frac{2\pi n}{e} . \quad (3.10)$$

Le vortex possède donc un flux magnétique quantifié.

Avec le potentiel (3.4), les équations de mouvement donnent :

$$\begin{aligned} f'' + \frac{f'}{r} - \frac{n^2}{r^2} (1-a)^2 f - f(f^2 - 1)(3f^2 - 2\varepsilon - 1) &= 0 \\ a'' - \frac{a'}{r} + 2e^2(1-a)f^2 &= 0 . \end{aligned} \quad (3.11)$$

### 3.1 Comportement asymptotique des solutions

Avec le potentiel (3.4), le comportement pour  $r \rightarrow 0$  peut être trouvé en linéarisant les équations de mouvement :

$$\begin{aligned} f'' + \frac{f'}{r} - \frac{n^2}{r^2} (1-2a)f - (2\varepsilon + 1)f &= 0 \\ a'' - \frac{a'}{r} &= 0 . \end{aligned}$$

Avec les conditions frontières  $f(r) \rightarrow 0$ ,  $a(r) \rightarrow 0$  lorsque  $r \rightarrow 0$ , la solution de ce nouveau système d'équations différentielles est :

$$f(r) = C_2 J_n(\sqrt{-2\varepsilon + 2n^2 C_1 - 1} r) \sim r^n , \quad a(r) = C_1 r^2 . \quad (3.12)$$

Le comportement pour de grandes valeurs de  $r$  peut être trouvé en définissant :

$$f(r) = 1 - \xi(r), \quad a(r) = 1 - \psi(r), \quad (3.13)$$

dans les équations de mouvement (3.11) :

$$\begin{aligned} -\xi'' - \frac{\xi'}{r} - \frac{n^2}{r^2} \psi^2 (1 - \xi) - (1 - \xi)(\xi^2 - 2\xi)(2 + 3\xi^2 - 6\xi - 2\varepsilon) &= 0 \\ -\psi'' - \frac{\psi'}{r} + 2e^2 \psi (1 - \xi)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Linéarisant ces équations en  $\xi$  et en  $\psi$ , on obtient :

$$\begin{aligned} -\xi'' - \frac{\xi'}{r} + 4\xi(1 - \varepsilon) &= 0 \\ -\psi'' - \frac{\psi'}{r} + 2e^2 \psi &= 0. \end{aligned}$$

Avec les conditions frontières  $f(r) \rightarrow 1$ ,  $a(r) \rightarrow 1$  lorsque  $r \rightarrow \infty$  impliquant  $\xi(r) \rightarrow 0$ ,  $\psi(r) \rightarrow 0$  lorsque  $r \rightarrow \infty$ , la solution de la première équation :

$$\xi(r) = C_1 Y_0(2i\sqrt{1 - \varepsilon}r) \sim r^{-1/2} e^{-2\sqrt{1 - \varepsilon}r}.$$

La solution de la deuxième équation de mouvement linéarisée est :

$$\psi(r) = C_2 r K_0(e\sqrt{2}r) \sim r^{1/2} e^{-e\sqrt{2}r}.$$

Pour  $r \rightarrow \infty$ , on peut donc utiliser une condition plus précise :

$$\begin{aligned} a'(r) &= -\psi'(r) = -(1 - a(r)) \left( \frac{1}{2r} - e\sqrt{2} \right) \\ f'(r) &= -\xi'(r) = (1 - f(r)) \left( \frac{1}{2r} + 2\sqrt{1 - \varepsilon} \right). \end{aligned}$$

### 3.2 Solutions numériques des équations de mouvement statiques

Le système d'équations différentielles de second ordre couplées aux conditions frontières ne peut être résolu que numériquement. Cela a été possible grâce à la méthode de la « relaxation »,

présentée en annexe I, telle que décrite dans [31] et calculée à l'aide de Matlab.

Avec cette méthode, on résout donc le système pour différentes valeurs de paramètres et on trouve deux profils de solution différents (voir figure 3.2). Le premier affiche une transition entre les deux vides s'effectuant sur un grand intervalle de  $r$  et le deuxième présente un profil où  $f(r)$  passe rapidement de 0 à 1 à un  $r \gg 1$ . Il semble que la valeur de  $n$  définit le type de profil de la solution : on ne trouve que le profil avec une paroi mince lorsque  $n \gg 1$ . Ceci s'explique par le fait que pour de grandes valeurs du nombre d'enroulement, la taille du vortex s'agrandit alors que la distance sur laquelle le champ scalaire varie est de l'ordre de sa longueur de Compton qui, elle, est indépendante de  $n$ . Dans de telles conditions, le centre du vortex, où  $f \simeq 0$ , est séparé de l'extérieur, où  $f \simeq 1$ , par un mur mince, de largeur  $\delta \sim 1$  et situé à  $r = R \gg 1$ . Nous verrons que ce profil permet l'utilisation d'approximations très utiles.

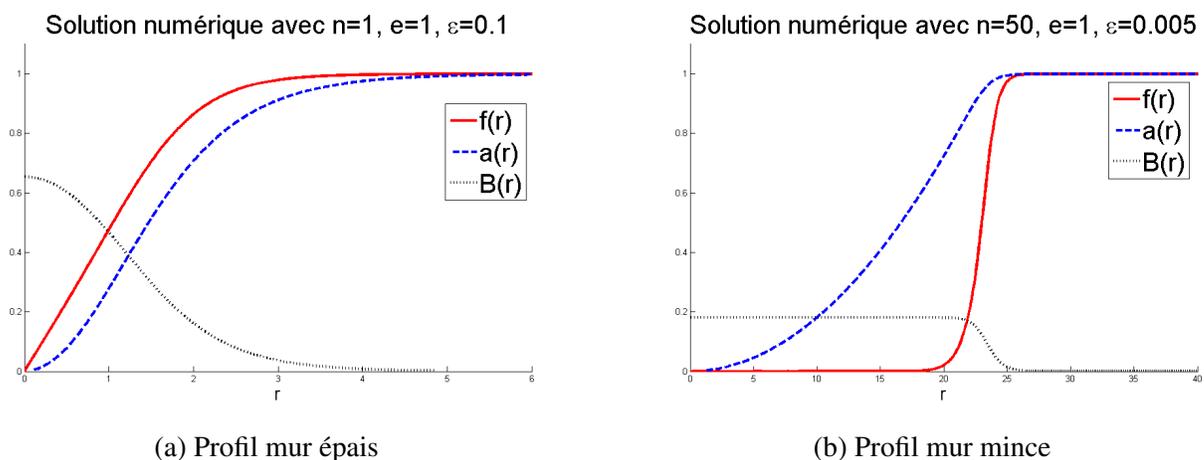


Figure 3.2 – Solutions numériques pour  $f(r)$  et  $a(r)$  obtenues avec la méthode « relaxation » pour différents paramètres. On constate qu'il y a deux types de profils possibles pour ces solutions. Le champ magnétique  $B(r) = na'(r)/er$  est également tracé.

Pour certaines valeurs de paramètres, il n'est pas possible de trouver de solution pour  $f(r)$  et  $a(r)$  (voir figure 3.4). En effet, pour chaque couple de paramètres  $n$  et  $e$ , il existe une valeur maximale de  $\varepsilon$ , appelée  $\varepsilon_c$ , au-delà de laquelle il n'est plus possible de trouver une solution pour le vortex statique. En analysant l'énergie d'un vortex statique (voir section 5.2), il sera possible

de trouver une approximation pour ce  $\varepsilon_c$  en fonction de  $n$  et  $e$ , dans la limite où  $n \gg 1$  :

$$\varepsilon < \varepsilon_c = \frac{3}{2^{13/3}} \left(\frac{e}{n}\right)^{2/3} \simeq 0.1488 \left(\frac{e}{n}\right)^{2/3}, \quad (3.14)$$

Pour  $\varepsilon > \varepsilon_c$ , il n'y a plus de solution stable. Bien que cette approximation soit valable pour  $n \gg 1$ , testons numériquement sa validité pour différentes valeurs de  $n$ . Pour les valeurs des paramètres dans la figure 3.4, soit  $n = 1$  et  $e = 1$ ,  $\varepsilon_c$  vaut 0.149 dans cette approximation, alors que l'on trouve 0.180 numériquement. Pour un  $n$  plus élevé, 50 par exemple, et la même valeur de  $e$ , l'approximation donne  $\varepsilon_c = 0.01097$  alors qu'on trouve numériquement une valeur entre 0.01050 et 0.01055 (voir figure 3.5). On a donc effectivement une meilleure approximation de la valeur de  $\varepsilon_c$  lorsque le nombre d'enroulement est élevé.

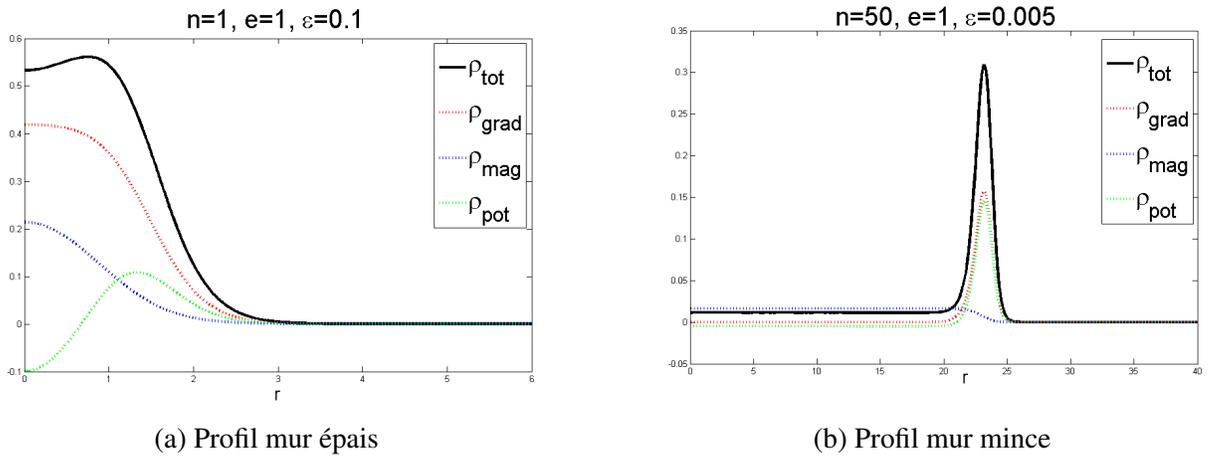


Figure 3.3 – Densité d'énergie totale calculée à partir des solutions numériques ainsi que les contributions à celle-ci pour différentes valeurs de paramètres.

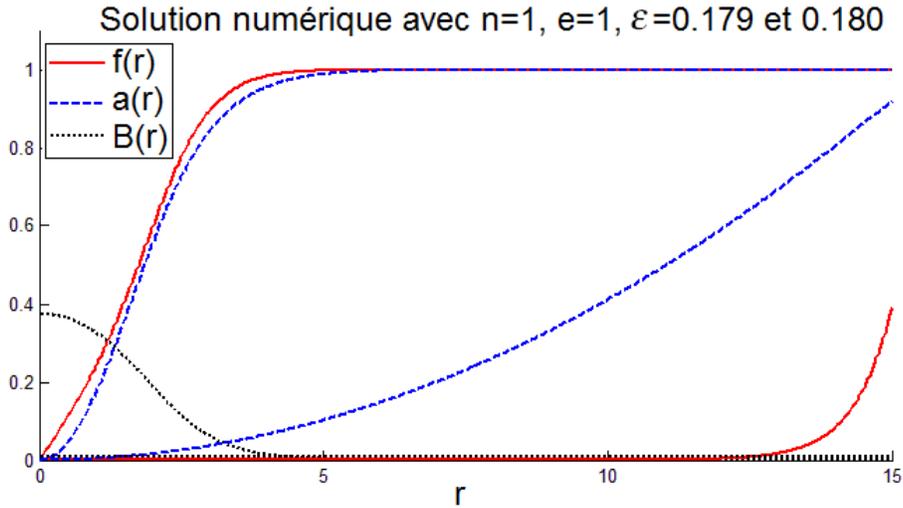


Figure 3.4 – Les solutions numériques pour  $n = 1$ ,  $e = 1$ ,  $\varepsilon = 0.179$  (la solution de gauche) et pour  $n = 1$ ,  $e = 1$ ,  $\varepsilon = 0.180$  (la solution de droite). En fait, on constate qu’il n’y a pas de véritable solution pour  $\varepsilon = 0.180$ , la méthode numérique renvoie cette solution seulement parce qu’elle remplit les conditions frontières, mais si on étend l’intervalle d’intégration, celle-ci se déplacera.

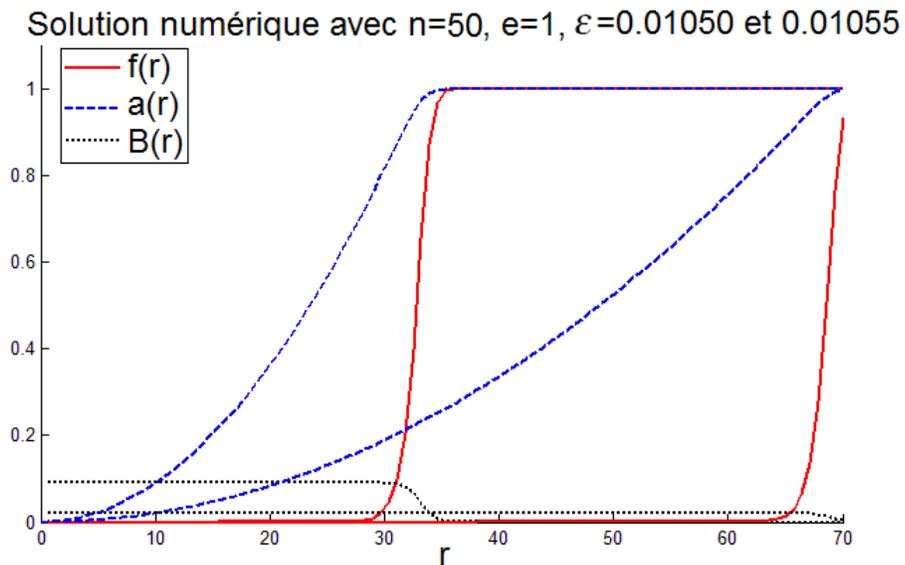


Figure 3.5 – Les solutions numériques pour  $n = 50$ ,  $e = 1$ ,  $\varepsilon = 0.01050$  (la solution de gauche) et pour  $n = 50$ ,  $e = 1$ ,  $\varepsilon = 0.01055$  (la solution de droite). Encore une fois, la solution pour  $\varepsilon = 0.01055$  n’est pas la véritable solution.

## CHAPITRE 4

### DÉSINTÉGRATION D'UN FAUX VIDE : LA MÉTHODE DE S. COLEMAN

Maintenant que le modèle a été présenté (voir chapitre 3, le lagrangien (3.1) avec le potentiel (3.4)), il serait intéressant de voir comment ces vortex influencent la désintégration du faux vide à  $|\phi| = 1$  vers le vrai vide à  $|\phi| = 0$ , tel que discuté dans l'introduction. Pour ce faire, on doit commencer par comprendre comment calculer le taux de désintégration d'un faux vide sans la présence de vortex. Cela a déjà été fait par S. Coleman [11], mais pour un modèle différent. Son article développe une théorie semi-classique de la désintégration d'un tel faux vide pour des théories avec un seul champ scalaire et des interactions ne contenant pas de dérivées. Dans la limite d'une faible différence de densité d'énergie entre les deux minima, Coleman trouve qu'il est possible d'obtenir une expression explicite de ce taux à l'ordre dominant en  $\hbar$ . Ce chapitre résume les arguments de Coleman, qui seront appliqués au modèle abélien-Higgs dans le chapitre suivant (chapitre 5).

Considérons donc une théorie des champs avec un champ scalaire en 3+1 dimensions :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) ,$$

où  $V(\phi)$  possède deux minima relatifs,  $\phi_\pm$ , dont  $\phi_-$  est le minimum absolu, le vrai vide, et  $\phi_+$  est un minimum classiquement stable, mais instable sous effet tunnel quantique, c'est le faux vide (voir la figure 4.1). Tel que décrit dans l'introduction, cet effet tunnel se produira lors de fluctuations quantiques créant, de temps à autre, des bulles de vrai vide. Lorsque l'une d'elles est assez grande, elle s'étend dans l'univers en convertissant le faux vide en vrai vide. Nous verrons que ceci se produit avec une certaine probabilité par unité de temps et de volume ayant la forme :

$$\Gamma/V = A e^{-B/\hbar} [1 + \mathcal{O}(\hbar)] ,$$

où  $A$  et  $B$  dépendent de la théorie étudiée. La méthode développée par Coleman part d'un problème de mécanique quantique pour calculer le coefficient  $B$ , et le traduit en terme de théorie de champs par la suite. Callan et Coleman analyse le coefficient  $A$  dans [9], qui s'avère être

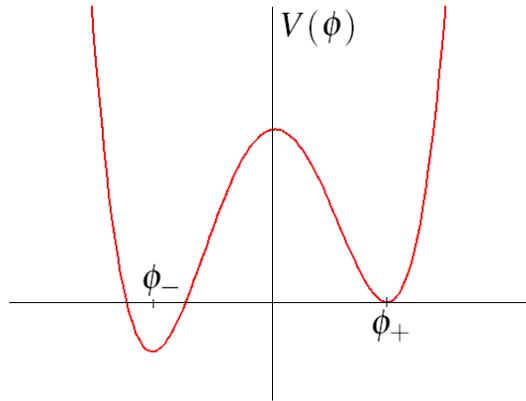


Figure 4.1 – Le potentiel  $V(\phi)$  possédant un vrai vide à  $\phi_-$  et un faux vide à  $\phi_+$ .

beaucoup plus difficile à calculer.

#### 4.1 Effet tunnel en mécanique quantique

Commençons donc par l'étude d'un problème d'effet tunnel en mécanique quantique, pour une particule de masse unitaire se déplaçant en une dimension selon la coordonnée  $q$  :

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - V(q) .$$

Choisissons un  $V(q)$  selon la figure 4.2, c'est-à-dire qu'il possède un minimum à  $q_0$ , avec  $V(q_0) = 0$ , classiquement stable, mais pour lequel il n'existe pas d'état stable quantique.

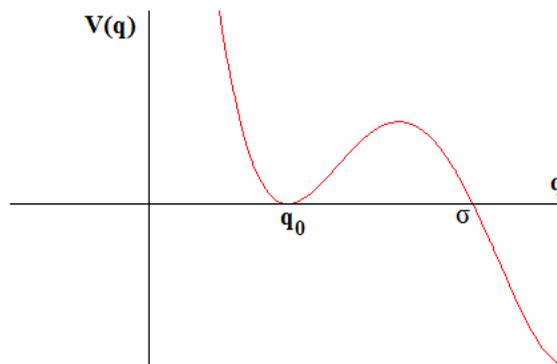


Figure 4.2 – Le potentiel  $V(q)$  de la particule.

Dans l'approximation semi-classique (bonne pour  $\hbar$  petit), une particule à  $q_0$  pénètre la barrière de potentiel et se matérialise de l'autre côté, à  $q = \sigma$  avec une énergie cinétique nulle et se

propage ensuite classiquement. Dans cette situation :

$$\Gamma/V = Ae^{-B/\hbar} [1 + \mathcal{O}(\hbar)] , \quad (4.1)$$

où

$$B = 2 \int_{q_0}^{\sigma} dq (2V)^{1/2} . \quad (4.2)$$

Le point de départ pour arriver à cette expression est l'intégrale de chemin de Feynman faisant le lien entre l'énergie et l'action euclidienne :

$$\langle x_f | e^{-HT/\hbar} | x_i \rangle = N \int [dx] e^{-S/\hbar} .$$

Du côté gauche de l'équation,  $|x_i\rangle$  et  $|x_f\rangle$  sont les états propres de position,  $H$  est l'opérateur hamiltonien et  $T$  un nombre positif. Du côté droit,  $N$  est un facteur de normalisation,  $S$  est l'action euclidienne et  $[dx]$  dénote l'intégration sur toutes fonction  $x(t)$  qui obéit aux conditions frontières  $x(-T/2) = x_i$  et  $x(T/2) = x_f$ . En fait, si on définit une fonction  $\bar{x}(t)$  obéissant à ces conditions, alors une fonction générale satisfaisant les conditions frontières s'écrit :

$$x(t) = \bar{x}(t) + \sum_n c_n x_n(t) ,$$

où les fonctions  $x_n(t)$  forment un ensemble complets de fonctions réelles orthonormales et nulles aux frontières. Dans une approximation semi-classique, l'intégrale de chemin est dominée par les points stationnaires de l'action (notés  $\bar{x}$ ) et devient le produit de gaussiennes :

$$\langle x_f | e^{-HT/\hbar} | x_i \rangle = Ne^{-S(\bar{x})/\hbar} \prod_n \lambda_n^{-1/2} [1 + \mathcal{O}(\hbar)] = Ne^{-S(\bar{x})/\hbar} [\det(-\partial_t^2 + V''(\bar{x}))]^{-1/2} [1 + \mathcal{O}(\hbar)] ,$$

Si le potentiel  $V(x)$  est un double puits de potentiel, tel que  $V(x) = V(-x)$ , dont les minima sont  $\pm a$ , que  $V(\pm a) = 0$  et  $V''(\pm a) = \omega^2$ , il existe une solution euclidienne respectant  $x(-T/2) = -a$  et  $x(T/2) = a$  (c'est un instanton) et une autre allant de  $x(-T/2) = a$  et  $x(T/2) = -a$  (l'anti-instanton). Dans l'approximation semi-classique, on peut calculer qu'il existe alors deux états propres de basses énergies

$$E_{\pm} = \frac{1}{2} \hbar \omega \pm \hbar K e^{-S_0/\hbar} ,$$

où  $S_0$  est l'action de l'instanton (ou de l'anti-instanton). Enfin, si l'on choisit plutôt un potentiel

comme celui de la figure 4.2, il existe également une solution euclidienne allant de  $q_0$  à  $\sigma$  et retournant à  $q_0$ . Comme l'état propre au faux minimum est instable due à l'effet tunnel quantique, son énergie a une partie imaginaire :  $e^{-iEt}$  devient  $e^{-iE_0t - \Gamma t/2}$ . Ce facteur exponentiel atténuera la fonction d'onde.  $\Gamma$  est donc le taux de désintégration de cet état :

$$\text{Im}(E_0) = \Gamma/2 = \hbar|K|e^{-S_0/\hbar} .$$

La généralisation en plusieurs dimensions de (4.2), effectuée par T. Banks, C.Bender et T. T. Wu [35], pour

$$L = \frac{1}{2} \dot{\vec{q}} \cdot \dot{\vec{q}} - V(\vec{q}) , \quad (4.3)$$

donne

$$B = 2 \int_{\vec{q}_0}^{\vec{\sigma}} ds (2V)^{1/2} ,$$

où

$$(ds)^2 = d\vec{q} \cdot d\vec{q} .$$

Ici,  $V(\vec{q})$  possède un minimum au point  $\vec{q}_0$  tel que  $V(\vec{q}_0) = 0$ . Après avoir traversé la barrière de potentiel, la particule apparaît à un point  $\vec{\sigma}$  de la surface des zéros  $\Sigma$  du potentiel. L'intégrale de  $B$  s'effectue sur le chemin minimisant  $B$ , le chemin offrant le moins de résistance à la particule :

$$\delta \int_{\vec{q}_0}^{\vec{\sigma}} ds (2V)^{1/2} = 0 . \quad (4.4)$$

Pour calculer ce chemin, remarquons que l'équation d'Euler-Lagrange du Lagrangien (4.3) est

$$\frac{d^2 \vec{q}}{dt^2} = - \frac{dV}{d\vec{q}} ,$$

lorsque multipliée par  $d\vec{q}/dt$  et intégrée une fois, elle devient :

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d\vec{q}}{dt} \right)^2 \right] = \frac{d}{dt} [-V] \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} \frac{d\vec{q}}{dt} \cdot \frac{d\vec{q}}{dt} + V = E .$$

Avec,

$$(ds)^2 = d\vec{q} \cdot d\vec{q} = \left( \frac{d\vec{q}}{dt} \right)^2 (dt)^2 = 2(E - V)(dt)^2 \quad \rightarrow \quad dt = \frac{ds}{\sqrt{2(E - V)}} ,$$

l'action d'un tel système s'écrit :

$$S = \int dt L = \int dt \left[ \frac{1}{2} \dot{\vec{q}} \cdot \dot{\vec{q}} - V(\vec{q}) \right] = \int \frac{ds}{\sqrt{2(E - V)}} [2(E - V) - E] .$$

Le principe de moindre action donne donc la condition :

$$\delta \int ds [2(E - V)]^{1/2} = 0 ,$$

Avec  $E = 0$ , le signe de  $V$  changé et un point  $\vec{\sigma}$  qui peut varier sur la surface  $\Sigma$ , on a exactement le même problème que précédemment à (4.4). Si on fixe pour le moment  $\vec{\sigma}$ , les solutions sont :

$$\frac{d^2 \vec{q}}{d\tau^2} = \frac{dV}{d\vec{q}} ,$$

avec

$$\frac{1}{2} \frac{d\vec{q}}{d\tau} \cdot \frac{d\vec{q}}{d\tau} - V = 0 ,$$

version euclidienne de l'équation d'Euler-Lagrange (avec la substitution  $\tau = it$ ) obtenue du principe d'Hamilton :

$$\begin{aligned} \delta \int d\tau L_E &= 0 , \\ L_E &= \frac{1}{2} \frac{d\vec{q}}{d\tau} \cdot \frac{d\vec{q}}{d\tau} + V . \end{aligned}$$

Au point  $\vec{q}_0$ , comme

$$\left( \frac{1}{2} \frac{d\vec{q}}{d\tau} \cdot \frac{d\vec{q}}{d\tau} \right) \Big|_{\vec{q}_0} = V(\vec{q}_0) = 0 ,$$

la particule ne peut approcher  $\vec{q}_0$  que de façon asymptotique :  $\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \vec{q} = \vec{q}_0$ . De même, comme

$$\left( \frac{1}{2} \frac{d\vec{q}}{d\tau} \cdot \frac{d\vec{q}}{d\tau} \right) \Big|_{\vec{\sigma}} = V(\vec{\sigma}) = 0 ,$$

la particule atteint  $\vec{\sigma}$  au temps  $\tau = 0$  (choisi par invariance sous translation dans le temps) :

$$\left. \frac{d\vec{q}}{d\tau} \right|_{\tau=0} = \vec{0}. \quad (4.5)$$

Comme

$$\frac{1}{2} \frac{d\vec{q}}{d\tau} \cdot \frac{d\vec{q}}{d\tau} = V,$$

$L_E = 2V$ , et :

$$(ds)^2 = d\vec{q} \cdot d\vec{q} = \left( \frac{d\vec{q}}{d\tau} \right)^2 (d\tau)^2 = 2V(d\tau)^2 \quad \rightarrow \quad d\tau = \frac{ds}{\sqrt{2V}},$$

alors :

$$\int_{\vec{q}_0}^{\vec{\sigma}} ds [2V]^{1/2} = \int_{-\infty}^0 d\tau L_E,$$

Grâce à l'équation (4.5), la variation de cette expression selon le point  $\vec{\sigma}$  est nulle, on peut donc lever la condition imposée. L'équation (4.5) indique également que le mouvement pour des temps imaginaires positifs n'est que l'inverse temporel de son mouvement à des temps imaginaires négatifs : la particule rebondit sur  $\Sigma$  à  $\tau = 0$  et retourne vers  $\vec{q}_0$ . Ce mouvement particulier est appelé « bounce » par Coleman, que nous traduirons ici par « rebond ». Le coefficient  $B$  est donc l'action euclidienne totale du rebond :

$$B = 2 \int_{\vec{q}_0}^{\vec{\sigma}} ds (2V)^{1/2} = 2 \int_{-\infty}^0 d\tau L_E = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau L_E \equiv S_E.$$

Ainsi,  $B$  se calcule simplement en trouvant le rebond, la solution non-triviale en temps imaginaire des équations de mouvements obéissant aux conditions frontières :

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \vec{q} = \vec{q}_0, \quad \left. \frac{d\vec{q}}{d\tau} \right|_{t=0} = \vec{0}.$$

## 4.2 Effet tunnel en théorie des champs

Revenons maintenant à la théorie des champs, avec un modèle à un champ scalaire en 3+1 dimensions :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi),$$

dont l'équation de mouvement est :

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \\ \frac{1}{2} \partial_\mu \left( \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \right) &= \partial_\mu \partial^\mu \phi = -\frac{\partial V}{\partial \phi} \\ \rightarrow \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \phi &= -\frac{\partial V}{\partial \phi}, \end{aligned}$$

et l'équation de mouvement euclidienne est :

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \nabla^2 \right) \phi = \frac{\partial V}{\partial \phi}.$$

En théorie des champs, les conditions aux frontières pour le rebond deviennent :

$$\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} \phi(\tau, \vec{x}) = \phi_+, \quad \frac{d\phi}{d\tau}(0, \vec{x}) = 0,$$

et  $B$  est :

$$B = S_E = \int d\tau d^3x \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right)^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 + V \right].$$

Pour que  $B$  soit fini, il est nécessaire que

$$\lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} \phi(\tau, \vec{x}) = \phi_+.$$

#### 4.2.1 Solutions invariantes sous $O(4)$

Définissons

$$\rho = \sqrt{\tau^2 + |\vec{x}|^2}.$$

Si  $\phi$  est invariant sous rotations euclidiennes en quatre dimensions, alors  $\phi$  sera une fonction de  $\rho$  et l'équation de mouvement euclidienne s'écrira :

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{d\rho}{d\tau} \frac{d}{d\rho} \left( \frac{d\rho}{d\tau} \frac{d}{d\rho} \right) + \frac{d\rho}{dx_i} \frac{d}{d\rho} \left( \frac{d\rho}{dx_i} \frac{d}{d\rho} \right) \right] \phi \\
= & \left[ \frac{\tau}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \frac{\tau}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right) + \frac{x_i}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \frac{x_i}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right) \right] \phi \\
= & \left[ \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \frac{\tau^2}{\rho^3} \frac{d}{d\rho} + \frac{\tau^2}{\rho^2} \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{3}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \frac{|\vec{x}|^2}{\rho^3} \frac{d}{d\rho} + \frac{|\vec{x}|^2}{\rho^2} \frac{d^2}{d\rho^2} \right] \phi, \\
\Rightarrow & \frac{d^2\phi}{d\rho^2} + \frac{3}{\rho} \frac{d\phi}{d\rho} = \frac{dV}{d\phi}. \tag{4.6}
\end{aligned}$$

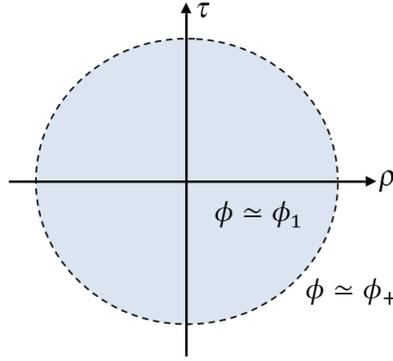


Figure 4.3 – Le rebond invariant sous  $O(4)$  dans le plan  $\rho$ - $\tau$ .

Les deux conditions aux frontières se combineront pour donner (voir figure 4.3) :

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \phi(\rho) = \phi_+,$$

et  $B$  deviendra :

$$B = S_E = 2\pi^2 \int_0^\infty \rho^3 d\rho \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{d\rho} \right)^2 + V \right].$$

Pour éviter que  $\phi$  soit singulier à l'origine, il faut que

$$\left. \frac{d\phi}{d\rho} \right|_0 = 0.$$

Coleman démontre qu'il y a toujours une solution à un tel problème et donc que le système admet bien un rebond invariant sous  $O(4)$ . Pour ce faire, il utilise une analogie avec une particule

située à une position  $\phi$  en un temps  $\rho$  dans un potentiel  $-V$  (voir figure 4.4) et subissant une force de friction inversement proportionnelle au temps. La particule partant du repos à un temps zéro, Coleman démontre que si sa position initiale est bien choisie, elle s'arrêtera à  $\phi_+$  à un temps infini.

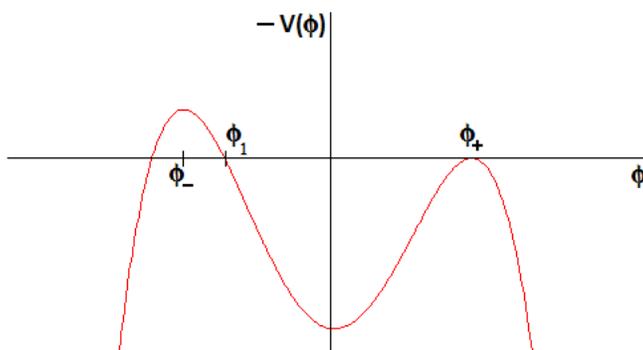


Figure 4.4 – Le potentiel  $-V(\phi)$  de la particule.

Pour ce faire, voyons ce qui se passe si la particule est relâchée juste à la droite de  $\phi_-$ . Si la particule est suffisamment près de  $\phi_-$  on peut linéariser l'équation de mouvement euclidienne. Autour de  $\phi_-$ , on a :

$$\frac{dV}{d\phi} \simeq \left[ \frac{dV}{d\phi} \right] \Big|_{\phi_-} + \left[ \frac{d}{d\phi} \frac{dV}{d\phi} \right] \Big|_{\phi_-} (\phi - \phi_-) = \left[ \frac{d^2V}{d^2\phi} \right] \Big|_{\phi_-} (\phi - \phi_-),$$

et donc :

$$\left( \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{3}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \mu^2 \right) (\phi - \phi_-) = 0,$$

où

$$\mu^2 \equiv V''(\phi_-) = \frac{d^2V}{d\phi^2} \Big|_{\phi_-}.$$

La solution de cette équation différentielle ordinaire linéaire de second ordre est la fonction de Bessel modifiée de première espèce :

$$\phi(\rho) - \phi_- = 2[\phi(0) - \phi_-] \frac{I_1(\mu\rho)}{\mu\rho}.$$

Donc si la position initiale de la particule,  $\phi(\rho = 0)$ , est suffisamment proche de  $\phi_-$ , elle y restera jusqu'à un grand temps  $\rho$ . Par contre, pour un  $\rho$  élevé, le terme de friction devient négli-

geable (comme le coefficient est inversement proportionnel au temps) et la particule dépassera  $\phi_+$ .

D'autre part, lorsque la particule est relâchée assez loin à la droite de  $\phi_-$ , elle n'atteindra jamais  $\phi_+$  : relâchée à la droite de  $\phi_1$ , elle n'aura pas assez d'énergie pour remonter jusqu'à  $\phi_+$ , la force de friction ne fera que diminuer encore davantage son énergie.

Par continuité, il doit donc exister une position initiale intermédiaire (entre  $\phi_-$  et  $\phi_1$ ) pour laquelle on arrive bien au repos à  $\phi_+$  : l'équation de mouvement euclidienne a toujours une solution donc le système admet toujours une solution de rebond invariante sous  $O(4)$ .

Qu'en est-il des rebonds non-invariants sous  $O(4)$  ? Dans son article, Coleman assure que ceux-ci auraient une action euclidienne plus grande que le rebond invariant sous  $O(4)$ , et qu'ils seraient donc négligeables dans le calcul du taux de désintégration  $\Gamma/V = Ae^{-S_E/\hbar} [1 + \mathcal{O}(\hbar)]$ . Par contre, quelques mois plus tard, dans [10], Coleman affirme ne rien avoir trouvé prouvant que le rebond invariant sous  $O(4)$  possède l'action euclidienne minimum et que cela demeure une supposition.

### 4.3 Approximation « thin-wall »

À titre d'exemple, Coleman construit un potentiel  $V(\phi)$  avec la forme voulue (voir figure 4.5). D'une fonction symétrique en  $\phi$ , c'est-à-dire que  $V_+(\phi) = V_+(-\phi)$ , comme :

$$V_+ = \frac{\lambda}{8} \left( \phi^2 - \frac{\mu^2}{\lambda} \right)^2, \quad (4.7)$$

il ajoute un terme brisant faiblement la symétrie :

$$V = V_+ + \frac{\varepsilon}{2a} (\phi - a), \quad (4.8)$$

où  $\varepsilon$  est un nombre positif.  $V_+$  possède des minima à  $\phi = \pm a$  ( $V'_+(\pm a) = 0$ ), donc, ici,  $a^2 = \mu^2/\lambda$ . On définit  $\mu^2 = V''_+(\pm a)$ .

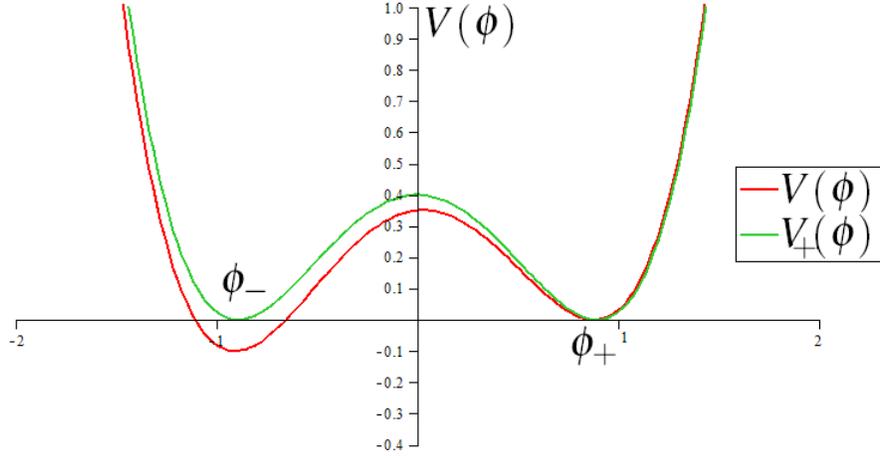


Figure 4.5 – Les potentiels  $V(\phi)$  de l'équation (4.8) et  $V_+(\phi)$  de l'équation (4.7) ; avec  $\mu = 2$ ,  $\lambda = 5$  et  $\varepsilon = 0.1$ .

Ce potentiel  $V(\phi)$  a bien la forme que l'on recherche : deux minima (au premier ordre en  $\varepsilon$ ) à  $\phi_{\pm} = \pm a$ , de différence de densité d'énergie  $\varepsilon : V(\phi = a) - V(\phi = -a) = \varepsilon$ . Que se passe-t-il dans la limite où ce  $\varepsilon$  est petit ? Pour comprendre l'effet d' $\varepsilon$ , étudions la dérivée du potentiel,

$$\frac{dV}{d\phi} = \frac{\lambda}{2}\phi \left( \phi^2 - \frac{\mu^2}{\lambda} \right) + \frac{\varepsilon}{2a}, \quad (4.9)$$

nulle en trois endroits, les deux minima et le maximum, qui peuvent difficilement être trouvés analytiquement. Lorsque  $\varepsilon = 0$ , on sait qu'il s'agit de  $\phi = \pm a$  et  $\phi = 0$ , respectivement. L'effet d' $\varepsilon$  est de décaler la position des minima ( $\phi_- < -a$  et  $\phi_+ < a$ ) et celle du maximum (qui deviendra plus grand que zéro). Lorsqu'on développe la dérivée autour de  $\phi_-$  :

$$\frac{dV}{d\phi} \simeq \left[ \frac{d^2V}{d^2\phi} \right] \Big|_{\phi_-} (\phi - \phi_-) = \frac{\lambda}{2} (3\phi_-^2 - a^2) (\phi - \phi_-),$$

on constate qu'un  $\varepsilon$  petit donnera une pente près de  $\phi_-$  très faible (si  $\varepsilon = 0$ ,  $3\phi_-^2 - a^2$  aura sa valeur minimale). Dans l'analogie en mécanique classique, la particule restera plus longtemps à sa position initiale près de  $\phi_-$  si  $\varepsilon$  est négligeable. Après un temps très grand  $\rho = R$ , elle traversera rapidement la vallée la séparant de  $\phi_+$ , où elle finira par s'arrêter, après un temps infini. Dans une telle situation, le rebond se traduit en théorie de champs par une large bulle de faux vide, de rayon  $R$ , où la transition vers le vrai vide s'effectue rapidement : la paroi séparant les deux vides est mince. Coleman qualifie cette approximation de « thin-wall ». Dans

cette approximation, pour un temps  $\rho$  près de  $R$ , le terme de friction ( $\frac{3}{\rho} \frac{d\phi}{d\rho}$ ) est négligeable, tout comme le terme en  $\varepsilon$  du potentiel, il reste :

$$\frac{d^2\phi}{d\rho^2} = \frac{dV_+}{d\phi} ,$$

et on retrouve l'équation de mouvement habituelle du « kink » (2.5), un soliton dans une théorie à une dimension d'espace ( $x$ ), dont l'action est :

$$S = \int dx \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 + V_+ \right] .$$

En multipliant l'équation de mouvement par  $d\phi/dx$ ,

$$\frac{d\phi}{dx} \frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 \right] = \frac{d\phi}{dx} \frac{\partial V_+}{\partial \phi} = \frac{d}{dx} [V_+] ,$$

ainsi :

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 = V_+ ,$$

et l'action peut s'écrire :

$$S = \int dx [2V_+] = \int \frac{d\phi}{\sqrt{2V_+}} [2V_+] = \int_{-a}^a d\phi [2V_+]^{1/2} .$$

Avec  $V_+$  donné par l'équation (4.7), la solution, nommée  $\phi_1$  est (voir figure 4.6) :

$$\begin{aligned} \int dx &= \int \frac{d\phi}{\sqrt{2V_+}} \\ &= \int \frac{d\phi}{\sqrt{\frac{\lambda}{4} \left( \phi^2 - \frac{\mu^2}{\lambda} \right)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{4}{\lambda}} \frac{1}{a} \tanh^{-1} \left( \frac{\sqrt{\lambda} \phi}{\mu} \right) \\ \Rightarrow \phi_1 &= a \tanh \left( \frac{1}{2} \mu x \right) . \end{aligned}$$

et l'action :

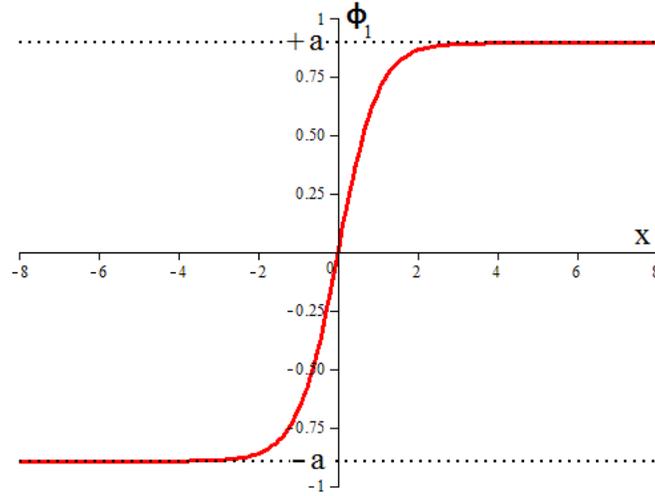


Figure 4.6 – La solution « kink » avec les paramètres  $\mu = 2$  et  $\lambda = 5$ .

$$S = \int_{-a}^a d\phi \left[ \frac{\lambda}{4} \left( \phi^2 - \frac{\mu^2}{\lambda} \right)^2 \right]^{1/2} = \sqrt{\frac{\lambda}{4} \frac{4}{3}} a^3 = \frac{2}{3} \frac{\mu^3}{\lambda} .$$

Ainsi, dans l'approximation du mur mince, le rebond peut être paramétrisé comme (voir figure 4.7) :

$$\phi = \begin{cases} -a & , \quad \rho \ll R \\ \phi_1(\rho - R) & , \quad \rho \approx R \\ a & , \quad \rho \gg R \end{cases} .$$

Cette paramétrisation permet d'évaluer  $S_E$  en fonction de  $R$  :

$$S_E = 2\pi^2 \int_0^\infty \rho^3 d\rho \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{d\rho} \right)^2 + V \right] ,$$

La région intérieure du mur contribue comme :

$$S_{E_{int}} = 2\pi^2 \int_0^R \rho^3 d\rho \left[ \frac{1}{2} \left[ \frac{d\phi}{d\rho} \Big|_{-a} \right]^2 + V(-a) \right] = -2\pi^2 \varepsilon \int_0^R \rho^3 d\rho = -\frac{1}{2} \pi^2 \varepsilon R^4 ,$$

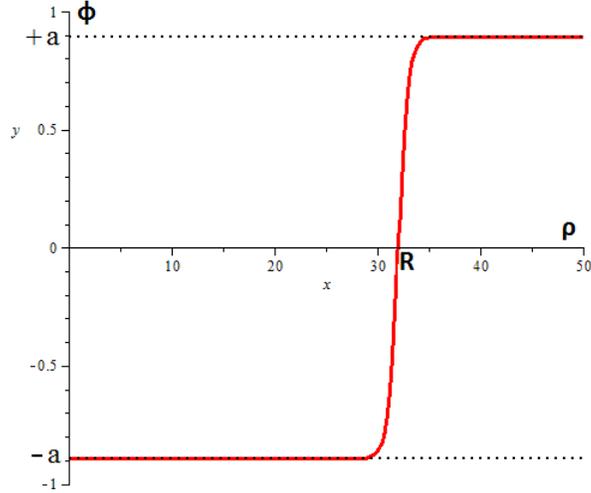


Figure 4.7 – Paramétrisation de la solution dans l’approximation du mur mince, avec les paramètres  $\mu = 2$  et  $\lambda = 5$  et  $\varepsilon = 0.1$ . En minimisant l’action à partir de cette paramétrisation, on trouve que  $R = 32$  avec ces valeurs de paramètres (équation (4.10)).

la région extérieure au mur ne donne aucune contribution à l’action euclidienne :

$$S_{E_{ext}} = 2\pi^2 \int_R^\infty \rho^3 d\rho \left[ \frac{1}{2} \left[ \frac{d\phi}{d\rho} \Big|_a \right]^2 + V(a) \right] = 0 ,$$

et la région du mur contribue comme :

$$S_{E_{mur}} = 2\pi^2 \int_{\rho \simeq R} \rho^3 d\rho \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{d\rho} \right)^2 + V \right] = 2\pi^2 R^3 S_1 ,$$

donc,

$$S_E = -\frac{1}{2} \pi^2 \varepsilon R^4 + 2\pi^2 R^3 S_1 .$$

En minimisant l’action en fonction de  $R$  :

$$\frac{dS_E}{dR} \Big|_{R_{min}} = -2\pi^2 \varepsilon R_{min}^3 + 6\pi^2 R_{min}^2 S_1 = 0 ,$$

et on trouve

$$R_{min} = \frac{3S_1}{\varepsilon} = \frac{2\mu^3}{\varepsilon\lambda} , \tag{4.10}$$

$$S_{E_{min}} = \frac{27\pi^2 S_1^4}{2\varepsilon^3}. \quad (4.11)$$

Comme le  $R_{min}$  trouvé est inversement proportionnel à  $\varepsilon$ , on a bien que  $R$  tend vers l'infini si  $\varepsilon$  tend vers zéro. Également, on trouve que  $B = S_{E_{min}} = 27\pi^2 S_1^4 / 2\varepsilon^3$  : on a donc une expression analytique du coefficient  $B$  dans la limite de  $\varepsilon$  petit.

#### 4.4 En résumé

Bref, l'article de Coleman nous indique comment calculer le taux de désintégration d'un faux vide par unité de temps et de volume :  $\Gamma/V = Ae^{-B/\hbar} [1 + \mathcal{O}(\hbar)]$ . Par étapes :

1. Le coefficient  $B$  est l'action du « rebond », la solution des équations de mouvement euclidiennes avec les conditions aux frontières suivantes : à  $\tau \rightarrow -\infty$ , le champ se trouve dans le faux vide, atteint l'autre côté de la barrière à  $\tau = 0$  et retourne au faux vide à  $\tau \rightarrow +\infty$ .
2. On présume que le rebond invariant sous  $O(4)$  possède l'action euclidienne minimale et donc que le rebond n'est que fonction de  $\rho = \sqrt{\tau^2 + |\vec{x}|^2}$ .
3. Le problème devient l'analogie d'une particule de position  $\phi$  en un temps  $\rho$  se déplaçant dans le potentiel inversé en mécanique classique et subissant une force de friction inversement proportionnelle au temps. Les conditions aux frontières se traduisent de la façon suivante : la particule part du repos près du vrai vide à  $\rho = 0$ , traverse la vallée de potentiel et atteint le faux vide à  $\rho \rightarrow +\infty$ .
4. Dans la limite d'une faible différence d'énergie entre le vrai et le faux vide, le rebond aura une paroi très mince séparant les deux vides, ce qui permet de paramétriser la solution et d'obtenir une forme analytique pour l'action euclidienne et donc pour  $B$ .

## CHAPITRE 5

### DÉSINTÉGRATION DU FAUX VIDE DANS UN MODÈLE ABÉLIEN-HIGGS

Le but de cette section est de calculer le taux de désintégration par effet tunnel du faux vortex dans le modèle présenté précédemment (voir chapitre 3). On pourra alors déterminer la durée de vie de ces vortex. Dans un modèle cosmologique où l'univers est piégé dans un faux vide à  $|\phi| = 1$ , le taux de désintégration vers le vrai vide peut être calculé selon la méthode présentée dans l'article de S. Coleman. Mais si l'univers contient des vortex, il serait intéressant de connaître l'impact d'un gaz de faux vortex sur le taux de désintégration. Comme le coeur des vortex est déjà dans le vrai vide, on peut imaginer que ceux-ci catalyseraient cette désintégration.

#### 5.1 Approximation du mur épais pour $n=1$

L'action pour  $n = 1$  est :

$$S = \int dt (T - E) , \quad (5.1)$$

où

$$T = 2\pi \int_0^\infty r dr \left( \dot{f}^2 + \frac{\dot{a}^2}{2e^2 r^2} \right) \quad (5.2)$$

$$E = 2\pi \int_0^\infty r dr \left( f'^2 + \frac{(1-a)^2}{r^2} f^2 + \frac{a'^2}{2e^2 r^2} + (f^2 - \varepsilon) (f^2 - 1)^2 \right) . \quad (5.3)$$

$T$  est l'énergie cinétique et  $E$  est l'énergie de la configuration statique. Selon l'article de S. Coleman, il faut trouver l'instanton (le rebond) qui dans notre cas est la solution des équations euclidiennes des champs partant du faux vide à un temps euclidien  $\tau \rightarrow -\infty$  et y retournant à  $\tau \rightarrow +\infty$ . Pour simplifier le problème, l'espace des configurations des champs sera remplacé par une famille de configurations à un paramètre, le rayon du vortex. Le problème sera alors réduit à celui de l'effet tunnel en une dimension. Comme on a vu, dans l'approximation semi-classique, le taux de désintégration est proportionnel à  $e^{-S_E}$ , où  $S_E$  est l'action de la solution des équations euclidiennes du mouvement avec les conditions frontières appropriées. Comme on ne résout pas exactement les équations, la véritable action du rebond sera plus basse et le taux de désintégra-

tion trouvé sera en fait une sorte de limite inférieure sur le véritable taux semi-classique.

En respectant le comportement près de  $r = 0$  et de  $r \rightarrow \infty$  de  $f(r)$  et  $a(r)$  (section 3.1), on peut essayer cette paramétrisation (voir figure 5.1b) :

$$f(r) = \begin{cases} \left(\frac{r}{R}\right)^n & , \quad r < R \\ 1 & , \quad r > R \end{cases} \quad a(r) = \begin{cases} \left(\frac{r}{R}\right)^2 & , \quad r < R \\ 1 & , \quad r > R \end{cases} \quad (5.4)$$

pour calculer l'énergie statique :

$$E = 2\pi \int_0^\infty dr r \left[ \frac{n^2 a'^2}{2e^2 r^2} + f'^2 + \frac{n^2}{r^2} (1-a)^2 f^2 + V(\phi^* \phi) \right]$$

$$E(R) = \frac{2\pi n^2}{e^2 R^2} + \frac{\pi n (n^2 + 3n + 4)}{(n+1)(n+2)} + \frac{2\pi n^2 R^2}{(n+1)(2n+1)} \left( \frac{1}{3n+1} - \varepsilon \right). \quad (5.5)$$

Cette fonction est présentée à la figure 5.1b pour un certain choix de paramètres.  $E(R)$  possède un minimum réel seulement si

$$\left( \frac{1}{3n+1} - \varepsilon \right) > 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon < \frac{1}{3n+1},$$

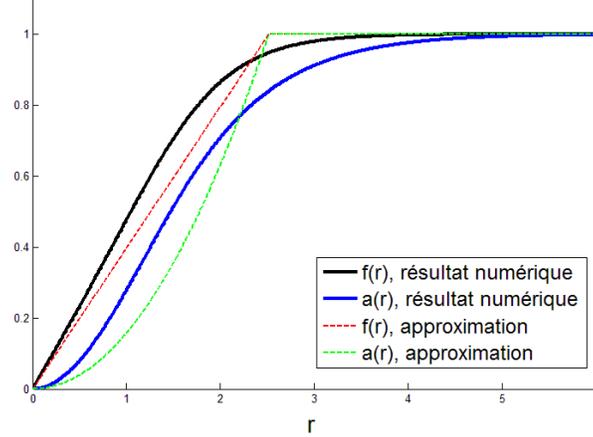
et ce minimum est :

$$R_0^4 = \frac{1}{e^2} \frac{(n+1)(2n+1)}{\left(\frac{1}{3n+1} - \varepsilon\right)}. \quad (5.6)$$

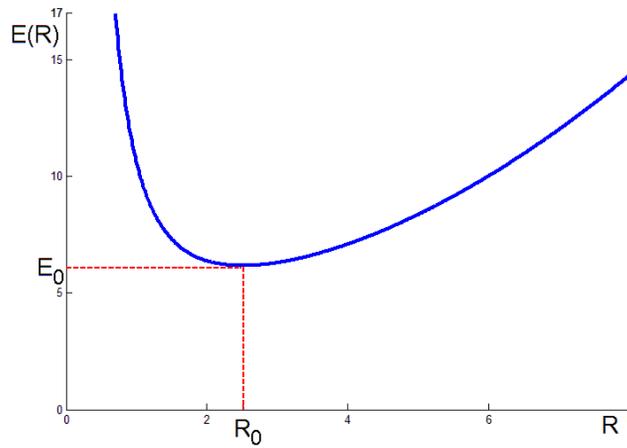
Et donc, en remplaçant, on a l'expression de l'énergie en fonction du nombre d'enroulement pour un  $n$  faible :

$$E_0 = \frac{\pi n (n^2 + 3n + 4)}{(n+1)(n+2)} + \frac{4\pi n^2}{e} \left( \frac{1 - (3n+1)\varepsilon}{(3n+1)(2n+1)(n+1)} \right)^{1/2}. \quad (5.7)$$

Solution numérique et approximation avec  $n=1$ ,  $e=1$ ,  $\varepsilon=0.1$ .



(a) Comparaison entre la solution numérique pour  $f(r)$  et  $a(r)$  avec  $n = 1$ ,  $e = 1$  et  $\varepsilon = 0.1$  et la configuration (5.4) avec  $R = R_0 = 2.51$ , le rayon minimisant l'énergie (5.5).



(b) L'énergie  $E(R)$  avec  $n = 1$ ,  $e = 1$  et  $\varepsilon = 0.1$  donnée par (5.5). Le minimum trouvé est  $E_0 = 6.18$  alors que l'on trouve une énergie de 5.38 à partir des solutions numériques.

Figure 5.1

Pour  $n = 1$ , on trouve :

$$E_0|_{n=1} = \frac{4\pi}{3} + \frac{2\pi}{e} \sqrt{\frac{1-4\varepsilon}{6}}, \quad (5.8)$$

à un rayon

$$R_0^4|_{n=1} = \frac{1}{e^2} \frac{6}{1/4 - \varepsilon}. \quad (5.9)$$

On suppose que le processus d'effet tunnel s'effectue dans l'espace des configurations paramétrisé par  $R(t)$ . Pour  $R < R_0$ , la configuration est un vortex écrasé décrit par (5.4). Pour  $R > R_0$ , le vortex aura ce profil :

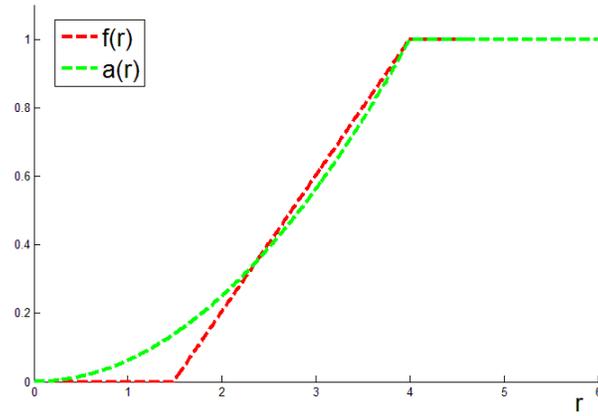
$$f(r) = \begin{cases} 0 & , r < R - R_0 \\ \frac{r - (R - R_0)}{R_0} & , R - R_0 < r < R \\ 1 & , r > R \end{cases} \quad a(r) = \begin{cases} \left(\frac{r}{R}\right)^2 & , r < R \\ 1 & , r > R \end{cases} , \quad (5.10)$$

Substituant ceci dans l'énergie, on trouve une expression assez compliquée :

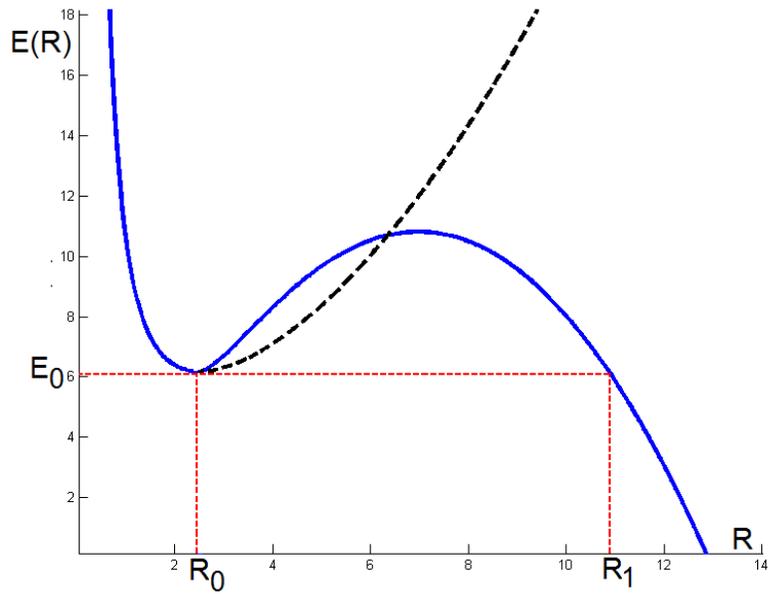
$$\begin{aligned} E(R) = & \frac{2\pi}{e^2 R^2} + 2\pi \left(\frac{R}{R_0} - 1\right)^2 \log\left(\frac{R}{R - R_0}\right) \\ & + \frac{\pi}{30R^4} (60R^4 - 20R^3 R_0 - 5R^2 R_0^2 + 6RR_0^3 - R_0^4) \\ & + \frac{\pi R_0}{420} (64R - 29R_0) - \frac{\pi \epsilon}{15} (15R^2 - 14RR_0 + 4R_0) . \end{aligned} \quad (5.11)$$

Les deux expressions pour  $E(R)$  (la première pour  $R < R_0$ , la deuxième pour  $R > R_0$ ) donnent le comportement attendu : le minimum local à  $R = R_0$  est séparé par une barrière de la région où le vortex est large et où l'énergie n'a pas de limite inférieure lorsque  $R \rightarrow \infty$ .  $R_1$  est le rayon où l'énergie du vortex est égale à celle de la solution. Ainsi, l'effet tunnel est la transition quantique d'un rayon  $R_0$  à un rayon  $R_1$ , interdite classiquement. Cette transition correspond à une solution de rebond ou d'instanton des équations de mouvement euclidiennes. Une approximation du rebond exact sera trouvée en analysant les équations euclidiennes dynamiques du mouvement pour  $R(\tau)$ , où  $\tau$  est le temps euclidien. Le problème d'effet tunnel est défini par un potentiel  $-E(R)$ , déplacé de telle sorte que l'énergie du problème 1-d soit nulle, combiné à une énergie cinétique déterminée en substituant la configuration pour  $R > R_0$  dans l'énergie cinétique (les dérivées étant maintenant par rapport à  $\tau$ ). Pour un chemin  $R(\tau)$ , l'expression de l'action euclidienne est alors :

$$S_E [R(\tau)] = \int d\tau (M(R)\dot{R}^2 + (E(R) - E_0)) , \quad (5.12)$$



(a) Configuration (5.10) pour  $f(r)$  et  $a(r)$  lorsque  $R > R_0$



(b) L'énergie  $E(R)$  avec  $n = 1$ ,  $e = 1$  et  $\varepsilon = 0.1$  donnée par (5.5) pour  $R < R_0$  et par (5.11) pour  $R > R_0$ . Le minimum est  $E_0 = 6.18$  à  $R_0 = 2.51$ .

Figure 5.2

où  $E(R)$  est donné par l'expression pour  $R > R_0$  et

$$M(R) = \pi \left( \frac{2R}{R_0} - 1 + \frac{1}{e^2 R^2} \right), \quad (5.13)$$

trouvé en calculant

$$T = 2\pi \int_0^\infty r dr \left( f^2 + \frac{\dot{a}^2}{2e^2 r^2} \right),$$

avec

$$f(r) = \theta(r - R(t)) + \theta(R(t) - r) \theta(r - (R(t) - R_0)) \left( \frac{r - (R(t) - R_0)}{R_0} \right)$$

$$a(r) = \theta(r - R(t)) + \theta(R(t) - r) \left( \frac{r}{R(t)} \right)^2.$$

L'action (5.12) peut être interprétée comme celle d'une particule avec une masse effective dépendante de  $R$  se déplaçant dans un potentiel  $E_0 - E(R)$ . Le rebond correspond au mouvement de la particule partant au repos de la position  $R_0$  à  $\tau \rightarrow -\infty$ , roulant jusqu'à  $R_1$  et retournant vers  $R_0$  à  $\tau \rightarrow +\infty$ . Il s'agit là du mouvement euclidien, pas du mouvement physique : dans l'espace de Minkowski, des fluctuations quantiques permettent au vortex de s'agrandir jusqu'à un rayon  $R_1$  et de continuer à prendre de l'expansion normalement, selon les équations de mouvement de Minkowski. Comme ni la masse ni le potentiel ne dépendent du temps, l'équation d'Euler-Lagrange résultant de l'action (5.12) peut être intégrée une fois :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{R}} L \right] &= \frac{\partial}{\partial R} L \rightarrow \frac{d}{d\tau} [2M\dot{R}] = M'\dot{R}^2 + E' \\ [2M\ddot{R} + 2\dot{M}\dot{R} &= M'\dot{R}^2 + E'] \frac{dR}{d\tau} \\ 2M\ddot{R}\dot{R} + 2\dot{M}\dot{R}^2 &= M'\dot{R}^3 + \frac{\partial E}{\partial R} \frac{dR}{d\tau} \\ 2M\ddot{R}\dot{R} + 2\dot{M}\dot{R}^2 - \frac{\partial M}{\partial R} \frac{dR}{d\tau} \dot{R}^2 &= \frac{dE}{d\tau} \\ \frac{d}{d\tau} [M\dot{R}^2] &= \frac{dE}{d\tau} \\ \Rightarrow M(R)\dot{R}^2 - E(R) + E_0 &= 0, \end{aligned}$$

en utilisant le fait que la particule part du repos à  $R_0$ . L'action du mouvement classique de

l'aller-retour entre  $R_0$  et  $R_1$  (d'où le facteur 2) est :

$$\begin{aligned} S_B^{\text{épais}} &= 2 \int d\tau (E(R) - E_0) = 2 \int_{R_0}^{R_1} dR \frac{d\tau}{dR} (E(R) - E_0) = 2 \int_{R_0}^{R_1} dR \sqrt{\frac{M}{E(R) - E_0}} (E(R) - E_0) \\ &= 2 \int_{R_0}^{R_1} dR \sqrt{M(R) (E(R) - E_0)}. \end{aligned}$$

Malheureusement, comme  $M(R)$  et  $E(R)$  sont assez compliqués, il n'est pas possible de trouver une forme analytique pour  $S_B^{\text{épais}}$ .

## 5.2 Approximation du mur mince, pour $n$ beaucoup plus grand que 1

Dans l'approximation du mur mince, applicable lorsque le nombre d'enroulement du vortex est élevé, il est possible d'obtenir une expression analytique pour l'action euclidienne.

À mesure que le nombre d'enroulement augmente, le flux magnétique augmente tout comme la grandeur du vortex alors que l'échelle spatiale sur laquelle le champ scalaire varie, de l'ordre de la longueur d'onde de Compton de la particule scalaire, est indépendante de  $n$ . Ainsi, la transition entre l'intérieur du vortex, où  $f \simeq 0$ , et l'extérieur, où  $f \simeq 1$ , s'effectue sur une distance de l'ordre de  $\delta \sim 1$  à un rayon  $R \gg 1$  :

$$f(r) = \begin{cases} 0 & , \quad r < R - \frac{\delta}{2} \\ \simeq 1 & , \quad R - \frac{\delta}{2} < r < R + \frac{\delta}{2} \\ 1 & , \quad r > R + \frac{\delta}{2} \end{cases} \quad (5.14)$$

$$a(r) = \begin{cases} \left(\frac{r}{R}\right)^2 & , \quad r < R - \frac{\delta}{2} \\ 1 - \left(\frac{1}{R}\right) & , \quad R - \frac{\delta}{2} < r < R + \frac{\delta}{2} \\ 1 & , \quad r > R + \frac{\delta}{2}. \end{cases}$$

La configuration de  $a(r)$  est choisie afin de respecter le comportement de la solution à l'origine ( $\sim r^2$  selon (3.12)).

Avec cette configuration, on peut calculer une expression analytique de l'énergie statique du

vortex en fonction des paramètres du modèle,

$$E = 2\pi \int_0^{\infty} dr r \left[ \frac{n^2 a^2}{2e^2 r^2} + f'^2 + \frac{n^2}{r^2} (1-a)^2 f^2 + V(\phi^* \phi) \right], \quad (5.15)$$

en divisant l'intégrale en trois régions :  $E(R) = E_{int} + E_{mur} + E_{ext}$ . À l'intérieur du vortex, on peut alors calculer :

$$\begin{aligned} E_{int} &= 2\pi \int_0^{R-\delta/2} dr r \left[ \frac{n^2}{2e^2 r^2} \left( \frac{2r}{R} \right)^2 + V(f=0) \right] \\ &= 2\pi \left( \frac{2n^2}{e^2 R^4} + V(f=0) \right) \int_0^{R-\delta/2} dr r = \pi \left( \frac{2n^2}{e^2 R^4} + V(f=0) \right) (R-\delta/2)^2 \\ &\simeq \frac{2\pi n^2}{e^2 R^2} + \pi V(f=0) R^2. \end{aligned}$$

Pour la région du mur, on peut utiliser l'une des équations de mouvement :

$$f'' + \frac{f'}{r} - \frac{n^2}{r^2} (1-a)^2 f - \frac{1}{2} \frac{dV}{df} = 0 \simeq f'' - \frac{1}{2} \frac{dV}{df},$$

puisque  $r \gg 1$  dans cette région. En multipliant par  $f'$ , on peut intégrer cette équation, ce qui donne :

$$f'^2 = V(f),$$

ainsi :

$$\begin{aligned} E_{mur} &= 2\pi \int_{R-\delta/2}^{R+\delta/2} dr r [f'^2 + V(f)] = 4\pi R \int_{R-\delta/2}^{R+\delta/2} dr [f' \sqrt{V(f)}] \\ &= 4\pi R \int_0^1 df [\sqrt{V(f)}]. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Finalement, pour la région extérieure, comme  $f(r) = a(r) = 1$  :

$$E_{ext} = 2\pi \int_{R+\delta/2}^{\infty} dr r [V(f=1)] = 0,$$

et on a donc :

$$E(R) = \frac{2\pi n^2}{e^2 R^2} + \pi V(f=0) R^2 + 4\pi R \int_0^1 df \left[ \sqrt{V(f)} \right]. \quad (5.17)$$

Pour minimiser cette fonction il faut donc trouver les racines du polynôme suivant :

$$0 = -\frac{4\pi n^2}{e^2} + 2\pi V(f=0) R_0^4 + 4\pi \int_0^1 df \left[ \sqrt{V(f)} \right] R_0^3.$$

Trouver la valeur exacte de  $R_0$  implique de résoudre exactement cette équation polynomiale d'ordre quatre. Avec le potentiel d'ordre six :

$$V(\phi^* \phi) = (|\phi|^2 - \varepsilon)(|\phi|^2 - 1)^2 = (f^2 - \varepsilon)(f^2 - 1)^2, \quad (5.18)$$

et en considérant  $\varepsilon$  petit, on trouve :

$$\int_0^1 df \left[ \sqrt{V(f)} \right] \simeq \int_0^1 df \left[ \sqrt{(f^2)(f^2 - 1)^2} \right] = \frac{1}{4}.$$

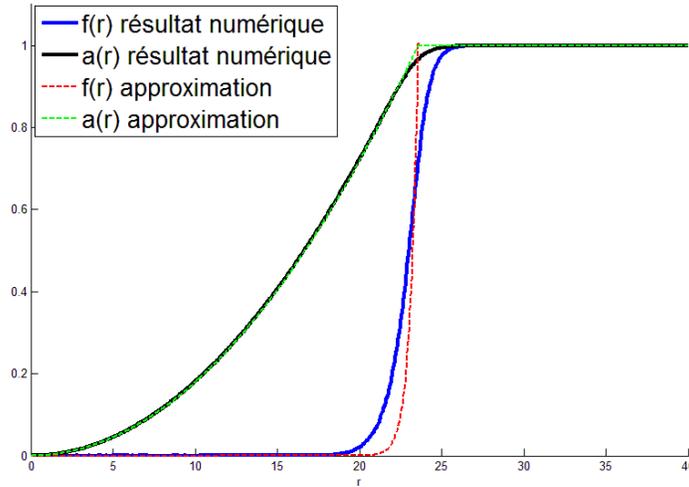
Donc, à partir de l'équation (5.17), l'énergie en fonction de  $R$  est donnée par :

$$E(R) = \frac{2\pi n^2}{e^2 R^2} - \pi \varepsilon R^2 + \pi R. \quad (5.19)$$

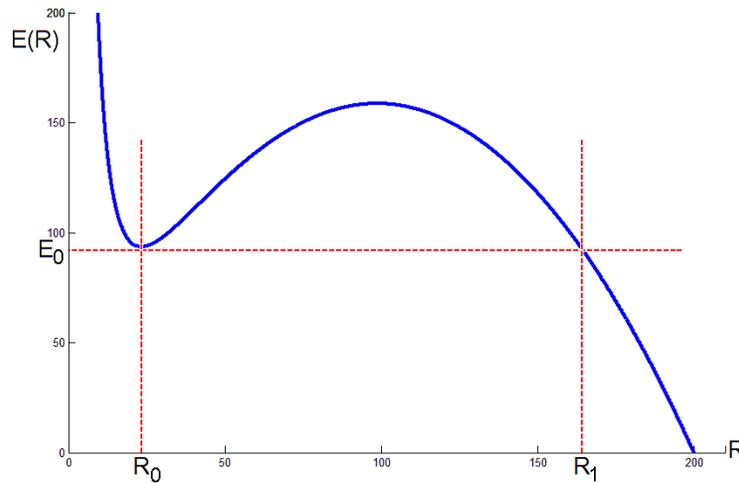
Il faut à présent trouver le rayon qui minimise l'énergie,  $R_0$ , ainsi que l'énergie minimale  $E_0$ . De façon générale, ceci ne peut être fait car  $R_0$  est la solution de l'équation quartique

$$0 = -\frac{4\pi n^2}{e^2} - 2\pi \varepsilon R_0^4 + \pi R_0^3.$$

Solution numérique et approximation avec  $n=50$ ,  $e=1$ ,  $\varepsilon=0.005$ .



(a) Comparaison entre la solution numérique pour  $f(r)$  et  $a(r)$  avec  $n = 50$ ,  $e = 1$  et  $\varepsilon = 0.005$  et la configuration (5.14) avec  $R = R_0 = 23.6$ , le rayon minimisant l'énergie (5.19).



(b) L'énergie  $E(R)$  avec  $n = 50$ ,  $e = 1$  et  $\varepsilon = 0.005$  donnée par (5.19). Le minimum local trouvé est  $E_0 = 93.6$  alors que l'on trouve une énergie de 101.5 à partir des solutions numériques.

Figure 5.3

Par contre, dans la limite où  $\varepsilon$  est petit, nous pouvons espérer que le deuxième terme de

(5.19) soit négligeable :

$$\begin{aligned} 0 \simeq -\frac{4\pi n^2}{e^2} + \pi R_0^3 &\Rightarrow R_0 \simeq \sqrt[3]{\frac{4n^2}{e^2}} = \left(\frac{2n}{e}\right)^{2/3} \\ &\Rightarrow E_0 \simeq \frac{3\pi}{2} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2/3}. \end{aligned}$$

Il est possible de vérifier de manière auto-consistante si cette approximation est légitime en remplaçant  $R_0$  dans (5.19) :

$$E_0 = \frac{3\pi}{2} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2/3} - \pi\varepsilon \left(\frac{2n}{e}\right)^{4/3}.$$

La contribution du deuxième terme en  $\varepsilon$  est donc bel et bien négligeable si la condition

$$\varepsilon \ll \frac{3\pi}{2} \left(\frac{e}{2n}\right)^{2/3} \quad (5.20)$$

est respectée. Dans ce cas, l'énergie est :

$$E_0 = \frac{3\pi}{2} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2/3}. \quad (5.21)$$

La forme de l'énergie  $E(R)$  dans (5.19) permet de déterminer une limite sur les paramètres du modèle au-delà de laquelle  $R_0$  et  $R_1$  se joignent pour ne former plus qu'un point d'inflexion, faisant disparaître la barrière de potentiel et donc toutes solutions classiquement stables,  $E(R)$  n'étant alors qu'une fonction décroissante de  $R$ . En effet, le minimum  $E(R)$  dépend de la nature des zéros de l'équation quartique

$$0 = -\frac{4\pi n^2}{e^2} - 2\pi\varepsilon R_0^4 + \pi R_0^3,$$

avec :

$$0 = aR_0^4 + bR_0^3 + cR_0^2 + dR_0 + e, \quad \begin{cases} a = -2\pi\varepsilon \\ b = \pi \\ c = 0 \\ d = 0 \\ e = -4\pi n^2/e^2, \end{cases}$$

est déterminée par le discriminant :

$$\begin{aligned} \Delta &= 256a^3e^3 - 192a^2bde^2 - 128a^2c^2e^2 + 144a^2cd^2e - 27a^2d^4 \\ &\quad + 144ab^2ce^2 - 6ab^2d^2e - 80abc^2de + 18abcd^3 + 16ac^4e \\ &\quad - 4ac^3d^2 - 27b^4e^2 + 18b^3cde - 4b^3d^3 - 4b^2c^3e + b^2c^2d^2 \\ &= 256a^3e^3 - 27b^4e^2 \\ &= 256(-2\pi\varepsilon)^3 (-4\pi n^2/e^2)^3 - 27(\pi)^4 (-4\pi n^2/e^2)^2 \\ &= 131072\pi^6 \frac{\varepsilon^3 n^6}{e^6} - 432\pi^6 \frac{n^4}{e^4}, \end{aligned}$$

ainsi que les polynômes :

$$\begin{aligned} P &= 8ac - 3b^2 \quad \text{et} \quad D = 64a^3e - 16a^2c^2 + 16ab^2c - 16a^2bd - 3b^4 \\ &= -3\pi^2 < 0 \quad = 64a^3e - 3b^4 \\ &\quad = 2048\pi^4 \frac{\varepsilon^3 n^2}{e^2} - 3\pi^4. \end{aligned}$$

Plusieurs cas sont possibles :

- Si  $\Delta < 0$ , l'équation possède deux racines réelles et deux racines conjuguées complexes.
- Si  $\Delta > 0$ , l'équation possède 4 racines toutes réelles ou toutes complexes :
  - si  $P < 0$  et  $D < 0$ , les 4 racines sont toutes réelles et distinctes.
  - si  $P > 0$  et  $D > 0$ , il y a deux paires de racines conjuguées complexes.

- Si  $\Delta = 0$ , l'équation possède des racines multiples ou est la racine d'un polynôme quadratique :
  - si  $P < 0$ ,  $D < 0$  et  $\Delta_0 \neq 0$ , il y a une racine double réelle et deux racines simples réelles.
  - si  $P > 0$  et  $D \neq 0$  ou si  $D > 0$ , il y a une racine double réelle et deux racines conjuguées complexes.
  - si  $\Delta_0 = 0$  et  $D \neq 0$ , il y a une racine triple réelle et une racine simple réelle.
  - si  $D = 0$ , alors :
    - \* si  $P < 0$ , il y a deux racines doubles réelles.
    - \* si  $P > 0$ , il y a deux racines doubles conjuguées complexes.
    - \* si  $\Delta_0 = c^2 - 3bd + 12ae = 0$ , toutes les racines sont égales à  $-b/4a$ .

Pour qu'il y ait une barrière de potentiel, il faut avoir deux racines réelles distinctes : le minimum à  $E(R_0)$  et le maximum de la barrière.

Pour avoir  $\Delta < 0$ , il faut que

$$131072\pi^6 \frac{\varepsilon^3 n^6}{e^6} - 432\pi^6 \frac{n^4}{e^4} < 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon < \frac{3}{2^{13/3}} \left(\frac{e}{n}\right)^{2/3} \simeq 0.1488 \left(\frac{e}{n}\right)^{2/3}; \quad (5.22)$$

on aurait alors deux racines réelles et deux racines conjuguées complexes. Y a-t-il d'autres possibilités ? Par exemple, pour avoir  $\Delta > 0$ , il faut plutôt que

$$\varepsilon > \frac{3}{2^{13/3}} \left(\frac{e}{n}\right)^{2/3} \simeq 0.1488 \left(\frac{e}{n}\right)^{2/3}, \quad (5.23)$$

et pour trouver 4 racines réelles et distinctes, comme  $P < 0$ , il faudrait aussi avoir  $D < 0$  :

$$2048\pi^4 \frac{\varepsilon^3 n^2}{e^2} - 3\pi^4 < 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon < \frac{3^{1/3}}{2^{11/3}} \left(\frac{e}{n}\right)^{2/3} \simeq 0.1136 \left(\frac{e}{n}\right)^{2/3}; \quad (5.24)$$

ce qui mène à une contradiction, étant donné que  $\Delta > 0 \Rightarrow \varepsilon > 0.1488 (e/n)^{2/3}$ .

Qu'arrive-t-il maintenant, si  $\Delta = 0$ , donc si  $\varepsilon = \varepsilon_c \equiv 0.1488 (e/n)^{2/3}$  ? Dans ce cas,  $D > 0$  et on se retrouve dans la situation où l'équation quartique possède une racine double réelle et

deux racines conjuguées complexes : c'est le cas où il n'y a plus de barrière de potentiel, plus de vortex classiquement stable. La racine double réelle (à la fois  $R_0$  et  $R_1$ ) n'est plus qu'un point d'inflexion dans la courbe de  $E(R)$  (voir figure 5.4). Cette situation intéressante, où  $R_0 = R_1 \equiv R_c$  est appelée point de dissociation et nous y reviendrons plus tard.

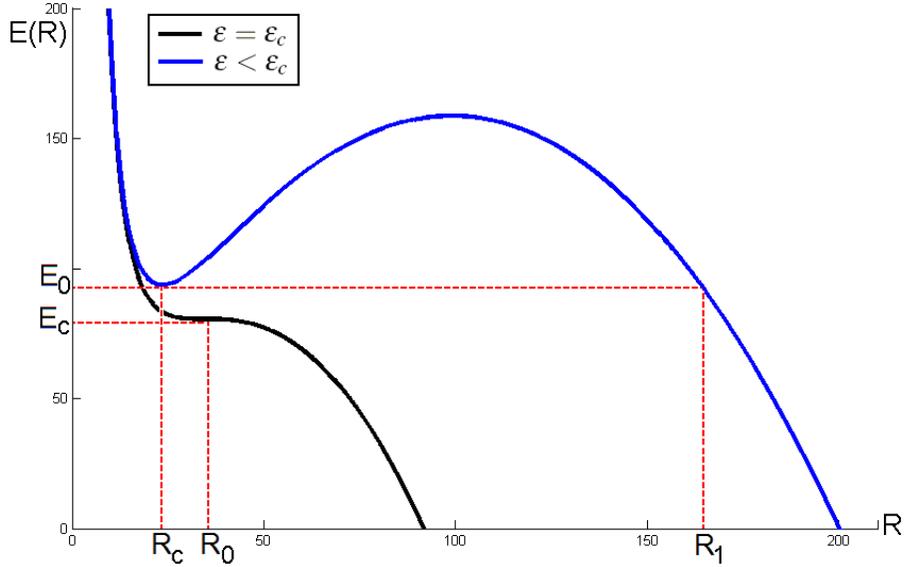


Figure 5.4 – L'énergie  $E(R)$  donnée par (5.19) pour  $n = 50$ ,  $e = 1$  et deux valeurs différentes pour  $\varepsilon$ , soit 0.005 dans le cas  $\varepsilon < \varepsilon_c$  et 0.01097 pour le cas  $\varepsilon = \varepsilon_c$ .

Afin de calculer l'action euclidienne, il faut calculer l'énergie cinétique :

$$T = 2\pi \int_0^\infty r dr \left[ \dot{f}^2 + \frac{n^2 \dot{a}^2}{2e^2 r^2} \right], \quad (5.25)$$

avec  $f(r)$  et  $a(r)$  donné par (5.14). La contribution de l'énergie cinétique à l'intérieur du mur s'écrit :

$$\begin{aligned} T_{int} &= 2\pi \int_0^{R-\delta/2} r dr \left[ \dot{f}^2 + \frac{n^2 \dot{a}^2}{2e^2 r^2} \right] = 2\pi \int_0^{R-\delta/2} r dr \left[ 0 + \frac{n^2}{2e^2 r^2} \left( \frac{-2r^2 \dot{R}}{R^3} \right)^2 \right] \\ &= \frac{\pi n^2 \dot{R}^2}{e^2 R^2}. \end{aligned}$$

Dans le mur, on considère que  $f(r, t)$  est une fonction de  $r - R(t)$  :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -f'(r)\dot{R}(t),$$

donc

$$\begin{aligned} T_{mur} &= 2\pi \int_{R-\delta/2}^{R+\delta/2} r dr \left[ \dot{f}^2 + \frac{n^2 \dot{a}^2}{2e^2 r^2} \right] \simeq 2\pi \int_{R-\delta/2}^{R+\delta/2} r dr \left[ (-f'(r)\dot{R}(t))^2 \right] \\ &= 2\pi R \dot{R}^2 \int_{R-\delta/2}^{R+\delta/2} dr f'^2 = \frac{\pi R}{2} \dot{R}^2, \end{aligned}$$

car le deuxième terme dans l'intégrale est négligeable ( $R \gg 1$ ), et en utilisant la même intégrale résolue pour trouver l'énergie du mur (équation (5.16)). Enfin, à l'extérieur du mur, comme  $f$  et  $a$  sont des constantes, la contribution à l'énergie cinétique est nulle :

$$T_{ext} = 2\pi \int_{R+\delta/2}^{\infty} r dr \left[ \dot{f}^2 + \frac{n^2 \dot{a}^2}{2e^2 r^2} \right] = 0.$$

Au total :

$$T = \left( \frac{\pi n^2}{R^2 e^2} + \frac{\pi R}{2} \right) \dot{R}^2, \quad (5.26)$$

et l'action euclidienne s'écrit :

$$\begin{aligned} S_E &= \int d\tau [T + (E(R) - E_0)] \\ &= \int d\tau \left[ \left( \frac{\pi n^2}{e^2 R^2} + \frac{\pi R}{2} \right) \dot{R}^2 + \left( \frac{2\pi n^2}{e^2 R^2} + \pi R - \pi \epsilon R^2 - E_0 \right) \right], \end{aligned}$$

où  $E_0$  est donné par (5.21). Suivant la procédure habituelle décrite à la section 5.1 :

$$\begin{aligned}
S_B^{mince} &= 2 \int_{R_0}^{R_1} dR \sqrt{\left(\frac{\pi n^2}{e^2 R^2} + \frac{\pi R}{2}\right) \left(\frac{2\pi n^2}{e^2 R^2} + \pi R - \pi \varepsilon R^2 - E_0\right)} \\
&= 2 \int_{R_0}^{R_1} \frac{dR}{R} \sqrt{\frac{1}{R^2} \left(\frac{\pi n^2}{e^2} + \frac{\pi R^3}{2}\right)} \sqrt{R^2 \left(\frac{2\pi n^2}{e^2 R^2} + \pi R - \pi \varepsilon R^2 - E_0\right)} \\
&= 2 \int_{R_0}^{R_1} \frac{dR}{R^2} \sqrt{\left(\frac{\pi n^2}{e^2} + \frac{\pi R^3}{2}\right)} \sqrt{\left(\frac{2\pi n^2}{e^2} + \pi R^3 - \pi \varepsilon R^4 - E_0 R^2\right)}.
\end{aligned}$$

Le facteur de droite est en fait  $R^2(E(R) - E_0)$ , un polynôme quartique. Quelles sont les quatre racines de ce polynôme ? D'abord,  $(E(R) - E_0)$  possède également quatre racines : l'une est négative (nommons-la  $R_2$ ), deux sont  $R_0$  et la dernière est  $R_1$ . Multipliées par  $R^2$ , les racines demeureront inchangées. On peut alors réécrire ce polynôme comme :

$$\frac{2\pi n^2}{e^2} + \pi R^3 - \pi \varepsilon R^4 - E_0 R^2 = \pi \varepsilon (R - R_0)^2 (R_1 - R) (R - R_2). \quad (5.27)$$

Pour simplifier les calculs, on peut redéfinir

$$\hat{R} = \left(\frac{2n}{e}\right)^{-2/3} R, \quad \hat{E}(\hat{R}) = \left(\frac{2n}{e}\right)^{-2/3} \frac{E(R)}{\pi}, \quad \hat{\varepsilon} = \left(\frac{2n}{e}\right)^{2/3} \varepsilon. \quad (5.28)$$

et on aura :

$$\hat{E}(\hat{R}) = \frac{1}{2\hat{R}^2} - \hat{\varepsilon}\hat{R}^2 + \hat{R}, \quad \hat{E}_0 = \frac{3}{2}, \quad \hat{R}_0 = 1,$$

et l'action s'écrira :

$$\begin{aligned}
S_B^{mince} &= 2\pi \left(\frac{2n}{e}\right)^{4/3} \int_{\hat{R}_0}^{\hat{R}_1} \frac{d\hat{R}}{\hat{R}^2} \sqrt{\left(\frac{1}{4} + \frac{\hat{R}^3}{2}\right)} \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \hat{R}^3 - \hat{\varepsilon}\hat{R}^4 - \hat{E}_0\hat{R}^2\right)} \\
&= 2\pi \left(\frac{2n}{e}\right)^{4/3} \int_{\hat{R}_0}^{\hat{R}_1} \frac{d\hat{R}}{\hat{R}^2} \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \hat{R}^3\right)} \sqrt{\hat{\varepsilon} (\hat{R} - \hat{R}_0)^2 (\hat{R}_1 - \hat{R}) (\hat{R} - \hat{R}_2)} \\
&= 2\pi \left(\frac{2n}{e}\right)^{4/3} \sqrt{\frac{\hat{\varepsilon}}{2}} \int_{\hat{R}_0}^{\hat{R}_1} \frac{d\hat{R}}{\hat{R}^2} (\hat{R} - \hat{R}_0) \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \hat{R}^3\right)} \sqrt{(\hat{R}_1 - \hat{R}) (\hat{R} - \hat{R}_2)}.
\end{aligned}$$

Il faut par contre être prudent avec ce choix de notation. On cherche à calculer  $S_B^{mince}$  dans la limite d'un mur mince (donc dans la limite  $n \gg 1$ ) ainsi que dans la limite où  $\varepsilon$ , la différence d'énergie entre les vides, tend vers zéro. Cela ne correspond pas tout à fait à prendre la limite de  $\hat{\varepsilon} \rightarrow 0$  car  $\hat{\varepsilon} \sim n^{2/3}\varepsilon$ . Il serait nécessaire de calculer l'action jusqu'au deuxième ordre en  $\hat{\varepsilon}$ . Pour ce faire, on commence par trouver  $\hat{R}_0$  en fonction de  $\hat{E}_0$ . On sait que

$$\frac{\hat{R}^2}{\varepsilon} (\hat{E}(\hat{R}) - \hat{E}_0) = \frac{1}{2\hat{\varepsilon}} - \frac{\hat{E}_0\hat{R}^2}{\hat{\varepsilon}} + \frac{\hat{R}^3}{\hat{\varepsilon}} - \hat{R}^4 \quad (5.29)$$

est nul à  $\hat{R} = \hat{R}_0$ , mais c'est aussi un minimum :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\hat{R}} \left[ \frac{1}{2\hat{\varepsilon}} - \frac{\hat{E}_0\hat{R}^2}{\hat{\varepsilon}} + \frac{\hat{R}^3}{\hat{\varepsilon}} - \hat{R}^4 \right] &= -\frac{2\hat{E}_0}{\hat{\varepsilon}}\hat{R} + \frac{3}{\hat{\varepsilon}}\hat{R}^2 - 4\hat{R}^3 \\ \Rightarrow \hat{R} \left[ -\frac{2\hat{E}_0}{\hat{\varepsilon}} + \frac{3}{\hat{\varepsilon}}\hat{R} - 4\hat{R}^2 \right] &= 0. \end{aligned}$$

Les trois extrema sont donc  $\hat{R} = 0$  et les racines de  $2\hat{E}_0 - 3\hat{R} + 4\hat{\varepsilon}\hat{R}^2$ .  $\hat{R}_0$  est la plus petite de ces racines :

$$\hat{R}_0 = \frac{3 - \sqrt{9 - 32\hat{\varepsilon}\hat{E}_0}}{8\hat{\varepsilon}}. \quad (5.30)$$

Ainsi, en substituant (5.30) dans (5.29), on trouve  $\hat{E}_0$  :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\hat{\varepsilon}} - \frac{\hat{E}_0}{\hat{\varepsilon}} \left[ \frac{3 - \sqrt{9 - 32\hat{\varepsilon}\hat{E}_0}}{8\hat{\varepsilon}} \right]^2 + \frac{1}{\hat{\varepsilon}} \left[ \frac{3 - \sqrt{9 - 32\hat{\varepsilon}\hat{E}_0}}{8\hat{\varepsilon}} \right]^3 - \left[ \frac{3 - \sqrt{9 - 32\hat{\varepsilon}\hat{E}_0}}{8\hat{\varepsilon}} \right]^4 &= 0 \\ \Rightarrow \hat{E}_0 &= \frac{3}{2} - \hat{\varepsilon} + \mathcal{O}(\hat{\varepsilon}^2). \end{aligned}$$

On peut ensuite remplacer cette expression de  $\hat{E}_0$  dans celle de  $\hat{R}_0$  :

$$\begin{aligned} \hat{R}_0 &= \frac{3 - \sqrt{9 - 32\hat{\varepsilon} \left[ \frac{3}{2} - \hat{\varepsilon} + \mathcal{O}(\hat{\varepsilon}^2) \right]}}{8\hat{\varepsilon}} \simeq \frac{3}{8\hat{\varepsilon}} \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{16}{3}\hat{\varepsilon} + \frac{32}{9}\hat{\varepsilon}^2} \right] \\ &\simeq \frac{3}{8\hat{\varepsilon}} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{16}{6}\hat{\varepsilon} + \frac{1}{8} \left( \frac{128}{9} - \frac{256}{9} \right) \hat{\varepsilon}^2 \right) \right] = 1 + \frac{2}{3}\hat{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Ensuite, pour trouver  $\hat{R}_1$  et  $\hat{R}_2$ , il suffit d'égaliser les termes de même puissance dans :

$$\hat{R}^4 - \frac{1}{\hat{\varepsilon}}\hat{R}^3 + \frac{\hat{E}_0}{\hat{\varepsilon}}\hat{R}^2 - \frac{1}{2\hat{\varepsilon}} = (\hat{R} - \hat{R}_0)^2 (\hat{R} - \hat{R}_1) (\hat{R} - \hat{R}_2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\hat{\varepsilon}} = 2\hat{R}_0 + \hat{R}_1 + \hat{R}_2 \\ \frac{\hat{E}_0}{\hat{\varepsilon}} = \hat{R}_0^2 + 2\hat{R}_0(\hat{R}_1 + \hat{R}_2) + \hat{R}_1\hat{R}_2 \\ 0 = \hat{R}_0^2(\hat{R}_1 + \hat{R}_2) + 2\hat{R}_0\hat{R}_1\hat{R}_2 \\ -\frac{1}{2\hat{\varepsilon}} = \hat{R}_0^2\hat{R}_1\hat{R}_2 . \end{cases}$$

On peut réécrire ceci comme :

$$\begin{aligned} \hat{R}_1 + \hat{R}_2 &= \frac{1}{\hat{\varepsilon}} - 2\hat{R}_0 \\ \frac{\hat{E}_0}{\hat{\varepsilon}} &= \hat{R}_0^2 + 2\hat{R}_0(\hat{R}_1 + \hat{R}_2) + \hat{R}_1\hat{R}_2 \\ -2\hat{R}_1\hat{R}_2 &= \hat{R}_0(\hat{R}_1 + \hat{R}_2) \\ \hat{R}_1\hat{R}_2 &= -\frac{1}{2\hat{\varepsilon}\hat{R}_0^2} . \end{aligned}$$

En combinant la première et la dernière équation, on obtient une expression de  $\hat{R}_1$  en fonction de  $\hat{R}_0$  :

$$\hat{R}_1 - \frac{1}{2\hat{\varepsilon}\hat{R}_0^2\hat{R}_1} - \frac{1}{\hat{\varepsilon}} + 2\hat{R}_0 = 0 \rightarrow \hat{R}_1^2 - \left(\frac{1}{\hat{\varepsilon}} - 2\hat{R}_0\right)\hat{R}_1 - \frac{1}{2\hat{\varepsilon}\hat{R}_0^2} = 0 ,$$

dont les racines sont :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\hat{\varepsilon}} - 2\hat{R}_0 \pm \sqrt{\left(\frac{1}{\hat{\varepsilon}} - 2\hat{R}_0\right)^2 + \frac{2}{\hat{\varepsilon}\hat{R}_0^2}} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\hat{\varepsilon}} - 2\hat{R}_0 \pm \sqrt{\frac{1}{\hat{\varepsilon}^2} \left(1 + 4\hat{R}_0^2\hat{\varepsilon}^2 - 4\hat{R}_0\hat{\varepsilon} + \frac{2}{\hat{R}_0^2}\hat{\varepsilon}\right)} \right] \\
&\simeq \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\hat{\varepsilon}} - 2\hat{R}_0 \pm \frac{1}{\hat{\varepsilon}} \left(1 - 2\hat{R}_0\hat{\varepsilon} + \frac{1}{\hat{R}_0^2}\hat{\varepsilon}\right) \right] \\
&\simeq \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\hat{\varepsilon}} - 2 - \frac{4}{3}\hat{\varepsilon} \pm \frac{1}{\hat{\varepsilon}} \mp 2 \mp \frac{4}{3}\hat{\varepsilon} \pm \left(1 - \frac{4}{3}\hat{\varepsilon}\right) \right] \\
&\simeq \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\hat{\varepsilon}} - 2 \pm \frac{1}{\hat{\varepsilon}} \mp 2 \pm 1 \right] = \left\{ \frac{1}{\hat{\varepsilon}} - \frac{3}{2} \quad \text{ou} \quad -\frac{1}{2} \right\},
\end{aligned}$$

lorsqu'on remplace  $\hat{R}_0$  par la valeur trouvée précédemment. On garde la première solution, car on sait que la racine  $\hat{R}_1$  doit être positive :

$$\hat{R}_1 = \frac{1}{\hat{\varepsilon}} - \frac{3}{2}. \quad (5.31)$$

Pour trouver  $\hat{R}_2$  il suffit de remplacer dans :

$$\hat{R}_2 = \frac{1}{\hat{\varepsilon}} - 2\hat{R}_0 - \hat{R}_1 = \frac{1}{\hat{\varepsilon}} - 2 - \frac{4}{3}\hat{\varepsilon} - \frac{1}{\hat{\varepsilon}} + \frac{3}{2} \simeq -\frac{1}{2}. \quad (5.32)$$

De retour à l'intégrale de l'action euclidienne du rebond, que l'on peut maintenant résoudre à l'ordre  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$  :

$$S_B^{mince} = \pi \left(\frac{2n}{e}\right)^{4/3} \sqrt{2\hat{\varepsilon}} \int_{\hat{R}_0}^{\hat{R}_1} \frac{d\hat{R}}{\hat{R}^2} (\hat{R} - \hat{R}_0) \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \hat{R}^3\right)} \sqrt{(\hat{R}_1 - \hat{R})(\hat{R} - \hat{R}_2)}.$$

Pour ce faire, on applique un changement de variable  $\hat{R} \rightarrow \hat{R}_1 y$

$$S_B^{mince} = \pi \left(\frac{2n}{e}\right)^{4/3} \sqrt{2\hat{\varepsilon}\hat{R}_1^5} \int_{\hat{R}_0/\hat{R}_1}^1 \frac{dy}{y^2} \left(y - \frac{\hat{R}_0}{\hat{R}_1}\right) \sqrt{\left(y^3 + \frac{1}{2\hat{R}_1^3}\right)} (1-y) \left(y - \frac{\hat{R}_2}{\hat{R}_1}\right).$$

Comme  $\hat{R}_1 = 1/\hat{\varepsilon} - 3/2$ , les facteurs  $1/\hat{R}_1$  sont beaucoup plus petits que 1 dans la limite où

$\hat{\varepsilon} \rightarrow 0$ . L'intégrale peut être développée en série de Taylor autour de  $\delta \equiv 1/\hat{R}_1 \rightarrow 0$  :

$$\frac{S_B^{mince}}{\pi (2n/e)^{4/3} \sqrt{2\hat{\varepsilon}\hat{R}_1^5}} = \int_0^1 y dy \sqrt{(1-y)} + \delta \frac{\partial}{\partial \delta} \left[ \int_{\hat{R}_0 \delta}^1 \frac{dy}{y^2} (y - \hat{R}_0 \delta) \sqrt{\left(y^3 + \frac{\delta^3}{2}\right) (1-y) (y - \hat{R}_2 \delta)} \right] \Bigg|_{\delta=0}.$$

Dans le deuxième terme, on doit utiliser la règle d'intégration de Leibniz pour dériver une intégrale dont les bornes sont fonction de la variable selon laquelle on dérive :

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_{a(z)}^{b(z)} f(x, z) dx = \int_{a(z)}^{b(z)} \frac{\partial f}{\partial z} dx + f(b(z), z) \frac{\partial b}{\partial z} - f(a(z), z) \frac{\partial a}{\partial z}. \quad (5.33)$$

Avec cette règle, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{S_B^{mince}}{\pi (2n/e)^{4/3} \sqrt{2\hat{\varepsilon}\hat{R}_1^5}} &= \frac{4}{15} + \delta \left[ \int_{\hat{R}_0 \delta}^1 \frac{dy}{y^2} \frac{\partial}{\partial \delta} (y - \hat{R}_0 \delta) \sqrt{\left(y^3 + \frac{\delta^3}{2}\right) (1-y) (y - \hat{R}_2 \delta)} \right] \Bigg|_{\delta=0} \\ &- \delta \left[ \frac{\partial (\hat{R}_0 \delta)}{\partial \delta} \left( \frac{(y - \hat{R}_0 \delta)}{y^2} \sqrt{\left(y^3 + \frac{\delta^3}{2}\right) (1-y) (y - \hat{R}_2 \delta)} \right) \right] \Bigg|_{y=\hat{R}_0 \delta} \Bigg|_{\delta=0} \\ &= \frac{4}{15} + \frac{1}{\hat{R}_1} \int_0^1 \frac{dy}{y^2} \sqrt{(1-y)} \left( -\hat{R}_0 y^2 - \frac{\hat{R}_2}{2} y^2 \right) \\ &= \frac{4}{15} - \frac{2\hat{R}_0 + \hat{R}_2}{3\hat{R}_1} \simeq \frac{4}{15} - \frac{\hat{\varepsilon}}{2} \\ S_B^{mince} &= \pi (2n/e)^{4/3} \sqrt{2\hat{\varepsilon}\hat{R}_1^5} \left( \frac{4}{15} - \frac{\hat{\varepsilon}}{2} \right) \\ &\simeq \frac{4\pi\sqrt{2}}{15\hat{\varepsilon}^2} \left( \frac{2n}{e} \right)^{4/3} \left( 1 - \frac{3\hat{\varepsilon}}{2} \right)^{5/2} \left( 1 - \frac{15\hat{\varepsilon}}{8} \right). \end{aligned}$$

En rétablissant  $\hat{\varepsilon} = (2n/e)^{2/3} \varepsilon$ , le résultat de l'action euclidienne du rebond dans la limite du mur mince et dans la limite de  $\varepsilon \rightarrow 0$  est alors :

$$S_B^{mince} = \frac{4\sqrt{2}\pi}{15\varepsilon^2} \left[ 1 - \frac{45}{8} \left( \frac{2n}{e} \right)^{2/3} \varepsilon \right]. \quad (5.34)$$

Le coefficient  $A$  dans

$$\Gamma^{mince} = A^{mince} e^{-S_B^{mince}}$$

peut être redéfini comme (voir [9], un second article par Coleman et Callan qui analyse ce coefficient) :

$$\Gamma^{mince} = A^{mince} \left( \frac{S_B^{mince}}{2\pi} \right)^{1/2} e^{-S_B^{mince}},$$

où, cette fois,  $A$  exclut l'intégration des modes ayant une valeur propre nulle.

### 5.3 Désintégration d'un faux vide sans vortex

Il faut à présent calculer le taux de désintégration d'un univers dans le faux vide à  $|\phi| = 1$  sans la présence de vortex. En prenant  $\phi$  réel (on écrira  $\phi = f$ ) et le champ de jauge non excité, la densité lagrangienne sera simplement :

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu f)^2 - V(f). \quad (5.35)$$

À part le potentiel spécifique à notre modèle et le facteur  $1/2$  manquant devant le terme  $(\partial_\mu f)^2$ , il s'agit du même problème que celui résolu par Coleman. Suivant sa méthode, le coefficient  $B$  que l'on cherche à calculer est l'action du « rebond », la solution des équations de mouvement euclidiennes avec les conditions aux frontières suivantes : à  $\tau \rightarrow -\infty$ , le champ se trouve dans le faux vide, il atteint l'équipotentielle de l'autre côté de la barrière de potentiel à  $\tau = 0$  et retourne au faux vide à  $\tau \rightarrow +\infty$ . On considère ensuite que le rebond n'est fonction que de  $\rho = \sqrt{\tau^2 + \mathbf{x}^2}$ , l'action euclidienne est

$$S_B^{vide} = 4\pi \int_0^\infty d\rho \rho^2 (f'^2 + V(f)), \quad (5.36)$$

et l'équation de mouvement euclidienne deviendra :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \nabla^2\right) f &= \frac{1}{2} \frac{dV}{df} = \left[ \frac{d\rho}{d\tau} \frac{d}{d\rho} \left( \frac{d\rho}{d\tau} \frac{d}{d\rho} \right) + \frac{d\rho}{dx_i} \frac{d}{d\rho} \left( \frac{d\rho}{dx_i} \frac{d}{d\rho} \right) \right] f \\
&= \left[ \frac{\tau}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \frac{\tau}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right) + \frac{x_i}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \frac{x_i}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right) \right] f \\
&= \left[ \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \frac{\tau^2}{\rho^3} \frac{d}{d\rho} + \frac{\tau^2}{\rho^2} \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \frac{|\vec{x}|^2}{\rho^3} \frac{d}{d\rho} + \frac{|\vec{x}|^2}{\rho^2} \frac{d^2}{d\rho^2} \right] f \\
&\Rightarrow f'' + \frac{2}{\rho} f' = \frac{1}{2} \frac{dV}{df}.
\end{aligned}$$

Il s'agit de la même équation trouvée par Coleman (voir équation (4.6)), mais ici en 2+1 dimensions. Celle-ci décrit le mouvement d'une particule à une position  $f$  en un temps  $\rho$  dans un potentiel  $-V$  avec un terme de friction dépendant du temps. Cette particule part du repos ( $f'(\rho) = 0$ ) à une position qui lui permettra d'atteindre  $f(\rho) \rightarrow 1$  lorsque  $\rho \rightarrow \infty$ , soit  $f(\rho = 0) \simeq 0$ . Tel que décrit dans Coleman, dans la limite d'une petite différence de densité d'énergie entre le faux vide et le vrai vide, lorsque  $\varepsilon \ll 1$ , le rebond aura un profil « mur mince », la transition entre  $f = 0$  et  $f = 1$  s'effectuant rapidement à  $\rho = R \gg 1$ . Le terme de friction est alors négligeable, tout comme  $\varepsilon$  dans le potentiel :

$$\begin{aligned}
f'' &\simeq \frac{1}{2} \frac{d}{df} \left( f^2 (f^2 - 1)^2 \right) \Rightarrow 2 \frac{df}{dr} \frac{d^2 f}{dr^2} = \frac{df}{dr} \frac{d}{df} \left( f^2 (f^2 - 1)^2 \right) \\
&\frac{d}{dr} \left( \left( \frac{df}{dr} \right)^2 \right) = \frac{d}{dr} \left( f^2 (f^2 - 1)^2 \right) \\
f'^2 &= f^2 (f^2 - 1)^2,
\end{aligned}$$

ce qui n'est pas tout à fait l'équation de mouvement d'un kink, puisque l'on utilise un potentiel qui demeure d'ordre six même lorsque  $\varepsilon = 0$ . Si la solution de cette équation est  $f_K(\rho)$ , l'action

s'écrit :

$$\begin{aligned}
S_B^{vide} &= 4\pi \int_0^\infty d\rho \rho^2 (f_K'^2 + V(f_K)) \\
&= 4\pi \int_0^R d\rho \rho^2 (-\varepsilon) + 4\pi \int_0^\infty d\rho \rho^2 f_K'^2 \\
&= -\frac{4}{3}\pi\varepsilon R^3 + 4\pi R^2 \int_0^1 d\rho \frac{df}{d\rho} f_K' \\
&= -\frac{4}{3}\pi\varepsilon R^3 + 4\pi R^2 \int_0^1 df f (f^2 - 1) = -\frac{4}{3}\pi\varepsilon R^3 + \pi R^2 .
\end{aligned}$$

Cette action est minimale à

$$R = \frac{1}{2\varepsilon}, \text{ où } S_B^{vide} = \frac{\pi}{12\varepsilon^2}. \quad (5.37)$$

Dans un grand volume  $\Omega$ , le taux de désintégration du faux vide par unité de temps est :

$$\Gamma^{mince} = A^{vide} \left( \frac{S_B^{vide}}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-S_B^{vac}},$$

où, comme pour le cas de la désintégration du vortex, le coefficient  $A$  a été redéfini pour qu'il exclue les modes de valeurs propres nulles.

Pour comparer au taux de désintégration des vortex, il faut tenir compte de la densité des vortex, qui dépend des détails du modèle cosmologique considéré. La présence des vortex peut influencer de deux façons différentes : d'abord, ils réduisent le volume disponible de faux vide ordinaire et d'autre part, ils peuvent eux-mêmes se dissocier.

Si l'on compare simplement  $S_B^{vide}$  et  $S_B^{mince}$  (calculé dans la limite du mur mince et dans la

limite de  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) :

$$S_B^{mince} = \frac{4\sqrt{2}\pi}{15\varepsilon^2} \left[ 1 - \frac{45}{8} \left( \frac{2n}{e} \right)^{2/3} \varepsilon \right] \simeq \frac{0.377\pi}{\varepsilon^2}$$

$$S_B^{vide} = \frac{\pi}{12\varepsilon^2} \simeq \frac{0.083\pi}{\varepsilon^2},$$

on voit que  $S_B^{mince} > S_B^{vide}$ , et donc il semble que les vortex entravent la désintégration plus qu'ils ne la catalysent. Si l'on néglige la contribution de la désintégration du faux vide ordinaire par rapport à la désintégration d'un gaz de vortex (ce qui est raisonnable s'il y a une densité assez grande de vortex), on peut comparer les deux taux calculés, pour un nombre  $N$  de vortex dans le volume  $\Omega$  :

$$\frac{\Gamma^{vide}}{N\Gamma^{mince}} = \frac{\Omega A^{vide} \left( \frac{S_B^{vide}}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-\frac{\pi}{12\varepsilon^2}}}{NA^{mince} \left( \frac{S_B^{mince}}{2\pi} \right)^{1/2} e^{-\frac{4\sqrt{2}\pi}{15\varepsilon^2}}}$$

$$= \frac{\Omega A^{vide}}{NA^{mince}} \frac{\sqrt{5}}{2^{1/4} 96 \varepsilon^2} e^{\left( \frac{4\sqrt{2}}{15} - \frac{1}{12} \right) \frac{\pi}{\varepsilon^2}},$$

bref :

$$\Gamma^{vide} \sim e^{\frac{0,294\pi}{\varepsilon^2}} \cdot \Gamma^{mince}.$$

Avec  $\varepsilon$  petit,  $\Gamma^{vide} \gg \Gamma^{mince}$  et les vortex ne semblent pas du tout catalyser la désintégration du faux vide. Ce résultat ne tient que pour de faibles valeurs du paramètre  $\varepsilon$  et il serait intéressant de pouvoir calculer  $S_B^{mince}$  dans une autre limite.

#### 5.4 Approximation du mur mince et limite de dissociation

Nous avons vu précédemment (section 5.2) que l'énergie  $E(R)$  pour un profil « mur mince » est donnée par :

$$E(R) = \frac{2\pi n^2}{e^2 R^2} - \pi \varepsilon R^2 + \pi R, \quad (5.38)$$

et que cette expression fournit une limite sur les paramètres du modèle. En effet si la condition

$$\varepsilon < \varepsilon_c = \frac{3}{2^{13/3}} \left(\frac{e}{n}\right)^{2/3} \simeq 0.1488 \left(\frac{e}{n}\right)^{2/3}, \quad (5.39)$$

n'est pas respectée, il n'y a plus de vortex classiquement stable : ce point critique où  $\varepsilon = \varepsilon_c$  est appelé la limite de dissociation. Pour  $\varepsilon > \varepsilon_c$ , les vortex vont simplement se dissocier, déclenchant la conversion du faux vide en vrai sans avoir à pénétrer une barrière de potentiel. Pour  $\varepsilon \lesssim \varepsilon_c$ , la barrière sera faible, on s'attend à ce qu'il soit plus facile de la traverser.

Dans cette limite, donc,  $R_0$  et  $R_1$  s'approchent d'une même valeur,  $R_c$ . Comme dans l'équation (5.27), on a vu que l'on pouvait écrire :

$$R^2 (E(R) - E_0) = \frac{2\pi n^2}{e^2} + \pi R^3 - \pi \varepsilon R^4 - E_0 R^2 = \pi \varepsilon (R - R_0)^2 (R_1 - R) (R - R_2).$$

Pour un  $R$  autour de  $R_c$ , on peut traiter le terme  $(R - R_2)$  comme une constante (nommons-la  $c$ ) et pour simplifier les calculs, utilisons la notation définie en (5.28) :

$$\hat{E}(\hat{R}) = \frac{1}{2\hat{R}^2} - \hat{\varepsilon}\hat{R}^2 + \hat{R} \simeq \hat{E}_0 + c (\hat{R} - \hat{R}_0)^2 (\hat{R}_1 - \hat{R}). \quad (5.40)$$

Paramétrisons la distance entre  $\varepsilon$  et le point de dissociation par  $\alpha$  :

$$\varepsilon = \varepsilon_c (1 - \alpha), \quad (5.41)$$

et écrivons :

$$\hat{R}_0 = \hat{R}_c (1 - \delta_0), \quad \hat{R}_1 = \hat{R}_c (1 + \delta_1), \quad \hat{E}_0 = \hat{E}_c (1 + \delta_2), \quad (5.42)$$

où  $\delta_0$ ,  $\delta_1$  et  $\delta_2$  tendent vers zéro lorsque  $\alpha$  tend vers zéro. En développant (5.40) autour de  $\hat{R} = \hat{R}_c$  et en comparant les puissances de  $\hat{R} - \hat{R}_c$  on trouve :

$$\delta_0 = \sqrt{\frac{\hat{\varepsilon}_c \hat{R}_c^4}{3}} \alpha, \quad \delta_1 = 2\sqrt{\frac{\hat{\varepsilon}_c \hat{R}_c^4}{3}} \alpha, \quad \delta_2 = \frac{\hat{\varepsilon}_c \hat{R}_c^2}{\hat{E}_c} \alpha, \quad c = \frac{2}{\hat{R}_c^5}.$$

À présent, avec :

$$\hat{R}^2 (\hat{E}(\hat{R}) - \hat{E}_0) = \frac{1}{2} - \hat{E}_0 \hat{R}^2 + \hat{R}^3 - \hat{\varepsilon} \hat{R}^4 \simeq c \hat{R}^2 (\hat{R} - \hat{R}_0)^2 (\hat{R}_1 - \hat{R}), \quad (5.43)$$

on peut remplacer dans l'expression de l'action euclidienne :

$$\begin{aligned} S_B^{mince} &= 2\pi \left(\frac{2n}{e}\right)^{4/3} \int_{\hat{R}_0}^{\hat{R}_1} \frac{d\hat{R}}{\hat{R}^2} \sqrt{\left(\frac{1}{4} + \frac{\hat{R}^3}{2}\right)} \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \hat{R}^3 - \hat{\varepsilon} \hat{R}^4 - \hat{E}_0 \hat{R}^2\right)} \\ &= 2\pi \left(\frac{2n}{e}\right)^{4/3} \int_{\hat{R}_0}^{\hat{R}_1} \frac{d\hat{R}}{\hat{R}} \sqrt{\left(\frac{1}{4} + \frac{\hat{R}^3}{2}\right)} \sqrt{c (\hat{R} - \hat{R}_0)^2 (\hat{R}_1 - \hat{R})}. \end{aligned}$$

Pour  $\alpha \rightarrow 0$ , la région d'intégration de  $\hat{R}_0$  à  $\hat{R}_1$  est petite et on peut faire l'approximation que  $\hat{R} \simeq \hat{R}_c$  à part dans les deux derniers facteurs dans l'intégrale :

$$\begin{aligned} S_B^{mince} &= 2\pi \sqrt{c} \left(\frac{2n}{e}\right)^{4/3} \int_{\hat{R}_0}^{\hat{R}_1} \frac{d\hat{R}}{\hat{R}} \sqrt{\left(\frac{1}{4} + \frac{\hat{R}^3}{2}\right)} \hat{R}_c \left(\frac{\hat{R}}{\hat{R}_c} - (1 - \delta_0)\right) \sqrt{\hat{R}_c \left((1 + \delta_1) - \frac{\hat{R}}{\hat{R}_c}\right)} \\ &= 2\pi \left(\frac{2n}{e}\right)^{4/3} \sqrt{\left(\frac{1}{4} + \frac{\hat{R}_c^3}{2}\right)} \sqrt{c \hat{R}_c} \int_{\hat{R}_0}^{\hat{R}_1} d\hat{R} \left(\frac{\hat{R}}{\hat{R}_c} - 1 + \delta_0\right) \sqrt{\left(1 + \delta_1 - \frac{\hat{R}}{\hat{R}_c}\right)}. \end{aligned}$$

On calcule l'intégrale avec le changement de variable  $\hat{R} = \hat{R}_c (1 + r)$  :

$$\begin{aligned} S_B^{mince} &= 2\pi \left(\frac{2n}{e}\right)^{4/3} \sqrt{\left(\frac{1}{4} + \frac{\hat{R}_c^3}{2}\right)} \sqrt{c \hat{R}_c^3} \int_{-\delta_0}^{\delta_1} dr (r + \delta_0) \sqrt{(\delta_1 - r)} \\ &= 2\pi \left(\frac{2n}{e}\right)^{4/3} \sqrt{\left(\frac{1}{4} + \frac{\hat{R}_c^3}{2}\right)} \sqrt{c \hat{R}_c^3} \frac{4}{15} (\delta_0 + \delta_1)^{5/2}. \end{aligned}$$

Pour trouver la valeur de  $\hat{R}_c$ , le point d'inflexion, il suffit de prendre la deuxième dérivée de  $\hat{E}(\hat{R})$  égal à zéro avec la valeur  $\hat{\varepsilon}_c = \frac{3}{2^{11/3}}$ . On peut également se servir de l'équation (5.30), qui donnait l'un des trois extrema de  $\hat{R}^2/\varepsilon (\hat{E}(\hat{R}) - \hat{E}_0)$ . Au point de dissociation, deux des racines se réunissent en une seule ; cela se produit lorsque

$$9 - 32\hat{\varepsilon}_c \hat{E}_c = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{E}_c = \frac{9}{32\hat{\varepsilon}_c} \quad \text{et alors} \quad \hat{R}_c = \frac{3}{8\hat{\varepsilon}_c}. \quad (5.44)$$

On connaît déjà la valeur de  $\hat{\varepsilon}_c$ , trouvée en posant le discriminant de la dérivée de  $\hat{E}(\hat{R})$  égale à

zéro. On pourrait retrouver sa valeur en remplaçant (5.44) dans (5.29). Bref on trouve :

$$\hat{E}_c = \frac{3}{2^{4/3}} \quad \text{et} \quad \hat{R}_c = 2^{2/3}. \quad (5.45)$$

Ainsi, en substituant les valeurs trouvées précédemment pour  $\delta_0$ ,  $\delta_1$  et pour  $\hat{R}_c$ , l'action euclidienne du rebond peut s'écrire :

$$S_B^{mince} = 2\pi \left( \frac{2n}{e} \right)^{4/3} \frac{2^{-5/12} 3^{5/2}}{5} \alpha^{5/4}, \quad (5.46)$$

dans la limite de dissociation, où  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_c$ . C'est-à-dire que, dans la limite où  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $S^{vortex} \rightarrow 0$ .

On peut à présent comparer (5.46) et (5.37) :

$$\Gamma^{vide} \sim e^{(S^{mince} - S^{vide})}. \Gamma^{mince} \simeq e^{-\frac{\pi}{12\varepsilon^2} + 0}. \Gamma^{mince},$$

donc, dans la limite de dissociation,  $\Gamma^{vide} < \Gamma^{mince}$  et les vortex catalysent la désintégration du faux vide contrairement à la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

## 5.5 Calculs numériques de l'action euclidienne dans l'approximation du mur mince

Il a été possible, grâce à des approximations, de calculer une forme analytique pour l'action euclidienne du rebond pour la désintégration des vortex et celle du vide. Il serait utile de calculer numériquement l'intégrale de cette action sans passer par des approximations et de comparer.

Pour la désintégration du vortex dans l'approximation d'une séparation mince entre les deux vides, il faut calculer l'intégrale suivante :

$$S_B^{mince} = 2 \int_{R_0}^{R_1} dR \sqrt{\left( \frac{\pi n^2}{e^2 R^2} + \frac{\pi R}{2} \right) \left( \frac{2\pi n^2}{e^2 R^2} + \pi R - \pi \varepsilon R^2 - E_0 \right)}. \quad (5.47)$$

L'intégrale est calculée dans Matlab avec une méthode discrétisant la région d'intégration en trapèzes. Quant à  $E_0$ , sa valeur sera trouvée de façon numérique également avec Matlab. Le résultat est présenté dans la figure 5.5 pour certaines valeurs des paramètres.

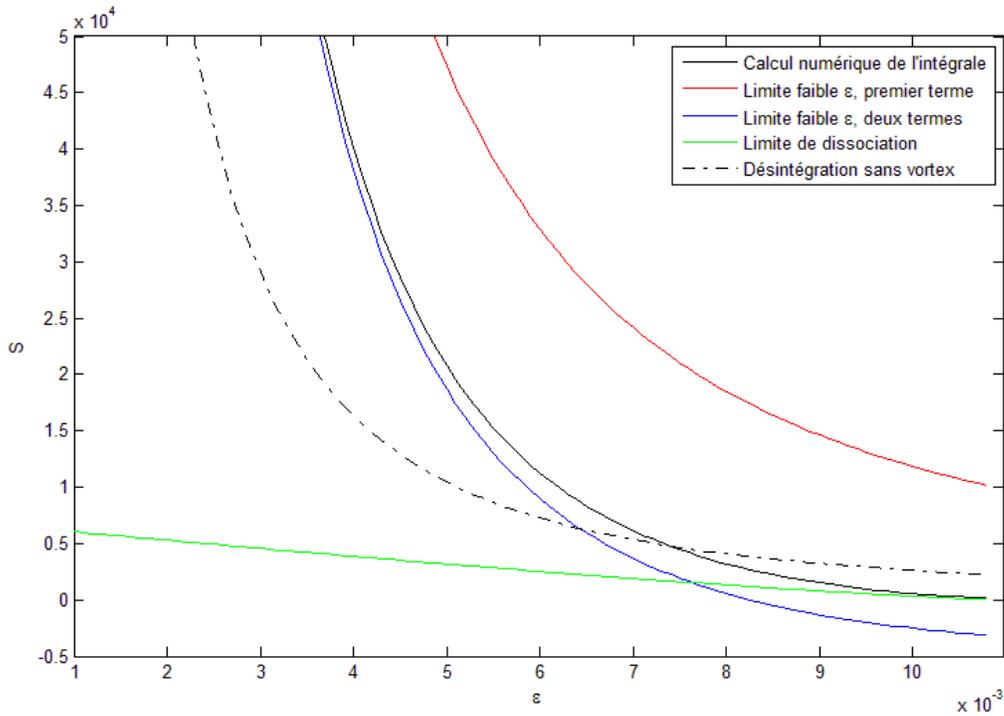


Figure 5.5 – Ce graphique présente l’action euclidienne (5.47) calculée numériquement en fonction du paramètre  $\varepsilon$  et comparée aux approximations (5.34) et (5.46) ainsi qu’à l’action euclidienne correspondant à la désintégration du faux vide sans la présence de vortex (5.37). Ici,  $n = 50$  et  $e = 1$ . Dans ce cas,  $\varepsilon_c = 0.01097$ .

On constate d’abord la validité des approximations. En effet, dans la limite d’une faible différence de densité d’énergie entre les vides,  $\varepsilon \rightarrow 0$ , l’expression (5.34) et le résultat du calcul numérique s’approchent à mesure que le paramètre  $\varepsilon$  diminue. Notons que la correction dans l’approximation, le deuxième terme, est nécessaire pour avoir une bonne approximation. Pour ce qui est de la limite de dissociation, l’expression (5.46) est une très bonne approximation lorsque  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_c$ .

Sur ce même graphique, on peut comparer l’action euclidienne pour la désintégration d’un vortex (avec mur mince) et celle de la désintégration du faux vide. On constate que la différence entre les deux actions dépendra grandement du paramètre  $\varepsilon$ . Dans la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $S_B^{mince} > S_B^{vide}$ , alors que dans la limite de dissociation c’est le contraire.

## CHAPITRE 6

### ÉNERGIE DES VORTEX

Les équations de Ginzburg-Landau ([16]), décrivant la supraconductivité, admettent des solutions localisées de type vortex ([1]). Il a été ensuite observé que des vortex, avec essentiellement la même structure, apparaissent comme des solutions du modèle abélien de Higgs ([26]), décrivant l'interaction entre un champ de matière avec un champ de jauge abélien, le potentiel électromagnétique dans la théorie de Ginzburg-Landau. La fonctionnelle de l'énergie ainsi que les équations des champs sont mathématiquement identiques à celles de la théorie de Ginzburg-Landau.

Par analogie à la théorie de la supraconductivité de Ginzburg-Landau, le modèle abélien de Higgs présente deux régimes, Type I et Type II, selon la tendance des vortex à s'attirer ou à se repousser. Cette tendance s'affiche si l'on calcule l'énergie d'un vortex en fonction de son nombre d'enroulement. En effet, si l'on trouve que l'énergie d'un  $n$ -vortex est plus faible que l'énergie de  $n$  1-vortex, alors il est favorable énergétiquement de produire un  $n$ -vortex, et alors les vortex de nombre d'enroulement plus faible auront tendance à s'attirer. Dans le cas contraire, si l'énergie d'un  $n$ -vortex est plus grande que l'énergie de  $n$  1-vortex, alors ceux-ci se repousseront.

Dans leur article de 1979 ([20]), L. Jacobs et C. Rebbi ont déjà montré numériquement que cet effet est observé dans un modèle abélien de Higgs avec un potentiel quartique. Ils ont trouvé que le passage d'un régime Type I à un régime Type II s'effectue à une valeur critique de la constante de couplage pour laquelle la limite inférieure de l'énergie de Bogomolny est saturée. Cette limite est appelée limite « BPS » pour Bogomolny-Prasad-Sommerfield (voir [4] et [29]). En terme d'énergie des vortex en fonction de  $n$ , ce cas particulier correspond à  $E(n) = nE(n = 1)$ .

Il serait intéressant d'étudier si un comportement semblable se présente pour un potentiel différent (non-BPS) dans un modèle abélien de Higgs.

Le comportement de l'énergie en fonction de  $n$  pour un cas autre que le potentiel BPS est très peu étudié. En 2008, S.Bolognesi et S.B.Gudnason ([7]) ont étudié un modèle de Chern-Simons en utilisant un potentiel non-BPS et ont trouvé un comportement de l'énergie surprenant. L'analyse de Bolognesi sera appliquée sur le modèle abélien Higgs avec un potentiel non-BPS.

Dans [21] , [25] et [32], une autre étude sur l'énergie des défauts topologiques a été menée sur un modèle  $SO(5)$  de supraconductivité faisant apparaître des vortex.

En résumé, dans ce chapitre, le modèle de Chern-Simons étudié par S. Bolognesi et S. B. Gudnason sera présenté dans la section 6.1. Ensuite, à la section 6.2, selon la démarche de [14], la factorisation de Bogomolny sera appliquée au modèle abélien Higgs et à celui de Chern-simons pour étudier le cas BPS. À la section 6.3, l'approximation pour un nombre d'enroulement élevé discutée à la section 5.2 permettra de trouver la dépendance de l'énergie en fonction de  $n$  pour le modèle abélien Higgs avec deux types de potentiels (des polynômes d'ordre quatre et six). Cette même approximation sera appliquée au modèle de Chern-Simons dans la section 6.4 tel qu'il est décrit dans [7] pour des potentiels BPS et non-BPS. Un résumé des comportements de  $E(n)$  selon le modèle et le potentiel sera présenté à la section 6.5. Enfin, à la section 6.6, le calcul numérique de l'énergie (accompli à partir des solutions numériques) sera comparé aux diverses approximations présentées pour les deux modèles. Les résultats seront rassemblés dans la dernière section 6.7.

## 6.1 Modèle de Chern-Simons

Il est possible d'ajouter au modèle abélien de Higgs un terme de Chern-Simons :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{4}\kappa\epsilon^{\mu\nu\rho}A_{\mu}F_{\nu\rho} + (D_{\mu}\phi)^*(D^{\mu}\phi) - V(\phi^*\phi) . \quad (6.1)$$

Selon [13], [22] et [27], il est possible de trouver des solutions sous forme de vortex mais celles-ci sont très compliquées. Ces solutions sont également différentes des vortex du modèle abélien de Higgs, car les vortex possèdent une charge électrique en plus d'un flux magnétique.

En 1990, R.Jackiw et Erick J. Weinberg ([19]) et J. Hong, Y. Kim et P.Y. Pac ([18]) publient

deux articles étudiant le modèle de Chern-Simons-Higgs sans le terme de Maxwell (théorie de Chern-Simons « pure ») :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} \kappa \varepsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu F_{\nu\rho} + (D_\mu \phi)^* (D^\mu \phi) - V(\phi^* \phi) . \quad (6.2)$$

Selon eux, il est possible de négliger le terme de Maxwell devant celui de Chern-Simons étant donné qu'il est négligeable dans la région éloignée (ou, de façon équivalente, dans la limite d'un grand coefficient de Chern-Simons). Ils montrent que des solutions sous forme de vortex existent aussi dans un tel modèle.

En 1995, K. Arthur ([2]) présente le calcul numérique de l'énergie de ces vortex et obtient des résultats analogues à ceux de Jacobs et Rebbi pour un modèle abélien de Higgs. Avec un potentiel d'ordre six, il trouve lui aussi deux régimes, Type I et II, dont la frontière se situe à des constantes de couplages saturant la limite de Bogomolny. Dans [7], Bolognesi étend cette analyse à un potentiel non-BPS.

## 6.2 Factorisation de Bogomolny

Pour les deux différents modèles, étudions comment il est possible de réduire les équations de mouvement de second ordre à des équations différentielles partielles de premier ordre par la factorisation de Bogomolny et pour quelles constantes de couplage cela est-il possible (voir référence [14]).

### 6.2.1 Modèle abélien de Higgs

À partir de l'expression de l'énergie statique du vortex du modèle abélien de Higgs :

$$E[A_u, \phi] = \int d^2x \left[ \frac{1}{4} F_{ij} F_{ij} + (D_i \phi)^* (D_i \phi) + V(\phi^* \phi) \right] , \quad (6.3)$$

On peut réécrire le premier terme  $\frac{1}{4} F_{ij} F_{ij} = \frac{1}{2} F_{12}^2$ , où le champ magnétique  $F_{12} = B$ . En choisissant le potentiel comme un polynôme d'ordre quatre de la forme :

$$V(\phi^* \phi) = \lambda (|\phi|^2 - 1)^2 ,$$

l'énergie devient :

$$E = \int d^2x \left[ \frac{1}{2} B^2 + (D_i \phi)^* (D_i \phi) + \lambda (|\phi|^2 - 1)^2 \right]. \quad (6.4)$$

En utilisant (voir [14])

$$|\vec{D}\phi|^2 = (D_i \phi)^* (D_i \phi) = |(D_1 \pm iD_2)\phi|^2 \mp eB|\phi|^2 \pm \varepsilon^{ij} \partial_i J_j, \quad (6.5)$$

où  $J_j = \frac{1}{2i} [\phi^* D_j \phi - \phi (D_j \phi)^*]$ , l'énergie peut être réécrite de la façon suivante :

$$\begin{aligned} E &= \int d^2x \left[ \frac{1}{2} (B \mp e(|\phi|^2 - 1))^2 + |(D_1 \pm iD_2)\phi|^2 + \left( \lambda - \frac{e^2}{2} \right) (|\phi|^2 - 1)^2 \pm \varepsilon^{ij} \partial_i J_j \mp eB \right] \\ &= \int d^2x \left[ \frac{1}{2} (B \mp e(|\phi|^2 - 1))^2 + |(D_1 \pm iD_2)\phi|^2 + \left( \lambda - \frac{e^2}{2} \right) (|\phi|^2 - 1)^2 \right] \\ &\quad \pm \int d^2x [\varepsilon^{ij} \partial_i J_j] \mp e \int d^2x [B]. \end{aligned}$$

Le deuxième terme est un terme de surface et le troisième donne le flux magnétique :  $e \int d^2x [B] = 2\pi n = \Phi$ .

$$E = \int d^2x \left[ \frac{1}{2} (B \mp e(|\phi|^2 - 1))^2 + |(D_1 \pm iD_2)\phi|^2 + \left( \lambda - \frac{e^2}{2} \right) (|\phi|^2 - 1)^2 \right] \mp \Phi.$$

Ainsi, il y a une limite inférieure à l'énergie :

$$E \geq |\Phi|. \quad (6.6)$$

Cette limite est atteinte lorsque :

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{e^2}{2} \\ 0 &= (D_1 \pm iD_2)\phi \\ B &= \pm e(|\phi|^2 - 1). \end{aligned}$$

La première condition implique que les masses,  $m_\gamma = \sqrt{2}e$  et  $m_\phi = 2\sqrt{\lambda} = 2\sqrt{e^2/2}$  sont égales et les deux autres conditions sont les nouvelles équations de mouvement de premier ordre (les

équations de Bogomolny). Lorsqu'appliqué dans le modèle de Ginzburg-Landau de la supraconductivité, ce point critique correspond à la frontière entre la supraconductivité de type I et de type II.

### 6.2.2 Modèle de Chern-Simons

De la même façon (voir [14]), on peut réarranger les termes de l'énergie d'un vortex dans un modèle où le terme de Maxwell est remplacé par un terme de Chern-Simons (voir le Lagrangien (6.2)) pour une forme particulière du potentiel. L'énergie associée à un tel Lagrangien est :

$$E = \int d^2x \left[ |D_0\phi|^2 + |\vec{D}\phi|^2 + V(|\phi|) \right]. \quad (6.7)$$

Les équations de mouvement sont :

$$\begin{aligned} D_\mu D^\mu \phi + \frac{\partial V(|\phi|)}{\partial \phi^*} &= 0 \\ \frac{\kappa}{2} \varepsilon^{\mu\nu\sigma} F_{\mu\nu} + ie [\phi^* D^\sigma \phi - \phi (D^\sigma \phi)^*] &= 0. \end{aligned}$$

La composante  $\sigma = 0$  de la deuxième équation de mouvement est la loi de Gauss :

$$\kappa F_{12} = \kappa B = -ie [\phi^* D_0 \phi - \phi (D_0 \phi)^*]. \quad (6.8)$$

En se servant de cette équation et, comme précédemment, en utilisant (6.5), réécrite comme :

$$\begin{aligned} E &= \int d^2x \left[ \left| D_0 \phi \pm \frac{ie^2}{\kappa} (|\phi|^2 - 1) \phi \right|^2 + |(D_1 \pm iD_2)\phi|^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{e^4}{\kappa^2} |\phi|^2 (|\phi|^2 - 1)^2 + V(|\phi|) \pm \varepsilon^{ij} \partial_i J_j \mp eB \right] \\ &= \int d^2x \left[ \left| D_0 \phi \pm \frac{ie^2}{\kappa} (|\phi|^2 - 1) \phi \right|^2 + |(D_1 \pm iD_2)\phi|^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{e^4}{\kappa^2} |\phi|^2 (|\phi|^2 - 1)^2 + V(|\phi|) \right] \mp e \int d^2x [B]. \end{aligned}$$

Et donc on a encore une limite inférieure à l'énergie :

$$E \geq |\Phi|. \quad (6.9)$$

Cette limite est atteinte lorsque :

$$\begin{aligned} V &= \frac{e^4}{\kappa^2} |\phi|^2 (|\phi|^2 - 1)^2 \\ 0 &= (D_1 \pm iD_2)\phi \\ D_0\phi &= \mp \frac{ie^2}{\kappa} (|\phi|^2 - 1)\phi. \end{aligned}$$

En réutilisant la loi de Gauss, on peut réécrire :

$$\begin{aligned} 0 &= (D_1 \pm iD_2)\phi \\ B &= \mp \frac{2e^3}{\kappa^2} |\phi|^2 (|\phi|^2 - 1). \end{aligned}$$

Ces deux conditions sont les nouvelles équations de mouvement de premier ordre (les équations de Bogomolny). La première des trois conditions implique que le potentiel doit être choisi comme un polynôme d'ordre six avec 3 minima dégénérés, ce qui diffère du modèle abélien de Higgs. Avec ce potentiel, les masses des deux champs sont égales :  $m_\phi = m_\gamma = \frac{2e^2 v^2}{\kappa}$ .

### 6.3 Approximation du mur mince dans un modèle abélien de Higgs

Retournons au modèle abélien de Higgs avec le lagrangien

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (D_\mu \phi)^* (D^\mu \phi) - V(\phi^* \phi). \quad (6.10)$$

À la section 5.2, une expression analytique de l'énergie du vortex a été trouvée pour de grandes valeurs du nombre d'enroulement avec une configuration pour  $f(r)$  et  $a(r)$  donnée par l'équation (5.14). En fonction de  $R$ , la position de la mince paroi séparant le vrai vide du faux vide, l'énergie trouvée était :

$$E(R) = \frac{2\pi n^2}{e^2 R^2} + \pi V(f=0) R^2 + 4\pi R \int_0^1 df \left[ \sqrt{V(f)} \right]. \quad (6.11)$$

Pour minimiser cette fonction, il faut trouver les racines du polynôme suivant :

$$0 = -\frac{4\pi n^2}{e^2} + 2\pi V(f=0)R_0^4 + 4\pi \int_0^1 df \left[ \sqrt{V(f)} \right] R_0^3 .$$

Trouver la valeur exacte de  $R_0$  implique de résoudre exactement cette équation polynomiale d'ordre quatre.

### 6.3.1 Potentiel d'ordre quatre

Pour le potentiel d'ordre quatre général, qui est « BPS » à une constante multiplicative près, on a :

$$V(\phi^*\phi) = \alpha \frac{e^2}{2} (|\phi|^2 - 1)^2 , \quad (6.12)$$

en appliquant la démarche de la section 5.2 :

$$\begin{aligned} V(f=0) &= \frac{\alpha e^2}{2} \\ \int_0^1 df \sqrt{V(f)} &= \frac{\sqrt{2\alpha}e}{3} \\ E(R) &= \frac{2\pi n^2}{e^2 R^2} + \frac{\pi \alpha e^2}{2} R^2 + \frac{4\sqrt{2\alpha}\pi e}{3} R \\ 0 &= -\frac{4\pi n^2}{e^2} + \pi \alpha e^2 R_{min}^4 + \frac{4\sqrt{2\alpha}\pi e}{3} R_{min}^3 . \end{aligned} \quad (6.13)$$

Il est difficile dans ce cas de résoudre l'équation quartique et de voir quel est le comportement de l'énergie en fonction du nombre d'enroulement. Selon les masses,  $m_\gamma = \sqrt{2\alpha}e$  et  $m_\phi = \sqrt{2}e$ , nous devrions trouver un comportement de type I si  $\alpha < 1$ , et de type II si  $\alpha > 1$ .

Il est justifié de se demander si l'approximation du mur mince s'applique au cas d'un potentiel comme (6.12). Dans le cas du polynôme d'ordre six, nous avons vu à la section 5.2, et plus précisément à la figure 5.3a, que la configuration (5.14) avec une valeur de  $R$  minimisant l'énergie (5.19) donne un profil pour  $f(r)$  et  $a(r)$  très près des solutions numériques (dans ce cas pour  $n = 50$ ). La figure 6.1 indique que l'approximation du mur mince semble moins bonne pour le potentiel (6.12). Les solutions numériques sont en effet plus loin des approximations que dans

le cas non-BPS et l'énergie calculée en minimisant (6.13) est plus faible que la valeur trouvée par l'intégration numérique des solutions. Pourtant, dans une série de trois articles ([5], [6] et [15]), S. Bolognesi et S. B. Gudnason utilisent également cette approximation pour décrire des vortex dans un modèle abélien de Higgs avec un potentiel identique à (6.12) à quelques facteurs multiplicatifs près.

Par ailleurs, en s'inspirant de cette série d'article, négligeons le dernier terme de (6.13) pour trouver un minimum approximatif, un régime qualifié de « MIT bag » par Bolognesi :

$$E(R) \simeq \frac{2\pi n^2}{e^2 R^2} + \frac{\pi\alpha e^2}{2} R^2 \quad \Rightarrow \quad R_{min} = \frac{1}{e} \sqrt{\frac{2n}{\alpha^{1/2}}}.$$

En remplaçant  $R_{min}$  dans (6.13), on obtient :

$$E_{min} = 2\pi\sqrt{\alpha}n + \frac{8}{3}\pi\alpha^{1/4}\sqrt{n}.$$

Dans la limite où le dernier terme est négligeable, c'est-à-dire si la condition sur  $n$  est plus précisément

$$n \gg \frac{16}{9} \frac{1}{\sqrt{\alpha}}, \quad (6.14)$$

est respectée, l'énergie est :

$$E_{min} = 2\pi\sqrt{\alpha}n. \quad (6.15)$$

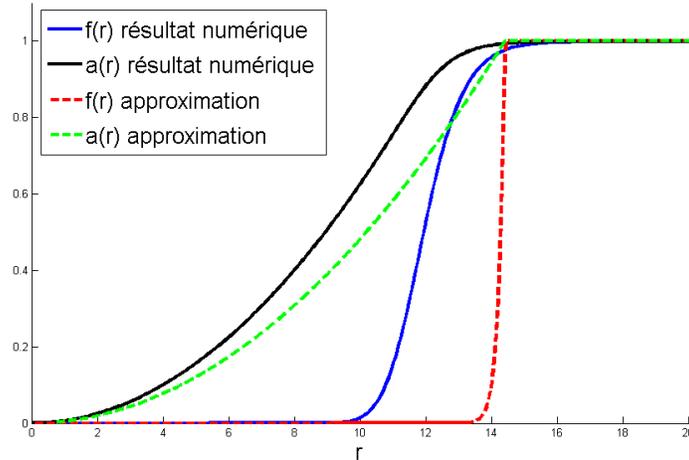
Ainsi, l'énergie est toujours asymptotiquement proportionnelle au nombre d'enroulement. Elle ne l'est exactement que lorsque  $\alpha = 1$  pour toutes les valeurs de  $n$ .

De façon surprenante, la valeur de  $e$  n'affecte pas la valeur de l'énergie minimisée pour un  $n$  donné. En effet, on peut redéfinir  $eR_{min} = \hat{R}_{min}$  :

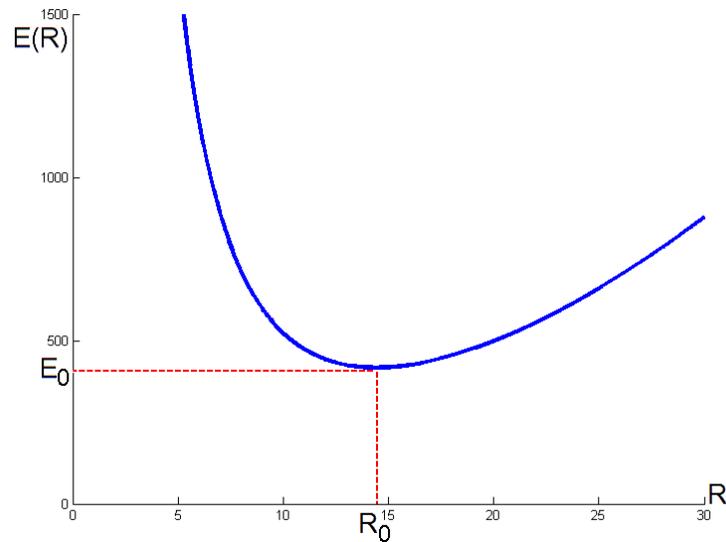
$$E_{min} = \frac{2\pi n^2}{\hat{R}_{min}^2} + \frac{\pi\alpha}{2} \hat{R}_{min}^2 + \frac{4\sqrt{2\alpha}\pi}{3} \hat{R}_{min}.$$

On trouvera une solution pour  $\hat{E}_{min}$  qui ne dépendra que de  $n$  et de  $\alpha$ , mais plus de  $e$ .

Solution numérique et approximation avec  $n=80$ ,  $e=1$ ,  $\alpha=0.5$ .



(a) Comparaison entre la solution numérique pour  $f(r)$  et  $a(r)$  avec  $n = 80$ ,  $e = 1$  et  $\alpha = 0.5$  et la configuration (5.14) avec  $R = R_0 = 14.4$ , le rayon minimisant l'énergie (6.13).



(b) L'énergie  $E(R)$  avec  $n = 80$ ,  $e = 1$  et  $\alpha = 0.5$  donnée par (6.13). Le minimum local trouvé est  $E_0 = 417.1$  alors que l'on trouve une énergie de 502.7 à partir des solutions numériques.

Figure 6.1

### 6.3.2 Potentiel d'ordre six

Pour un potentiel d'ordre six (qui n'a pas la forme « BPS ») :

$$V(\phi^* \phi) = (|\phi|^2 - \varepsilon)(|\phi|^2 - 1^2)^2 = (f^2 - \varepsilon)(f^2 - 1^2)^2, \quad (6.16)$$

il a été trouvé, à la section 5.2, dans la limite où  $\varepsilon \rightarrow 0$  :

$$E(R) = \frac{2\pi n^2}{e^2 R^2} - \pi \varepsilon R^2 + \pi R .$$

En négligeant le deuxième terme, on peut trouver une expression analytique pour  $R_{min}$  :

$$R_{min} = \left( \frac{2n}{e} \right)^{2/3} ,$$

$$E_{min} = \frac{3\pi}{2} \left( \frac{2n}{e} \right)^{2/3} . \quad (6.17)$$

Pour de grandes valeurs de  $n$  et un  $\varepsilon \rightarrow 0$ , le comportement de l'énergie en fonction de  $n$  est toujours de type I :  $E_{min} = \frac{3\pi}{2} (2n/e)^{2/3} < \frac{3\pi}{2} (2/e)^{2/3} n$  pour  $n > 1$ . Il est donc plus favorable énergétiquement de former un vortex avec un grand nombre d'enroulement plutôt que plusieurs vortex de  $n = 1$  : les vortex s'attirent.

#### 6.4 Approximation du mur mince dans un modèle avec terme de Chern-Simons

Avec une approximation semblable à celle du modèle abélien Higgs (équation (5.14)), l'article [7] utilise une configuration pour  $f(r)$  et  $a(r)$  en fonction de  $R$ , la position de la paroi séparant les vides, qui est beaucoup plus grande que son épaisseur dans la limite  $n \rightarrow \infty$  :

$$f(r) = \begin{cases} 0 & , \quad r < R - \frac{\delta}{2} \\ \simeq 1 & , \quad R - \frac{\delta}{2} < r < R + \frac{\delta}{2} \\ 1 & , \quad r > R + \frac{\delta}{2} \end{cases} \quad (6.18)$$

$$a(r) = \begin{cases} \left( \frac{r}{R} \right)^{2n+2} & , \quad r < R - \frac{\delta}{2} \\ 1 & , \quad r > R + \frac{\delta}{2} . \end{cases}$$

Pour ce modèle, l'énergie d'une solution statique est donnée par :

$$E = 2\pi \int_0^\infty dr r \left[ \frac{n^2 \kappa^2 a'^2}{4e^4 r^2 f^2} + f'^2 + \frac{n^2}{r^2} (1-a)^2 f^2 + V(f^2) \right] . \quad (6.19)$$

La contribution de la région intérieure est :

$$\begin{aligned}
E_{int} &= 2\pi \int_0^{R-\delta/2} dr r \left[ \frac{n^2 \kappa^2 a'^2}{4e^4 r^2 f^2} + f'^2 + \frac{n^2}{r^2} (1-a)^2 f^2 + V \right] \\
&= \frac{\pi \kappa n^2}{e^2 R} + 2\pi (V(f=0)) \int_0^{R-\delta/2} dr r = \frac{\pi \kappa n^2}{e^2 R} + \pi (V(f=0)) (R-\delta/2)^2 \\
&\simeq \frac{\pi \kappa n^2}{e^2 R} + \pi V(f=0) R^2 .
\end{aligned}$$

De la même façon qu'à l'équation (5.16), dans la région du mur, l'une des équations de mouvement peut être approximée comme  $0 \simeq f'' - \frac{1}{2} \frac{dV}{df}$  puisque  $r \gg 1$  dans cette région. Ainsi,  $f'^2 = V(f)$ , et la contribution de la région du mur mince est donc :

$$E_{mur} = 2\pi \int_{R-\delta/2}^{R+\delta/2} dr r [f'^2 + V(f)] = 4\pi R \int_{R-\delta/2}^{R+\delta/2} dr [f' \sqrt{V(f)}] = 4\pi R \int_0^1 df [\sqrt{V(f)}] .$$

Finalement, pour la région extérieure, comme  $f(r) = a(r) = 1$  :

$$E_{ext} = 2\pi \int_{R+\delta/2}^{\infty} dr r [V(f=1)] .$$

En choisissant un potentiel de telle sorte que l'on ait  $V(f=1) = 0$ ,  $E_{ext} = 0$ . On a donc :

$$E(R) = \frac{\pi \kappa n^2}{e^2 R} + \pi V(f=0) R^2 + 4\pi R \int_0^1 df [\sqrt{V(f)}] . \quad (6.20)$$

C'est la même forme que pour le modèle abélien de Higgs mis à part le premier terme  $\sim 1/R$  au lieu de  $\sim 1/R^2$ . Pour minimiser cette fonction, il faut résoudre une équation cubique et non plus quartique :

$$0 = -\frac{\pi \kappa n^2}{e^2} + 2\pi V(f=0) R_{min}^3 + 4\pi \int_0^1 df [\sqrt{V(f)}] R_{min}^2 .$$

### 6.4.1 Potentiel d'ordre six « BPS »

Dans le cas d'un potentiel « BPS »  $V = \frac{e^4}{\kappa^2} |\phi|^2 (|\phi|^2 - 1)^2$ ,

$$\begin{aligned} V(f=0) &= 0 \\ \int_0^1 df \left[ \sqrt{V(f)} \right] &= \frac{e^2}{4\kappa} \\ E(R) &= \frac{\pi\kappa n^2}{e^2 R} + \frac{\pi e^2 R}{\kappa} \\ 0 &= -\frac{\pi\kappa n^2}{e^2} + \frac{\pi e^2 R_{min}^2}{\kappa} . \end{aligned}$$

La solution est :

$$R_{min} = \frac{n\kappa}{e^2} \quad E_{min} = 2\pi n , \quad (6.21)$$

ce qui est exactement la limite inférieure à l'énergie trouvée précédemment (voir équation (6.9)).

### 6.4.2 Potentiel d'ordre six général

Pour observer le comportement de l'énergie en fonction de  $n$  si le potentiel n'a pas la forme « BPS » habituelle, Bolognesi propose ce potentiel :

$$V(|\phi|) = \frac{\alpha e^4}{\kappa^2} (|\phi|^2 - 1)^2 [|\phi|^2 - \beta (|\phi|^2 - 1)] . \quad (6.22)$$

Dans le cas  $\beta = 0$ , on retombe sur un potentiel « BPS » à une constante près ( $\alpha$ ), qui, lorsqu'on la fait varier, devrait faire passer d'un type I à un type II. Ainsi, pour  $\beta = 0$  et  $\alpha = 1$ , il s'agit d'un potentiel « BPS ». Avec ce potentiel, les masses sont :

$$m_\phi = \sqrt{\alpha} m \quad , \quad m_\gamma = m \quad , \quad \text{où} \quad m = \frac{2e^2 v^2}{\kappa} . \quad (6.23)$$

Pour le reste des calculs numériques qui suivront,  $m$  sera fixé à la valeur  $m = 2$ , avec  $e = \kappa = v = 1$ .

Pour  $\beta = 0$ , l'approximation d'un mur mince donne :

$$\begin{aligned}
V(f=0) &= 0 \\
\int_0^1 df \left[ \sqrt{V(f)} \right] &= \frac{\sqrt{\alpha} e^2}{4\kappa} \\
E(R) &= \frac{\pi \kappa n^2}{e^2 R} + \frac{\pi \sqrt{\alpha} e^2 R}{\kappa} \\
0 &= -\frac{\pi \kappa n^2}{e^2} + \frac{\pi \sqrt{\alpha} e^2 R_{min}^2}{\kappa} .
\end{aligned}$$

La solution est :

$$R_{min} = \frac{n\kappa}{\alpha^{1/4} e^2} \quad E_{min} = 2\pi n \alpha^{1/4} . \quad (6.24)$$

L'énergie varie linéairement en fonction de  $n$ . Ainsi, pour  $\alpha < 1$ ,  $E_{min} = 2\pi n \alpha^{1/4} < 2\pi n$  et pour  $\alpha > 1$ ,  $E_{min} = 2\pi n \alpha^{1/4} > 2\pi n$ . Selon la valeur de  $\alpha$ , les vortex s'attireront ( $\alpha < 1$ , type I) ou se repousseront ( $\alpha > 1$ , type II).

Pour  $\beta \neq 0$ , l'approximation d'un mur mince donne :

$$\begin{aligned}
V(f=0) &= \frac{\alpha \beta e^4}{\kappa^2} \\
\int_0^1 df \left[ \sqrt{V(f)} \right] &\equiv \frac{1}{2} T_W(\alpha, \beta) \\
E(R) &= \frac{\pi \kappa n^2}{e^2 R} + \frac{\alpha \beta e^4 \pi R^2}{\kappa^2} + 2\pi T_W(\alpha, \beta) R \\
0 &= -\frac{\pi \kappa n^2}{e^2} + \frac{2\alpha \beta e^4 \pi R_{min}^3}{\kappa^2} + 2\pi T_W(\alpha, \beta) R_{min}^2 .
\end{aligned}$$

Dans la limite d'une grande valeur de  $n$ , supposons que  $R$  est grand et que l'on peut négliger le dernier terme de  $E(R)$  qui est  $\sim R$  par rapport aux deux autres termes,  $\sim n^2/R$  et  $\sim R^2$  :

$$0 \simeq -\frac{\pi \kappa n^2}{e^2} + \frac{2\alpha \beta e^4 \pi R_{min}^3}{\kappa^2} .$$

La solution est :

$$R_{min} = \frac{\kappa}{e^2} \sqrt[3]{\frac{n^2}{2\alpha\beta}} \quad E_{min} = 3\pi \sqrt[3]{\frac{\alpha\beta n^4}{4}}. \quad (6.25)$$

Pour commencer, vérifions si l'approximation est bonne : comme on trouve que  $R_{min} \sim n^{2/3}$ , alors dans  $E(R)$ , le premier et le deuxième terme vont comme  $n^{4/3}$  (ou comme  $R^2$ ) et le dernier comme  $n^{2/3}$  (ou comme  $R$ ) ; alors l'approximation est justifiée dans la limite où  $n$  est grand et seulement lorsque  $\beta \neq 0$ .

Ici, pour de grandes valeurs de  $n$ , le comportement de l'énergie en fonction de  $n$  est toujours de type II :  $E_{min} = 3\pi \sqrt[3]{\frac{\alpha\beta n^4}{4}} > 3\pi \sqrt[3]{\frac{\alpha\beta}{4}} n$  pour  $n > 1$ . Les vortex avec un grand nombre d'enroulement auront tendance à se désintégrer en des vortex de nombre d'enroulement plus petit, car il est plus favorable énergétiquement de former plusieurs vortex de  $n = 1$  que d'avoir un seul vortex avec  $n$  grand : les vortex se repoussent.

## 6.5 Sommaire de l'approximation du mur mince

Résumons dans cette section les résultats des sections précédentes. Dans la limite où le nombre d'enroulement est grand, on peut faire l'approximation que  $f(r)$  et  $a(r)$  ont une configuration dépendante de  $R$ , la position de la « paroi » séparant le vrai vide du faux. Pour le modèle abélien de Higgs (présenté au chapitre 3), cette configuration est donnée par l'équation (5.14). Pour le modèle de Chern-Simons (présenté à la section 6.1), la configuration est présentée à l'équation (6.18).

Dans cette approximation, la section 6.3 étudie le modèle abélien de Higgs. Pour un potentiel d'ordre quatre en  $\phi$  (BPS lorsque  $\alpha = 1$  ; voir sous-section 6.3.1), l'énergie d'un vortex est indépendante de  $e$ . Pour un potentiel d'ordre six en  $\phi$  (non-BPS ; voir sous-section 6.3.2), l'énergie minimisée dans la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  est donnée par (6.17) et est proportionnelle à  $n^{2/3}$  : les vortex sont toujours de type I.

Enfin, dans la section 6.4, l'approximation du mur mince est appliquée au modèle de Chern-Simons et la démarche de [7] y est exposée. Dans la sous-section 6.4.1 où le potentiel a la forme

BPS, l'énergie est donnée par (6.21) et est linéaire en fonction de  $n$ . Dans la sous-section 6.4.2, lorsque  $\beta = 0$ , l'énergie est aussi linéaire en fonction de  $n$  (équation (6.24)) mais la pente dépend de  $\alpha$  : les vortex s'attireront si  $\alpha < 1$  (type I) ou se repousseront si  $\alpha > 1$  (type II). Lorsque  $\beta \neq 0$ , l'énergie est donnée par (6.25) et est proportionnelle à  $n^{4/3}$  : les vortex sont toujours de type II.

Ainsi, selon l'approximation pour un mur mince, dans le cas d'un potentiel qui n'est pas BPS (même à une constante multiplicative près), on perd le comportement « régulier » selon lequel on tombe sur un comportement de type I si  $m_\phi < m_\gamma$  et de type II si  $m_\phi > m_\gamma$ .

## 6.6 Calculs numériques de l'énergie en fonction du nombre d'enroulement

Nous avons vu à la section 3.2 qu'il existe deux types de profils de solutions dans le modèle abélien Higgs (figure 3.2) : le profil « mur épais » et le profil « mur mince ». Il en est de même pour le modèle de Chern-Simons ; nous le verrons plus loin, à la section 6.6.2. Dans le cas du profil « mur mince », des approximations permettent une analyse de l'énergétique des vortex (section 6.3 et 6.4). Dans la section qui suit, les équations des champs (pour le modèle abélien Higgs à la sous-section 6.6.1 et pour le modèle de Chern-Simons à la sous-section 6.6.2) seront résolues pour différentes valeurs de  $n$  afin de trouver les solutions et leurs énergies sans passer par des approximations. Ces résultats numériques permettront de comparer avec ceux obtenus après l'approximation du mur mince.

La valeur numérique de l'énergie d'un vortex sans approximation est l'intégrale de la densité d'énergie trouvée à partir des solutions numériques et calculée avec le code « trapz » produit par Matlab. Le résultat de cette intégrale dépend de l'espacement entre les points de la grille. Un trop grand espacement donnera une énergie pour trop faible. Par contre, en diminuant l'espacement, la valeur de l'intégrale converge vers une certaine valeur. D'un autre côté, diminuer l'espacement rend difficile le calcul numérique des solutions, surtout pour une grande valeur de  $n$ . Pour être capable de trouver des solutions il faut alors se servir de la solution précédente avec  $n - 1$  comme essai initial pour trouver après un nombre raisonnable d'itérations la solution avec  $n$ .

## 6.6.1 Modèle abélien de Higgs

### 6.6.1.1 Potentiel d'ordre quatre

L'approximation de l'énergie trouvée pour  $n \gg 1$  dans l'approximation du mur mince à la sous-section 6.3.1 est

$$E(R) = \frac{2\pi n^2}{e^2 R^2} + \frac{\pi\alpha e^2}{2} R^2 + \frac{4\sqrt{2\alpha\pi}e}{3} R.$$

Cette expression peut être minimisée numériquement à l'aide de la méthode de Newton-Raphson et de la méthode de la bisection, pour différentes valeurs de  $n$  et de  $e$ .

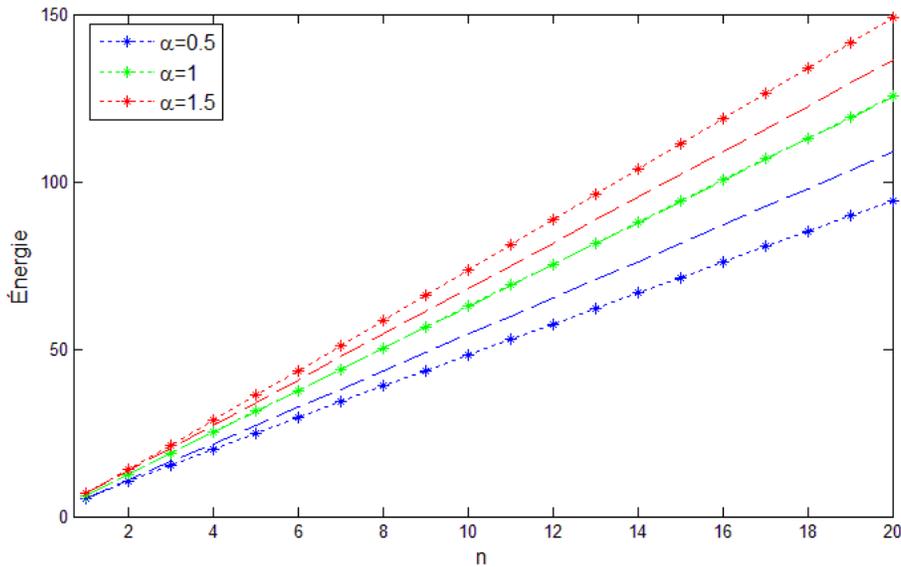


Figure 6.2 – Les résultats numériques de l'intégration de l'énergie dans le modèle abélien de Higgs avec potentiel général d'ordre quatre pour différentes valeurs de  $\alpha$  (0.5, 1 et 1.5) et pour  $e = 1$  sont affichés par les astérisques de  $n = 1$  à  $n = 20$ . Les lignes pointillées correspondent à  $E_n = nE_{n=1}$ . À  $\alpha = 1$ , les deux se superposent tel que prévu par la théorie.

Les calculs numériques semblent en très bon accord avec la théorie (voir figure 6.2). Lorsque  $\alpha = 1$ , les masses,  $m_\gamma = \sqrt{2\alpha}e$  et  $m_\phi = \sqrt{2}e$ , sont égales et on a bien le comportement « BPS » où  $E_n = nE_{n=1}$ . Autrement, si  $\alpha < 1$ , on retrouve un comportement de type I, et si  $\alpha > 1$ , on retrouve un comportement de type II. Numériquement, différentes valeurs de  $e$  donneront par contre la même énergie pour un  $\alpha$  et un  $n$  donné, comme il a été constaté dans l'approximation.

### 6.6.1.2 Potentiel non-BPS d'ordre six

On peut comparer le résultat numérique pour  $E(n)$  avec différentes approximations possibles. L'approximation du mur mince calculée précédemment (à la section 5.2) donnait

$$E(R) = \frac{2\pi n^2}{e^2 R^2} - \pi \varepsilon R^2 + \pi R, \quad (6.26)$$

dont il est possible de trouver le minimum de deux façons différentes :

1. de façon numérique avec la méthode de Newton-Raphson,
2. en négligeant le terme contenant  $\varepsilon$  et ainsi obtenir le comportement en  $n^{2/3}$  (équation (6.17)).

On observe que, de façon générale, l'approximation du mur mince donne une bonne idée du résultat numérique  $E(n)$  lorsque  $n$  est grand, et affiche un profil de type I sans tenir compte du rapport des masses (voir figure 6.3). Selon la valeur des paramètres  $\varepsilon$  et  $e$ , ces deux méthodes d'approximations seront plus ou moins semblables. Également, augmenter la valeur de  $e$  donne une énergie minimisée par Newton-Raphson plus près de celle en  $n^{2/3}$ . En effet, si on remplace  $R_0 = (2n/e)^{2/3}$  dans  $E(R)$  :

$$\begin{aligned} E(R_0) &= \frac{2\pi n^2}{e^2} \left(\frac{e}{2n}\right)^{4/3} - \pi \varepsilon \left(\frac{2n}{e}\right)^{4/3} + \pi \left(\frac{2n}{e}\right)^{2/3} \\ &= \frac{3\pi}{2} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2/3} \left[1 - \frac{2\varepsilon}{3} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2/3}\right], \end{aligned}$$

on a une différence de  $\frac{2\varepsilon}{3} (2n/e)^{2/3}$  entre l'énergie minimisée en négligeant  $\varepsilon$  de  $E(R)$  et l'énergie à ce  $R_0$  sans négliger  $\varepsilon$ . Cela explique pourquoi les deux approximations se rapprochent lorsque  $e$  augmente (voir un exemple à la figure 6.3 où  $e$  prend les valeurs de 1 et 10).

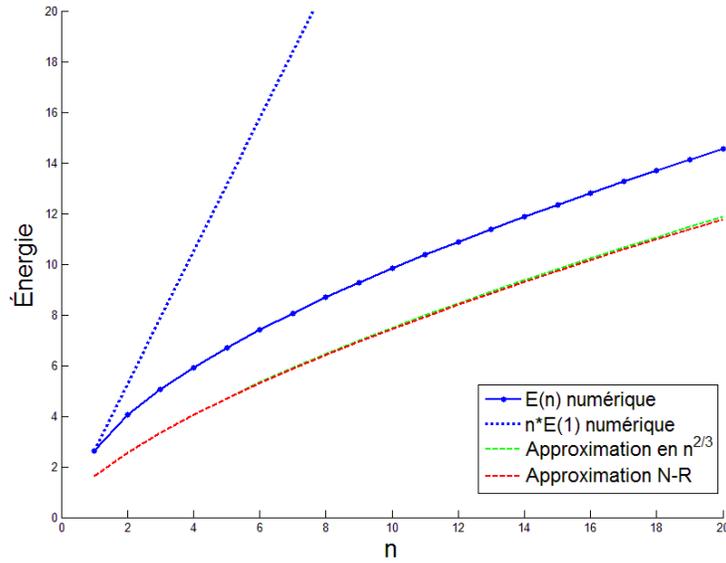
Lorsqu'on diminue  $e$  suffisamment, on découvre que la courbe de  $E(n)$  finit par passer au-dessus de  $nE(1)$  pour les plus petites valeurs de  $n$ . On se retrouve donc dans une situation plus complexe, qui n'est pas clairement ni de type I, ni de type II : pour des valeurs de  $n$  allant de 1 à une certaine valeur  $n_1$ , le vortex est instable de type II, et pour  $n > n_1$  il est stable de type I. Cette valeur de  $n_1$  dépend des paramètres  $e$  et  $\varepsilon$  : diminuer  $e$  et (ou) diminuer  $\varepsilon$  augmente

$n_1$  (voir figure 6.4). Si  $e$  et/ou  $\varepsilon$  sont trop élevés,  $n_1$  finit par devenir 1 et on perd cet étrange comportement, on retourne au profil de type I.

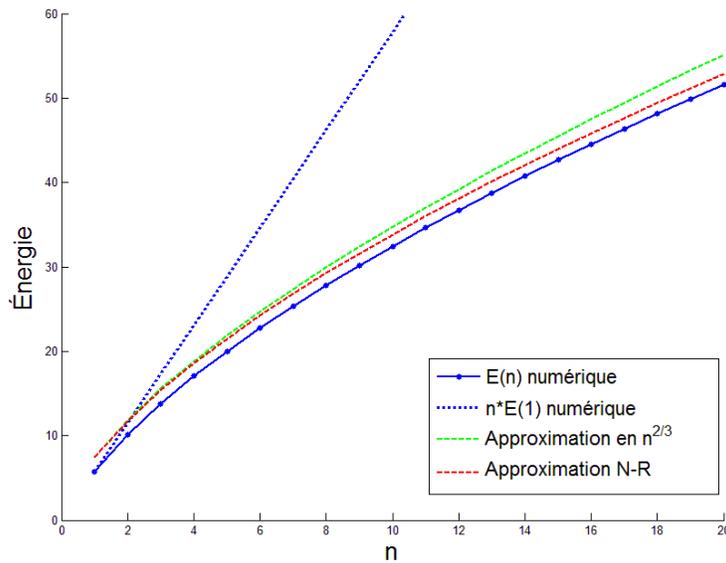
Selon le rapport des masses,

$$\frac{m_\phi}{m_\gamma} = \frac{2\sqrt{1-\varepsilon}}{\sqrt{2}e},$$

si  $e^2 > 2(1-\varepsilon)$  on devrait observer un type I ou, considérant  $\varepsilon$  négligeable,  $e > \sqrt{2}$ . Ce n'est pourtant pas ce qui est observé numériquement, pour une valeur de  $e$  sous  $\sqrt{2}$  on observe toujours un comportement de type I sauf sous une certaine valeur assez petite.

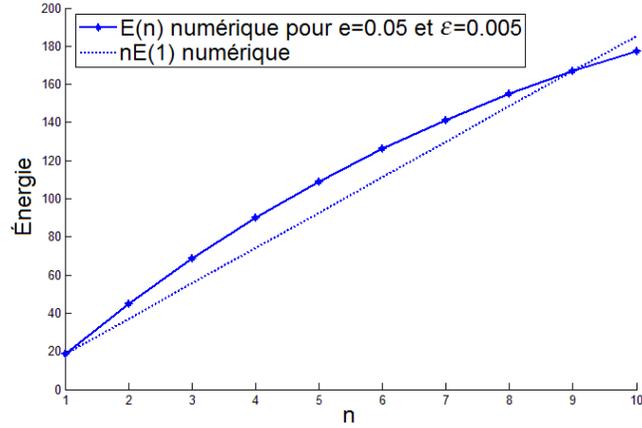


(a)  $E(n)$  pour  $e = 10$  et  $\varepsilon = 0.005$ , le rapport des masses donne  $m_\phi/m_\gamma = 0.1411$  et on devrait donc observer un comportement de type I, ce qui est bien le cas.

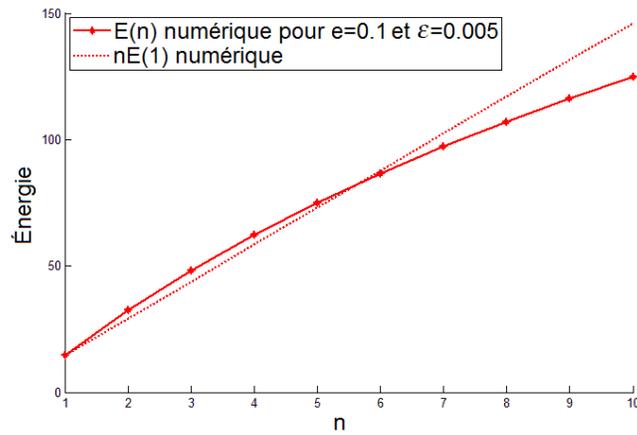


(b)  $E(n)$  pour  $e = 1$  et  $\varepsilon = 0.005$ , le rapport des masses donne  $m_\phi/m_\gamma = 1.411$  et on devrait donc observer un comportement de type II, ce qui n'est pas le cas.

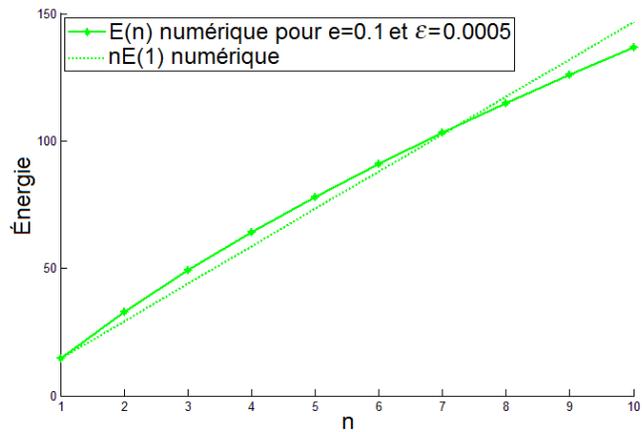
Figure 6.3 – L'énergie des vortex en fonction de  $n$  selon une intégration numérique comparée à deux approximations : celle où l'on minimise  $E(R)$  avec la méthode Newton-Raphson et celle où  $\varepsilon$  est négligé et on trouve  $E(n) \sim n^{2/3}$ . Ces deux approximations se rapprochent lorsque  $e$  augmente, tel qu'il est expliqué précédemment.



(a)  $E(n)$  pour  $e = 0.05$  et  $\varepsilon = 0.005$



(b)  $E(n)$  pour  $e = 0.1$  et  $\varepsilon = 0.005$



(c)  $E(n)$  pour  $e = 0.1$  et  $\varepsilon = 0.0005$

Figure 6.4 – L'énergie des vortex en fonction de  $n$  selon une intégration numérique. Pour ces valeurs des paramètres, le rapport des masses  $m_\phi/m_\gamma$  est plus grand que un et indiquerait théoriquement un comportement de type II mais ce n'est pas ce qui est observé. On voit plutôt un comportement de type II de  $n = 1$  à  $n_1$  puis de type I. On constate que la valeur de  $n_1$  varie selon les paramètres : augmenter  $e$  de 0.05 à 0.1 en fixant  $\varepsilon$  à 0.005 fait diminuer  $n_1$  ; augmenter  $\varepsilon$  de 0.0005 à 0.005 en fixant  $e$  à 0.1 fait aussi diminuer  $n_1$ .

## 6.6.2 Modèle de Chern-Simons

Pour trouver numériquement l'énergie, il faut solutionner le système d'équations suivant :

$$f'' + \frac{f'}{r} - \frac{n^2}{r^2}(1-a)^2 f + \frac{n^2 a'^2}{m^2 r^2 f^3} - \frac{1}{2v^2} \frac{dV}{df} = 0 \quad (6.27)$$

$$a'' - \frac{a'}{r} - \frac{2a'f'}{f} + m^2(1-a)f^4 = 0, \quad (6.28)$$

donnée dans [7] en considérant l'ansatz pour une solution statique donnée par :

$$\phi = v f(r) e^{in\theta}, \quad A_\theta = \frac{n}{er} a(r) \quad . \quad (6.29)$$

Avec le potentiel proposé (équation (6.22) ), le dernier terme de l'équation de mouvement pour  $f(r)$  est :

$$\frac{1}{2v^2} \frac{dV}{df} = \frac{\alpha}{4} m^2 f (f^2 - 1) (3f^2 - 3\beta (f^2 - 1) - 1) \quad .$$

Une fois la solution des équations de mouvement (6.28) trouvée, l'énergie est calculée par l'intégrale numérique de l'expression (6.19).

Les calculs sont de nouveau effectués avec la méthode « relaxation » par le même code que pour le modèle abélien de Higgs. Numériquement, les calculs sont très difficiles à réaliser. La matrice  $A$  et le vecteur  $B$  (voir en annexe I) finissent par contenir quelques éléments très grands par rapport aux autres et le système est alors difficile à résoudre. Pour pouvoir trouver les solutions pour différentes valeurs de  $n$ , il faut faire varier le nombre d'enroulement par bords de  $\sim 0.1$  en se servant de la solution  $n - 1$  comme valeur de départ pour trouver la solution  $n$ . Produire un graphique de l'énergie en fonction de  $n$  demande alors beaucoup de temps de calcul. Cette méthode ne permet cependant pas de résoudre les équations différentielles pour de grandes valeurs de  $n$ ,  $A$  et  $B$  deviennent trop mal « conditionnés » pour donner une solution. On peut ainsi se rendre jusqu'à une valeur de  $n$  de l'ordre de 10. Les solutions pour les paramètres  $m = 2$ ,  $\alpha = 0.35$ ,  $\beta = 0.03$  sont affichées à la figure 6.5 et leur densité d'énergie à la figure 6.6.

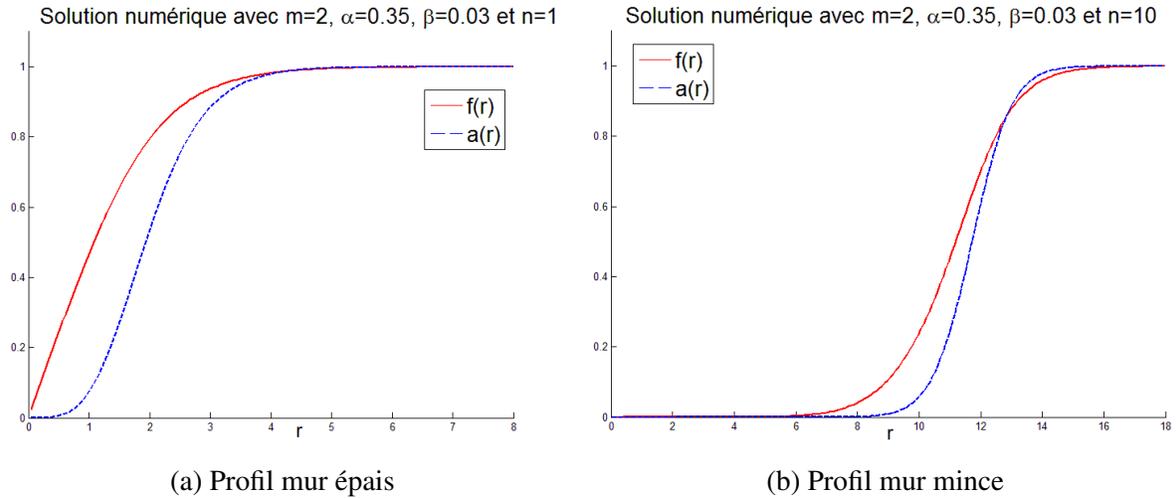


Figure 6.5 – Solutions numériques aux équations (6.28) pour  $f(r)$  et  $a(r)$  obtenues avec la méthode « relaxation » pour différents paramètres. On constate qu’il y a deux types de profils possibles pour ces solutions, comme dans le modèle abélien de Higgs.

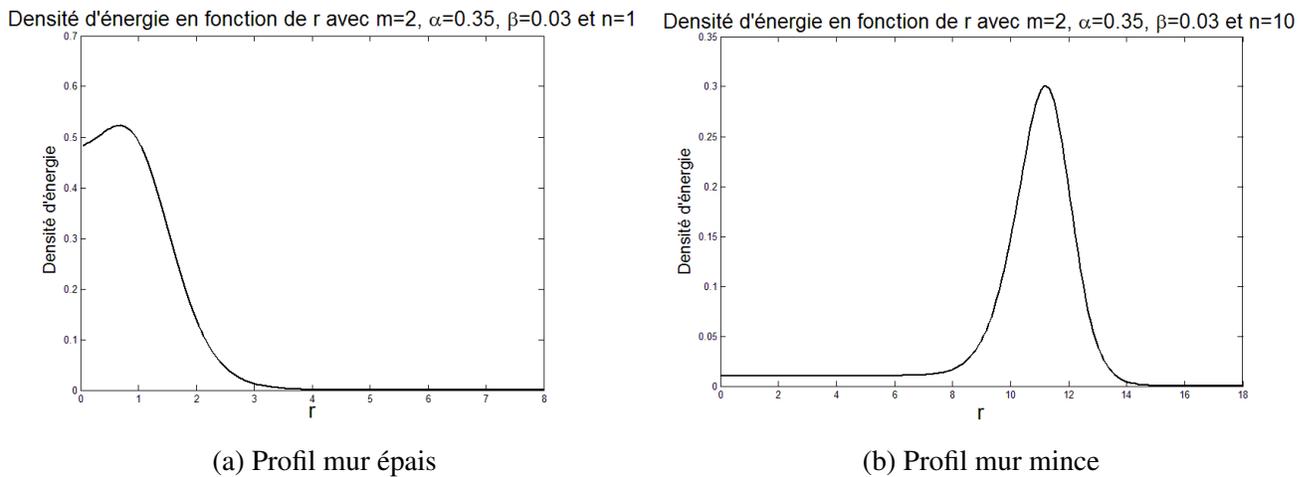


Figure 6.6 – Densité d'énergie totale (équation (6.19)) calculée à partir des solutions numériques pour différentes valeurs de paramètres.

### 6.6.2.1 Le cas $\beta = 0$

Pour  $\beta = 0$ , on observe le comportement prévu par la théorie (sous-section 6.4.2), c'est-à-dire que la valeur de  $\alpha$  déterminera si les vortex s'attirent ( $\alpha < 1$ , type I) ou se repoussent ( $\alpha > 1$ , type II). Les résultats numériques pour quelques valeurs de paramètres sont montrés à la figure 6.7.

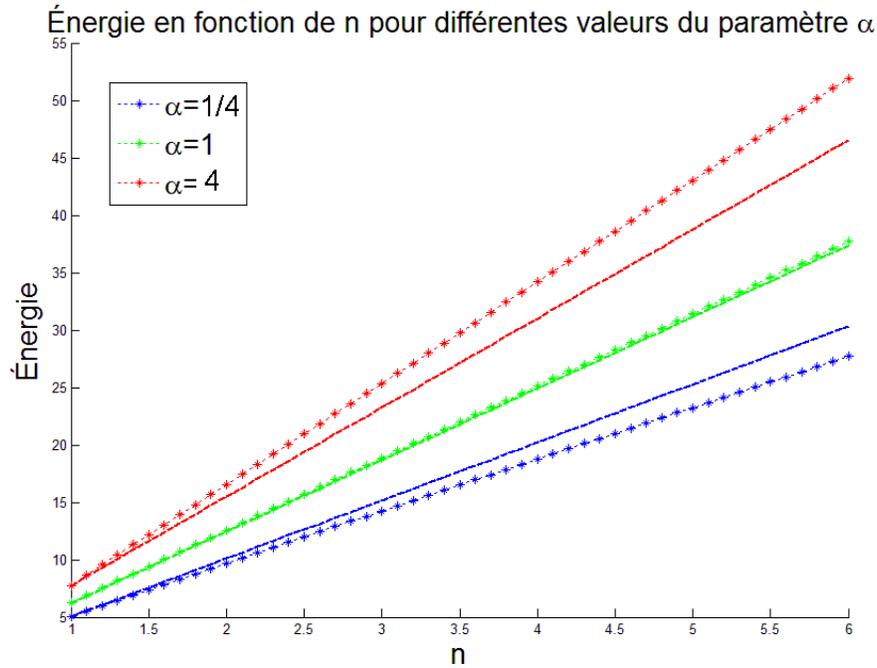


Figure 6.7 – Les résultats numériques de l’intégration de l’énergie dans le modèle de Chern-Simons avec  $m = 2$  et  $\beta = 0$  pour différentes valeurs du paramètre  $\alpha$  ( $1/4$ ,  $1$  et  $4$ ) sont affichés par les astérisques de  $n = 1$  à  $n = 6$ . Les lignes pointillées correspondent à  $E_n = nE_{n-1}$ . À  $\alpha = 1$ , les deux se superposent tel que prévu par la théorie.

L’approximation du mur mince trouvée à la sous-section 6.4.2 donne :

$$E_{min} = 2\pi n \alpha^{1/4}, \quad (6.30)$$

La figure 6.10 montre que, pour différentes valeurs de  $\alpha$ , cette approximation est très juste.

### 6.6.2.2 Le cas $\beta \neq 0$

Pour  $\beta \neq 0$ , on peut réussir à retrouver une partie des résultats de Bolognesi. Pour des valeurs de  $\alpha$  et de  $\beta$  pas trop faibles (mais plus petites que 1), le comportement « type III » décrit par l’auteur est bel et bien observé : pour un  $n$  entre 1 et une certaine valeur  $n_1$ , l’énergie d’un  $n$ -vortex est plus basse que celle de  $n-1$ -vortex (type I). Le vortex le plus stable, celui qui a le moins d’énergie par  $n$ , a un nombre d’enroulement désigné comme  $n_0$  par Bolognesi, dont la valeur est située entre 1 et  $n_1$ . Pour toute valeur de  $n$  supérieure à  $n_1$ , l’énergie d’un  $n$ -vortex est plus basse que celle de  $n-1$ -vortex (type II) (voir figure 6.8).

La modification de  $\alpha$  et de  $\beta$  modifie  $n_0$  et  $n_1$ . Comme la figure 5 de l'article de Bolognesi ([7]), l'augmentation de  $\alpha$  ou de  $\beta$  fait diminuer  $n_0$ , de sorte que si l'on veut observer ce type de comportement malgré les difficultés du calcul numérique, on peut prendre des valeurs de  $\alpha$  et de  $\beta$  pas trop faibles et ainsi observer un  $n_0$  pas trop élevé. Il est possible de confirmer cet effet des paramètres sur  $n_0$  et  $n_1$  (voir figure 6.9).

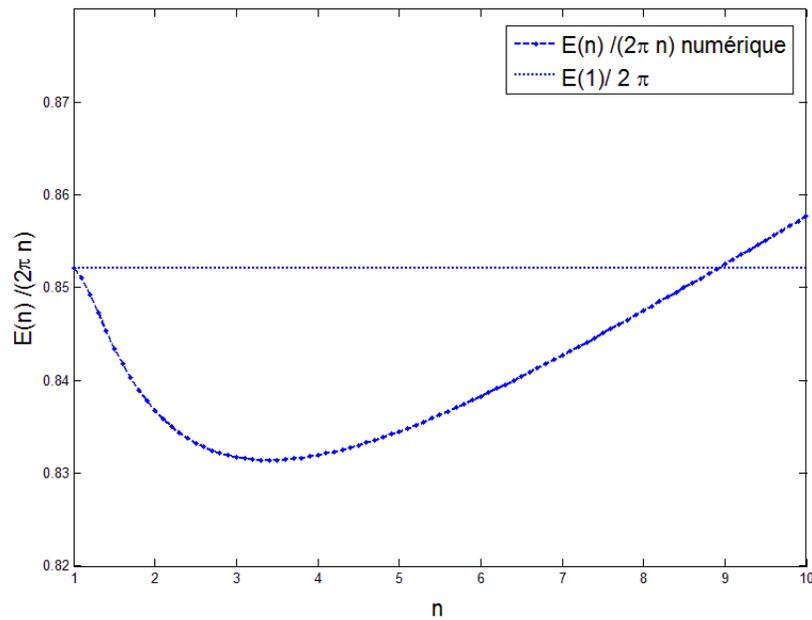
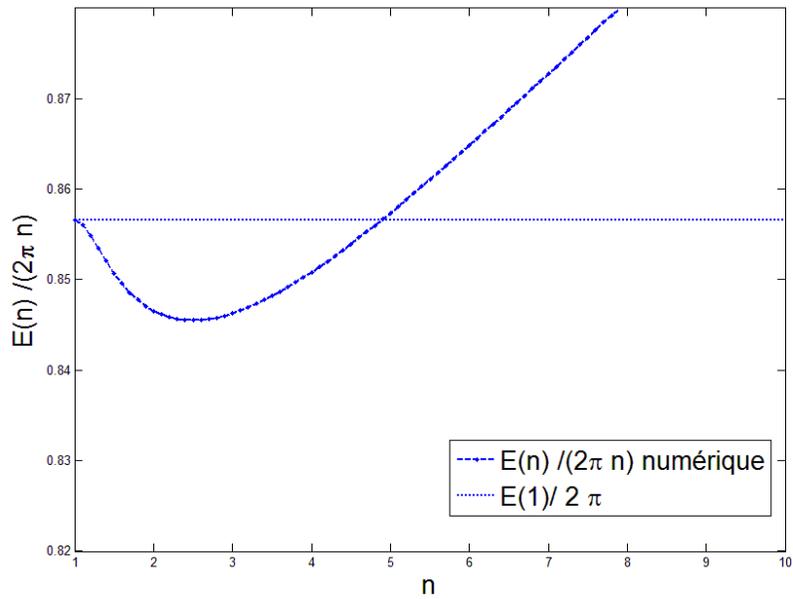
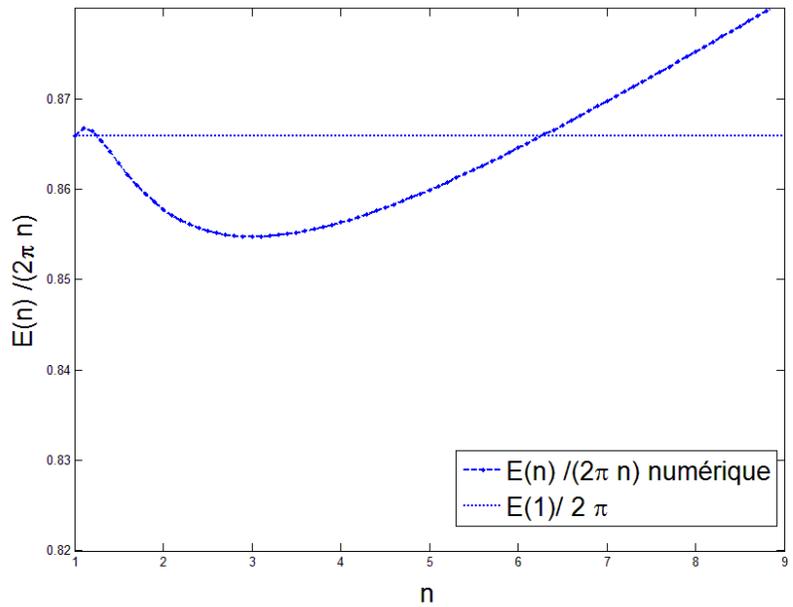


Figure 6.8 – L'énergie divisée par  $2\pi n$  (telle que présentée dans [7]) en fonction du nombre d'enroulement du vortex avec  $m = 2$ ,  $\alpha = 0.35$  et  $\beta = 0.03$ ; pour  $n$  allant de 1 à 10. Dans ce cas,  $n_0 \simeq 3.5$  et  $n_1 \simeq 9$ .



(a) L'énergie divisée par  $2\pi n$  en fonction du nombre d'enroulement du vortex avec  $m = 2$ ,  $\alpha = 0.4$  et  $\beta = 0.05$  ; pour  $n$  allant de 1 à 10. Dans ce cas,  $n_0 \simeq 2.5$  et  $n_1 \simeq 5$ .



(b) L'énergie divisée par  $2\pi n$  en fonction du nombre d'enroulement du vortex avec  $m = 2$ ,  $\alpha = 0.35$  et  $\beta = 0.03$  ; pour  $n$  allant de 1 à 9. Dans ce cas,  $n_0 \simeq 3$  et  $n_1 \simeq 6$ .

Figure 6.9 – Avec la figure 6.8, on constate que les valeurs de  $n_0$  et  $n_1$  varient selon les paramètres : augmenter  $\beta$  de 0.03 à 0.05 en fixant  $\alpha$  à 0.35 fait diminuer  $n_0$  et  $n_1$  ; augmenter  $\alpha$  de 0.35 à 0.4 en fixant  $\beta$  à 0.03 fait aussi diminuer  $n_0$  et  $n_1$ .

Pour  $\alpha < 1$  et  $\beta = 0$  on observait numériquement un comportement de type I normal, en accord avec l'analogie en supraconductivité. Dans la limite  $\beta \rightarrow 0$ ,  $n_0$  est très grand et on observe un comportement de type I seulement, comme prévu. Si  $\beta \neq 0$ , à mesure que l'on augmente sa valeur,  $n_0$  diminue et l'on finit par observer un comportement de type II aussi, pour des valeurs finies de  $n$ .

L'approximation dans la limite d'une paroi mince séparant le faux vide du vrai, donnée par la minimisation de l'énergie calculée à la sous-section 6.4.2 est :

$$E(R) = \frac{\pi \kappa n^2}{e^2 R} + \frac{\alpha \beta e^4 \pi R^2}{\kappa^2} + 2\pi T_W(\alpha, \beta) R, \quad (6.31)$$

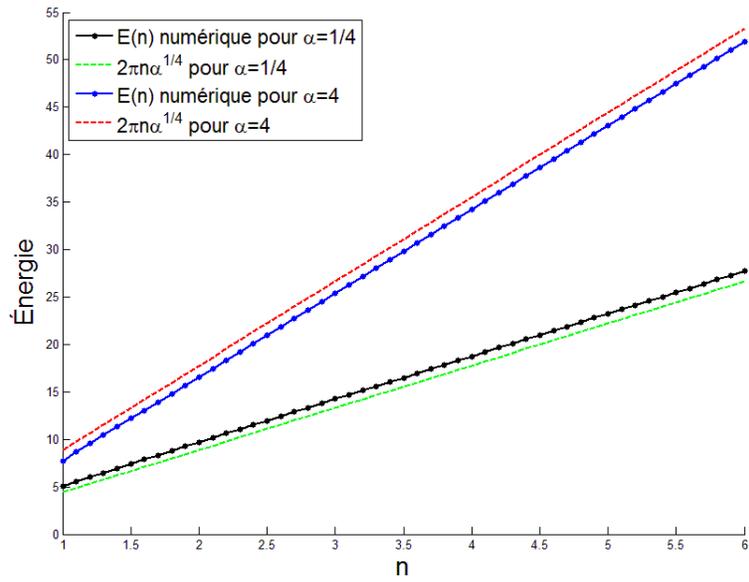
où

$$\int_0^1 df \left[ \sqrt{V(f)} \right] \equiv \frac{1}{2} T_W(\alpha, \beta), \quad (6.32)$$

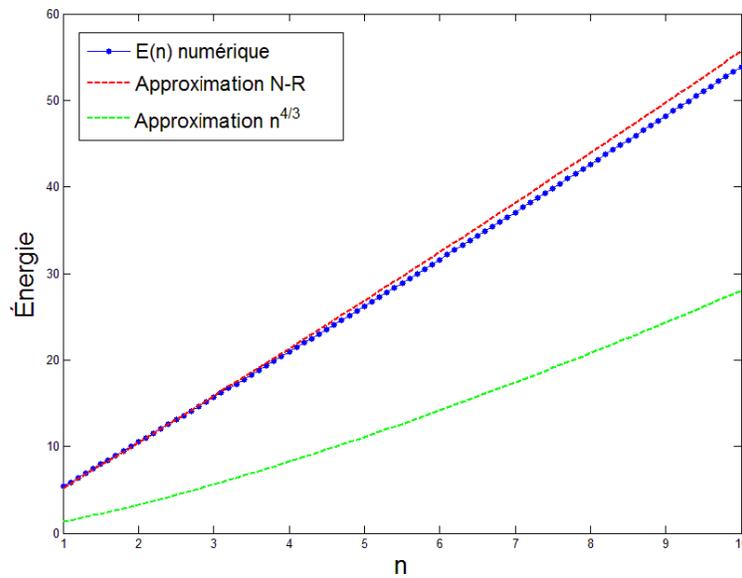
est comparée aux résultats numériques à la figure 6.10. Si le dernier terme est négligé, nous avons vu que

$$E_{min} = 3\pi \sqrt[3]{\frac{\alpha \beta n^4}{4}}. \quad (6.33)$$

Comme on peut le constater à la figure 6.10, cette approximation est assez éloignée du résultat numérique. C'est également ce que Bolognesi trouve, il faut un très grand nombre d'enroulement pour que cette approximation soit acceptable ; or, il n'a pas été possible de se rendre à une valeur de  $n$  aussi élevée avec la méthode « relaxation ».



(a) L'énergie en fonction du nombre d'enroulement du vortex avec  $m = 2$ ,  $\beta = 0.03$ ,  $\alpha = 1/4$  et  $4$  pour  $n$  allant de  $1$  à  $6$  (comme à la figure 6.7). Le résultat numérique de l'intégrale est comparé à l'approximation (6.30).



(b) L'énergie en fonction du nombre d'enroulement du vortex avec  $m = 2$ ,  $\alpha = 0.35$  et  $\beta = 0.03$ ; pour  $n$  allant de  $1$  à  $10$  (comme à la figure 6.8). Le résultat numérique de l'intégrale est comparé à l'approximation du mur mince (où  $E(R)$  est minimisé avec la méthode Newton-Raphson) et à l'approximation (6.33).

Figure 6.10

## 6.7 Sommaire des résultats numériques

En résumé, pour le modèle abélien Higgs (sous-section 6.6.1), les cas du potentiel BPS et non-BPS mais à une constante multiplicative près donnaient un comportement  $E(n)$  en accord avec la théorie : les vortex seront de type I si  $m_\phi < m_\gamma$  ou de type II si  $m_\phi > m_\gamma$  (voir figure 6.2). Il a été également confirmé numériquement que la valeur de l'énergie de ces vortex ne dépend pas du paramètre  $e$ . Pour un potentiel non-BPS, les résultats sont très différents. De façon générale, l'approximation (6.17) est bonne dans la limite où  $n$  est grand (figure 6.3) et les vortex sont donc de type I même lorsque  $m_\phi > m_\gamma$ . Cependant, lorsque  $e$  et  $\varepsilon$  sont suffisamment faibles, un comportement différent est observé : pour  $n$  allant de 1 à  $n_1$ , le vortex est instable de type II, et pour  $n > n_1$  il est stable de type I. La valeur de  $n_1$  dépend des paramètres  $e$  et  $\varepsilon$  (voir figure 6.4).

Ensuite, pour le modèle de Chern-Simons (sous-section 6.6.2), les solutions numériques des équations de mouvement sont montrées à la figure 6.5. Pour un potentiel avec  $\beta = 0$  les résultats numériques pour  $E(n)$  sont en accord avec la théorie et dépendent de la valeur de  $\alpha$  (voir figure 6.7). L'approximation (6.30) est très juste même pour de faibles valeurs de  $n$  (voir figure 6.10). Enfin, le cas non-BPS (où  $\beta \neq 0$ ) donne des résultats semblables à ceux du modèle abélien de Higgs. Ici,  $E(n)$  ne respecte pas les comportements habituels dépendant du ratio des masses et montre un comportement plus compliqué, de « type III » décrit dans [7]. Cette fois, entre  $n = 1$  et  $n_0$ , le vortex est de type I et pour  $n > n_1$ , il est de type II (voir figure 6.8). L'approximation (6.33) est assez éloignée du résultat numérique étant donné que la valeur de  $n$  n'est pas assez élevée (voir figure 6.10).

Bref, la plupart des résultats de S.Bolognesi et S.B.Gudnason ([7]) pour le modèle de Chern-Simons ont été reproduits. Par contre, de grandes difficultés numériques ont été rencontrées dans les calculs des solutions numériques pour des valeurs élevées de  $n$  car la méthode de la relaxation ne convergait pas. Une amélioration de l'algorithme selon [31] pourrait peut-être permettre de reproduire l'entièreté des résultats de Bolognesi et Gudnason. Malheureusement, l'article de Bolognesi et Gudnason ne mentionne pas leur méthode de calcul numérique pour solutionner les équations de mouvement des champs ce qui a rendu la comparaison avec leurs résultats difficile. La démarche de [7] a pu être appliquée au modèle abélien de Higgs et un comportement de « type III » a également été observé dans ce modèle, pour un potentiel non-BPS.

## CHAPITRE 7

### CONCLUSION

Pour conclure, ce mémoire aura principalement porté sur le modèle abélien de Higgs en 2+1 dimensions, dans lequel un champ scalaire interagit avec un champ de jauge. Lorsque le potentiel est choisi de telle sorte qu'il possède un minimum brisant spontanément la symétrie  $U(1)$ , des défauts topologiques, appelés vortex, sont créés. Si, suite à leur formation, ce potentiel se transforme tel que le centre des vortex se trouve dans le vrai vide et qu'à l'infini le champ scalaire se retrouve dans le faux vide, le vortex sera métastable et se désintégrera éventuellement. Le chapitre 5 résume l'article [24] qui calcule ce taux de désintégration par une approximation semi-classique pour montrer l'impact des défauts topologiques sur la stabilité du faux vide. Nous avons vu que, pour certaines valeurs des paramètres (dans la limite de dissociation), les vortex pouvaient en effet catalyser cette désintégration.

Au chapitre 6, nous avons surtout étudié la dépendance de l'énergie des vortex avant cette désintégration aux paramètres du modèle et en particulier au nombre d'enroulement du vortex. Par analogie à la théorie de la supraconductivité de Ginzburg-Landau, la relation  $E(n)$  est bien connue pour un potentiel dit « BPS » à une constante multiplicative près : type I si la masse du champ de jauge est plus grande que celle du champ scalaire (les vortex s'attireront) et type II inversement (les vortex se repousseront). Par contre, avec un potentiel non-BPS (un polynôme d'ordre six), nous avons constaté que le ratio des masses ne réussit pas à décrire le comportement observé. Ainsi, les vortex sont généralement de type I (attractifs), mais pour certaines valeurs des paramètres du modèle, les vortex sont répulsifs entre  $n=1$  et une certaine valeur de  $n$  et deviennent attractifs pour des nombres d'enroulements plus grands que cette valeur.

Dans [7], on observe un phénomène relativement semblable dans un modèle abélien de Higgs sans terme de Maxwell et avec un terme de Chern-Simons. Bolognesi et Gudnason obtiennent des vortex qu'ils qualifient de « type III » qui est aussi un mélange de type I et II pour certains paramètres de leur modèle. Il serait intéressant de pousser cette analyse du comportement de l'énergie en fonction du nombre d'enroulement pour des modèles différents, faisant intervenir

des défauts topologiques différents avec des potentiel non-BPS puisque ces cas sont peu étudiés.

En parallèle avec mes travaux, mes collègues ont poursuivi l'étude de l'influence des défauts topologiques sur la stabilité d'un faux vide avec une théorie en 1+1 dimensions de champ scalaire formant des kinks classiquement stabilisés par un second champ scalaire. Un article paraîtra prochainement à ce sujet. De plus, leurs travaux futurs s'intéresseront de nouveau aux vortex de l'article [24] dans un modèle où s'ajoute la gravité.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. A. Abrikosov. On the magnetic properties of superconductors of the second group. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 32:956, 1957.
- [2] K. Arthur. Interaction energy of Chern-Simons vortices. *Physics Letters B*, 356:509–515, 1995.
- [3] M. B. Paranjape B. Kumar et U. A. Yajnik. Fate of the false monopoles : induced vacuum decay. *Physical Review D*, 82:025022, 2010.
- [4] E. B. Bogomolny. The stability of classical solutions. *Soviet Journal of Nuclear Physics*, 24:449–454, 1976.
- [5] S. Bolognesi. Domain walls and flux tubes. *Nuclear Physics B*, 730:127–149, 2005.
- [6] S. Bolognesi. Large N, ZN strings and bag models. *Nuclear Physics B*, 730:150–163, 2005.
- [7] S. Bolognesi et S. B. Gudnason. A note on Chern-Simons solitons - a type III vortex from the wall vortex. *Nuclear Physics B*, 805:104–123, 2008.
- [8] R. H. Brandenberger. Inflationary cosmology : Progress and problems. *arXiv :hep-ph/9910410*, 1999.
- [9] C. G. Callan, Jr. et S. Coleman. Fate of the false vacuum. II. first quantum corrections. *Physical Review D*, 16(6):1762–1768, 1977.
- [10] S. Coleman. Erratum : Fate of the false vacuum : Semiclassical theory. *Physical Review D*, 16(4):1248–1248, 1977.
- [11] S. Coleman. Fate of the false vacuum : Semiclassical theory. *Physical Review D*, 15(10): 2929–2936, 1977.
- [12] S. Coleman. *Aspects of Symmetry*. Cambridge University Press, 1985.
- [13] H. J. de Vega et F. A. Schaposnik. Electrically charged vortices in non-abelian gauge theories with Chern-Simons term. *Physical Review Letters*, 56:2564–2566, 1986.

- [14] G. Dunne. *Aspects Of Chern-Simons Theory*. Springer Berlin Heidelberg, 1999.
- [15] S. Bolognesi et S. B. Gudnason. Multi-vortices are wall vortices : A numerical proof. *Nuclear Physics B*, 741:1–6, 2006.
- [16] V.L. Ginzburg et L. D. Landau. On the theory of superconductivity. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 20:1064, 1950.
- [17] J. Goldstone et R. Jackiw. Quantization of nonlinear waves. *Physical Review D*, 11(6): 1486–1498, 1975.
- [18] Y. Kim J. Hong et P. Y. Pac. Multivortex solutions of the abelian Chern-Simons-Higgs theory. *Physical Review Letter*, 64:2230–2233, 1990.
- [19] R. Jackiw et Erick J. Weinberg. Self-dual Chern-Simons vortices. *Physical Review Letters*, 64:2234–2237, 1990.
- [20] L. Jacobs et C. Rebbi. Interaction energy of superconducting vortices. *Physical Review B*, 19:4486–4494, 1979.
- [21] M. Juneau, et al. Vortex lattice stability in the  $SO(5)$  model. *Physical Review B*.
- [22] C. N. Kumar et A. Khare. Charged vortex of finite energy in nonabelian gauge theories with Chern-Simons term. *Physics Letters B*, 178(4):395–399, 1986.
- [23] B. H. Lee, et al. Battle of the bulge : Decay of the thin, false cosmic string. *Physical Review D*, 88:105008, 2013.
- [24] B. H. Lee, et al. Tunneling decay of false vortices. *Physical Review D*, 88:085031 085031–13, 2013.
- [25] R. MacKenzie M. Juneau et M.-A. Vachon. Magnetic properties of  $SO(5)$  superconductivity. *Annals of Physics*, 298:421–434, 2002.
- [26] H. B. Nielsen et P. Olesen. Vortex-line models for dual strings. *Nuclear Physics B*, 61: 45–61, 1973.
- [27] S. K. Paul et A. Khare. Charged vortices in an abelian Higgs model with Chern-Simons term. *Physics Letters B*, 174:420–422, 1986.

- [28] M. E. Peskin et D. V. Schroeder. *An introduction to quantum field theory*. Addison-Wesley, 1995.
- [29] M. K. Prasad et C. M. Sommerfield. Exact classical solution for the 't Hooft monopole and the Julia-Zee dyon. *Physical Review Letters*, 35:760–762, 1975.
- [30] J. Preskill. *Vortices and monopoles, in Architecture of Fundamental Interactions at Short Distances*. Les Houches session XLIV, Elsevier, 1987.
- [31] W. H. Press, et al. *Numerical Recipes : The Art of Scientific Computing, Third Edition*. Cambridge University Press, 2007.
- [32] M.-A. Vachon R. MacKenzie et U. Wichoski. Interaction between vortices in models with two order parameters. *Physical Review D*, 67:105024, 2003.
- [33] R. Rajaraman. *Solitons And Instantons : An Introduction To Solitons And Instantons In Quantum Field Theory*. Elsevier Science Publishers B.V., 1982.
- [34] B. Hasslacher R. F. Dashen et A. Neveu. Nonperturbative methods and extended-hadron models in field theory. II. two-dimesional models and extended hadrons. *Physical Review D*, 10(12):4130–4138, 1974.
- [35] C. Bender T. Banks et T. T. Wu. Coupled anharmonic oscillators. I. equal-mass case. *Physical Review D*, 8(10):3346–3366, 1973.

## Annexe I

### Annexe 1

La méthode numérique de la relaxation (décrite dans [31]), qui servira à résoudre le système d'équations différentielles couplées trouvées précédemment, consiste à remplacer les équations différentielles ordinaires (équations contenant une fonction d'une seule variable indépendante,  $r$ , et ses dérivées) par des équations aux différences finies (FDE) sur une grille de points s'étendant sur un intervalle voulu. Une équation aux différences finies est une équation obtenue d'une équation différentielle par la discrétisation des dérivées :

$$y'_{n,k} \approx \frac{y_{n,k+1} - y_{n,k}}{x_{k+1} - x_k} \quad \text{ou} \quad y'_{n,k} \approx \frac{y_{n,k} - y_{n,k-1}}{x_k - x_{k-1}} .$$

Si les  $M$  points de la grille, numérotés  $k = 0, 1, \dots, M-1$ , sont uniformément répartis,  $x_{k+1} - x_k = x_k - x_{k-1} = h$ , alors

$$y'_{n,k-1} + y'_{n,k} \approx \frac{y_{n,k} - y_{n,k-1}}{h} + \frac{y_{n,k} - y_{n,k-1}}{h} = 2 \frac{y_{n,k} - y_{n,k-1}}{h} . \quad (\text{I.1})$$

Le système d'équations différentielles (3.8) à résoudre implique deux équations couplées du deuxième ordre, ce qui peut être réduit à un ensemble de  $N = 4$  équations différentielles ordinaires du premier ordre. Celles-ci doivent satisfaire  $n_1 = 2$  conditions au début de l'intervalle voulu (à  $x_0$ ) et  $n_2 = N - n_1 = 2$  conditions à l'autre extrémité de l'intervalle, à  $x_{M-1}$  (ces conditions sont données par (3.9)). Les équations seront représentées par des FDE sur une grille de  $M$  points. La solution consistera en un ensemble de  $N \times M$  valeurs pour les  $N$  variables dépendantes à chacun des  $M$  points. La méthode de la relaxation trouve cette solution à partir d'un essai initial qui est amélioré de façon itérative.

La notation  $\mathbf{y}_k$  sera utilisée pour faire référence à l'ensemble des variables dépendantes ( $y_0, y_1, y_2$ , et  $y_{N-1=3}$ ) au point  $x_k$ , et  $y_{n,k}$  à la valeur de la variable dépendante  $n$  au point  $x_k$ . Pour le potentiel d'ordre six donné par (3.4), le système d'équations différentielles ordinaires

est donc :

$$\begin{cases} y'_{0,k} = y_{1,k} \\ y'_{1,k} = -\frac{y_{1,k}}{x_k} + \frac{n^2}{x_k^2} (1 - y_{2,k})^2 y_{0,k} + y_{0,k} (y_{0,k}^2 - 1) (3y_{0,k}^2 - (1 + 2\varepsilon)) \\ y'_{2,k} = y_{3,k} \\ y'_{3,k} = \frac{y_{3,k}}{x_k} - 2e^2 (1 - y_{2,k}) y_{0,k}^2 \end{cases} .$$

À un point  $k$  au milieu de la grille, celui-ci peut être approximé en utilisant (I.1) :

$$0 = \mathbf{E}_k \equiv \mathbf{y}_k - \mathbf{y}_{k-1} - (x_k - x_{k-1}) \mathbf{g}_k \left[ \frac{1}{2}(x_k + x_{k-1}), \frac{1}{2}(\mathbf{y}_k + \mathbf{y}_{k-1}) \right] , \quad (\text{I.2})$$

où

$$\mathbf{g}_k = \left. \frac{d\mathbf{y}}{dx} \right|_k , \quad (\text{I.3})$$

et devient

$$\begin{aligned} E_{0,k} &= y_{0,k} - y_{0,k-1} - \frac{h}{2} (y_{1,k} + y_{1,k-1}) \\ E_{1,k} &= y_{1,k} - y_{1,k-1} - h \left[ -\frac{(y_{1,k} + y_{1,k-1})}{x_k + x_{k-1}} + \frac{4n^2}{(x_k + x_{k-1})^2} \left( 1 - \frac{y_{2,k} + y_{2,k-1}}{2} \right)^2 \left( \frac{y_{0,k} + y_{0,k-1}}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{y_{0,k} + y_{0,k-1}}{2} \right) \left( \left( \frac{y_{0,k} + y_{0,k-1}}{2} \right)^2 - 1 \right) \left( 3 \left( \frac{y_{0,k} + y_{0,k-1}}{2} \right)^2 - (1 + 2\varepsilon) \right) \right] \\ E_{2,k} &= y_{2,k} - y_{2,k-1} - \frac{h}{2} (y_{3,k} + y_{3,k-1}) \\ E_{3,k} &= y_{3,k} - y_{3,k-1} - h \left[ \frac{y_{3,k} + y_{3,k-1}}{x_k + x_{k-1}} - 2e^2 \left( 1 - \left( \frac{y_{2,k} + y_{2,k-1}}{2} \right) \right) \left( \frac{y_{0,k} + y_{0,k-1}}{2} \right)^2 \right] . \end{aligned}$$

Ainsi, les  $\mathbf{E}_k$  couplent  $2N$  variables aux points  $k, k-1$ . L'équation (I.1) ne s'applique qu'aux  $M-1$  points  $k = 1, 2, \dots, M-1$ , ce qui donne  $(M-1)N$  équations pour les  $MN$  inconnus. Les  $N$

équations restantes sont les conditions frontières :

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{E}_0 \equiv \mathbf{B}(x_0, \mathbf{y}_0) \\ 0 &= \mathbf{E}_M \equiv \mathbf{C}(x_{M-1}, \mathbf{y}_{M-1}) \quad . \end{aligned}$$

Les vecteurs  $\mathbf{E}_0$  et  $\mathbf{B}$  sont tels que seules  $n_1 = 2$  composantes sont non nulles, correspondant aux  $n_1$  conditions à la frontière  $x_0$ . Ils sont construits de telle sorte que leurs composantes non nulles soient les dernières  $n_1$  composantes des vecteurs :  $E_{j,0} \neq 0$  seulement lorsque  $j = n_2, n_2 + 1, \dots, N - 1$ , donc, ici,  $j = 2, 3$ . De même, pour l'autre frontière, les  $n_2$  composantes non nulles de  $\mathbf{E}_M$  et  $\mathbf{C}$  sont placées comme les  $n_2$  premières composantes :  $E_{j,M} \neq 0$  seulement lorsque  $j = 0, 1, \dots, n_2 - 1$ , donc  $j = 0, 1$ .

Pour le problème concerné, on a donc, à  $x_0 = 0$ , les  $n_1 = 2$  conditions suivantes :

$$\begin{aligned} E_{2,0} &= y_{0,0} \quad , \text{ pour } f(0) = 0 \\ E_{3,0} &= y_{2,0} \quad , \text{ pour } a(0) = 0 \quad , \end{aligned}$$

et à  $x_{M-1}$ , les  $n_2 = 2$  conditions :

$$\begin{aligned} E_{0,M} &= y_{1,M-1} - [1 - y_{0,M-1}] \left[ \frac{1}{2x_{M-1}} + 2\sqrt{1 - \varepsilon} \right], \text{ pour } f'(r) = [1 - f(r)] \left[ \frac{1}{2r} + 2\sqrt{1 - \varepsilon} \right] \\ E_{1,M} &= y_{3,M-1} + [1 - y_{2,M-1}] \left[ \frac{1}{2x_{M-1}} - e\sqrt{2} \right], \text{ pour } a'(r) = -[1 - a(r)] \left[ \frac{1}{2r} - e\sqrt{2} \right] \quad . \end{aligned}$$

L'algorithme utilisé se servira d'un essai initial donné pour les  $y_{j,k}$  et calculera un  $\Delta y_{j,k}$  pour lequel  $y_{j,k} + \Delta y_{j,k}$  est une meilleure approximation de la solution. En faisant le développement en série de Taylor des FDE par rapport à un petit changement  $\Delta \mathbf{y}_k$  pour les points intérieurs  $k = 1, 2, \dots, M - 1$  :

$$\mathbf{E}_k(\mathbf{y}_k + \Delta \mathbf{y}_k, \mathbf{y}_{k-1} + \Delta \mathbf{y}_{k-1}) \simeq \mathbf{E}_k(\mathbf{y}_k, \mathbf{y}_{k-1}) + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\partial \mathbf{E}_k}{\partial y_{n,k-1}} \Delta y_{n,k-1} + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\partial \mathbf{E}_k}{\partial y_{n,k}} \Delta y_{n,k} \quad .$$

Et comme les nouvelles valeurs  $E(\mathbf{y} + \Delta\mathbf{y})$  doivent être nulles pour trouver la solution :

$$-\mathbf{E}_k(\mathbf{y}_k, \mathbf{y}_{k-1}) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\partial \mathbf{E}_k}{\partial y_{n,k-1}} \Delta y_{n,k-1} + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\partial \mathbf{E}_k}{\partial y_{n,k}} \Delta y_{n,k} \quad ,$$

Ce qui peut être réécrit comme :

$$-E_{j,k} = \sum_{n=0}^{N-1} S_{j,n} \Delta y_{n,k-1} + \sum_{n=N}^{2N-1} S_{j,n} \Delta y_{n-N,k}, \quad \text{pour } j = 0, 1, \dots, N-1 \quad ,$$

où

$$S_{j,n} = \frac{\partial E_{j,k}}{\partial y_{n,k-1}} \quad S_{j,n+N} = \frac{\partial E_{j,k}}{\partial y_{n,k}}, \quad \text{pour } n = 0, 1, \dots, N-1 \quad .$$

$S_{j,n}$  est une matrice  $N \times 2N$  pour chaque point  $k$ . On peut procéder de la même manière aux conditions frontières. Comme  $\mathbf{E}_0$  ne dépends que de  $\mathbf{y}_0$  :

$$-E_{j,0} = \sum_{n=0}^{N-1} S_{j,n+N} \Delta y_{n,0} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\partial E_{j,0}}{\partial y_{n,0}} \Delta y_{n,0}, \quad \text{pour } j = n_2, n_2 + 1, \dots, N-1 = 2, 3 \quad .$$

Comme  $\mathbf{E}_M$  ne dépends que de  $\mathbf{y}_{M-1}$  :

$$-E_{j,M} = \sum_{n=0}^{N-1} S_{j,n} \Delta y_{n,M-1} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\partial E_{j,M}}{\partial y_{n,M-1}} \Delta y_{n,M-1}, \quad \text{pour } j = 0, 1, \dots, n_2 - 1 = 0, 1 \quad .$$

On se retrouve ainsi avec un ensemble d'équations linéaires pour les corrections  $\Delta\mathbf{y}$  qui peut être résolu avec l'élimination de Gauss. On peut arranger cet ensemble en un système linéaire de la forme  $A * X = B$  où  $X = \Delta y_{j,k}$ . Le premier  $2 \times 4$  bloc d'éléments non nuls de la matrice  $A$  de dimensions  $4M \times 4M$  se trouvera dans le coin gauche et contient la condition frontière du point  $k = 0$ . Ensuite, pour un point intérieur,

$$-E_{j,k} = \sum_{n=0}^{N-1} S_{j,n} \Delta y_{n,k-1} + \sum_{n=N}^{2N-1} S_{j,n} \Delta y_{n-N,k}, \quad \text{pour } j = 0, 1, \dots, N-1.$$

Donc pour  $k = 1$ , le premier point intérieur formera un premier bloque  $4 \times 8$  en dessous du bloc  $2 \times 4$ . Le second point intérieur  $k = 2$  formera un autre bloque  $4 \times 8$ , placé en dessous du précédent. Il y aura ainsi  $M - 1$  blocs, pour les  $M - 1$  points intérieurs. Finalement, le dernier bloc  $2 \times 4$  correspondra à la condition frontière au dernier point.

La première correction  $X = \Delta y_{j,k}$  est trouvée en solutionnant ce système d'équations à partir d'un essai initial pour chaque coefficient de la matrice  $4M \times 4M$   $A$  et de la matrice  $4M \times 1$   $B$ . La solution,  $y_{j,k} + \Delta y_{j,k}$ , sera utilisée comme point de départ pour la prochaine itération et ainsi de suite. Chaque itération calculera une nouvelle correction, qui devrait être de plus en plus petite. Une correction moyenne est calculée, appelée *err*, en sommant la valeur absolue de toutes les corrections, pondérées par un facteur d'échelle approprié pour chacune des  $N$  variables. Lorsque  $err \leq conv$ , la valeur de la précision demandée, la méthode a convergé et les itérations cessent. Il faut donc fournir un vecteur *scalv* mesurant la grandeur typique de chacune des variables. Dans notre cas, comme  $f(r)$  et  $a(r)$  vont de 0 à 1,  $scalv(f) = scalv(a) = 1$ . Pour leurs dérivées, on utilise la longueur d'onde de Compton :

$$\frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\hbar}{mc} \quad . \quad (I.4)$$

Pour trouver le terme de masse du champ de jauge et du champ scalaire, il faut développer le lagrangien autour de  $|\phi|^2 = v$  (voir [28]). Avec  $\phi(x) = v + \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1(x) + i\phi_2(x))$ , le terme cinétique devient :

$$\begin{aligned} (D_\mu \phi) (D^\mu \phi)^* &= (\partial_\mu - ieA_\mu)\phi(\partial^\mu + ieA^\mu)\phi^* \\ &= (\partial_\mu \phi - ieA_\mu \phi)(\partial^\mu \phi^* + ieA^\mu \phi^*) \\ &= \left[ \partial_\mu \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2) - ieA_\mu \left( v + \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2) \right) \right] \cdot \\ &\quad \left[ \partial^\mu \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2) + ieA^\mu \left( v + \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2) \right) \right] \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_2)^2 + e^2 v^2 A^\mu A_\mu + \dots \end{aligned}$$

Ce qui donne  $m_A^2 = 2e^2 v^2$ , et après changement d'échelle,  $m_A = \sqrt{2}e$ . Pour le champ scalaire, le

potentiel devient (avec  $|\phi|^2 = v^2 + \frac{2v}{\sqrt{2}}\phi_1 + \frac{1}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2)$ ) :

$$\begin{aligned}
V(\phi^* \phi) &= \lambda (|\phi|^2 - \varepsilon v^2)(|\phi|^2 - v^2)^2 \\
&= \lambda \left[ -\varepsilon v^6 + (2\varepsilon v^4 + v^4)|\phi|^2 - (2v^2 + \varepsilon v^2)|\phi|^4 + |\phi|^6 \right] \\
&= \lambda \left[ -\varepsilon v^6 + (2\varepsilon v^4 + v^4) \left( v^2 + \frac{2v}{\sqrt{2}}\phi_1 + \frac{1}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2) \right) \right. \\
&\quad \left. - (2v^2 + \varepsilon v^2) \left( v^2 + \frac{2v}{\sqrt{2}}\phi_1 + \frac{1}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2) \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \left( v^2 + \frac{2v}{\sqrt{2}}\phi_1 + \frac{1}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2) \right)^3 \right] \\
&= \lambda [2v^4(1 - \varepsilon)\phi_1^2 + \dots] \quad ,
\end{aligned}$$

donnant une masse de  $\frac{1}{2}m_\phi^2 = 2v^4(1 - \varepsilon)$ , et après changement d'échelle,  $m_\phi^2 = 4(1 - \varepsilon)$ . On peut donc fixer  $scalv(f') = 2\sqrt{(1 - \varepsilon)}$  et  $scalv(a') = \sqrt{2}e$ .