

Université de Montréal

**Quotients d'une variété algébrique par un groupe
algébrique linéairement réductif et ses sous-groupes
maximaux unipotents**

par

Robin Sirois-Miron

Département de mathématiques et de statistique

Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en mathématiques

Orientation mathématiques fondamentales

janvier 2010

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

**Quotients d'une variété algébrique par un groupe
algébrique linéairement réductif et ses sous-groupes
maximaux unipotents**

présenté par

Robin Sirois-Miron

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Khalid Benabdallah

(président-rapporteur)

Abraham Broer

(directeur de recherche)

Pavel Winternitz

(membre du jury)

Mémoire accepté le:

18 janvier 2010

RÉSUMÉ ET MOTS CLÉS

RÉSUMÉ

La construction d'un quotient, en topologie, est relativement simple ; si G est un groupe topologique agissant sur un espace topologique X , on peut considérer l'application naturelle de X dans X/G , l'espace d'orbites muni de la topologie quotient. En géométrie algébrique, malheureusement, il n'est généralement pas possible de munir l'espace d'orbites d'une structure de variété. Dans le cas de l'action d'un groupe linéairement réductif G sur une variété projective X , la théorie géométrique des invariants nous permet toutefois de construire un morphisme de variété d'un ouvert U de X vers une variété projective $X//U$, se rapprochant autant que possible d'une application quotient, au sens topologique du terme.

Considérons par exemple $X \subseteq \mathbb{P}^n$, une k -variété projective sur laquelle agit un groupe linéairement réductif G et supposons que cette action soit induite par une action linéaire de G sur \mathbb{A}^{n+1} . Soit $\widehat{X} \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$, le cône affine au dessus de X . Par un théorème de la théorie classique des invariants, il existe alors des invariants homogènes $f_1, \dots, f_r \in k[\widehat{X}]^G$ tels que

$$k[\widehat{X}]^G = k[f_1, \dots, f_r].$$

On appellera le nilcone, que l'on notera \mathcal{N} , la sous-variété de X définie par le locus des invariants f_1, \dots, f_r . Soit $\text{Proj}(k[\widehat{X}]^G)$, le spectre projectif de l'anneau des invariants. L'application rationnelle

$$\pi : X \dashrightarrow \text{Proj}(k[f_1, \dots, f_r])$$

induite par l'inclusion de $k[\widehat{X}]^G$ dans $k[\widehat{X}]$ est alors surjective, constante sur les orbites et sépare les orbites autant qu'il est possible de le faire ; plus précisément, chaque fibre contient exactement une orbite fermée. Pour obtenir une application régulière

satisfaisant les mêmes propriétés, il est nécessaire de jeter les points du nilcone. On obtient alors l'application quotient

$$\pi : X \setminus \mathcal{N} \rightarrow \text{Proj}(k[f_1, \dots, f_r]).$$

Le critère de Hilbert-Mumford, dû à Hilbert et repris par Mumford près d'un demi-siècle plus tard, permet de décrire \mathcal{N} sans connaître les f_1, \dots, f_r . Ce critère est d'autant plus utile que les générateurs de l'anneau des invariants ne sont connus que dans certains cas particuliers. Malgré les applications concrètes de ce théorème en géométrie algébrique classique, les démonstrations que l'on en trouve dans la littérature sont généralement données dans le cadre peu accessible des schémas. L'objectif de ce mémoire sera, entre autres, de donner une démonstration de ce critère en utilisant autant que possible les outils de la géométrie algébrique classique et de l'algèbre commutative. La version que nous démontrerons est un peu plus générale que la version originale de Hilbert [**H**] et se retrouve, par exemple, dans [**K**]. Notre preuve est valide sur \mathbf{C} mais pourrait être généralisée à un corps k de caractéristique nulle, pas nécessairement algébriquement clos.

Dans la seconde partie de ce mémoire, nous étudierons la relation entre la construction précédente et celle obtenue en incluant les covariants en plus des invariants. Nous démontrerons dans ce cas un critère analogue au critère de Hilbert-Mumford (Théorème 6.3.2). C'est un théorème de Brion [**Br**] pour lequel nous donnerons une version un peu plus générale. Cette version, de même qu'une preuve simplifiée d'un théorème de Grosshans [**G**] (Théorème 6.1.7), sont les éléments de ce mémoire que l'on ne trouve pas dans la littérature.

MOTS CLÉS

Groupes linéairement réductifs, Sous-groupe maximaux unipotents, Sous-groupes à 1 paramètre, Invariants, Covariants, Quotients, Critère de Hilbert-Mumford, Nilcone.

ABSTRACT AND KEY WORDS

ABSTRACT

The topological notion of a quotient is fairly simple. Given a topological group G acting on a topological space X , one gets the natural application from X to the quotient space X/G . In algebraic geometry, unfortunately, it is generally not possible to give the orbit space the structure of an algebraic variety. In the special case of a linearly reductive group acting on a projective variety X , the geometric invariant theory allows us to get a morphism of variety from an open U of X to a projective variety $X//G$, which is as close as possible to a quotient map, from a topological point of view.

As an example, let $X \subseteq \mathbb{P}^n$ be a k -projective variety on which acts a linearly reductive group G . Suppose further that this action is induced by a linear action of G on \mathbb{A}^{n+1} and let $\widehat{X} \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$ be the affine cone over X . By an important theorem of the classical invariants theory, there exist homogeneous invariants $f_1, \dots, f_r \in k[\widehat{X}]^G$ such as

$$k[\widehat{X}]^G = k[f_1, \dots, f_r].$$

The locus in X of f_1, \dots, f_r is called the nullcone, noted \mathcal{N} . Let $\text{Proj}(k[\widehat{X}]^G)$ be the projective spectrum of the invariants ring. The rational map

$$\pi : X \dashrightarrow \text{Proj}(k[f_1, \dots, f_r])$$

induced by the inclusion of $k[\widehat{X}]^G$ in $k[\widehat{X}]$ is then surjective, constant on the orbits and separates orbits as much as possible, that is, the fibres contains exactly one closed orbit. A regular map is obtained by removing the nullcone ; we then get a regular map

$$\pi : X \setminus \mathcal{N} \rightarrow \text{Proj}(k[f_1, \dots, f_r])$$

which still satisfy the preceding properties. The Hilbert-Mumford criterion, due to Hilbert and revisited by Mumford nearly half-century later, can be used to describe \mathcal{N} without knowing the generators of the invariants ring. Since those are rarely known, this criterion had proved to be quite useful. Despite the important applications of this criterion in classical algebraic geometry, the demonstrations found in the literature are usually given through the difficult theory of schemes. The aim of this master thesis is therefore, among others, to provide a demonstration of this criterion using classical algebraic geometry and of commutative algebra. The version that we demonstrate is somewhat wider than the original version of Hilbert **[H]**; a schematic proof of this general version is given in **[K]**. Finally, the proof given here is valid for \mathbb{C} but could be generalised to a field k of characteristic zero, not necessarily algebraically closed.

In the second part of this thesis, we study the relationship between the preceding constructions and those obtained by including covariants in addition to the invariants. We give a Hilbert-Mumford criterion for covariants (Theorem 6.3.2) which is a theorem from Brion **[Br]** for which we prove a slightly more general version. This theorem, together with a simplified proof of a theorem of Grosshans **[G]** (Theorem 6.1.7), are the elements of this thesis that can't be found in the literature.

KEY WORDS

Linearly reductive groups, Maximal unipotent subgroups, 1 parametre subgroups, Invariants, Covariants, Quotients, Hilbert-Mumford criterion, Nullcone.

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ ET MOTS CLÉS	iv
ABSTRACT AND KEY WORDS	vi
Introduction	1
0.0.1. Introduction	1
0.0.2. Classification des courbes elliptiques	1
0.0.3. Théorie classique des invariants	5
0.0.4. Critère de Hilbert-Mumford	7
0.0.5. Covariants	9
Chapitre 1. Préliminaires	12
1.1. Résultats d'algèbre commutative	13
1.1.1. Résultats élémentaires	13
1.1.2. Localisation et anneaux locaux	15
1.1.3. Anneaux gradués	15
1.1.4. Séries de puissances	16
1.2. Résultats de géométrie algébrique	18
1.2.1. Spec et variétés affines	18
1.2.2. Proj et variétés projectives	20
1.2.3. Morphismes de variétés	21
1.2.4. Variétés normales et non singulières	22
1.2.5. Complétion	23
1.3. Groupes linéairement réductifs	25
1.3.1. Groupes linéaires algébriques	25

1.3.2. Groupes linéairement réductifs	26
1.3.3. Caractères et sous-groupes à 1 paramètre	28
1.4. Groupes semi-simples	32
Chapitre 2. Quotient affine : cas où G est fini	35
2.1. Théorème de Hilbert pour un groupe fini	36
2.2. Construction d'un quotient géométrique	37
Chapitre 3. Quotient affine	39
3.1. Classification des endomorphismes d'un espace vectoriel	39
3.2. Théorème de finitude de Hilbert	42
3.3. Construction d'un quotient affine	43
3.4. Étude des fibres	47
Chapitre 4. Quotient projectif	49
4.1. Construction globale	50
4.2. Construction locale	51
Chapitre 5. Le critère de Hilbert-Mumford	54
5.1. Le critère de Hilbert-Mumford	54
5.2. Classification des courbes elliptiques	66
Chapitre 6. Géométrie des covariants	69
6.1. Théorème de finitude pour les covariants	69
6.1.1. Covariants de la représentation régulière	70
6.1.2. Principe de transfert de Borel	75
6.1.3. Théorème de finitude	77

6.2. Propriétés de séparation des covariants	77
6.3. Critère de Hilbert-Mumford-Brion	80
Chapitre 7. Résultats en caractéristique p	83
Bibliographie	87

INTRODUCTION

0.0.1. Introduction

Un problème de moduli, en géométrie algébrique, est la recherche d'une variété algébrique paramétrisant des classes d'équivalence de certains objets mathématiques. L'intérêt pour cette question remonte à l'époque de l'école italienne de géométrie algébrique, où elle sera abordée du point de vue de la géométrie birationnelle. Citons, par exemple, le problème de la classification des courbes algébriques de genre g fixé à isomorphisme près. Même dans ce cas simple¹, une description explicite de l'espace moduli n'est connue que pour $g \leq 2$. Nous discuterons dans cette introduction du cas de la classification des courbes elliptiques (le cas $g = 1$)².

Une fois traduit dans le langage de la géométrie algébrique, ce type de problème de classification peut souvent être remplacé par celui de la construction d'un quotient d'une variété algébrique, affine ou projective, par un groupe algébrique linéairement réductif. La théorie géométrique des invariants, introduite par Mumford autour de 1960 et reposant sur le formalisme des schémas de Grothendieck et Serre, donne un moyen efficace pour construire un tel quotient. Dans ce mémoire, nous rappellerons certains résultats cette théorie avec en tête la construction d'un quotient projectif pour l'action d'un groupe linéairement réductif sur une variété projective.

0.0.2. Classification des courbes elliptiques

Pour obtenir une classification des courbes elliptiques à isomorphisme près, la première étape consiste à traduire le problème dans le langage de la géométrie algébrique.

¹Par rapport au problème de la classification des surfaces algébriques par exemple.

²Nous référerons le lecteur intéressé à [M, Lecture II] pour un exposé accessible sur le problème général de la construction d'un espace moduli pour les courbes algébriques de genre fixé.

Formellement, une courbe elliptique est une courbe algébrique complète et non singulière de genre 1. Bien que projective, une telle variété n'est pas, a priori, une sous-variété d'un espace projectif. On peut par contre démontrer que l'ensemble des courbes elliptiques à isomorphisme près est isomorphe à l'ensemble des courbes cubiques planes non singulières à transformation projective près. Le problème de la construction d'un espace moduli pour les courbes elliptiques revient alors à celui de la construction d'un espace quotient pour les classes d'équivalence projectives des courbes cubiques non singulières.

Commençons par un bref rappel sur les courbes cubiques. Considérons $\mathbb{C}[x, y, z]$, l'anneau des polynômes en trois variables et notons $\mathbb{C}[x, y, z]_n$ la tranche constituée des polynômes homogènes de degré n . Soit $f \in \mathbb{C}[x, y, z]_n$, un polynôme homogène non nul ; nous obtenons alors que $f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^n f(x, y, z)$ pour tous $\lambda \in \mathbb{C}$, c'est-à-dire que les zéros de f forment un cône de $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^3$. Parler des zéros d'un polynôme homogène de $\mathbb{C}[x, y, z]$ dans le plan projectif $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ a donc un sens, et ce, même si les éléments de $\mathbb{C}[x, y, z]_n$ ne sont pas des fonctions sur $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$. Soit $f \in \mathbb{C}[x, y, z]_3$, non nul ; la sous-variété projective définie par l'ensemble des zéros de f dans $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ sera appelée une courbe cubique plane. Remarquons qu'une telle courbe peut toujours être recouverte par les courbes affines plane $\{f(1, y, z) = 0\}$, $\{f(x, 1, z) = 0\}$ et $\{f(x, y, 1) = 0\}$. Une courbe projective plane sera dite singulière si une des courbes affines la recouvrant est singulière. Par exemple, $\{x^3 - y^2z = 0\} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ est singulière en $(1, 0, 0)$ puisque $\{x^3 - y^2 = 0\} \subset \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$ possède un point de rebroussement en $(0, 0)$ alors que $\{x^3 - xz^2 - y^2z = 0\} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ est non singulière. Soit maintenant $\sigma \in PGL_3(\mathbb{C})$ une transformation projective de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$. On notera $\sigma(C)$ la cubique obtenue à partir de C par l'action de σ sur $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$. Nous dirons de deux cubiques C et C' qu'elles sont projectivement équivalentes s'il existe une transformation projective $\sigma \in PGL_3(\mathbb{C})$ telle que $C' = \sigma(C)$ et vérifierons que cette relation définit une relation d'équivalence.

Pour se ramener au problème de la construction d'une variété quotient, il ne nous reste plus qu'à construire une immersion de l'ensemble des courbes cubiques dans un espace projectif. Autrement dit, nous voudrions considérer les cubiques non plus

comme sous-variétés de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, mais plutôt comme points d'un espace projectif plus grand en l'occurrence $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^9$.

Considérons C , une cubique définie par $f \in \mathbb{C}[x, y, z]_3$. On peut alors écrire

$$f = \xi_1 x^3 + \xi_2 x^2 y + \xi_3 x^2 z + \xi_4 x y^2 + \xi_5 x y z + \xi_6 x z^2 + \xi_7 y^3 + \xi_8 y^2 z + \xi_9 y z^2 + \xi_{10} z^3.$$

Puisque les coefficients ξ_1, \dots, ξ_{10} et $\lambda \xi_1, \dots, \lambda \xi_{10}$ définissent la même cubique, on obtient alors une bijection entre l'ensemble des cubiques et les points de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^9$. Notons alors $(\xi_1^\sigma : \dots : \xi_{10}^\sigma)$, le point de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^9$ correspondant à $\sigma(C)$. On peut alors étendre l'action de $PGL_3(\mathbb{C})$ à une action sur $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^9$ en posant $\sigma * (\xi_1, \dots, \xi_{10}) = (\xi_1^\sigma : \dots : \xi_{10}^\sigma)$. Remarquons que si C est une cubique correspondant au point $x \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^9$, $\sigma(C)$ correspond alors au point $\sigma * x$. Notons X^s l'ensemble des points de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^9$ correspondant à des cubiques non singulières. Nous obtenons alors les correspondances biunivoques suivantes.

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Courbes cubiques} \\ \text{à transformation projective près} \end{array} \right\} \xleftrightarrow{1:1} \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^9 / PGL_3(\mathbb{C})$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Courbes elliptiques} \\ \text{à isomorphisme près} \end{array} \right\} \xleftrightarrow{1:1} \left\{ \begin{array}{c} \text{Courbes cubiques non singulières} \\ \text{à transformation projective près} \end{array} \right\} \xleftrightarrow{1:1} X^s / PGL_3(\mathbb{C})$$

Le problème de la construction d'un espace moduli pour les courbes elliptiques est alors remplacé par le problème de la construction d'un quotient de X^s par $PGL_3(\mathbb{C})$, c'est-à-dire d'une variété algébrique dont l'espace sous-jacent s'approche d'un espace d'orbite. Commencerons par construire un quotient de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^9$ par $PGL_3(\mathbb{C})$.

Nous utiliserons pour ce faire un résultat important de la théorie classique des invariants. Remarquons d'abord que l'action, non linéaire, de $PGL_3(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^9$ peut être remplacée par une action de $SL_3(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{10}$ induisant l'action précédente. Cette action est simplement l'action naturelle de $SL_3(\mathbb{C})$ sur $S^3(\mathbb{C}^3)$, la puissance symétrique des polynômes de degré 3. Nous utiliserons alors la théorie classique des invariants pour trouver un système de générateurs pour l'algèbre des fonctions polynomiales sur $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{10}$ invariantes par l'action de $SL_3(\mathbb{C})$. Dans le cas présent, la construction d'un tel système par Aronhold [Ar] remonte à 1849.

³Une autre approche consiste à construire une immersion des cubiques dans l'espace des ensembles non ordonnés de 4 points, les cycles de degré 4 de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, voir à cet effet [M3, Chapitre 4].

Proposition 0.0.1. $\mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_{10}]^{SL_3(\mathbb{C})} = \mathbb{C}[S, T]$ où S et T sont des polynômes homogènes dans ξ_1, \dots, ξ_{10} de degré 4 et 6 respectivement⁴.

Les invariants T et S nous serviront à construire une application rationnelle de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^9$ dans $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$. Considérons en effet x , un point de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^9$, et \hat{x} , un point de $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{10}$ au dessus de x . On peut alors considérer $\frac{T^6}{S^4}$ comme une fonction rationnelle sur $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^9$ en posant $\frac{T^6(x)}{S^4(x)} = \frac{T^6(\hat{x})}{S^4(\hat{x})}$. Notons que cette définition ne dépend pas du choix du représentant, puisque T^6 et S^4 sont homogènes de même degré. On obtient alors l'application rationnelle

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^9 &\dashrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \\ x &\mapsto \frac{S(\hat{x})^6}{T(\hat{x})^4} \end{aligned}$$

invariante sous l'action de $PGL_3(\mathbb{C})$ et définie sur tout $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^9$ à l'exception des points x pour lesquels $T^6(\hat{x})$ et $S^4(\hat{x})$ sont simultanément nuls. On appellera le nilcone, noté \mathcal{N} , le cône de $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{10}$ constitué de ces points. Par abus de notation, on notera aussi \mathcal{N} le sous-ensemble de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^9$ correspondant. Nous obtiendrons alors l'application

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^9 \setminus \mathcal{N} &\rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \\ x &\mapsto \frac{S(\hat{x})^6}{T(\hat{x})^4} \end{aligned}$$

Un des objectifs de ce mémoire est de montrer qu'une telle application est surjective et qu'elle sépare les classes d'équivalences autant qu'il est possible de le faire. Les points de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^9 \setminus \mathcal{N}$, notés X^{ss} , seront alors appelés points semi-stables et on dira de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ qu'il est un quotient projectif de X^{ss} par $PGL_3(\mathbb{C})$, noté $X^{ss} // PGL_3(\mathbb{C})$. Dans le cas présent, il est possible de montrer que les points semi-stables correspondent aux courbes elliptiques auxquelles on doit cependant ajouter les cubiques dont les singularités sont des points doubles à tangentes distinctes. Nous démontrerons ces faits dans la section 5.2 à l'aide du critère de Hilbert-Mumford⁵. Remarquons seulement que le résultat pour les courbes elliptiques suit de la proposition suivante :

Proposition 0.0.2. *Soit $x \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^9$ et $\hat{x} \in \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{10}$. Alors il existe un invariant classique D tel que x représente une courbe elliptique si et seulement si $D(\hat{x}) = 0$. De plus D s'exprime comme $D = T^2 + 64S^3$.*

⁴On retrouvera une description explicite de S et T dans [S, p.191,192].

⁵Mumford en donne une démonstration explicite dans [M3, Chapitre 4] en utilisant les propriétés des invariants classiques P et Q obtenus par l'immersion dans l'espace des cycles de degré 4 de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$.

Remarque 0.0.1. La première partie de cette proposition est simplement une formulation des propriétés du discriminant d'une cubique.

Les courbes elliptiques sont donc semi-stables puisque D doit entre autre s'annuler sur les points où S et T s'annulent simultanément. Considérons maintenant la restriction de π aux cubiques non singulières :

$$\begin{aligned} \pi|_{X^s} : X^s &\rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \\ x &\mapsto \frac{S(\hat{x})^6}{T(\hat{x})^4} \end{aligned}$$

Il est possible de montrer que toutes les classes d'équivalence sont alors séparées par $\pi|_{X^s}$, c'est-à-dire que $\pi|_{X^s}(X^s)$ est un espace d'orbite. Malheureusement, l'application n'est plus surjective. Il sera en effet impossible d'obtenir $\frac{T^2}{S^3} = -64$ puisque l'on aurait alors $D = 0$. On peut par contre vérifier que c'est la seule valeur non admissible, de sorte que $\pi(X^s)$ est isomorphe à la droite affine. On dira alors que $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1$ est un quotient géométrique affine pour les courbes elliptiques.

En résumé, il est possible d'obtenir un espace moduli pour les courbes elliptiques, mais celui-ci ne sera pas projectif. Étant donné la structure projective de ces objets, on préférera souvent accepter en plus certaines courbes elliptiques dégénérées pour obtenir un espace projectif.

0.0.3. Théorie classique des invariants

Quelques mots maintenant sur la théorie classique des invariants, à laquelle auront contribué certains des plus grands mathématiciens du XIX^{ème} siècle, notamment Sylvester, Cayley, Gordan, Clebsch, Capelli, Gordan et Hilbert⁶. Considérons l'action naturelle de $SL_n(\mathbb{C})$ sur \mathbb{C}^n . Cette action induit alors une action sur $\mathbb{V}_n^d = S^d(\mathbb{C}^n)$, l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré d sur $(\mathbb{C}^n)^*$. Dans le langage de la théorie classique des invariants, on parlera de formes n -aires de degré d . On appellera base de Hilbert un système de générateurs pour $k[\mathbb{V}_n^d]^{SL_n(\mathbb{C})}$, l'algèbre des invariants. La recherche d'une telle base constitue le principal objet d'étude de la théorie classique des invariants. Comme le suggère l'exemple précédent, ce problème est lié de très près au problème géométrique de la classification des courbes algébriques.

⁶Nous référerons le lecteur intéressé à [O], pour un aperçu plus complet de la théorie classique des invariants.

Après les succès des méthodes constructives de Gordan qui démontrera qu'une telle base existe pour toutes les formes binaires, l'intérêt fut tout naturellement reporté sur les formes ternaires, pour lesquelles le problème se révélera beaucoup plus difficile⁷. En 1891, dans un article marquant de l'histoire des mathématiques [H], Hilbert démontrera qu'une base de Hilbert existe toujours pour les invariants classiques⁸. Plus précisément, Hilbert démontrera le théorème suivant.

Théorème 0.0.1 (Théorème de finitude de Hilbert classique). *Tout système fini de polynômes homogènes admet une base de Hilbert pour ses invariants comme pour ces covariants.*

Nous traiterons plus tard des covariants. Tous au long de ce mémoire, nous utiliserons la généralisation suivante de la première partie de ce théorème. Ce sera le théorème 5.1.1.

Théorème 0.0.2 (Théorème de finitude de Hilbert). *Soit G un groupe linéairement réductif agissant sur une variété affine X . Alors $k[X]^G$, l'algèbre des invariants, est de type fini.*

Considérons maintenant $X \subseteq \mathbb{P}^n$, une variété projective et G , un groupe linéairement réductif agissant sur X et soit \widehat{X} le cône affine au dessus de X . Par le théorème précédent, on peut alors écrire $k[X]^G = k[f_0, \dots, f_n]$ où $\deg(f_i) = d_i$. Comme dans l'exemple précédent, le nilcone, noté \mathcal{N} , désignera aussi bien le cône de \widehat{X} sur lesquels tous les générateurs s'annulent que la sous-variété de X correspondante. Nous pourrons alors construire les applications

$$\begin{array}{ccc}
 X & \overset{\pi}{\dashrightarrow} & \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \\
 \uparrow & & \nearrow \pi \\
 X - \mathcal{N} & &
 \end{array}$$

⁷Aujourd'hui encore, des systèmes générateurs ne sont explicitement connus que pour les formes binaires de degré 1 à 10 et 12 et pour les formes cubiques de degré 3.

⁸C'est cette démonstration non constructive qui inspirera à Gordan son célèbre commentaire «Das ist Theologie und nicht Mathematik», voir [O, p.40].

Nous aimerions pouvoir décrire le nilcone sans connaître les générateurs de l'anneau des invariants. Ironiquement, la réponse à cette question, donnée par la théorie géométrique des invariants, proviendra d'une méthode développée par Hilbert pour construire explicitement, en réponse aux critiques de Gordan, un système de générateurs.

0.0.4. Critère de Hilbert-Mumford

Pour donner une idée du critère de Hilbert-Mumford, commençons par le cas de l'action de $PGL_3(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^9$. Comme nous l'avons vu dans l'exemple de la classification des courbes elliptiques, on peut linéariser cette action vers une action de $SL_3(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{10}$, l'espace affine au dessus de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^9$.

Remarquons premièrement que $0 \in \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{10}$ est dans le nilcone puisque tous les invariants homogènes non constants s'y annulent. Considérons maintenant $x \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^9$ et $\hat{x} \in \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{10}$ un point au dessus de x . Supposons que 0 soit contenu dans la fermeture de $SL_3(\mathbb{C}) \cdot \hat{x}$. Par continuité des fonctions polynomiales, les invariants doivent aussi s'annuler sur \hat{x} , c'est-à-dire que $\hat{x} \in \mathcal{N}$. On montrera en fait dans ce mémoire qu'un point de $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{10}$ est dans le nilcone si et seulement s'il contient 0 dans la fermeture de son orbite. Dans la pratique, il est cependant difficile de vérifier cette condition. L'idée de Hilbert sera alors de remplacer $SL_3(\mathbb{C})$ par des sous-groupes plus agréables.

Considérons T_{μ} l'ensemble des sous-groupes de $SL_3(\mathbb{C})$ constitués des matrices de la forme

$$\lambda_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}(t) = \text{diag}(t^{\mu_1}, t^{\mu_2}, t^{\mu_3})$$

où $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{Z}$ tels que $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0$. Si $x_{i,j,k} = x^i y^j z^k$ où $i + j + k = 3$, est un monôme de degré 3, on remarque alors que $\lambda_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}(t)x_{i,j,k} = t^{i\mu_1 + j\mu_2 + k\mu_3} x^i y^j z^k$ d'où l'on déduira que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \lambda_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}(t)x_{i,j,k} = 0 \Leftrightarrow i\mu_1 + j\mu_2 + k\mu_3 > 0.$$

Disposons maintenant les monômes $x_{i,j,k}$ de la base comme dans le diagramme suivant⁹ :

⁹On retrouvera par exemple ce diagramme dans l'article original de Hilbert, voir [H, p.291].

$$\begin{array}{cccc}
 & & x^3 & \\
 & & x^2y & x^2z \\
 & xy^2 & xyz & xz^2 \\
 y^3 & y^2z & yz^2 & z^3
 \end{array}$$

Soit $\hat{x} \in \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{10}$. On remarque alors qu'il existe $\lambda_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}$ tel que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \lambda_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}(t)\hat{x} = 0$$

si et seulement si les monômes apparaissant dans \hat{x} sont strictement contenus dans l'intérieur d'un des demi-plan délimité par une droite passant par l'origine (xyz). Dans la figure ci-dessous, nous avons représentés en gras les monômes qui peuvent être non nul pour $\lambda_{1,2,-3}$.

$$\begin{array}{cccc}
 & & \mathbf{x^3} & \\
 & & \mathbf{x^2y} & x^2z \\
 & \mathbf{xy^2} & xyz & xz^2 \\
 \mathbf{y^3} & \mathbf{y^2z} & yz^2 & z^3
 \end{array}$$

Par exemple, pour $x^3 - y^2z$, on montre que $\lambda_{1,2,-3}(x^3 - y^2z) = t^3x^3 - ty^2z \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow 0$.

On possède donc un moyen efficace de déterminer si 0 est dans la fermeture de $T_\mu \cdot \hat{x}$. Un tel point est alors dans le nilcone puisque la fermeture $T_\mu \cdot \hat{x}$ est contenue dans celle de $SL_3(\mathbb{C}) \cdot \hat{x}$. Nous avons par exemple vérifié que $x^3 - y^2z$ est dans le nilcone. Le critère de Hilbert-Mumford montre que l'inverse est aussi vrai, à conjugaisons près de T_μ , c'est-à-dire que si 0 n'est pas contenu dans la fermeture de $\sigma T_\mu \sigma^{-1} \cdot \hat{x}$ pour tous $\sigma \in SL_3(\mathbb{C})$, alors il n'est pas non plus dans la fermeture de $SL_3(\mathbb{C}) \cdot \hat{x}$. Énonçons rigoureusement ce critère comme il apparaît dans [GIT, Théorème 2.1].

Théorème 0.0.3 (Critère de Hilbert-Mumford). *Soit G un groupe linéairement réductif agissant sur une variété affine X et T un tore maximal G . Supposons en plus que X possède un point fixe, noté 0. Soit x , un point de X différent de 0. Alors, 0 est contenu dans la fermeture de $G \cdot x$ si et seulement s'il existe $\lambda : k \rightarrow T \subseteq G$ et $g \in G$ tels que $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t) \cdot g \cdot x = 0$.*

Hilbert donnera une démonstration de ce critère, dans le cas de l'action de $SL_n(\mathbb{C})$ sur $A_{\mathbb{C}}^k$, en utilisant les séries convergentes [H, p.276-292]. Mumford en donnera une démonstration dans le cas général en remplaçant l'utilisation des séries convergentes par celle des séries formelles.

On peut aussi montrer une version plus générale de ce critère où le point fixe est remplacé par n'importe quel point d'orbite fermée. La démonstration de ce critère se retrouve par exemple dans [K, Théorème 1.4]. Une preuve de Richardson sur \mathbb{C} utilisant les méthodes de la théorie des groupes de Lie est aussi donnée dans [Bi].

Théorème 0.0.4 (Critère général de Hilbert-Mumford). *Soit G un groupe linéairement réductif agissant sur une variété affine X , $y \in X$ un point de X d'orbite fermée et x , un point de X non contenu dans l'orbite de y . Alors, la fermeture de $G \cdot x$ intersecte $G \cdot y$ non trivialement si et seulement si il existe $g \in G$ et $\lambda : \mathbb{C}^\times \rightarrow T$ un sous-groupe à 1 paramètre tel que $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t) \cdot g \cdot x = 0$*

Un des objectifs de ce mémoire est de donner une preuve relativement simple du théorème 0.0.4 dans le cas de $GL_n(\mathbb{C})$. Nous utiliserons pour cela des méthodes issues de la géométrie algébrique et un résultat simple de la théorie des diviseurs élémentaires. Notre preuve se trouvera à mi-chemin entre celle de Hilbert et celle de Mumford. Nous indiquerons aussi les modifications à apporter pour obtenir la version de Mumford, concernant essentiellement deux résultats difficiles de géométrie algébrique qui sont ici remplacé par des résultats plus simples.

0.0.5. Covariants

Comme nous l'avons vu précédemment, la classification des courbes elliptiques peut être obtenue en recourant aux invariants. Dans la seconde partie de ce mémoire, nous nous intéresserons aux applications qu'offre l'utilisation des covariants dans les problèmes de classification.

Soit G un groupe algébrique agissant sur une variété affine X . Nous supposons encore que le corps est \mathbb{C} . Un covariantes de type V , pour V une représentation de G , est une applications polynomiales G -équivariantes de X dans V . Dans le cas où V est la représentation triviale de G dans \mathbb{C} , on retrouve la définition d'un invariant.

Reconsidérons maintenant le cas de l'action de l'action de $SL_3(\mathbb{C})$ sur $S^3(\mathbb{C}^3)$ discuté précédemment. Un covariant classique est par exemple donné par la Hessienne

$$H : S^3(\mathbb{C}^3) \rightarrow S^3(\mathbb{C}^3),$$

où

$$H(f) = \begin{vmatrix} \partial^2 f / \partial^2 x & \partial^2 f / \partial x \partial y & \partial^2 f / \partial x \partial z \\ \partial^2 f / \partial y \partial x & \partial^2 f / \partial^2 y & \partial^2 f / \partial y \partial z \\ \partial^2 f / \partial z \partial x & \partial^2 f / \partial y \partial z & \partial^2 f / \partial^2 z \end{vmatrix}$$

En 1869 [Go], Gordan donnera explicitement les générateurs des covariants, qui sont au nombre de 34. Plus tard, Hilbert démontrera que les covariants sont toujours engendrés par un nombre fini de générateurs, voir le théorème 0.0.1.

Considérons U , le sous-groupe de $SL_3(\mathbb{C})$ constitué des matrices triangulaires supérieures unipotentes. Les éléments de $\mathbb{C}[S^3(\mathbb{C}^3)]^U$ sont alors appelés les semi-invariants. Nous montrerons plus tard que l'algèbre des covariants est isomorphe à l'algèbre des covariants.

Dans le cas d'un groupe semi-simple G agissant sur une variété affine X , l'algèbre des covariants est aussi isomorphe à $\mathbb{C}[X]^U$. Nous obtiendrons un résultat analogue au théorème de finitude de Hilbert classique en démontrant que $\mathbb{C}[X]^U$ est de type fini.

Supposons que $\mathbb{C}[X]^U = \mathbb{C}[f_1, \dots, f_k]$. Dans [Br], Brion démontre un résultat analogue au théorème 0.0.3 pour déterminer les points de X où les covariants f_1, \dots, f_k s'annulent simultanément. Nous montrerons une version légèrement plus générale, analogue au théorème 0.0.4, nous permettant de connaître les fibres de l'application

$$\begin{array}{ccc} X & \overset{\pi}{\dashrightarrow} & \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n \\ \uparrow & & \nearrow \kappa \\ X - \mathcal{N} & & \end{array}$$

Nous retrouverons le théorème de Brion dans le cas où X possède un point fixe sur lequel tous les covariants s'annulent, par exemple lorsque X est le cône de $A_{\mathbb{C}}^r$ au dessus d'une sous variété projective de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{r-1}$.

Le chapitre 1 contient les résultats de base qui seront nécessaires à la démonstration des résultats de ce mémoire. Nous y énoncerons les résultats élémentaires d'algèbre

commutative de même que les notions de géométrie algébrique avec lesquels nous serons amenées à travailler. Nous rappellerons aussi les résultats généraux de la théorie de la représentation des groupes linéaires algébriques, en particulier des groupes linéairement réductifs et semi-simples.

Nous discuterons dans le chapitre 2 des notions de base de la théorie géométrique des invariants à travers l'exemple de l'action d'un groupe fini sur une variété affine. Nous démontrerons une version du théorème 0.0.2 pour les groupes finis de même que l'existence d'un quotient géométrique. Nous n'aurons besoin pour cela que de quelques résultats élémentaires d'algèbre commutative.

Dans le chapitre 3, nous généraliserons les résultats du chapitre 2 dans le cas de l'action d'un groupe linéairement réductif sur une variété affine. Nous démontrerons le théorème 0.0.2 de même que l'existence d'une variété quotient. Contrairement au cas fini, nous montrerons qu'il est en général impossible d'obtenir un espace d'orbite. Nous utiliserons ces résultats dans le chapitre 4 pour construire un quotient projectif dans le cas où la variété de départ est projective.

La démonstration du critère de Hilbert-Mumford se retrouve dans le chapitre 5. Nous utiliserons les propriétés des séries formelles démontrées dans les préliminaires de même qu'un certain nombre de résultats de la géométrie algébrique classique. À titre d'application, nous étudierons plus en profondeur l'exemple de la classification des courbes elliptiques.

Dans le chapitre 6 nous nous intéresserons aux propriétés de séparation des covariants, les invariants d'un sous-groupe maximal unipotent d'un groupe semi-simple. À l'aide du principe de transfert de Borel, nous déduisons du théorème 0.0.2 un résultat analogue pour l'anneau des covariants. Suivant une idée de Brion, nous tenterons d'obtenir un résultat analogue au théorème 0.0.4. Nous y parviendrons pour certains cas particuliers.

Chapitre 1

PRÉLIMINAIRES

Afin d'énoncer plus précisément les résultats de ce mémoire, nous aurons besoin d'un certain nombre de notions de géométrie algébrique et de groupes linéaires algébriques que nous rappellerons brièvement dans cette section. Nous suggérons au lecteur de passer ce chapitre plutôt aride pour y revenir lorsque nous y ferons référence plus tard. Chaque fois que cela était possible, nous avons privilégié les résultats les plus simples. Sauf exceptions, les ouvrages de référence seront [A] pour l'algèbre commutative, [M] et [M2] pour la géométrie algébrique et [B] et [Hu] pour les groupes linéaires algébriques. Nous supposerons connus les résultats et définitions élémentaires de la théorie des anneaux et des espaces vectoriels.

Au lecteur souhaitant se faire une idée des résultats qui seront utilisés plus tard, nous suggérons : le survol de la sous-section 1.1.1 avant la lecture du chapitre 2, le survol des sous-sections 1.3.1 et 1.3.2 avant la lecture du chapitre 3, un retour sur la sous-section 1.2.2 avant la lecture du chapitre 4, un survol des théorèmes 1.1.10 et 1.2.5 et de la sous-section 1.3.3 avant la lecture du chapitre 5 de même que l'introduction de la section 1.4 avant la lecture du chapitre 6.

La section 1.1 contient les définitions et résultats d'algèbre commutative qui seront utilisés tout au cours de ce mémoire. Nous y référerons fréquemment dans les sections et chapitres ultérieurs. Dans la section 1.2, nous rappellerons les définitions de variétés affines et projectives. Nous rappellerons brièvement les notions de variétés normales, complètes et certains résultats sur les morphismes de variétés.

La section 1.3 est une introduction aux groupes linéairement réductifs. Nous commencerons par quelques rappels sur les groupes linéaires algébriques. Nous présenterons ensuite les résultats élémentaires de la théorie de la représentation des groupes linéairement réductifs et en déduirons quelques résultats importants sur l'action de tels groupes sur une variété affine. Nous discuterons enfin des notions de caractère et de sous-groupes à 1 paramètre qui seront essentielles pour comprendre et démontrer le critère de Hilbert-Mumford.

Dans la section 1.4, nous énoncerons enfin quelques résultats sur les groupes semi-simples. Nous y discuterons plus en détail des groupes maximaux unipotents et du lien les liant à la théorie de la représentation. Ces derniers résultats ne seront pas utilisés avant le chapitre 6.

Sauf mention contraire, k sera un corps de caractéristique nulle.

1.1. RÉSULTATS D'ALGÈBRE COMMUTATIVE

L'algèbre commutative est le fondement de la géométrie algébrique moderne. À cet égard, nous ne saurions trop conseiller au lecteur la lecture de l'excellent [A] pour une compréhension plus profonde des notions de géométrie algébrique présentées dans la section 1.2. Pour les démonstrations des résultats de la présente section, nous référerons la plus part du temps à [A] et quelquefois à [M] pour certains résultats élémentaires laissés en exercices dans [A].

1.1.1. Résultats élémentaires

Dans toute la section, $i : A \hookrightarrow B$ sera un homomorphisme injectif de k -algèbres et k est un corps de caractéristique nulle. Cet homomorphisme est dit **fini** si B est finiment engendré comme A -module de **type fini** si B est finiment engendrée comme k -algèbre, c'est-à-dire qu'il existe $f_1, \dots, f_n \in B$ tels que $B = k[f_1, \dots, f_n]$. Dans ce dernier cas, on dira aussi que B une **k -algèbre de type fini**. Par le théorème de la base de Hilbert [A, Théorème 7.5], une k -algèbre de type fini est noethérienne.

Un élément de B est dit entier sur A s'il est une racine d'un polynôme mônico à coefficient dans A . L'homomorphisme $i : A \hookrightarrow B$ est dit **entier** et l'algèbre B **entière** sur A si tous les éléments de B sont entiers sur A . La **fermeture intégrale** de A dans

B , notée \bar{A} , est la plus petite sous-algèbre de B telle que $i : A \hookrightarrow \bar{A}$ soit entier. La fermeture intégrale d'une k -algèbre intègre dans son corps de fraction K est appelée sa **normalisation**.

Les résultats élémentaires suivants reviendront fréquemment dans le reste du mémoire.

Lemme 1.1.1. *Soit $k \subseteq A \subseteq B$. Supposons que B est de type fini sur k et est intégrale sur A . Alors B est aussi de type fini sur k .*

DÉMONSTRATION. Voir [A], Théorème 7.8. □

Lemme 1.1.2 (Normalisation de Noether). *Soit k , un corps algébriquement clos et A une k -algèbre intègre de type fini. Alors il existe $y_1, \dots, y_k \in R$ algébriquement indépendants tels que R est entière sur $k[y_1, \dots, y_k]$*

DÉMONSTRATION. Voir [M] Chapitre 1, Section 1. □

Lemme 1.1.3. *Soit A et B des anneaux tels que $B \hookrightarrow A$ soit entière. Soit \mathfrak{q} un idéal de B et soit \mathfrak{p} et \mathfrak{p}' des idéaux premiers de B tels que $\mathfrak{p} \cap A = \mathfrak{p}' \cap A = \mathfrak{q}$ et tels que $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}'$. Alors $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}'$.*

DÉMONSTRATION. Voir [A], Théorème 5.16. □

Lemme 1.1.4 (Going up). *Soit A et B des anneaux tels que $B \hookrightarrow A$ soit entière. Soit $\mathfrak{p}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathfrak{p}_n$ une chaîne d'idéaux premiers de A et $\mathfrak{q}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathfrak{q}_m$, où $n > m$, une chaîne d'idéaux premiers de B tels que $\mathfrak{q}_i \cap A = \mathfrak{p}_i$. Alors la chaîne $\mathfrak{q}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathfrak{q}_m$ peut être compléter pour obtenir une chaîne $\mathfrak{q}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathfrak{q}_n$ telle $\mathfrak{q}_i \cap A = \mathfrak{p}_i$.*

DÉMONSTRATION. Voir [A], Théorème 5.11. □

Lemme 1.1.5 (Nullstellensatz, version faible). *Soit k un corps algébriquement clos, alors les seuls idéaux maximaux de $k[X_1, \dots, X_n]$ sont les idéaux de la forme $(X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$, où $a_1, \dots, a_n \in k$*

DÉMONSTRATION. Voir [M] Chapitre 1, Section 1. □

Soit I un idéal de $k[X_1, \dots, X_n]$ et E un sous-ensemble de $k[X_1, \dots, X_n]$. On notera $\mathcal{V}(I)$ l'ensemble des zéros communs des éléments I dans \mathbb{A}_k^n et $\mathcal{I}(E)$ l'idéal des fonctions polynomiales de $k[X_1, \dots, X_n]$ s'annulant sur E .

Lemme 1.1.6 (Nullstellensatz, version forte). Soit I un idéal de $k[X_1, \dots, X_n]$, alors $I(\mathcal{V}(I)) = \sqrt{I}$.

DÉMONSTRATION. Voir [M] Théorème 1, Chapitre 1, Section 2. □

Lemme 1.1.7. Soit une courte séquence exacte de A -modules :

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$$

Alors sont équivalents :

(i) M est noethérien ;

(ii) M' et M'' sont noethériens.

DÉMONSTRATION. Voir [A], proposition 6.3. □

Nous discuterons plus tard de l'interprétation géométrique de ces résultats.

1.1.2. Localisation et anneaux locaux

Rappelons qu'un anneau est dit local s'il possède un unique idéal maximal. Soit A un anneau intègre de corps de fraction K et \mathfrak{p} un idéal premier de A . L'anneau $A_{\mathfrak{p}} = \left\{ \frac{a}{b} \in K : a \in A, b \in A - \mathfrak{p} \right\}$ est appelé la localisation de A . On vérifie que c'est un anneau local d'idéal maximal $\mathfrak{p} = \left\{ \frac{a}{b} \in K : a \in \mathfrak{p}, b \in A - \mathfrak{p} \right\}$, voir [A, chapitre 3]. Géométriquement, on utilisera la localisation pour étudier une variété algébrique dans un «petit» voisinage.

1.1.3. Anneaux gradués

Nous rappellerons dans cette section quelques résultats sur les anneaux gradués. Les propriétés des anneaux gradués seront utilisées dans la construction des variétés projectives et pour démontrer certains résultats en caractéristique p en annexe. Rappelons qu'un anneau gradué est un anneau A muni d'une famille $(A_n)_{n \geq 0}$ de sous-groupe du sous-groupe additif de A telle que $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ et $A_m A_n \subseteq A_{m+n}$. Le sous-groupe A_n est alors la tranche constituée des éléments homogènes de degré n . Un idéal homogène, ou gradué, est un idéal engendré par des éléments homogènes. On définira en plus $A_+ = \bigoplus_{n=1}^{\infty} A_n$, l'idéal irrelevant de A .

Définition 1.1.1. Soit $A = \bigoplus_{n=0}^{+\infty} A_n$ un anneau gradué et $I = \bigoplus_{n=0}^{+\infty} I_n$ un idéal homogène, alors A/I est gradué par $(A/I)_n = A_n/I_n$. En particulier si $I_0 = 0$, $(A/I)_+ = A_+/I$.

Proposition 1.1.1. Si $A = \bigoplus_{n=0}^{+\infty} A_n$ est un anneau gradué tel que A_0 est noethérien. Alors, les énoncés suivants sont équivalents : (i) A est noethérien ; (ii) $A_+ = \bigoplus_{n=1}^{+\infty} A_n$ est un idéal finiment engendré ; (iii) A est une k -algèbre de type fini.

DÉMONSTRATION. Voir [A], Théorème 10.7 □

Définition 1.1.2. Soit f un élément homogène de A de degré d . On définit alors la localisation de A en f par $A_f = \{\frac{h}{f^k} : h \in A\}$. C'est un anneau local dont l'idéal maximal est $m = \{\frac{h}{f^k} : h \in A - (f)\}$.

On donne alors à A_f une structure d'anneau gradué en posant

$$(A_f)_n = \{\frac{h}{f^k} : h \in A_{n+dk}\}$$

La tranche constituée des éléments de degré 0 de A_f est notée $(A_f)_0$ et est importante dans la construction de variétés projectives. Plus précisément, on définit

$$(A_f)_0 = \{\frac{h}{f^k} : h \in A_{dk}\}$$

Pour plus de détail, voir [EGA, Chapitre II, Section 3].

1.1.4. Séries de puissances

Nous discuterons dans cette section de l'anneau des séries de puissances en une variable sur le corps des complexes. Les propriétés de ces séries, en particulier la proposition 1.1.10, joueront plus tard un rôle important dans la démonstration du critère de Hilbert-Mumford. Rappelons premièrement quelques résultats élémentaires.

Soit $\mathbb{C}[[t]]$, l'anneau des séries de puissances en une variable. On peut montrer que $\mathbb{C}[[t]]$ est un anneau local d'idéal maximal (t) . Notons $\mathbb{C}((t))$ le corps de fraction de $\mathbb{C}[[t]]$. Nous montrerons alors le résultat élémentaire suivant :

Lemme 1.1.8. $\mathbb{C}((t))$ est isomorphe à $\mathbb{C}[[t]][t^{-1}]$.

DÉMONSTRATION. Soit $f(t) \in \mathbb{C}[[t]]$ et soit k le premier entier tel que le k -ème coefficient est non nul. Quitte à multiplier par une constante, on peut alors écrire $f(t) = t^k(1 - \sum a_i t^i)$. On obtient alors que $\frac{1}{f(t)} = \frac{1}{t^k}(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (\sum a_i t^i)^n) \in \mathbb{C}[[t]][t^{-1}]$ □

Utilisons le résultat précédant pour définir une application de $\mathbb{C}((t))$ dans \mathbb{Z} .

$$\begin{aligned} \nu &: \mathbb{C}((t)) \rightarrow \mathbb{Z} \\ \sum_{n=k}^{\infty} a_n t^n &\mapsto k \end{aligned}$$

où a_k est le premier coefficient non nul de la série de puissances.

On remarque alors que $\nu(f) \geq 0$ si et seulement si $f \in \mathbb{C}[[t]]$. On vérifie en fait que ν définit une valuation sur $\mathbb{C}[[t]]$. Nous n'utiliserons cependant pas ce résultat ; le lemme suivant nous suffira.

Lemme 1.1.9. *Soit $f, h \in \mathbb{C}((t))$ tels que $\nu(f) \leq \nu(h)$. Alors $\frac{f}{h} \in \mathbb{C}[[t]]$.*

DÉMONSTRATION. Soit $f = \sum_{n=k}^{\infty} a_n t^n$ et $h = \sum_{n=k'}^{\infty} b_n t^n$ où $k \leq k'$. Quitte à multiplier f et h par une constante, on peut supposer que $h = t^{k'} + \sum_{n=k'+1}^{\infty} b_n t^n$. Posons maintenant $\tilde{f} = t^{-\nu(f)} f$ et $\tilde{h} = t^{-\nu(h)} h$ où $\nu(\tilde{f}) \geq 0$ et $\tilde{h} = 1 + \sum_{n=k'+1}^{\infty} b_n t^{n-k'}$. Remarquons alors que \tilde{f} et $d_{\tilde{h}}^1$ sont dans $k[[t]]$, c'est-à-dire que $\frac{f}{h} = \frac{\tilde{f}}{\tilde{h}} \in k[[t]]$ \square

La proposition suivante est un résultat de la théorie des diviseurs élémentaires et sera utilisée dans la démonstration du critère de Hilbert-Mumford.

Lemme 1.1.10. *Soit $g(t) = (g_{i,j})$, une matrice de $GL_n(\mathbb{C}((t)))$. Il existe alors des matrices $a(t)$ et $b(t)$ dans $GL_n(\mathbb{C}[[t]])$ telles que $g(t) = a(t)d(t)b(t)$, où*

$$d(t) = \begin{pmatrix} t^{N_1} & & & \\ & t^{N_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & t^{N_n} \end{pmatrix}$$

$$\text{et } N_1 \leq N_2 \leq \dots \leq N_n$$

DÉMONSTRATION. Soit g_{i_k, j_l} le coefficient de $g(t)$ ayant la plus petite valuation. Quitte à multiplier $g(t)$ à gauche et à droite par des matrices de permutations, on peut supposer que $g_{11} = g_{i_k, j_l}$. On a alors

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{g_{21}}{g_{11}} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -\frac{g_{n1}}{g_{11}} & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1n} \\ g_{21} & \ddots & & \\ \vdots & & & \\ g_{n1} & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{g_{12}}{g_{11}} & \dots & -\frac{g_{1n}}{g_{11}} \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & * & * & * \\ \vdots & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{pmatrix}$$

Par le lemme 1.1.9, matrices de part et d'autre de $g(t)$ sont à coefficients dans $GL_n(\mathbb{C}[[t]])$. On recommence ensuite l'opération avec la sous-matrice obtenue, jusqu'à l'obtention d'une matrice diagonale

$$d(t) = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$$

où $\nu(d_1) \leq \nu(d_2) \leq \dots \leq \nu(d_n)$. Nous remarquons enfin que

$$\begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^{\nu(d_1)} & & & \\ & t^{\nu(d_2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & t^{\nu(d_n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{-\nu(d_1)}d_1 & & & \\ & t^{-\nu(d_2)}d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & t^{-\nu(d_n)}d_n \end{pmatrix}$$

et que $t^{-\nu(d_i)}d_i \in GL_n(\mathbb{C}[[t]])$. □

1.2. RÉSULTATS DE GÉOMÉTRIE ALGÈBRE

Dans cette section, nous rappellerons certains résultats de géométrie algébrique nécessaire à la compréhension de ce mémoire. Les variétés affines et projectives seront traitées dans le formalisme des schémas. Comme nous le verrons, ce point de vue simplifiera de beaucoup la construction des morphismes de variété des prochains chapitres. Rappelons d'abord brièvement les constructions Spec et Proj que nous utiliserons plus tard.

1.2.1. Spec et variétés affines

Il existe deux approches pour définir une variété algébrique affine sur un corps k . Suivant l'approche classique, on peut définir les variétés affines comme les zéros dans \mathbb{A}^n d'une famille de polynômes de $k[x_1, \dots, x_n]$. Une seconde approche, plus abstraite, consiste à parcourir le chemin inverse et à définir une variété affine à partir d'une k -algèbre intègre de type fini. C'est cette seconde approche que nous suivrons. Pour les détails de cette construction, nous référons à [H] et [M] mais surtout au chapitre I.1 de [E2] pour les nombreux exemples.

Commençons par un résultat élémentaire de géométrie algébrique classique.

Théorème 1.2.1. *Soit X une variété affine classique. Nous avons alors les correspondances biunivoques*

$$\begin{aligned} \{\text{Points de } X\} &\leftrightarrow \{\text{Idéaux maximaux de } k[X]\} \\ \{\text{Sous-variétés irréductibles de } X\} &\leftrightarrow \{\text{Idéaux premiers de } k[X]\} \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. C'est essentiellement un corollaire des lemmes 1.1.5 et 1.1.6. Voir [M], proposition 2, Chapitre 1, Section 2. \square

Soit maintenant A une k -algèbre intègre de type fini. Sur l'ensemble $\text{Spec}(A)$ des idéaux premiers de A , nous définirons la topologie de Zariski en désignant comme fermés les sous-ensembles de la forme $V(E) = \{ \mathfrak{p} \in \text{Spec}(A) : \mathfrak{p} \supset E \}$ pour E un sous ensemble de A . Les ouverts seront alors les sous-ensembles de la forme $D(E) = \text{Spec}(A) - V(E)$ pour E un sous-ensemble de A . Une base de cette topologie est alors obtenue en prenant les ouverts distingués $X_f = \text{Spec}(A) - V((f))$ pour f un élément de A . Contrairement aux points de $\text{Spec}(A)$ correspondant aux idéaux maximaux de A , on remarque que $\text{Spec}(A)$ possède aussi des points non fermés correspondant aux idéaux premiers non maximaux. Par exemple, la fermeture du point correspondant à l'idéal premier (0) est la variété elle-même. On notera \mathfrak{m}_x l'idéal maximal correspondant à x , un point fermé de $\text{Spec}(A)$.

Enfin, on définira sur cet espace topologique une structure de variété affine abstraite en définissant sur les ouverts distingués une structure de faisceau d'anneaux, donnée par $\mathcal{O}(X_f) = A_f$, que l'on étendra à tous les ouverts.

A peut alors être vu comme l'anneau de coordonnées de $\text{Spec}(A)$; si $x \in \text{Spec}(A)$ et $f \in A$ la valeur de $f(x)$ est donnée par la valeur de f dans le corps A/\mathfrak{m}_x . Si k est algébriquement clos, $A/\mathfrak{m}_x \cong k$ par le Nullstellensatz et on retrouve la définition classique de l'anneau de coordonnées.

Exemple 1.2.1. Si on prend $\text{Spec}(k[X, Y])$, on retrouve alors la variété affine \mathbb{A}^2 avec en plus les points génériques correspondant aux courbes irréductibles de \mathbb{A}^2 et le point générique associé à l'idéal (0) .

Remarque 1.2.1. Si on demande simplement que A soit un anneau commutatif avec 1, nous obtenons la définition plus générale de schéma affine.

Pour un point x d'une variété affine X , nous noterons \mathcal{O}_x la localisation de l'anneau de coordonnées de X en l'idéal maximal \mathfrak{m}_x . Remarquons que puisque \mathcal{O}_x est un anneau local, l'image de x est le seul point fermé de la variété $\text{Spec}[\mathcal{O}_x]$. La localisation en géométrie algébrique correspond donc à l'idée de petit voisinage. Nous verrons plus tard qu'il est possible d'obtenir un plus petit voisinage encore par la complétion de \mathcal{O}_x .

Donnons maintenant la définition du produit de deux variétés affines.

Définition 1.2.1. Si $X = \text{Spec}(A)$ et $Y = \text{Spec}(B)$ sont des variétés affines sur k , on définit le produit de X et Y par $X \times Y = \text{Spec}(A \otimes_k B)$. On vérifie que cette variété satisfait la propriété universelle du produit et que l'espace sous-jacent est isomorphe au produit cartésien de X et de Y .

1.2.2. Proj et variétés projectives

La construction de la variété projective $\text{Proj}(S)$ pour une k -algèbre intègre graduée S est très semblable à celle de $\text{Spec}(A)$ pour une k -algèbre intègre A . Les détails de cette construction se retrouvent par exemple dans [EGA, Chapitre II, Section 3 et 4].

Comme ensemble, $\text{Proj}(S)$ est constitué des idéaux premiers gradués de S ne contenant pas l'idéal irrelevant S_+ .

Tout comme nous l'avons fait pour le Spec , on munie le l'ensemble $\text{Proj}(S)$ d'une topologie de Zariski. Les fermés de cette topologie sont alors les sous-ensembles de la forme

$$V_+(E) = V(E) \cap \text{Proj}(S) \text{ où } E \text{ est un sous-ensemble de } S$$

Les ouverts étant alors les sous-ensembles de la forme $D_+(E) := \text{Proj}(S) - V_+(E)$. Les $D_+(f)$ où f est un élément homogène de S sont les ouverts distingués, notés X_f , et forment une base d'ouvert pour la topologie de Zariski.

Comme dans le cas de $\text{Spec}(A)$, on définit sur $\text{Proj}(S)$ une structure de variété projective abstraite en fixant $\mathcal{O}(X_f) = S_{f,0}$ et en étendant ce faisceau aux autres ouverts.

Montrons que le Proj d'une k -algèbre graduée de type fini est une variété projective.

Proposition 1.2.1. $\text{Proj}(k[x_0, \dots, x_n]) \cong \mathbb{P}_n$.

DÉMONSTRATION. Voir [EGA], Théorème 2.4.3. □

Proposition 1.2.2. Soit S un anneau gradué à degré positif. Alors, pour tous $d > 0$, $\text{Proj}(S) \cong \text{Proj}(S^{(d)})$.

DÉMONSTRATION. Voir [EGA], Théorème 2.4.7. \square

Proposition 1.2.3. *Soit $S = k[f_1, \dots, f_m]$ une k -algèbre graduée de type fini, où $\deg(f_i) = n_i$. Alors $\text{Proj}(S)$ est une variété projective.*

DÉMONSTRATION. Soit n le plus grand commun multiple de n_1, \dots, n_m . On peut alors écrire $S^{(d)} = k[h_1, \dots, h_r]$, où $\deg h_i = n$. Soit I , le noyau de l'application

$$\varphi : k[h_1, \dots, h_r] \rightarrow k[x_1, \dots, x_r]$$

L'idéal I est alors l'idéal des relations entre les h_i et nous obtenons l'isomorphisme $k[h_1, \dots, h_r]/I \cong k[x_1, \dots, x_r]/I$.

Par le théorème précédent nous obtenons donc que

$$\text{Proj}(S) \cong \text{Proj}(S^{(d)}) \cong \text{Proj}(k[x_1, \dots, x_r]/I)$$

Par la proposition 1.2.1, $\text{Proj}(S)$ est donc isomorphe à la sous-variété de \mathbb{P}_{n-1} définie par les zéros communs des polynômes homogènes de I .

\square

1.2.3. Morphismes de variétés

Dans cette section, nous énoncerons quelques résultats sur les morphismes de variétés.

Rappelons qu'un morphisme $\varphi : X \rightarrow Y$ de variété est une application continue munie d'une famille d'homomorphismes de k -algèbres $\varphi_V^U : \mathcal{O}(U)_Y \rightarrow \mathcal{O}(V)_X$ satisfaisant certaines conditions de compatibilité (voir par exemple [E2] où [M] pour une définition plus complète). Les fibres de φ sont les sous-ensembles de X la forme $\varphi^{-1}(\varphi(x))$.

Soit X et Y des variétés irréductibles. Un morphisme $\varphi : X \rightarrow Y$ est dit dominant si son image est dense dans Y , c'est-à-dire $\overline{\varphi(X)} = Y$. Si φ est dominant, on montre que $\varphi^* : k[Y] \rightarrow k[X]$ est alors injectif faisant de $k(X)$ une extension de corps de $k(Y)$. Un morphisme φ dominant est dit birationnel si φ^* induit un isomorphisme de $k(Y)$ dans $k(X)$.

Théorème 1.2.2 (Théorème principal de Zariski). *Un morphisme bijectif et birationnel entre 2 variétés normales est un isomorphisme.*

DÉMONSTRATION. (Voir [M], Chapitre III, section 9, Proposition 1) □

Exemple 1.2.2. Soit G un groupe algébrique agissant sur une variété algébrique X et soit $x \in X$. Alors le morphisme $\psi_x : G \rightarrow \overline{G \cdot x}$ défini par $\psi_x(g) = g \cdot x$ est dominant.

1.2.4. Variétés normales et non singulières

Dans cette section, nous rappellerons certaines propriétés des variétés normales. nous montrerons entre autres qu'une courbe normale est non singulière. Nous montrerons aussi que les anneaux de coordonnées d'une variété normale et d'un ouvert de cette variété coïncident si et seulement si le bord est assez petit. Le premier résultat sera de première importance pour la démonstration du critère de Hilbert-Mumford alors que le second sera utilisé dans la généralisation de ce critère aux sous-groupes maximaux unipotents.

Définition 1.2.2. Soit $X = \text{Spec}(A)$ une variété affine. X est dite normale si tout anneau local de A est entier dans son corps de fraction.

Rappelons maintenant la définition d'un pôle.

Définition 1.2.3. Soit X une variété algébrique normale et $f \in k(X)$. Un pôle de f est une sous-variété irréductible fermée $Z \subseteq X$ de codimension 1 sur lequel f n'est pas définie.

Le lemme suivant nous indique l'importance de telles sous-variétés pour l'étude des variétés normales.

Lemme 1.2.1. Soit X une variété normale et $f \in k(X)$ une fonction globale non définie sur un sous-ensemble fermé Z . Alors Z est un pôle de f .

Exemple 1.2.3. Considérons la variété normale \mathbb{A}_2 . Le lemme précédent nous indique que les fonctions régulières sur \mathbb{A}_2 sont aussi régulières sur $\mathbb{A}_2 \setminus \{(0, 0)\}$, c'est-à-dire que l'anneau de coordonnées de $\mathbb{A}_2 \setminus \{(0, 0)\}$ est $k[x, y]$. En particulier, nous obtiendrons que $\mathbb{A}_2 \setminus \{(0, 0)\}$ est une variété quasi affine.

L'exemple précédent se généralise à tous les ouverts U d'une variété normale X telle que $\text{codim}(X \setminus U) \geq 2$.

Lemme 1.2.2. Soit X une variété normale et U un ouvert de X tel que $\text{codim}_X(X \setminus U) \geq 2$. Alors $k[X] = k[U]$.

DÉMONSTRATION. L'inclusion de $i^* : k[X] \hookrightarrow k[U]$ découle du fait que $i : U \hookrightarrow X$ est dominant. Montrons maintenant l'inclusion inverse. Soit $f \in k[X]$. Remarquons premièrement que i^* induit un isomorphisme entre $k(U)$ et $k(X)$. On peut donc identifier f à un élément de $k(X)$. Supposons que f ne soit pas un élément de $k[U]$, c'est-à-dire qu'il existe un sous-ensemble fermé de $X \setminus U$ sur lequel f n'est pas définie. Par le lemme 1.2.1, Z doit alors être de codimension 1 dans X , une contradiction.

□

Soit X une variété algébrique. Un point x de X est dit non singulier si \mathfrak{m}_x peut être engendré comme \mathcal{O}_x -module par r éléments, où r est la dimension de Krull de \mathcal{O}_x . De manière équivalente, les points non singuliers sont ceux où la dimension de l'espace tangent est minimale.

Proposition 1.2.4. *Soit X une variété normale et S l'ensemble des points singuliers de X . Alors $\text{codim}_X S \geq 2$*

DÉMONSTRATION. Voir [M], Chapitre III, Section 8, Proposition 1.

□

En particulier, nous obtiendrons le lemme important suivant :

Corollaire 1.2.1. *Une courbe algébrique normale est non singulière.*

Dans le contexte de la définition 1.2.3, la proposition 1.2.4 nous indique que les seules singularités d'une variété normale sont contenues dans des pôles.

1.2.5. Complétion

Dans cette section, nous discuterons de la notion de complétion d'une variété affine. Nous y énonçons le théorème de Cohen sur lequel reposera notre preuve du critère de Hilbert-Mumford.

Comme la plupart des notions de géométrie algébrique, la complétion d'une variété correspond à une notion analogue d'algèbre commutative. Soit A un anneau local d'idéal maximal \mathfrak{m} . Rappelons que la complétion \mathfrak{m} -adique de A , notée \widehat{A} , est obtenue en prenant la limite inverse de la filtration $A_0 \supseteq A_1 \supseteq \dots \supseteq A_n \supseteq \dots$, où $A_n = \mathfrak{m}^n$, où $A_n = \mathfrak{m}^n$, c'est-à-dire $\widehat{A} = \varprojlim (A / \mathfrak{m}^n)$.

Définition 1.2.4. Un anneau local A est dit complet dans la topologie \mathfrak{m} -adique s'il est égal à sa complétion \mathfrak{m} -adique.

Exemple 1.2.4. La complétion (t) -adique de $k[t]_{(t)}$ est $k[[t]]$ l'anneau des séries formelles en une variable. Par le lemme précédent on obtient donc que $\widehat{k[[t]]} \cong k[[t]]$

Nous référons à [A, Chapitre 10] pour plus de détail à ce sujet.

Définition 1.2.5. Une variété X est dite complète si pour toute variété Y , la projection $pr_X : X \times Y \rightarrow Y$ est fermée.

Exemple 1.2.5. Les variétés projectives, en particulier \mathbb{P}^n , sont complètes alors que les variétés affines, en particulier \mathbb{A}^n , ne le sont pas.

Pour un espace Hausdorff, cette dernière notion correspond à la notion variété compacte.

Énonçons maintenant le théorème de Cohen

Proposition 1.2.5. Soit X une \mathbb{C} -variété algébrique affine de dimension r et x un point régulier de X . Alors $\mathcal{O}_x / \mathfrak{m}_x^k$ est isomorphe à $\mathbb{C}[[y_1, \dots, y_r]] / (y_1, \dots, y_r)^k$ pour tous k . En particulier, $\widehat{\mathcal{O}_x}$ est isomorphe à $\mathbb{C}[[y_1, \dots, y_r]]$.

DÉMONSTRATION. Voir [M2], proposition 1.27. □

Corollaire 1.2.2. Soit X une courbe algébrique \mathbb{C} normale. Alors $\widehat{\mathcal{O}_x}$ est isomorphe à $\mathbb{C}[[t]]$.

DÉMONSTRATION. Par la proposition 1.2.1, une courbe normale est régulière. Le résultat est alors immédiat par la proposition précédente. □

Pour une courbe normale X , Nous obtiendrons les homomorphismes

$$\varphi \circ \psi : \mathbb{C}[X] \rightarrow \mathcal{O}_x \rightarrow \mathbb{C}[[t]]$$

telle que $(\varphi \circ \psi)^{-1}(t) = \mathfrak{m}_x$. D'un point de vue géométrique, $\text{Spec}(\mathbb{C}[[t]])$ est un schéma affine constitué de deux points ; un point fermé associé à l'idéal (t) et un point générique associé à (0) . Nous obtenons alors un morphisme $\phi : \text{Spec}(\mathbb{C}[[t]]) \rightarrow X$, tel que $\phi^* = \varphi \circ \psi$, envoyant le point fermé de $\text{Spec}(\mathbb{C}[[t]])$ sur x et le point générique sur celui de X . Nous utiliserons une construction semblable dans la démonstration du critère de Hilbert-Mumford 5.1.1.

1.3. GROUPES LINÉAIREMENT RÉDUCTIFS

1.3.1. Groupes linéaires algébriques

Dans cette section, nous discuterons des résultats de la théorie des groupes linéaires algébriques que nous utiliserons tout au long du mémoire. Nous nous baserons essentiellement sur les classiques [Hu] et [B].

Soit G une variété algébrique définie sur k . On dira que G est un groupe linéaire algébrique si l'ensemble des points de G est munie d'une structure de groupe compatible avec la structure de variété de G . Plus précisément, on demande l'existence de morphisme de variétés $m : G \times G \rightarrow G$, $i : G \rightarrow G$ et d'un élément identité $e \in G$ satisfaisant les axiomes usuels d'un groupe. Un groupe linéaire algébrique est dit affine si la variété sous-jacente est affine. Tous les groupes étudiés dans ce mémoire étant affines, nous utiliserons groupe linéaire algébrique au lieu de groupe linéaire algébrique affine.

Exemple 1.3.1. Le groupe des matrices inversibles $n \times n$ à coefficients dans k , $GL_n(k)$, est un groupe linéaire algébrique dont l'anneau de coordonnées est $k[x_{1,1}, \dots, x_{n,n}, \frac{1}{\det}]$. Le groupe des matrices $n \times n$ à déterminant 1, $SL_n(k)$ est quant à lui un groupe linéaire algébrique dont l'anneau de coordonnées $k[x_{1,1}, \dots, x_{n,n}]/(\det - 1)$. Pour ces deux groupes comme pour les groupes de matrices en général, l'identité sera notée I

Le théorème suivant montre qu'en fait, tous les groupes linéaires algébriques sont isomorphes à un sous-groupe fermé d'un certain GL_n .

Théorème 1.3.1. *Soit G un groupe algébrique sur k . Alors G est isomorphe à un sous-groupe de $GL_n(k)$ pour une certaine valeur de n .*

DÉMONSTRATION. Voir [B], Proposition 1.10. □

L'image de G est alors appelée une réalisation de G dans $GL_n(k)$. Ce théorème nous permet de définir pour les groupes linéaires les mêmes notions que pour $GL_n(k)$. On dit alors qu'un élément x_s de G est semi-simple si la matrice représentant x_s dans $GL_n(k)$ est semi-simple, c'est-à-dire x_s est diagonalisable. De la même façon, un élément x_u de G est dit unipotent si cette matrice unipotente, c'est-à-dire $x_u - I$ est nilpotente. On montre que cette définition ne dépend pas de la réalisation de G choisie.

Un tore de G est un sous-groupe de G constitué d'éléments semi-simples. On montre qu'un tore de dimension n est isomorphe à n copies de $GL_1(k) \cong k^\times$. Un tore maximal de G est un tore de dimension maximale. Un sous-groupe unipotent de G est un sous-groupe de G constitué d'éléments unipotents ; un sous-groupe maximal unipotent est un sous-groupe maximal unipotent de dimension maximale.

Soit G un groupe linéaire algébrique et $X = \text{Spec}(A)$ une variété affine. Une action (régulière) de G sur X est un morphisme de variété

$$\mu : G \times X \rightarrow X$$

que l'on note $\mu(\sigma, x) = \sigma \cdot x$, satisfaisant les axiomes de l'action d'un groupe c'est-à-dire tel que $\sigma \cdot (\tau \cdot x) = \sigma\tau \cdot x$ et $e \cdot x = x$.

Le théorème suivant nous sera utile pour l'étude des orbites.

Lemme 1.3.1. *La dimension des orbites est donnée par*

$$\dim(G \cdot x) = \dim(G) - \dim(G_x).$$

DÉMONSTRATION. Considérons l'application $\varphi_x : G \rightarrow X; g \mapsto g \cdot x$. Nous avons alors $\varphi_x(G) = G \cdot x$. Les fibres de φ_x sont alors des translatés de G_x et ont donc toutes la même dimension que G_x . Un calcul de dimension nous donne alors que $\dim(G) = \dim(G \cdot x) + \dim(G_x)$ \square

Au lieu d'étudier l'action d'un groupe G sur une variété affine X , il est parfois préférable d'étudier la coaction induite sur l'anneau de coordonnées de X . Cette action est définie par l'homomorphisme

$$\mu^* : A \rightarrow G \otimes A \text{ définit par } \mu^*(f)(\sigma, x) := f(\sigma \cdot x)$$

On montre que la coaction définit complètement l'action du groupe.

1.3.2. Groupes linéairement réductifs

Les groupes linéairement réductifs sont agréables dans la mesure où les représentations de ces groupes sont bien comprises. Dans cette section, nous discuterons des propriétés de la représentation de ces groupes, telles que l'existence d'un opérateur de projection sur les invariants. Nous utiliserons plus tard les résultats de cette section

pour mieux comprendre l'action d'un groupe linéairement réductif sur une variété affine. Rappelons d'abord quelques notions de la théorie de la représentation des groupes linéaires algébriques.

Définition 1.3.1. Une représentation (rationnelle) V d'un groupe linéaire algébrique G est un espace vectoriel V de dimension finie muni d'un morphisme de groupe algébrique $\rho : G \rightarrow GL(V)$. Une représentation induit une action linéaire de G sur V , définie par $\sigma * v = \rho(\sigma)v$. Les sous-représentations de V sont les sous-espaces G -stable de V . Une représentation est dite irréductible si ses seules sous-représentations sont elle-même et 0 . Enfin, une représentation est dite semi-simple si V est une somme direct de sous-représentations irréductibles.

Nous pouvons maintenant donner la définition de groupe linéaire algébrique que nous utiliserons.

Définition 1.3.2. Un groupe linéaire algébrique est dit linéairement réductif si toutes ses représentations rationnelles sont semi-simples

Remarque 1.3.1. En caractéristique 0 , on peut montrer cette notion coïncide avec la notion de groupe réductif telle que définie dans [B] ou dans [Hu]. En caractéristique $p > 0$ cependant, les groupes linéairement réductifs sont beaucoup moins nombreux que les groupes réductifs. Nous traiterons du cas modulaire dans le chapitre 7.

Une des propriétés les plus importantes des groupes linéairement réductifs est l'existence, pour chaque représentation rationnelle, d'une projection G -équivalente de V sur V^G . Cette projection porte le nom d'opérateur de Reynold.

Définition 1.3.3. Soit G un groupe linéairement réductif agissant sur un espace vectoriel V . Alors un opérateur de Reynold sur V est une application k -linéaire $\mathcal{R} : V \rightarrow V$ satisfaisant

$$(i) \mathcal{R}(f) = f \quad \forall f \in V^G ;$$

$$(ii) \mathcal{R}(\sigma f) = f \quad \forall f \in V.$$

La proposition suivante suit alors directement de la définition d'un groupe linéairement réductif.

Proposition 1.3.1. *Soit G un groupe linéaire algébrique. Alors, pour toute représentation rationnelle V , il existe un unique opérateur de Reynold.*

Le lemme suivant nous permet d'appliquer les résultats de la théorie de la représentation des groupes linéairement réductifs à l'étude de l'action d'un tel groupe sur une variété affine.

Lemme 1.3.2. *Soit $X = \text{Spec}(A)$ une variété sur laquelle agit un groupe algébrique G et soit $V \in A$ un sous-espace de dimension finie. Il existe alors un sous-espace $W \subseteq A$ G -stable de dimension finie contenant V .*

DÉMONSTRATION. Voir [Hu], proposition 8.6. □

On montre que le morphisme $\rho : G \rightarrow GL(V)$ défini par $\rho(g)v = gv$ définit une représentation. Nous pouvons maintenant généraliser la proposition 1.3.1.

Corollaire 1.3.1. *Soit G un groupe algébrique agissant sur une variété affine $X = \text{Spec}(A)$. Il existe alors un unique opérateur de Reynold $\mathcal{R} : A \rightarrow A$.*

DÉMONSTRATION. Montrons l'existence d'un tel opérateur. Soit $f \in A$. On définit alors $\mathcal{R} : A \rightarrow A$ par $\mathcal{R}(f) = \mathcal{R}_V$ où V est une représentation contenant f et $\mathcal{R}_V : V \rightarrow V$ l'opérateur de Reynold associé à V . Par l'unicité de l'opérateur de Reynold, $\mathcal{R}(f)$ ne dépend pas du choix de V . Par construction de \mathcal{R} , il est clair qu'il s'agit d'un opérateur de Reynold. Montrons l'unicité. Soit $\mathcal{R}' : A \rightarrow A$ un autre opérateur de Reynold et soit $f \in A$ tel que $\mathcal{R}'(f) \neq \mathcal{R}(f)$. Soit V une représentation rationnelle contenant f . Alors $\mathcal{R}'(f)|_V$ et $\mathcal{R}(f)|_V$ sont deux opérateurs de Reynold différents, en contradiction avec l'unicité de l'opérateur de Reynold. □

1.3.3. Caractères et sous-groupes à 1 paramètre

Soit G un groupe linéaire. Les caractères de G sont alors les morphismes de G dans k^\times . L'ensemble des caractères de G est noté $X(G)$. Soit $\chi, \chi' \in X(T)$. On donne à $X(T)$ une structure de groupe abélien en imposant $\chi \cdot \chi'(g) = \chi(g)\chi'(g)$ pour $g \in G$. Si T est un tore, la structure de $X(G)$ est donnée par la proposition suivante :

Proposition 1.3.2. *Soit T un tore de dimension k . Alors le groupe $X(T)$ des caractères de T est isomorphe à \mathbb{Z}^k .*

DÉMONSTRATION. Voir [B], Proposition 8.5. □

Soit $\rho : G \rightarrow GL(V)$ une représentation rationnelle de G et soit χ un caractère de G . On définit alors les sous-espaces

$$\{V_\chi = v \in V \mid \rho(g)v = \chi(g)v\}$$

Les caractères pour lesquels les V_χ sont non nuls sont appelés les poids de G ; les éléments de V_χ sont dit vecteurs de poids χ , ou alors semi-invariants de G .

Le lemme suivant sera alors utile.

Lemme 1.3.3. *Les sous-espaces V_χ sont linéairement indépendants. En particulier, les poids de G sont en nombre fini dans V .*

DÉMONSTRATION. Voir [B], Lemme 5.2. □

Soit G un groupe linéaire. Les sous-groupes à 1-paramètre de G sont alors les morphismes de k^\times dans G . Soit $\lambda : k^\times \rightarrow G$ un tel morphisme. L'image de λ est alors un sous-groupe de G paramétré par t . On note $Y(T)$ l'ensemble des sous-groupes de 1-paramètre.

Définition 1.3.4 (Sous-groupe à 1 paramètre). Soit G un groupe linéaire algébrique. Un sous-groupe à 1 paramètre de G est un morphisme de variétés $\lambda : k^\times \rightarrow G$.

Soit λ et λ' des sous-groupes à 1-paramètre de G . On donne une structure de groupe à $Y(T)$ en définissant la multiplication par $\chi \cdot \chi'(g) = \chi(g)\chi'(g)$ pour $g \in G$. Contrairement aux caractères, ce groupe n'est abélien que si G l'est. C'est notamment le cas dans le cas d'un tore. Dans ce cas, on obtient un résultat analogue à la proposition 1.3.2.

Proposition 1.3.3. *Soit T un tore de dimension k . Alors le groupe $Y(T)$ des sous-groupes de 1-paramètre de T est isomorphe à \mathbb{Z}^k .*

DÉMONSTRATION. Voir [B], Proposition 8.5. □

Le prochain résultat nous permet alors de décrire tous les sous-groupes à 1-paramètre de G en fonction de ceux, beaucoup plus simples, comme on vient de le voir, d'un tore maximal de G .

Lemme 1.3.4. *Soit G un groupe linéaire et T un tore maximal de G . Alors tous les sous-groupes à 1-paramètre de G sont conjugués aux sous-groupes à 1-paramètre de T , c'est-à-dire $Y(G) = GY(T)G^{-1}$*

Nous montrons ici qu'il est possible d'identifier $Y(T)$ avec l'espace dual de $X(T)$. Nous pourrions alors remplacer l'étude des sous-groupes à 1 paramètre par l'étude des caractères duaux, ce qui nous sera utile au chapitre 5

Soit $\chi \in X(T)$ et $\lambda \in Y(T)$. La composition de χ et λ est donc un élément de $X(k)$, c'est-à-dire $\chi \circ \lambda(t) = t^k$. On définit une forme bilinéaire $X(T) \times Y(T) \rightarrow \mathbb{Z}$ par $\langle \chi, \lambda \rangle = k$. Cette forme bilinéaire induit alors un homomorphisme de groupe entre $Y(T)$ et $X(T)^\vee$. La proposition suivante nous dit qu'il s'agit d'un isomorphisme.

Proposition 1.3.4. *Si T est un tore, alors l'application bilinéaire*

$$X(T) \times Y(T) \rightarrow \mathbb{Z}$$

définie plus haut est un pairage dual.

DÉMONSTRATION. Voir [B], Proposition 8.6 □

Terminons cette section par un résultat que nous utiliserons au chapitre 6.

Lemme 1.3.5. *Soit $\lambda : \mathbb{C}^\times \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ un sous-groupe à 1 paramètre. Alors le sous-groupe P_λ , formé des matrices A de $GL_n(\mathbb{C})$ pour lesquels la limite de $\lambda(t)A\lambda(t)^{-1}$ quand t tend vers 0 existe, est un sous-groupe parabolique.*

DÉMONSTRATION. On sait que l'image de λ est contenue dans un tore maximal de $GL_n(\mathbb{C})$, disons T' . On a donc $T = \sigma T' \sigma^{-1}$ pour un certain $\sigma \in GL_n(\mathbb{C})$.

Considérons maintenant $\lambda' = \sigma \lambda \sigma^{-1}$ le sous-groupe à 1 paramètre à valeur dans T donné par $\lambda'(t) = \sigma \lambda(t) \sigma^{-1}$. En rechoisissant σ si nécessaire, on peut donc supposer que

$$\lambda'(t) = \begin{pmatrix} t^{\mu_1} \mathbf{I}_{n_1} & \vdots & 0 & \vdots & \dots & \vdots & 0 \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ 0 & \vdots & t^{\mu_2} \mathbf{I}_{n_2} & \vdots & & \vdots & 0 \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & \vdots & t^{\mu_m} \mathbf{I}_{n_m} \end{pmatrix}$$

où $\mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_m$. Soit maintenant

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \vdots & \mathbf{A}_{12} & \vdots & \vdots & \mathbf{A}_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{A}_{21} & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{A}_{n1} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \mathbf{A}_{1n} \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{C})$$

Alors

$$\lambda'(t)\mathbf{A}\lambda'(t)^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \vdots & t^{\mu_1 - \mu_2}\mathbf{A}_{12} & \vdots & \vdots & t^{\mu_1 - \mu_n}\mathbf{A}_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t^{\mu_2 - \mu_1}\mathbf{A}_{21} & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t^{\mu_n - \mu_1}\mathbf{A}_{n1} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \mathbf{A}_{1n} \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{C})$$

Mais puisque $\mu_i - \mu_j \geq 0 \Leftrightarrow i \leq j$, $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda'(t)\mathbf{A}\lambda'(t)^{-1}$ est définie si et seulement si $\mathbf{A}_{ij} = 0 \forall i > j$.

On a donc

$$P_{\lambda'} = \begin{pmatrix} * & \vdots & * & \vdots & * & \vdots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \vdots & * & \vdots & * & \vdots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \vdots & 0 & \vdots & * & \vdots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & \vdots & * \end{pmatrix}$$

Un sous-groupe parabolique. De plus vérifie que $P_{\lambda} = \sigma^{-1}P_{\sigma\lambda\sigma^{-1}}\sigma$. P_{λ} est donc aussi un sous-groupe parabolique. \square

1.4. GROUPES SEMI-SIMPLES

Nous démontrons dans cette section quelques résultats plus profonds de la théorie des groupes linéaires algébriques qui seront utiles dans le chapitre sur les sous-groupes maximaux unipotents.

Dans le chapitre 6, nous nous restreindrons à l'étude de l'action des sous-groupes maximaux unipotents d'un groupe semi-simple. Nous rappelons ici quelques résultats sur les groupes semi-simples. Nous référerons la plupart du temps au chapitre XI de [Hu]. Le Chapitre 0 de [Hu2] présente aussi un excellent résumé des propriétés des groupes semi-simples dont nous aurons besoins. La majorité des résultats énoncés dans cette section restent vrais pour des groupes linéairement réductifs.

Soit G un groupe semi-simple et H un sous-groupe de G . On peut alors considérer l'action de H sur G par translation à droite. On montre qu'il s'agit d'une action de groupe algébrique.

Théorème 1.4.1. *L'espace d'orbite de l'exemple précédent peut être muni d'une structure de variété.*

DÉMONSTRATION. Voir [Hu], Theorem 12.1. □

La variété obtenue est alors notée G/H . En général cependant, cette variété n'est ni affine ni projective.

Définition 1.4.1. Les sous-groupes paraboliques de G sont les sous-groupes P pour lesquels G/P est une variété projective alors que les sous-groupes de Borel sont les sous-groupes paraboliques minimaux de G , c'est-à-dire qui ne contiennent pas d'autres sous-groupes paraboliques.

Exemple 1.4.1. Le sous-groupe de GL_n constitué des matrices triangulaires supérieures, noté B_n , est un sous-groupe de Borel. Un sous-groupe de GL_n constitué de matrices triangulaires supérieures par blocs est parabolique.

Rappelons aussi que deux tores maximaux d'un parabolique P sont conjugués par un élément de P . Énonçons maintenant un théorème fondamental de la théorie des groupes linéaires algébriques qui nous sera utile dans le chapitre 6

Théorème 1.4.2 (Décomposition de Bruhat). *Soit G un groupe (linéairement) réductif, B un sous-groupe de Borel et W le groupe de Weil associé à ce Borel. Alors*

G est l'union disjointe des translatés BwB ou $w \in W$. Autrement dit, nous avons la décomposition $G = \bigsqcup_{w \in W} BwB$.

DÉMONSTRATION. Voir [Hu], théorème 28.3. \square

Corollaire 1.4.1. *L'intersection de deux paraboliques contient un tore maximal.*

DÉMONSTRATION. Soit B et B' , deux sous-groupes de Borel. Alors $B = gB'g^{-1}$ pour un certain $g \in G$. Soit T un tore maximal de B' . Par le théorème de décomposition de Bruhat, on obtient $G = \bigsqcup_{\sigma \in W} B'\sigma B'$, ou $W = N_G(T)/T$ en particulier $g = b_1\sigma b_2$, avec σ normalisant T et $b_1, b_2 \in B'$. On obtient alors

$$B = b_1\sigma b_2 B' b_2^{-1} \sigma^{-1} b_1^{-1} = b_1\sigma B' \sigma^{-1} b_1^{-1}$$

d'où

$$b_1 T b_1^{-1} = b_1 \sigma T \sigma^{-1} b_1^{-1} \in b_1 \sigma B' \sigma^{-1} b_1^{-1} = B$$

Mais $b_1 T b_1^{-1}$ est aussi un tore maximal de B' , ce qui complète la preuve \square

Soit G_α , le groupe semi-simple de rang 1 engendré par U_α et $U_{-\alpha}$. Nous utiliserons dans le chapitre 6 les résultats suivants :

Proposition 1.4.1. G_α est isomorphe à SL_2 ou à PGL_2

DÉMONSTRATION. Voir [B], Corollaire 32.3. \square

Exemple 1.4.2. Soit $G = SL_3$ et soit $\alpha \in X(T)$ tel $\alpha \left(\begin{pmatrix} t_1 & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & 0 \\ 0 & 0 & t_1^{-1}t_2^{-1} \end{pmatrix} \right) = t_1 t_2^{-1}$.

Soit G_α groupe engendré par $U_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $U_{-\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

G_α est alors le sous ensemble $\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & d \end{pmatrix} : ad - ac = 1 \right\}$, isomorphe à SL_2 .

Proposition 1.4.2. Soit $\chi \in X(T)$ et α une racine telle que $\langle \chi, \alpha \rangle = 0$ et soit $v \in V_\chi$ tel que $U_\alpha \subseteq G_v$. Alors $U_{-\alpha} \subseteq G_v$.

DÉMONSTRATION. Voir [G], Théorème 3.2.

□

Chapitre 2

QUOTIENT AFFINE : CAS OÙ G EST FINI

Dans le cas d'un groupe algébrique fini G agissant sur une variété affine X , la notion de quotient de X par G est somme toute assez naturelle. Nous supposons que k est un corps quelconque. Dans ce cas, il est en effet possible de construire une variété affine $X//G$ dont l'espace topologique sous-jacent satisfait les conditions d'un quotient topologique.

Commençons ce chapitre par l'exemple simple de l'action du groupe symétrique S^n sur \mathbb{A}^n par permutation des éléments de la base.

Exemple 2.0.3 (Polynômes symétriques). Soit S^n le groupe des permutations de n éléments et considérons l'action de S^n sur \mathbb{A}^n , l'espace affine à n dimensions, définie par $\sigma \cdot (x_1, \dots, x_n) = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$. Cette action induit alors une action sur $k[\mathbb{A}^n] = k[X_1, \dots, X_n]$ définie par $(\sigma f)(x_1, \dots, x_n) = f(\sigma \cdot (x_1, \dots, x_n))$. Soit $k[\mathbb{A}^n]^{S^n}$ l'algèbre des polynômes invariants sous cette action. Par le théorème fondamental des polynômes symétriques, voir [Kr, Theorem 4.6] les polynômes symétriques forment alors un système de générateurs de $k[\mathbb{A}^n]^{S^n}$, c'est-à-dire que

$$k[\mathbb{A}^n]^{S^n} = k[f_1, \dots, f_n]$$

$$\text{où } f_k = \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n} x_{i_1} \dots x_{i_k}.$$

Considérons maintenant l'application

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{A}(n) &\rightarrow \mathbb{A}^n \\ x &\mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x)) \end{aligned}$$

où $x = (x_1, \dots, x_n)$

Puisque les f_i sont \mathbb{S}^n invariants, l'application π est constante sur les orbites. Dans ce chapitre, nous montrerons en plus que l'image de π est fermée dans \mathbb{A}^n et que cette application sépare les orbites distinctes.

Tous au long de ce chapitre, G désignera un groupe algébrique fini et X une variété affine sur laquelle agit G . Rappelons que cette action induit une action sur $k[X]$, définie par $\sigma f(x) = f(\sigma \cdot x)$ et que l'on nomme algèbre des invariants la sous-algèbre constituée des éléments de $k[X]$ invariants par rapport à cette action.

Définition 2.0.2. L'algèbre des invariants est la sous-algèbre définie par

$$k[X]^G := \{f \in k[X] : f(x) = f(\sigma x) \forall \sigma \in G \text{ et } \forall x \in X\}$$

2.1. THÉORÈME DE HILBERT POUR UN GROUPE FINI

Contrairement à l'exemple précédent, dans le cas général, on ne connaît pas explicitement de système de générateurs pour l'algèbre des invariants. Le premier résultat que nous démontrerons dans ce chapitre, dû à Émilie Noether, affirme qu'un tel système existe néanmoins.

Théorème 2.1.1 (Hilbert-Noether). *Soit G un groupe fini agissant sur une variété affine X . Alors $k[X]^G$ est une k -algèbre de type fini.*

Nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 2.1.1. *Soit G un groupe fini agissant sur une variété affine $k[X]$. Alors $k[X]$ est entière sur $k[X]^G$.*

DÉMONSTRATION. Soit $f \in k[X]$. Considérons le polynôme $F(x) = \prod_{\sigma \in G} (x - \sigma f)$. En développant F , on obtient

$$F = x^n - a_1 x^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1} a_{n-1} x + a_n$$

où n est l'ordre de G et où

$$a_k = \sum_{i_1 < \dots < i_k} (\sigma_{i_1} f) \dots (\sigma_{i_k} f)$$

On a alors

$$\begin{aligned}\sigma a_k &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} (\sigma_{i_1} \sigma f) \dots (\sigma_{i_k} \sigma f) \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} (\sigma_{i_1} f) \dots (\sigma_{i_k} f) = a_k\end{aligned}$$

On conclut donc que F est à coefficients dans $k[X]^G$. Enfin f est une racine de F par construction de ce dernier, ce qui termine la preuve. \square

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.1.1. Par le lemme précédent, $k[X]^G$ est entière sur $k[X]$ et donc de type fini par le lemme 1.1.1. \square

2.2. CONSTRUCTION D'UN QUOTIENT GÉOMÉTRIQUE

L'algèbre des invariants $k[X]^G$ étant de type fini par le théorème 2.1.1, il est nous est alors possible de considérer la variété affine $\text{Spec}(k[X]^G)$. Nous montrerons que cette variété satisfait les propriétés que l'on pourrait attendre d'une variété quotient. Plus précisément, nous montrerons le théorème suivant :

Théorème 2.2.1. *Soit $\text{Spec}(k[X]^G)$ et $\pi : \text{Spec}(k[X]) \rightarrow \text{Spec}(k[X]^G)$ le morphisme induit par l'inclusion de $k[X]^G$ dans $k[X]$. Alors π satisfait les propriétés suivantes :*

- (i) π est un morphisme surjectif ;
- (ii) π est G -invariant ;
- (iii) π sépare les orbites de G .

DÉMONSTRATION. (i) Soit $\mathfrak{m} \in \text{Spec}(k[X]^G)$. Par le lemme 2.1.1, on sait que $i : k[X]^G \hookrightarrow k[X]$ est entière. Par le lemme 1.1.4 il existe donc $\mathfrak{m}' \in \text{Spec}(k[X])$ tel que $\mathfrak{m}' \cap k[X]^G = \mathfrak{m}$ c'est-à-dire tel que $\pi(\mathfrak{m}') = \mathfrak{m}$

(ii) Soit $\mathfrak{q} \in \text{Spec}(k[X])$. Soit maintenant $f \in \pi(\mathfrak{q}) = \mathfrak{q} \cap k[X]^G$ et $\sigma \in G$. Alors $f = \sigma * f \in \sigma \mathfrak{q} \cap k[X]^G$. De l'autre coté, si $\sigma * f \in \pi(\sigma \mathfrak{q}) = \sigma \mathfrak{q} \cap k[X]^G$, alors $\sigma * f = \sigma^{-1} \sigma * f = f \in \sigma \mathfrak{q} \cap k[X]^G$. On a donc $\pi(\mathfrak{q}) = \pi(\sigma \mathfrak{q})$

(iii) Soit $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(k[X]^G)$ montrons d'abord que G agit transitivement sur les idéaux de $\pi^{-1}(\mathfrak{p})$, par (ii), on aura alors que chaque fibre de π contient exactement une orbite.

Soit $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(k[X]^G)$ et $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2 \in \text{Spec}(k[X])$ tels que $\mathfrak{q}_i \cap k[X]^G = \mathfrak{p}$, montrons qu'alors, $\mathfrak{q}_1 = \sigma \mathfrak{q}_2$ pour un certain $\sigma \in G$. Soit f un élément de \mathfrak{q}_1 . Alors $h :=$

$\prod_{\sigma \in G} \sigma f$ est aussi dans \mathfrak{q}_1 puisque \mathfrak{q}_1 un idéal. Mais par construction, h est un aussi G -invariant et est donc dans $\mathfrak{q}_1 \cap k[X]^G = \mathfrak{p}$, à plus forte raison dans \mathfrak{q}_2 . Mais puisque \mathfrak{q}_2 est premier, \mathfrak{q}_2 doit contenir des facteur de h , disons σf . D'où $f \in \sigma^{-1} \mathfrak{q}_2$ et $\mathfrak{q}_1 \subseteq \cup_{\sigma \in G} \sigma \mathfrak{q}_2$. Enfin, \mathfrak{q}_1 étant premier, On doit avoir $\mathfrak{q}_1 \subseteq \sigma \mathfrak{q}_2$ pour un certain $\sigma \in G$. Mais $\mathfrak{q}_1 \cap k[X]^G = \mathfrak{p}$ et $\sigma * \mathfrak{q}_2 \cap k[X]^G = \mathfrak{p}$ d'où $\mathfrak{q}_1 = \sigma \mathfrak{q}_2$. \square

La paire constituée de la variété affine $X//G := \text{Spec}(k[X]^G)$ et du morphisme de variétés affines π sera appelée un quotient géométrique de X par G . Nous parlerons aussi de $X//G$ comme du quotient.

Dans le cas présent, les orbites, constituées d'un nombre fini de points, étaient fermées. Pour qu'un quotient géométrique existe, nous montrerons que cette propriété est en fait nécessaire. Comme nous le verrons dans le prochain chapitre, la propriété d'avoir des orbites fermée n'est en général pas respectée pour un groupe non fini. Nous devons par conséquent rendre moins contraignante notre définition de quotient.

Chapitre 3

QUOTIENT AFFINE

Le but de ce chapitre est de généraliser les résultats du chapitre précédent au cas d'un groupe linéairement réductif G agissant sur une variété affine X . Nous supposons que k est un corps de caractéristique nulle, pas nécessairement algébriquement clos. Commençons par l'exemple suivant :

3.1. CLASSIFICATION DES ENDOMORPHISMES D'UN ESPACE VECTORIEL

L'objectif de cette section est la construction d'une variété affine classifiant les endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension n à isomorphisme près. Quitte à choisir une base de l'espace vectoriel, on pourra considérer les endomorphismes comme des éléments de $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$. Deux endomorphismes sont alors isomorphes s'ils sont représentés par des matrices A et B similaires, c'est-à-dire s'il existe $\sigma \in GL_n(\mathbb{C})$ tels que $B = \sigma A \sigma^{-1}$. Le problème de classification des endomorphismes est donc remplacé par le problème de la construction d'un quotient de $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$ par $GL_n(\mathbb{C})$, pour l'action par conjugaison.

Considérons le morphisme

$$\begin{aligned} \pi : \text{Mat}_n(\mathbb{C}) &\rightarrow A_{\mathbb{C}}^n \\ A &\mapsto (f_1(A), \dots, f_n(A)) \end{aligned}$$

où f_i est la fonction polynomiale définie par $f_i(A) = a_i$ et les a_i sont les coefficients du polynôme caractéristique de A , c'est-à-dire $p_A(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n$. On peut en fait montrer que les f_i forment un système de générateurs pour l'algèbre des invariants [Kr, Théorème 2, p.22].

Puisque le polynôme caractéristique est un invariant de similitude, c'est-à-dire que $p_A(t) = p_{\sigma A \sigma^{-1}}(t)$, cette application est alors constantes sur les classes de conjugaison.

Montrons qu'elle est surjective. Si $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n$, nous considérerons alors la matrice compagnon

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_1 \end{pmatrix}$$

dépendamment de si n est respectivement pair ou impair. Dans chacun des cas, le polynôme caractéristique de A sera donné par $p_A(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n$, c'est-à-dire que $\pi(A) = (a_1, \dots, a_n)$. Les fibres sont donc constituées des matrices partageant le mêmes valeurs propre.

Par un théorème élémentaire de la théorie des matrices, chaque classe de conjugaison contient, à permutation près des blocs de Jordan, une unique matrice de forme canonique de Jordan. Soit $\pi^{-1}(a)$, la fibre correspondants aux valeurs propre $\lambda_1, \dots, \lambda_1 < \lambda_2, \dots, \lambda_2 < \dots$. Toutes les orbites de cette fibre sont alors représentée par une matrices de Jordan de la forme

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \lambda_1 & \varepsilon_{11} & 0 & & & \\ & \lambda_1 & \ddots & & 0 & 0 \\ & & \ddots & \varepsilon_{1k_1} & & \\ 0 & & & \lambda_1 & & \\ \hline & & & & \lambda_2 & \varepsilon_{12} & 0 \\ & 0 & & & \lambda_2 & \ddots & 0 \\ & & & & & \ddots & \varepsilon_{1k_2} \\ & & & & 0 & & \lambda_2 \\ \hline & 0 & & & 0 & & \end{array} \right)$$

où $\varepsilon_{ij} = 0$ ou 1 . Une fois l'ordre des valeurs propres fixé, on obtient donc les différent orbites d'une même fibre en faisant varier les valeurs des ε_{ij} . Rappelons ici qu'une matrice est diagonalisable si et seulement si son orbite est fermée. Par ce qui précède,

chaque fibre contient donc une unique orbite fermée représentée par la matrice de Jordan dont les ε_{ij} sont tous nuls.

Montrons que cette orbite est contenue dans la fermeture de chacune des autres orbites. Considérons $B = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_1, \dots, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_2, \dots, \lambda_2, \dots)$ la matrice de Jordan contenue dans une orbite fermée et

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \lambda_1 & \varepsilon_{11} & 0 & & & \\ & \lambda_1 & \ddots & 0 & & 0 \\ & & \ddots & & \varepsilon_{1k_1} & \\ 0 & & \lambda_1 & & & \\ \hline & & & \lambda_2 & \varepsilon_{12} & 0 \\ & 0 & & & \lambda_2 & \ddots & 0 \\ & & & & & \ddots & \varepsilon_{1k_2} \\ & & & 0 & & \lambda_2 & \\ \hline 0 & & & 0 & & & \end{array} \right)$$

la matrice de Jordan d'une autre orbite de la même fibre. Soit maintenant $\lambda(t) = \text{diag}(t^n, t^{n-1}, \dots, t) \in GL_n(\mathbb{C})$. Nous obtenons alors que

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \lambda_1 & t\varepsilon_{11} & 0 & & & \\ & \lambda_1 & \ddots & 0 & & 0 \\ & & \ddots & & t\varepsilon_{1k_1} & \\ 0 & & \lambda_1 & & & \\ \hline & & & \lambda_2 & t\varepsilon_{12} & 0 \\ & 0 & & & \lambda_2 & \ddots & 0 \\ & & & & & \ddots & t\varepsilon_{1k_2} \\ & & & 0 & & \lambda_2 & \\ \hline 0 & & & 0 & & & \end{array} \right)$$

et donc que $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t)A\lambda(t)^{-1} = B$. La fermeture de l'orbite de A contient donc B et, par continuité, l'orbite de B .

Nous dirons de deux orbites de fermetures non disjointes qu'elles sont équivalentes de fermeture. Nous venons donc montré que π sépare donc les classes d'orbites équivalentes de fermeture. Nous dirons alors de \mathbb{A}^n qu'il est un quotient de $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$ par $GL_n(\mathbb{C})$. Nous définirons plus tard plus rigoureusement la notion de quotient.

On montre aussi qu'une matrice est nilpotente si et seulement si les λ_i de la matrice de forme de Jordan similaire sont identiquement nuls. On peut alors en déduire que le nilcone composé des matrices nilpotentes.

3.2. THÉORÈME DE FINITUDE DE HILBERT

Dans cette section, nous donnerons une généralisation du théorème de Hilbert-Noether au cas d'un groupe linéairement réductif. Ce problème sera initialement posé sous forme de conjecture par Hilbert lui-même lors du congrès international de mathématiques de 1900. Il constitue en fait le quatorzième des célèbres 21 problèmes de Hilbert. La conjecture de Hilbert était alors la suivante :

Conjecture 3.2.1. *Soit k un corps, $A = k[y_1, y_2, \dots, y_n]$ une k -algèbre de type fini et $K = k(y_1, y_2, \dots, y_n)$, le corps de fraction de A . Alors $A \cap K$ est aussi de type fini.*

Cette conjecture est en fait une généralisation d'un problème de la théorie classique des invariants s'énonçant comme suit.

Conjecture 3.2.2. *Soit k un corps, A une k -algèbre de type fini et G un groupe agissant sur A . Alors A^G est aussi de type fini.*

On sait maintenant que ces deux conjectures sont fausses en général grâce à des contre-exemples de Nagata [N, p.767]. Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, la dernière conjecture est vraie dans le cas où le groupe est fini. L'important théorème de finitude de Hilbert montre qu'elle reste vraie dans le cas d'un groupe linéairement réductif.

Théorème 3.2.1 (Théorème de finitude de Hilbert). *Soit G un groupe linéairement réductif agissant rationnellement sur A une k -algèbre de type fini. Alors A^G est de type fini.*

La propriété suivante nous sera nécessaire pour montrer cet important théorème de la théorie des invariants. Rappelons qu'il existe un opérateur de Reynolds $\mathcal{R} : A \rightarrow A^G$.

Lemme 3.2.1. *Soit I un idéal G -stable de A^G . Alors $IA \cap A^G = I$*

DÉMONSTRATION. L'inclusion $IA \cap A^G \supseteq I$ est claire. Soit maintenant $f \in IA \cap A^G$, c'est-à-dire $f = \sum h_i f_i$ avec $h_i \in I$ et $f_i \in A$. On a alors

$$f = \mathcal{R}(f) = \mathcal{R}\left(\sum h_i f_i\right) = \sum h_i \mathcal{R}(f_i) \in I$$

puisque $\mathcal{R}(f_i) \in A^G$ □

Lemme 3.2.2. *L'algèbre A^G est noethérienne.*

DÉMONSTRATION. Soit $I_1 \subset I_2 \subset \dots \subset A^G$ une chaîne d'idéaux de A^G . Alors $AI_1 \subset AI_2 \subset \dots \subset A^G$ est une chaîne d'idéaux de A . Puisque A est noethérien cette chaîne se stabilise donc à partir d'une certaine valeur de i c'est-à-dire il existe n tel que $AI_i = AI_{i+1} = \dots = A$. Par le 3.2.1, la chaîne $I_1 \subset I_2 \subset \dots \subset A^G$ se stabilise donc aussi à partir de $i = n$. A^G est donc noethérienne. □

Nous sommes maintenant prêts à démontrer le théorème de finitude de Hilbert.

DÉMONSTRATION. Démonstration du théorème 3.2.1 Supposons tout d'abord que A est une algèbre graduée et que l'action de G préserve la gradation. Par le lemme 3.2.2, nous savons que A^G est noethérien et donc de type fini A^G par le lemme 1.1.1. □

3.3. CONSTRUCTION D'UN QUOTIENT AFFINE

Soit X une variété affine sur laquelle agit un groupe linéairement réductif G . Dans cette section, en nous inspirant des résultats obtenus pour la classification des endomorphismes, nous construirons une application de X dans une variété se rapprochant le plus possible d'un espace d'orbite.

Nous avons montré dans la section précédente que l'anneau des invariants de type fini. On peut donc prendre le spectre premier de cet anneau pour obtenir la variété affine $X//G := \text{Spec}(A^G)$. On considérera alors le morphisme de variétés $\pi : X \rightarrow X//G$; $\mathfrak{m} \mapsto \mathfrak{m} \cap A^G$ induit par l'inclusion $A^G \subseteq A$. Nous montrerons que la paire $(X//G, \pi)$ satisfait les propriétés de ce que l'on appellera un quotient de X par G . Dans le cas fini, la variété que nous avons construite satisfaisait aussi les propriétés d'un espace d'orbite. La séparation des orbites est plus problématique dans le cas réductif. Il en effet naturel de demander que l'application quotient soit un morphisme de variété. Les fibres de l'application quotient doivent alors être fermées puisqu'il sont les

préimages des points fermés de $X//G$ alors que les orbites d'un groupe linéairement réductif ne le sont généralement pas. Illustrons le problème par un exemple simple :

Exemple 3.3.1. Soit k^\times agissant sur \mathbb{A}_2 par $t \cdot (x, y) = (tx, ty)$. La seule orbite fermée est l'origine alors que toutes les autres orbites sont les droites de \mathbb{A}_2 passant par l'origine, privées de l'origine. La seule application quotient envisageable pour cette action est l'application triviale de \mathbb{A}_2 sur la variété d'un seul point.

Exemple 3.3.2. Soit k^\times agissant sur \mathbb{A}_2 par $t \cdot (x, y) = (t^{-1}x, ty)$. L'ensemble des orbites fermées est constitué de l'origine ainsi que les courbes d'équation $y = \frac{a}{x}$. Les deux autres orbites, l'axe des x privé de l'origine et l'axe des y privés de l'origine, ne sont pas fermées et ne peuvent donc pas constituer des fibres de l'application quotient. En fait, la continuité de l'application quotient exige que ces deux orbites soient contenues dans la même fibre que l'origine puisque leur fermeture contient le point $(0, 0)$.

Exemple 3.3.3. Soit $B \subseteq GL_2(k)$ le sous-groupe de Borel des matrices triangulaires supérieures 2×2 de déterminant non nul agissant par conjugaison sur $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{gl}_2(k)$ le sous-groupe formé des matrices triangulaires supérieures 2×2 . Soit maintenant

$$\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \in B \text{ et } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{b}$$

On obtient alors que $\sigma A = \begin{pmatrix} 1 & ab \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et donc que $O(A) = \mathfrak{u}$, l'ensemble des matrices unipotentes de \mathfrak{gl}_2 .

Par continuité, une fonction nulle sur toutes les matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ doit aussi être nulle sur $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. En particulier, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est contenu dans la fermeture de l'orbite de $\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ces exemples montrent qu'à cause de la continuité de l'application quotient, on ne peut pas demander à l'application quotient sépare les orbites de fermeture non disjointes. Comme dans l'exemple des endomorphismes, nous dirons que de telles orbites qu'elles sont équivalentes de fermeture. Plus précisément, des sous-ensembles W_1 et W_2 seront dit équivalent de fermeture si $\overline{W_1} \cap \overline{W_2} \neq \emptyset$.

Les exemples précédents nous poussent à affaiblir la définition d'un quotient d'une variété algébrique par un groupe linéaire algébrique comme suit :

Définition 3.3.1. Soit X une variété algébrique et G un groupe linéaire algébrique. Alors un quotient de X par G est une paire constituée d'une G variété algébrique $X//G$ sur laquelle G agit trivialement et d'un morphisme $\pi : X \rightarrow X//G$ satisfaisant les conditions suivantes :

- (i) π est G équivariant ;
- (ii) π est surjectif ;
- (iii) π sépare les orbites fermées.

Nous vérifierons que la variété que nous venons de construire satisfait bien ces conditions. Nous aurons pour cela besoin des résultats suivants.

Lemme 3.3.1. Soit $W_1 = \mathcal{V}(I_1)$ et $W_2 = \mathcal{V}(I_2)$ des sous-ensembles fermés G -stables disjoints de X . Alors $1 \in I_1 + I_2$

DÉMONSTRATION. Soit $W_1 = \mathcal{V}(I_1)$ et $W_2 = \mathcal{V}(I_2)$ des sous-ensembles fermés G -stables disjoints de X . Par le Nullstellensatz on peut écrire

$$\sqrt{I_1 + I_2} = \mathcal{I}(\mathcal{V}(I_1 + I_2)) = \mathcal{I}(\mathcal{V}(I_1)) \cap \mathcal{I}(\mathcal{V}(I_2)) = \mathcal{I}(\emptyset) = k[X].$$

En particulier, on obtient que $1 \in \sqrt{I_1 + I_2}$ et donc aussi que $1 \in I_1 + I_2$. □

Lemme 3.3.2. Soit G un groupe linéairement réductif agissant rationnellement sur un anneau commutatif A et I_1 et I_2 des idéaux G -stables. Alors $(I_1 + I_2)^G = I_1^G + I_2^G$

DÉMONSTRATION. L'inclusion $(I_1 + I_2)^G \supseteq I_1^G + I_2^G$ est claire. De l'autre côté, soit $f \in (I_1 + I_2)^G$. Alors $f = f_1 + f_2$ où $f_i \in I_i$. En appliquant l'opérateur de Reynold, on obtient alors

$$f = \mathcal{R}(f) = \mathcal{R}(f_1 + f_2) = \mathcal{R}(f_1) + \mathcal{R}(f_2) \in I_1^G + I_2^G. \quad \square$$

Lemme 3.3.3. Soit X une variété affine et $W_1 = \mathcal{V}(I_1)$ et $W_2 = \mathcal{V}(I_2)$ des sous-ensembles fermés G -stables disjoints de X . Alors, il existe $f \in A^G$ séparant W_1 et W_2 , c'est-à-dire tel que $f(W_1) = 0$ et $f(W_2) = 0$.

DÉMONSTRATION. Par le lemme 3.3.1, nous avons que $1 \in I_1 + I_2$. Puisque c'est un invariant, nous obtenons donc que $1 \in (I_1 + I_2)^G$. Du lemme 3.3.2 suit que $1 \in I_1^G + I_2^G$

et donc que $1 = f_1 + f_2$, où $f_1 \in I_1^G$ et $f_2 \in I_2^G$. $f_1 = 1 - f_2$ est alors l'invariant recherché. \square

Proposition 3.3.1. *La paire $(X//G, \pi)$ satisfait les propriétés d'un quotient*

DÉMONSTRATION. (i) Montrons que π est G -équivariant. Soit \mathfrak{m} un idéal maximal de A et soit $f \in \mathfrak{m} \cap A^G = \pi(\mathfrak{m})$. Alors $f = \sigma f \in \sigma \mathfrak{m} \cap A^G = \pi(\sigma \mathfrak{m})$. Inversement si $\sigma f \in \sigma \mathfrak{m} \cap A^G = \pi(\sigma \mathfrak{m})$ alors $\sigma f = \sigma^{-1} \sigma f = f \in \mathfrak{m} \cap A^G = \pi(\mathfrak{m})$.

(ii) La surjectivité maintenant. Soit $\mathfrak{m} \in A^G$ et considérons $\mathfrak{m}' = A \mathfrak{m}$. Par le lemme 3.2.1, nous avons que $\pi(\mathfrak{m}') = A \mathfrak{m} \cap A^G = \mathfrak{m}$.

(iii) Montrons enfin que π sépare les orbites fermées. En fait, nous montrerons que π sépare les sous-ensembles fermés G -stables disjoints. Soit $W_1 = \mathcal{V}(I_1)$ et $W_2 = \mathcal{V}(I_2)$ de tels sous-ensembles. Par le lemme 3.3.3, il existe $f \in A^G$ tel que $f(W_1) = 0$ et $f(W_2) = 1$, c'est-à-dire que $f \in \pi(W_1)$ mais que $f \notin \pi(W_2)$. \square

Nous voudrions montrer que les fibres de π sont en correspondance biunivoque avec les orbites fermées de G . Nous aurons pour cela besoin du théorème suivant de la théorie des groupes linéaires :

Proposition 3.3.2. *Soit G un groupe algébrique agissant rationnellement sur une variété X . Alors, chaque orbite est une variété lisse ouverte dans sa fermeture dans X . Sa frontière est une union d'orbites de dimension strictement plus petite.*

DÉMONSTRATION. Voir [B], Proposition 1.8. \square

Théorème 3.3.1. *Chaque classe d'orbites équivalentes de fermeture contient exactement une orbite fermée, contenue dans la fermeture de toutes les autres orbites cette classe.*

DÉMONSTRATION. Une classe d'orbites équivalentes de fermeture contient au maximum une orbite fermée puisque deux orbites fermées sont disjointes. Montrons maintenant que chaque classe en contient au moins une. Soit O , une orbite de dimension minimale, dans sa classe. Par la proposition 3.3.2, la frontière de O est une union d'orbites de dimensions strictement plus petites, une contradiction avec la minimalité de la dimension de O . \square

Corollaire 3.3.1. *L'application quotient sépare les classes d'orbites équivalentes de fermeture.*

3.4. ÉTUDE DES FIBRES

En plus de satisfaire les propriétés d'un quotient, le morphisme π satisfait certaines belles propriétés qui seront utiles pour la suite. Montrons qu'il s'agit d'un morphisme fermé.

Proposition 3.4.1. *L'application quotient est une application fermée.*

DÉMONSTRATION. Soit W une sous-variété fermée de X et soit $z \in \overline{\pi(W)} - \pi(W)$. Alors W et $Z := \pi^{-1}(z)$ sont fermés disjoints. Par le corollaire 3.3.3, il existe $f \in A^G$ tel que $f(W) = 0$ et $f(Z) \neq 0$ ou algébriquement, tel que $f \in \mathfrak{m}_x \forall x \in W$ et $f \notin \mathfrak{m}_x \forall x \in Z$. Puisque $f \in A^G$, on obtient aussi que $f \in \pi(\mathfrak{m}_x) = \mathfrak{m}_x \cap (A^G) \forall x \in W$ et $f \notin \pi(\mathfrak{m}_x) = \mathfrak{m}_x \cap (A^G) \forall x \in Z$. \square

Autrement dit, f sépare aussi $\pi(W)$ et $\pi(Z) = z$, une contradiction avec la continuité de f . On conclut donc que $\pi(W)$ est fermé. Le lemme suivant nous permettra de mieux comprendre la structure du quotient.

Lemme 3.4.1. *Soit I , un idéal G -stable de A . Alors $(A/I)^G = A^G/I^G$.*

DÉMONSTRATION. Soit $\mathcal{R} : A \rightarrow A$ l'opérateur de Reynold associé à A et soit $\overline{\mathcal{R}} : A/I \rightarrow A/I$ l'opérateur de Reynold associé à A/I . Soit $f \in A$ et \overline{f} son image dans A/I . Nous avons alors que $\overline{\mathcal{R}(f)} = \overline{\mathcal{R}(\overline{f})}$. Si $\overline{f} \in (A/I)^G$, nous obtenons que $\overline{f} = \overline{\mathcal{R}(\overline{f})} = \overline{\mathcal{R}(f)}$. Le résultat suit alors du fait que $\mathcal{R}(f) \in A^G$. \square

Donnons une interprétation géométrique de ce résultat. Soit Y une sous-variété fermée, pas nécessairement irréductible, de la variété affine $X = \text{Spec}(A)$. On peut alors écrire $Y = \text{Spec}(A/I)$ où I est un idéal radical de A . Nous obtenons alors le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 X = \text{Spec}(A) & \xrightarrow{\pi} & \text{Spec}(A^G) = X//G \\
 \uparrow & \circlearrowleft & \uparrow \\
 Y = \text{Spec}(A/I) & \xrightarrow{\pi|_Y} & \text{Spec}(A^G/I^G) = Y//G
 \end{array}$$

Par contre, en considérant Y comme une variété, nous obtenons plutôt l'application quotient

$$Y = \text{Spec}(A) \xrightarrow{\pi} \text{Spec}((A/I)^G) = Y//G$$

Le lemme 3.4.1 nous assure que les quotients obtenus de ces deux façons sont isomorphes.

Chapitre 4

QUOTIENT PROJECTIF

Dans le chapitre précédent, nous avons discuté de la construction du quotient d'une variété affine par un groupe linéairement réductif. Comme en témoigne l'exemple important de la classification des courbes elliptiques présenté en introduction de ce mémoire, les variétés pour lesquelles nous souhaiterons construire un quotient sont souvent projectives. Dans ce cas, il sera naturel de demander à ce que la variété obtenue soit elle aussi projective.

Illustrons notre démarche à l'aide d'un exemple simple.

Exemple 4.0.1 (Polynômes symétriques revisités). Soit $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 = \text{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z])$. Nous aimerions classifier les droites de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ à permutation près des éléments de la base de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, c'est-à-dire, construire un quotient projectif de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ par \mathbb{S}^3 . Une linéarisation de cette action est alors donnée par l'action \mathbb{S}^3 sur les éléments de la base de $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^3$ l'espace affine au dessus de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$. Par le théorème de polynôme symétrique, [Kr, Proposition 1.2], une base de Hilbert est donnée par les polynômes symétriques

$$f_1 = x + y + z$$

$$f_2 = xy + yz + zx$$

$$f_3 = xyz$$

c'est-à-dire que $\mathbb{C}[x, y, z]^{\mathbb{S}^3} = \mathbb{C}[f_1, f_2, f_3]$

On vérifie algébriquement que l'origine est le seul point de $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^3$ où tous les invariants sont nuls et donc que $\mathcal{N} = \emptyset$.

Posons $S = \mathbb{C}[f_1, f_2, f_3]$. L'inclusion de S dans $\mathbb{C}[x, y, z]$ nous donnera alors le morphisme de variété

$$\begin{aligned} \pi_U : \text{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z]) &\rightarrow \text{Proj}(S) \\ \mathfrak{m}_x &\mapsto \mathfrak{m}_x \cap S \end{aligned}$$

Puisque f_1, f_2 et f_3 ne sont pas de même degré, $\text{Proj}(S)$ est un espace projectif à poids. Soit $S^{(6)}$ la tranche constituée des éléments de degré 6, c'est-à-dire $S^{(6)} = \mathbb{C}[h_1, \dots, h_7]$ où $h_1 = f_1^6, h_2 = f_1^4 f_2, \dots, h_7 = f_3^2$. Par le théorème 1.2.2, nous obtenons alors que

$$\text{Proj}(S) \cong \text{Proj}(S^{(6)}) \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[x_1, \dots, x_7]/I)$$

où I est l'idéal des relations entre les h_i . La variété projective $\text{Proj}(S)$ peut donc être vue comme une sous-variété de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^7$.

Dans ce chapitre, nous montrerons entre autres que $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 / \mathbb{S}^3 := \text{Proj}(S)$ est un quotient de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ par \mathbb{S}^3 . Pour y arriver, nous considérerons le recouvrement de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ par les ouverts affines $f_i = 0$, stable sous l'action de \mathbb{S}^3 . Nous prendrons ensuite les quotients affines de ces ouverts. Il ne nous restera alors plus qu'à montrer que les quotients ainsi obtenus forment un recouvrement affine de $\text{Proj}(S)$.

Par méthodes globales, nous entendrons les méthodes qu'il sera possible d'utiliser pour travailler avec des variétés projectives sans passer par un recouvrement affine. Nous utiliserons de telles méthodes dans la section 4.1 pour construire un quotient projectif en nous inspirant de l'exemple précédent. Dans la section 4.2 nous montrerons à l'aide de méthodes locales que la variété ainsi obtenue satisfait bien les conditions d'un quotient.

4.1. CONSTRUCTION GLOBALE

Reconsidérons pour commencer l'exemple des courbes cubiques à l'aide des méthodes de géométrie algébrique développées jusqu'à présent. Nous cherchions alors à construire un quotient projectif de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^9 = \text{Proj}(\mathbb{C}[\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{10}])$ par $PGL_3(\mathbb{C})$.

Malheureusement, $PGL_3(\mathbb{C})$ n'agit pas sur $\mathbb{C}[\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{10}]$. Pour utiliser la théorie des invariants, nous devons alors remplacer l'action de $PGL_3(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^9$ par une linéarisation de cette action, c'est-à-dire une action de $SL_3(k)$ sur $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{10}$ compatible avec l'action de $PGL_3(\mathbb{C})$.

Par un résultat de la théorie classique des invariants, nous avons alors

$$\mathbb{C}[x_1, \dots, x_{10}]^{SL_3(k)} = \mathbb{C}[S, T].$$

Les applications que nous avons alors définies correspondent maintenant aux applications

$$\begin{array}{ccc} \text{Proj}(\mathbb{C}[X_1, \dots, X_{10}]) & \xrightarrow{\pi} & \text{Proj}(\mathbb{C}[S, T]) \\ \uparrow & \nearrow \pi & \\ \text{Proj}(\mathbb{C}[X_1, \dots, X_{10}] \setminus \mathcal{N}) & & \end{array}$$

induites par l'inclusion de $\mathbb{C}[S, T]$ dans $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_{10}]$. Dans ce chapitre, nous montrons que la paire $(\pi, \text{Proj}(\mathbb{C}[S, T]))$ satisfait bien les conditions d'un quotient données au chapitre précédent.

La généralisation de cet exemple au cas général est immédiate. Considérons $X \in \mathbb{P}^n$, une variété projective sur laquelle agit un groupe linéairement réductif G , et soit $x \in X$. Notons \widehat{X} le cône de \mathbb{A}^{n+1} au dessus de X et \hat{x} un point de \widehat{X} au dessus de x . Alors $X = \text{Proj}(k[\widehat{X}])$.

Une linéarisation de l'action de G est une action linéaire de G sur \mathbb{A}^{n+1} telle que $\sigma \cdot \hat{x} = \sigma \cdot x$ pour tous $x \in X$. S'il existe une telle linéarisation, nous pouvons alors parler de l'algèbre des invariants $k[\widehat{X}]^G$. Par le théorème 3.2.1, cette algèbre est de type fini. Nous considérerons comme précédemment les applications

$$\begin{array}{ccc} \text{Proj}(\mathbb{C}[\widehat{X}]) & \xrightarrow{\pi} & \text{Proj}(k[\widehat{X}]^G) \\ \uparrow & \nearrow \pi & \\ \text{Proj}(\mathbb{C}[\widehat{X}] \setminus \mathcal{N}) & & \end{array}$$

4.2. CONSTRUCTION LOCALE

L'objectif de cette section est de démontrer que la paire $(\pi, \text{Proj}(k[\widehat{X}]^G))$ est un quotient de $\text{Proj}(\mathbb{C}[\widehat{X}] \setminus \mathcal{N})$ par G . Nous devons donc montrer que l'application π est

(i) constante sur les orbites (ii) surjective et (iii) sépare les classes d'orbites équivalentes de fermeture. Il serait possible de montrer ces propriétés à l'aide de méthodes globales. Les méthodes locales que nous utiliserons dans cette section nous permettront cependant d'utiliser les résultats sur les quotients affines obtenus précédemment.

L'idée est alors la suivante : Nous construirons un recouvrement de $\text{Proj}(\mathbb{C}[\widehat{X}]) \setminus \mathcal{N}$ par des ouverts affines G -stables et montrerons que les quotients affines forment un recouvrement de $\text{Proj}(k[\widehat{X}]^G)$. La vérification des propriétés (i) à (iii) sera alors immédiate. Nous utiliserons pour cela les résultats de [EGA] énoncés dans la section 1.2.2 des préliminaires.

Considérons f_1, \dots, f_n , un système de générateurs pour $k[\widehat{X}]^G$, c'est-à-dire que $k[\widehat{X}]^G = k[f_1, \dots, f_n]$. Les ouverts affines $D_+(f_i) \cong \text{Spec}(k[\widehat{X}]_{f_i,0})$ sont alors G -stables. En effet, si $x \in D_+(f_k)$ nous obtenons alors que $f_k(\sigma \cdot \hat{x}) = f_k(\hat{x}) \neq 0$ et donc que $\sigma \cdot x \in D_+(f_k)$.

Soit maintenant $x \in \text{Proj}(\mathbb{C}[\widehat{X}]) \setminus \mathcal{N}$. Puisque $x \notin \mathcal{N}$, nous devons donc avoir $f_k(\hat{x}) \neq 0$ pour un certain k et en particulier que $x \in D_+(f_k)$. Les $D_+(f_i)$ où $i = 1, \dots, n$ forment donc un recouvrement de $\text{Proj}(\mathbb{C}[\widehat{X}]) \setminus \mathcal{N}$.

Considérons maintenant les quotients de ces ouverts affines par G , c'est-à-dire

$$D_+(f_k)//G = \text{Spec}(k[(\widehat{X})_{f_i,0}]^G).$$

Nous voudrions alors montrer que ces ouverts affines forme un recouvrement de $\text{Proj}(k[\widehat{X}]^G)$.

Nous y parvenons grâce au lemme suivant :

Lemme 4.2.1. *Soit A une k -algèbre graduée sur laquelle agit un groupe linéairement réductif G et $f \in A^G$ un polynôme homogène G -invariant. Alors $(A^G)_{f,0} \cong (A_{f,0})^G$.*

DÉMONSTRATION. Soit $f \in A^G$ un polynôme homogène de degré n . Rappelons que $(A^G)_{f,0} = \{\frac{h}{f^r} | h \in A^G \text{ et } \deg(h) = nk\}$ et que $(A_{f,0})^G = (A_f)^G \cap A_{f,0}$ où l'action de

G sur A_f est donné par $\sigma \cdot \frac{h}{f^r} = \frac{\sigma \cdot h}{\sigma \cdot f^r}$.

Soit $\frac{h}{f^r} \in (A^G)_{f,0}$. Alors $\sigma \cdot \frac{h}{f^r} = \frac{\sigma \cdot h}{\sigma \cdot f^r} = \frac{h}{f^r}$ puisque $h, f \in (A_f^G)$ et donc $\frac{h}{f^r} \in (A^G)_{f,0}$.

De l'autre coté, si $\frac{h}{f^r} \in (A^G)_{f,0}$, alors $\frac{\sigma \cdot h}{\sigma \cdot f^r} = \frac{\sigma \cdot h}{f^r}$, d'où l'on tire que $h \in A^G$. On a donc $\frac{h}{f^r} \in (A_f)^G$ □

Par la proposition 1.2.1, on conclut que les $D_+(f_k)//G$ forment un recouvrement affine de $\text{Proj}(k[\widehat{X}]^G)$. On vérifie enfin que $\pi(D_+(f)) = D_+(f)//G$. Posons $X^{ss} = \text{Proj}(\mathbb{C}[\widehat{X}]) \setminus \mathcal{N}$ et $X^{ss}//G = \text{Proj}(k[\widehat{X}]^G)$. Nous obtenons alors les diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc}
 X^{ss} & \xrightarrow{\pi} & X^{ss}//G \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 & \circ & \\
 D_+(f_i) & \xrightarrow{\pi_i} & D_+(f_i)//G
 \end{array}$$

où $X^{ss} = \bigcup_{i=1}^n D_+(f_i)$ et $X^{ss}//G = \bigcup_{i=1}^n D_+(f_i)//G$.

Nous avons donc montré le résultat suivant :

Proposition 4.2.1. *$X^{ss}//G$ est un quotient projectif de X^{ss} par G .*

DÉMONSTRATION. La preuve suit de la nature des propriétés (i) à (iii). □

Remarquons enfin que, par construction, X^{ss} est ouvert dans X . Dans la mesure où l'action d'un groupe linéairement réductif sur une variété projective est linéarisable, il est toujours possible de construire un quotient projectif pour un ouvert de cette variété, obtenu en jetant les points du nilcone. Dans le chapitre suivant, nous démontrerons un critère utile pour déterminer ces points.

Chapitre 5

LE CRITÈRE DE HILBERT-MUMFORD

5.1. LE CRITÈRE DE HILBERT-MUMFORD

Dans ce chapitre, nous démontrerons le critère de Hilbert-Mumford dans le cas de l'action de $GL_n(\mathbb{C})$ sur une variété affine X . L'idée derrière ce résultat est de remplacer l'étude de l'action de $GL_n(\mathbb{C})$ par l'étude de l'action des sous-groupes à 1 paramètre de $GL_n(\mathbb{C})$. La version du critère de Hilbert-Mumford que nous démontrerons peut s'énoncer comme suit : Si x et y sont des points de X et que l'orbite de y est fermée et contenue dans la fermeture de l'orbite de x , alors il est possible de s'approcher de y aussi près que l'on veut le long d'une courbe $\lambda(t) \cdot x \subseteq X$, où λ est un sous-groupe à 1 paramètre de $GL_n(\mathbb{C})$. La réductivité linéaire de $GL_n(\mathbb{C})$ nous assurera de la présence de suffisamment de sous-groupes à 1 paramètre pour que cela soit au moins plausible. Dans le cas où $y = 0$, on retrouvera la version du critère donnée par Hilbert.

Énonçons précisément le critère de Hilbert-Mumford.

Théorème 5.1.1 (Critère de Hilbert-Mumford). *Considérons l'action de $GL_n = GL_n(\mathbb{C})$ sur X une variété affine. Soit $x, y \in X$, où y est un point d'orbite fermée ne contenant pas x . Alors l'orbite de y est contenue dans la fermeture de l'orbite de x si et seulement s'il existe un sous-groupe à 1 paramètre $\lambda \in Y(GL_n)$ tel que $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t) \cdot x \in GL_n \cdot y$.*

L'implication (\Leftarrow) se démontre aisément :

DÉMONSTRATION (\Leftarrow) . Supposons qu'il existe $\lambda \in Y(GL_n)$ tel que $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t) \cdot x \in GL_n \cdot y$. Les orbites $GL_n \cdot y$ et $GL_n \cdot x$ sont alors équivalentes de fermeture. Par hypothèse,

l'orbite de y est fermée et est donc contenue dans la fermeture de l'orbite de x par le théorème 3.3.1. \square

L'implication inverse est plus difficile. Donnons d'abord une idée générale de la démonstration. Posons $Z = \overline{GL_n \cdot x}$ et considérons x et y , des points de X comme dans l'énoncé du théorème. Considérons le morphisme dominant

$$\begin{aligned} \psi_x : GL_n &\rightarrow Z \\ \sigma &\mapsto \sigma \cdot x \end{aligned}$$

Nous voudrions alors construire une courbe normale C contenant un point y' ainsi qu'un diagramme commutatif.

$$\begin{array}{ccc} C \setminus y' & \xrightarrow{\varphi} & GL_n \\ \downarrow & & \downarrow \psi_x \\ C & \xrightarrow{\varphi'} & Z \end{array}$$

tel que $\varphi'(y') = y$

La completion de l'anneau local d'une courbe normale étant isomorphe à $\mathbb{C}[[t]]$ (théorème 1.2.5), la completion en y' nous donnera alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec}(\mathbb{C}((t))) & \xrightarrow{\phi} & GL_n \\ \downarrow & & \downarrow \psi_x \\ \text{Spec}(\mathbb{C}[[t]]) & \xrightarrow{\phi'} & Z \end{array}$$

tel que $\phi'(\varepsilon) = y$, où ε est l'unique point fermé de $\text{Spec}(\mathbb{C}[[t]])$, correspondant à l'idéal maximal (t) .

Nous verrons qu'un tel diagramme nous donne l'existence d'une matrice $g(t) \in GL_n(\mathbb{C}((t)))$ telle que

$$\lim_{t \rightarrow 0} g(t)x = y.$$

En utilisant le lemme 1.1.10, nous obtiendrons alors une matrice

$$\lambda(t) = \begin{pmatrix} t^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & t^{\lambda_n} \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{C}[[t]])$$

telle que $\lim_{t \rightarrow 0} a(t)\lambda(t)b(t) \cdot x = y$ avec $a(t), b(t) \in GL_n(\mathbb{C}[[t]])$. Nous pourrions alors sauvegarder une partie de l'information contenue dans l'égalité précédente pour obtenir

$$\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t)b \cdot x \in GL_n \cdot y$$

avec $b \in GL_n$. Le sous-groupe à 1 paramètre sera alors celui recherché.

Avant de démontrer (\Rightarrow), démontrons d'abord l'existence du diagramme commutatif précédent. Nous utiliserons pour cela les lemmes suivants. Posons $Z = \overline{GL_n \cdot x}$, la fermeture de l'orbite de x et $Y = Z \setminus GL_n \cdot x$, son bord.

Lemme 5.1.1. *Soit $x, y \in X$, où y est un point d'orbite fermée ne contenant pas x et supposons que l'orbite de y est contenue dans Z , la fermeture de l'orbite de x . Il existe alors une courbe de Z passant par y et intersectant non trivialement l'orbite de x .*

DÉMONSTRATION. Soit $k[x_1, \dots, x_r]$, l'anneau de coordonnées de Z . Par le théorème de Normalisation de Noether, il existe alors des éléments $f_1, \dots, f_k \in k[Z]$ algébriquement indépendants tels que l'inclusion $\nu^* : k[f_1, \dots, f_k] \hookrightarrow k[X]$ soit entière. Géométriquement, nous obtenons donc un morphisme fini

$$\nu : X = \text{Spec}(k[Z]) \rightarrow \text{Spec}(k[f_1, \dots, f_k]) = \mathbb{A}^k.$$

En particulier, ν est un morphisme fermé.

Posons $y' = \nu(y)$, c'est-à-dire que $y' = f_1(y), \dots, f_k(y)$, et posons $Y' = \nu(Y)$. Montrons d'abord que $\mathbb{A}^r - Y'$ est non vide. Par les lemmes 1.1.4 et 1.1.4, la dimension des composantes irréductibles de Z est préservé. Enfin, par le lemme 3.3.2, la dimension des composantes irréductibles de Y est strictement plus petite que celle de Z et donc la dimension de Y' doit donc aussi être plus petite que celle de \mathbb{A}^r .

Par ce qui précède, peut donc choisir z , un point de \mathbb{A}^r non contenu dans Y' . Soit l , la droite de \mathbb{A}^r passant par z et y' . On peut alors écrire $l = \mathcal{V}(\mathfrak{p})$, avec \mathfrak{p} un idéal premier de $k[y_1, \dots, y_k]$. Algébriquement, on obtient alors

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathfrak{m}_y & \subseteq & k[X] \\
 & & & & \uparrow \\
 & & & & \text{entière} \\
 & & & & \downarrow \\
 \mathfrak{p} & \subseteq & \mathfrak{m}_{y'} & \subseteq & k[y_1, \dots, y_k]
 \end{array}$$

Par le lemme 1.1.4, on peut compléter la chaîne du haut par un idéal premier \mathfrak{q} tel que $\mathfrak{q} \cap k[f_1, \dots, f_k] = \mathfrak{p}$.

Soit $C = \mathcal{V}(p')$. Montrons que C est une courbe, c'est-à-dire une variété de dimension 1. Remarquons premièrement que la dimension de C est au moins égale à 1 puisque \mathfrak{p} est contenu dans \mathfrak{m}_y . Supposons sa dimension soit plus grande que 1. Il existerait alors un idéal premier \mathfrak{q}' tel que $\mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{q}' \subsetneq \mathfrak{m}_y$. En posant $p' = \mathfrak{q}' \cap k[f_1, \dots, f_k]$, on aurait alors $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{p}' \subsetneq \mathfrak{m}_{y'}$, une contradiction puisque l est une courbe.

Enfin, par construction, C contient au moins y . De plus, C doit intersecter $Z - Y$ puisque sinon $l = \nu(C)$ ne pourrait contenir z . \square

Montrons maintenant qu'il existe une courbe de GL_n dominant C . Comme précédemment, Z désignera la fermeture de l'orbite de x et Y son bord.

Lemme 5.1.2. *Dans la notation du lemme précédent, pour toute courbe C de Z non contenue dans Y , il existe une courbe de GL_n dominant C sous le morphisme ψ_x .*

DÉMONSTRATION. Il faut montrer que la préimage de C contient une courbe dominant C . Soit z un point de C contenu dans $GL_n \cdot x$ et $\psi_x^{-1}(z)$ la fibre au dessus de ce point. Soit maintenant $g \in \psi_x^{-1}(C) \setminus \psi_x^{-1}(z)$. Par la démonstration du lemme précédent, il existe alors une courbe α de GL_n passant par g et intersectant $\psi_x^{-1}(z)$. Supposons maintenant que α ne domine pas C , c'est-à-dire que $\psi_x(\alpha)$ soit fermé dans C . Mais puisque C est une courbe, $\psi_x(\alpha)$ devrait alors être un point une contradiction puisque par construction, α chevauche plus d'une fibre. \square

À l'aide des deux lemmes précédents, nous montrerons maintenant le théorème suivant qui se retrouvera au coeur de notre démonstration du critère de Hilbert Mumford. Nous discuterons de l'importance de ce résultat dans la remarque 5.1.1.

Théorème 5.1.2. *Soit $x, y \in X$ comme dans l'énoncé du théorème 5.1.1 et supposons que l'orbite de y est contenue dans la fermeture de l'orbite de x . Il existe alors*

$\phi \in \text{Hom}_k(\text{Spec}(\mathbb{C}((t))), GL_n)$ et $\phi' \in \text{Hom}_k(\text{Spec}(\mathbb{C}[[t]]), Z)$ et un diagramme est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec}(\mathbb{C}((t))) & \xrightarrow{\phi} & GL_n \\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \psi_x \\ \text{Spec}(\mathbb{C}[[t]]) & \xrightarrow{\phi'} & Z \end{array}$$

tel que le point fermé de $\text{Spec}(\mathbb{C}[[t]])$ est envoyé sur y .

DÉMONSTRATION. Soit x, y et $\psi_x : GL_n \rightarrow Z$ comme précédemment. Par hypothèse, y est contenu dans la fermeture de $\psi_x(C)$.

Par les lemmes 5.1.1 et 5.1.2, on peut choisir une courbe C de Z passant par y et une courbe α de G dominant C .

Géométriquement, nous obtenons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} GL_n & \xleftarrow{\varphi'} \circlearrowleft & \alpha \\ \downarrow \psi_x & \circlearrowleft & \downarrow \\ Z & \xleftarrow{\varphi} \circlearrowleft & C \end{array}$$

Il sera plus utile de considérer la situation d'un point de vue algébrique. Le diagramme précédent se traduit alors par

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[GL_n] & \xrightarrow{\varphi'^*} & \mathbb{C}[\alpha] \\ \uparrow \psi_{x*} & \circlearrowleft & \uparrow \\ \mathbb{C}[Z] & \xrightarrow{\varphi^*} & \mathbb{C}[C] \end{array}$$

Puisque α domine C , nous obtenons l'inclusion de $\mathbb{C}[C]$ dans $\mathbb{C}[\alpha]$. Considérons alors $\widehat{\mathbb{C}[C]} = \mathbb{C}[\widetilde{C}]$, la normalisation de $\mathbb{C}[C]$ dans le corps de fraction de $\mathbb{C}[\alpha]$ et $\mathfrak{m}_y \subset \widehat{\mathbb{C}[C]}$ un idéal maximal tel que $\mathfrak{m}_y \cap \mathbb{C}[C] = \mathfrak{m}_y$. Considérons ensuite $\widehat{\widehat{\mathbb{C}[C]}}$, la complétion \mathfrak{m}_y -adique de $\widehat{\mathbb{C}[C]}$. Par le théorème 1.2.5 des préliminaires, $\widehat{\widehat{\mathbb{C}[C]}}$ est

alors isomorphe à $\mathbb{C}[[t]]$, (t) , l'unique idéal maximal de $\mathbb{C}[[t]]$ correspondant à \mathfrak{m}_y , l'unique idéal maximal de $\widehat{\mathbb{C}[C]}$.

Nous obtenons donc la suite d'homomorphismes

$$\mathbb{C}[Z] \rightarrow \mathbb{C}[C] \rightarrow \widetilde{\mathbb{C}[C]} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}[C]} \cong \mathbb{C}[[t]]$$

où \mathfrak{m}_y est la préimage de (t) , que l'on peut compléter vers le haut pour obtenir le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{C}[GL_n] & \xrightarrow{\varphi'^*} & \mathbb{C}[\alpha] & \hookrightarrow & \mathbb{C}(\alpha) & \hookrightarrow & \mathbb{C}((t)) \\ \uparrow \psi_x^* & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \mathbb{C}[Z] & \xrightarrow{\varphi^*} & \mathbb{C}[C] & \hookrightarrow & \widetilde{\mathbb{C}[C]} & \hookrightarrow & \widehat{\mathbb{C}[C]} \cong \mathbb{C}[[t]] \end{array}$$

ou, en résumé, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[GL_n] & \xrightarrow{\phi'^*} & \mathbb{C}((t)) \\ \uparrow \psi_x^* & & \uparrow \\ \mathbb{C}[Z] & \xrightarrow{\phi^*} & \mathbb{C}[[t]] \end{array}$$

tel que $(\phi^*)^{-1}((t)) = \mathfrak{m}_y$.

Géométriquement, nous obtenons donc

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec}(\mathbb{C}((t))) & \xrightarrow{\phi'} & GL_n \\ \downarrow & & \downarrow \psi_x \\ \text{Spec}(\mathbb{C}[[t]]) & \xrightarrow{\phi} & Z \end{array}$$

où le point fermé de $\text{Spec}(\mathbb{C}[[t]])$ est envoyé sur y . Remarquons que les points génériques de $\text{Spec}(\mathbb{C}[[t]])$ et $\text{Spec}(\mathbb{C}((t)))$ sont pour leur part envoyés sur les points génériques de C et de α respectivement. \square

Nous sommes maintenant prêts à démontrer le critère de Hilbert-Mumford.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 5.1.1 (\Leftarrow). Soit $x, y \in X$ comme dans l'énoncé du théorème 5.1.1 et supposons que Y est contenue dans la fermeture de l'orbite de x . Par le théorème précédent, nous obtenons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec}(\mathbb{C}((t))) & \xrightarrow{\phi} & GL_n \\ \downarrow & & \downarrow \psi_x \\ \text{Spec}(\mathbb{C}[[t]]) & \xrightarrow{\phi'} & Z \end{array}$$

tel que le point fermé de $\text{Spec}(\mathbb{C}[[t]])$ est envoyé sur y .

Montrons que cela implique l'existence d'une matrice $g(t)$ de $GL_n(\mathbb{C}((t)))$ telle que $\lim_{t \rightarrow 0} g(t)x = y$.

Comme \mathbb{C} -algèbres de type fini, on peut exprimer les anneaux de coordonnées de GL_n et Z comme $\mathbb{C}[GL_n] = \mathbb{C}[x_{ij}, \frac{1}{\det(x_{ij})}]$ et $\mathbb{C}[Z] = k[z_1, \dots, z_r]$. En terme algébriques, le diagramme précédent nous donne alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[x_{ij}, 1/\det(x_{ij})] & \xrightarrow{\eta} & \mathbb{C}((t)) \\ \uparrow \psi_{x*} & \circlearrowleft & \uparrow i \\ \mathbb{C}[x_1, \dots, x_r] & \xrightarrow{\eta'} & \mathbb{C}[[t]] \end{array}$$

Posons alors $g_{ij}(t) := \eta(x_{ij}) \in \mathbb{C}((t))$ et considérons la matrice $g(t) = (g_{ij}(t))$, c'est à dire la matrice dont les coefficients sont donnés par l'image des x_{ij} . Nous obtenons alors que $\eta(\frac{1}{\det(x_{ij})}) = \frac{1}{\det(g(t))}$; en particulier que $g(t) = (g_{ij}(t)) \in GL_n(\mathbb{C}((t)))$. L'homomorphisme η correspond donc à une matrice de $GL_n(\mathbb{C}((t)))$. C'est un des éléments clé de la preuve.

De la même façon, posons $v_i(t) := \eta'(z_i) \in k[[t]]$. Soit V , un espace vectoriel GL_n -stable de dimension fini contenant z_1, \dots, z_r (un tel espace existe par le lemme 1.3.2). L'homomorphisme η correspond alors à $v(t) = (v_1(t), \dots, v_r(t)) \in V \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[[t]]$.

Nous montrerons que $v(0) = y$. Remarquons premièrement que l'on peut écrire $m_y = (z_1 - y_1, \dots, z_r - y_r)$, ou $y = (y_1, \dots, y_r)$. On obtient alors que $v_i(t) - y_i = \eta'((z_i - y_i)) \in \eta'(m_y) \subseteq (t)$; en particulier que $v_i(0) = y_i$, c'est-à-dire $v(0) = y$.

Nous venons donc de démontrer que l'homomorphisme $i \circ \eta'$ correspond donc à un élément $v(t) \in V \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}((t))$ tel que $\lim_{t \rightarrow 0} v(t) = y$. Il ne nous reste plus qu'à remarquer que $\eta \circ \psi_x^*$ correspond à $g(t)x \in V \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}((t))$. En effet, nous obtenons que

$$\eta(\psi_x(z_i)) = \psi_x(z_i)(g(t)) = z_i(\psi_x(g(t))) = z_i(g(t)x) = (g(t)x)_i$$

où l'action de G sur V est étendue à une action de $G \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}((t))$ sur $V \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}((t))$.

Par la commutativité du diagramme nous obtenons donc que $g(t)x = v(t)$; en particulier que $\lim_{t \rightarrow 0} g(t)x = \lim_{t \rightarrow 0} v(t) = y$

Par le lemme 1.1.10 il existe alors $a(t), b(t) \in GL_n(\mathbb{C}[[t]])$ et

$$\lambda(t) = \begin{pmatrix} t^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & t^{\lambda_n} \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{C}[[t]])$$

tels que $\lim_{t \rightarrow 0} a(t)\lambda(t)b(t)x = y$ où $a(t)\lambda(t)b(t)x = v(t)$ où $v(0) = y$.

Remarquons que pour compléter la démonstration du théorème 5.1.1, il ne reste plus qu'à montrer qu'il est possible de remplacer, dans l'expression précédente, $a(t)$ et $b(t)$ par des éléments a et b de GL_n .

Puisque $v(t) = a(t)d(t)b(t)x$, nous obtenons que $d(t)b(t)x = a^{-1}(t)v(t)$ et donc, en évaluant en 0, que

$$d(0)b(0)x = a^{-1}(0)v(0) = a^{-1}(0)x \in GL_n \cdot x.$$

En écrivant $b(t)$ comme $b(t) = b(0) + b_1t + \dots + b_it^i + \dots$, on obtient alors que $b(t)x = b(0)x + b_1xt + \dots + b_it^i + \dots$

Soit maintenant V un sous-espace GL_n -stable de dimension fini contenant x et soit $\{e_1, \dots, e_m\}$ une base de V diagonalisant l'action de $d(t)$ c'est-à-dire telle que $d(t)e_i = t^{\lambda_i}e_i$. Dans cette base, on peut écrire

$$b(t)x = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(0)} \\ \vdots \\ \alpha_j^{(0)} \\ \vdots \\ \alpha_m^{(0)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1^{(1)} \\ \vdots \\ \alpha_j^{(1)} \\ \vdots \\ \alpha_m^{(1)} \end{pmatrix} t + \dots + \begin{pmatrix} \alpha_1^{(i)} \\ \vdots \\ \alpha_j^{(i)} \\ \vdots \\ \alpha_m^{(i)} \end{pmatrix} t^i + \dots$$

On a alors

$$d(t)b(t)x = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(0)} t^{\lambda_1} \\ \vdots \\ \alpha_j^{(0)} t^{\lambda_j} \\ \vdots \\ \alpha_m^{(0)} t^{\lambda_m} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1^{(1)} t^{\lambda_1+1} \\ \vdots \\ \alpha_j^{(1)} t^{\lambda_j+1} \\ \vdots \\ \alpha_m^{(1)} t^{\lambda_m+1} \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} \alpha_1^{(i)} t^{\lambda_1+i} \\ \vdots \\ \alpha_j^{(i)} t^{\lambda_j+i} \\ \vdots \\ \alpha_m^{(i)} t^{\lambda_m+i} \end{pmatrix} + \dots$$

On sait que $\lim_{t \rightarrow 0} d(t)b(t)x$ existe. Quitte à changer l'ordre des éléments de la base, on peut supposer que

$$\begin{cases} \lambda_j > 0 & \text{pour } j = 1, \dots, k \\ \lambda_j = 0 & \text{pour } j = k+1, \dots, l \\ \lambda_j < 0 & \text{pour } j = l+1, \dots, m \end{cases}$$

Pour que la limite existe, il faut que les $\alpha_j^{(i)}$, où $j = k, \dots, m$, soient nuls pour tous $i < \lambda_j$. Soit $\alpha_j^{(n_j)}$ le premier coefficient non nul pour i .

On obtient alors que

$$\lim_{t \rightarrow 0} d(t)b(t) \cdot x = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_{k+1}^{(0)} \\ \vdots \\ \alpha_l^{(0)} \\ \alpha_{l+1}^{(n_{l+1})} \\ \vdots \\ \alpha_m^{(n_m)} \end{pmatrix}$$

En multipliant par $d(t)^{-1}$ et en prenant la limite encore une fois, on obtient

$$d(t')^{-1} (\lim_{t \rightarrow 0} d(t)b(t)x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_{k+1}^{(0)} \\ \vdots \\ \alpha_l^{(0)} \\ \alpha_{l+1}^{(n_{l+1})} t'^{\lambda_{l+1}} \\ \vdots \\ \alpha_m^{(n_m)} t'^{\lambda_m} \end{pmatrix} \xrightarrow{t' \rightarrow 0} \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_{k+1}^{(0)} \\ \vdots \\ \alpha_l^{(0)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

En posant $\lambda(t) = \text{diag}(t^{\lambda_1}, \dots, t^{\lambda_m})$, on obtient alors que

$$\lim_{t' \rightarrow 0} d(t')^{-1} \left(\lim_{t \rightarrow 0} d(t)b(t) \cdot x \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t)b(0) \cdot x$$

Enfin, puisque $\lim_{t \rightarrow 0} d(t)b(t) \cdot x = d(0)b(0)x = a^{-1}(0)y$ et puisque l'orbite de y est fermée par hypothèse, nous obtenons que

$$\lim_{t' \rightarrow 0} d(t')^{-1} \left(\lim_{t \rightarrow 0} d(t)b(t) \cdot x \right) \in GL_n \cdot y$$

Le sous-groupe à 1 paramètre $\lambda : \mathbb{C}^\times \rightarrow T$, où T est le tore maximal de GL_n constitué des matrices diagonales est alors un sous-groupe à 1 paramètre tel que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t)a^{-1} \cdot x \in GL_n \cdot y$$

avec $a^{-1} \in GL_n$.

En remplaçant λ par $\lambda' = a\lambda a^{-1}$, le sous-groupe à 1 paramètre défini par $\lambda'(t) = a\lambda(t)a^{-1}$, nous obtenons alors un sous-groupe à 1 paramètre $\lambda' : \mathbb{C}^\times \rightarrow GL_n$ tel que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \lambda'(t) \cdot x \in GL_n \cdot y$$

□

Remarque 5.1.1. La preuve du théorème 5.1.1 qui apparaît dans [GIT] repose, entre autres, sur l'utilisation du critère valuatif de propreté, théorème important, mais abstrait, de la géométrie algébrique. Ce théorème se retrouve par exemple dans [EGA, p.143] ou [H, Théorème 4.7 Chapitre II]. Notre démonstration du critère de Hilbert-Mumford nous offre la chance de mieux comprendre ce théorème.

Dans le contexte qui nous intéresse, le critère valuatif de propreté peut s'énoncer comme suit :

Théorème 5.1.3 (critère valuatif de propreté). *Soit ψ_x comme dans le théorème précédent. Si ψ_x n'est pas un morphisme propre, alors il existe $\phi \in \text{Hom}_k(\text{Spec}(k((t))), G)$ et $\phi' \in \text{Hom}_k(\text{Spec}(k[[t]]), G)$ tels que le diagramme*

$$\begin{array}{ccc}
\text{Spec}(k((t))) & \xrightarrow{\phi} & GL_n \\
\downarrow & & \downarrow \psi_x \\
\text{Spec}(k[[t]]) & \xrightarrow{\phi'} & Z
\end{array}$$

est commutatif et ne peut être complété par un morphisme

$$\phi \in \text{Hom}_k(\text{Spec}(k[[t]]), GL_n)$$

Remarquons que le lemme 5.1.2 nous donne une démonstration de ce théorème dans le cas où $GL_n \cdot x$ n'est pas fermé. Puisque ψ_x est propre si et seulement si $GL_n \cdot x$ est fermé et $(GL_n)_x$ est fini, il nous resterait plus qu'à considérer le cas où le stabilisateur de x n'est pas fini pour compléter la preuve.

Remarque 5.1.2. En remplaçant dans la démonstration du théorème 5.1.1 le lemme 5.1.2 par le théorème 5.1.3 et le 1.1.10 par un théorème de décomposition d'Iwahori [GIT, Théorème p.52] dont on retrouve l'énoncé dans [GIT], nous obtiendrions une preuve pour un groupe linéairement réductif sur un corps de caractéristique nulle.

Donnons maintenant une version du théorème 5.1.1 utile pour l'étude des fibres de l'application quotient.

Théorème 5.1.4. *Considérons l'action de $GL_n = GL_n(\mathbb{C})$ sur X une variété affine. Soit $x, y \in X$, où y est un point d'orbite fermée ne contenant pas x . Alors l'orbite de y est contenue dans la fermeture de l'orbite de x si et seulement si il existe un sous-groupe à 1 paramètre $\lambda \in Y(GL_n)$ tel que $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t) \cdot x \in GL_n \cdot y$.*

DÉMONSTRATION. Supposons que $f(x) = f(y)$ pour tous $f \in \mathbb{C}[X]^{SL_n(\mathbb{C})}$. Par le corollaire 3.3.3, nous obtenons que $f(x) = f(y)$ pour tous $f \in \mathbb{C}[X]^{SL_n(\mathbb{C})}$ si et seulement si les orbites de x et de y sont équivalentes de fermeture, ce qui, par le théorème 3.3.1, est le cas si et seulement si l'orbite de y est contenue dans la fermeture de l'orbite de x . La démonstration du théorème suit alors immédiatement du théorème 5.1.1. \square

Il est en général difficile de vérifier si la limite $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t) \cdot x$ est contenu dans une orbite fermée pour un certain sous-groupe à 1 paramètre $\lambda(t)$. En fait, plus l'orbite est grande, plus la vérification sera ardue. De fait, l'étude d'une fibre contenant un point

stabilisé par l'action du groupe sera dans la pratique beaucoup plus facile l'étude d'une fibre générique. Nous étudions ce cas pour l'action de $SL_n(\mathbb{C})$ sur une variété affine.

Remarque 5.1.3. Gardons en tête l'étude du nilcone. Dans le cas où $SL_n(\mathbb{C})$ agit linéairement sur une variété projective $X \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$, nous considérons l'action de $SL_n(\mathbb{C})$ sur le cône affine de $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{n+1}$ au dessus X . Le nilcone est alors la fibre contenant l'origine du plan affine, fixé par l'action de $SL_n(\mathbb{C})$.

Théorème 5.1.5. *Critère de Hilbert-Mumford pour un point fixe X , une variété affine sur laquelle $SL_n(\mathbb{C})$ agit rationnellement et soit y , un point de X possède un point fixe par l'action de $SL_n(\mathbb{C})$. Soit x , un point de X distinct de y . Les conditions suivantes sont alors équivalentes : (i) $f(x) = f(y)$ pour tous $f \in \mathbb{C}[X]^{SL_n(\mathbb{C})}$; (ii) il existe $\lambda : k \rightarrow T \subseteq SL_n(\mathbb{C})$ et $\sigma \in SL_n(\mathbb{C})$ tel que $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t) \cdot \sigma \cdot x = 0$.*

DÉMONSTRATION. La preuve suit immédiatement du théorème 5.1.4 □

Si V est une représentation rationnelle de $SL_n(\mathbb{C})$ et $v \in V$ un point fixe sur lesquels tous les invariants s'annulent, il est alors possible d'utiliser le pairage parfait entre l'espace des sous-groupes à 1 paramètre d'un tore maximal de $SL_n(\mathbb{C})$ et l'espace dual de ses caractères pour obtenir une version facilement applicable du théorème 5.1.5. L'étude de l'action des sous-groupes à 1 paramètre sera alors remplacée par l'étude du diagramme de poids de V et on retrouvera alors la originale de Hilbert.

Théorème 5.1.6. *Critère de Hilbert-Mumford pour $SL_n(\mathbb{C})$ Soit $V = \bigoplus V_i$ une représentation rationnelle de $SL_n(\mathbb{C})$, où V_i sont les représentations simples, et soit $v = \bigoplus v_i \in \bigoplus V_i$. Alors les condition suivantes sont équivalentes : (i) $f(x) = 0$ pour tous $f \in \mathbb{C}[X]^{SL_n(\mathbb{C})}$; (ii) les v_i sont contenus dans l'intérieur de l'un des demi-espaces délimités par un hyperplan du diagramme de poids.*

DÉMONSTRATION. Soit T , le tore maximal de $SL_n(\mathbb{C})$ composé des matrices diagonales et λ un sous-groupe à 1 paramètre de T . Soit $\varphi(\lambda)$ le caractère dual associé à λ par l'isomorphisme établi dans la proposition 1.3.4. Nous obtenons alors que $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t) \cdot v = 0$ si et seulement si $\langle \lambda, v_i \rangle > 0 \forall i$. Or, $\langle \lambda, v_i \rangle$ est égal au produit scalaire de v_i avec $\varphi(\lambda)$. Considérons $P_{\varphi(\lambda)}$ l'hyperplan de $Y(T)$ perpendiculaire à $\varphi(\lambda)$. On obtient alors que $\langle \lambda, v_i \rangle > 0$ si et seulement si v_i est dans l'intérieur du demi-espace délimité par $P_{\varphi(\lambda)}$ et contenant $\varphi(\lambda)$. □

5.2. CLASSIFICATION DES COURBES ELLIPTIQUES

Appliquons maintenant le critère obtenu à l'exemple de la classification des courbes elliptiques traité en introduction de ce mémoire. Rappelons qu'une courbe cubique est une courbe de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ définie par un polynôme de $\mathbb{C}[x, y, z]_3$ et que l'ensemble des courbes cubiques est isomorphe à $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^9$. L'action de $SL_3(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$ induit alors une action sur $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{10}$ correspondant à l'action de $PGL_{\mathbb{C}(3)}$ sur $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^9$. Soit $\mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_{10}]^{SL_3(\mathbb{C})} = \mathbb{C}[S, T]$ l'anneau des invariants¹. En appliquant les résultats obtenus au chapitre 4, nous pouvons construire une application rationnelle

$$\pi : \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^9 \dashrightarrow \text{Proj}(\mathbb{C}[S, T])$$

Que l'on peut rendre régulière en jetant le nilcone :

$$\pi : \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^9 \setminus \mathcal{N} \rightarrow \text{Proj}(\mathbb{C}[S, T])$$

Par les résultats obtenus au chapitre 4, nous savons maintenant que $\text{Proj}(\mathbb{C}[S, T])$ est alors un quotient projectif de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^9 \setminus \mathcal{N}$ par $PGL_{\mathbb{C}(3)}$. Dans l'introduction, nous avons mentionné que le nilcone était constitué des courbes singulières dont les singularités étaient pires que des points doubles de tangentes distinctes. Nous pouvons désormais démontrer ce résultat grâce au critère de Hilbert-Mumford.

Plus précisément, par le théorème 5.1.5, une courbe cubique

$$f = \xi_1 x^3 + \xi_2 x^2 y + \xi_3 x^2 z + \xi_4 x y^2 + \xi_5 x y z + \xi_6 x z^2 + \xi_7 y^3 + \xi_8 y^2 z + \xi_9 y z^2 + \xi_{10} z^3.$$

est dans le nilcone si et seulement s'il existe $g \in SL_n(\mathbb{C})$ tel que les coefficients non nuls de $g \cdot f$ soient contenus dans l'intérieur de l'un des demi-plans du diagramme de poids

$$\begin{array}{cccc} & & & x^3 \\ & & & x^2 y & x^2 z \\ & & & x y^2 & x y z & x z^2 \\ & & & y^3 & y^2 z & y z^2 & z^3 \end{array}$$

¹Contrairement à l'introduction, nous n'aurons pas besoin d'une description explicite de S et T .

Supposons que ce soit le cas. À un changement de coordonnées près et donc à multiplication par un élément de $SL_n(\mathbb{C})$ près, on peut supposer que

$$f = \xi_3 x^2 z + \xi_7 y^3 + \xi_8 y^2 z + \xi_9 y z^2 + \xi_{10} z^3$$

correspondant au cas

$$\begin{array}{cccc}
 & & & x^3 \\
 & & x^2 y & x^2 z \\
 & x y^2 & x y z & \mathbf{x z^2} \\
 y^3 & \mathbf{y^2 z} & \mathbf{y z^2} & \mathbf{z^3}
 \end{array}$$

Par exemple, si $f = y^3 - xz^2$, on obtient une courbe nodale. Les autres cubiques que l'on peut obtenir par combinaison linéaire des monômes en caractère gras sont respectivement : une ligne tangente à une ellipse, trois lignes sécantes en un point, une ligne sécante à une ligne double de même qu'une ligne triple.

Inversement, pour chacune de ces courbes, quitte à multiplier par un élément de $SL_n(\mathbb{C})$, on peut supposer que f correspond à un des cas précédent, voir par exemple [Ne, p.112]. Le nilcone est donc constitué des courbes cubiques dont les singularités sont pires que des points doubles à tangentes distinctes, voir figure 5.1. Ce sont les courbes qu'il faut jeter pour obtenir un quotient projectif. Les courbes semi-stables sont les courbes elliptiques de même que les cubiques dont les singularités ne sont pas trop graves, c'est-à-dire des points doubles à sécantes distinctes, voir figure 5.2.

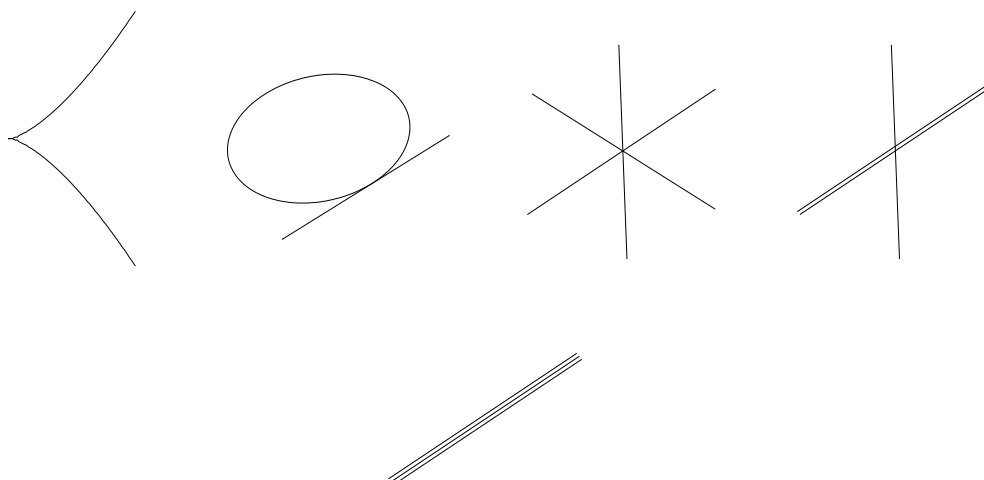


FIG. 5.1

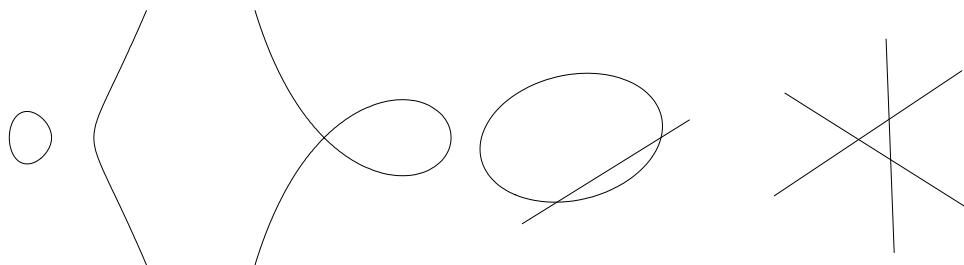


FIG. 5.2

Chapitre 6

GÉOMÉTRIE DES COVARIANTS

Rappelons un théorème important de la théorie classique des invariants énoncé dans l'introduction.

Théorème 6.0.1 (théorème de finitude de Hilbert classique). *Tout système fini de polynômes homogènes admet une base de Hilbert pour ses invariants comme pour ces covariants.*

Jusqu'à présent, nous avons démontré la première partie de ce théorème dans le cas plus général d'un groupe linéairement réductif agissant sur une k -algèbre de type fini. Dans ce chapitre, nous démontrerons la seconde partie dans le cas d'un groupe semi-simple. Plus précisément, pour un groupe semi-simple G agissant sur une variété affine X , nous montrerons que l'anneau des covariants est de type fini, c'est à dire qu'il existe des covariants f_1, \dots, f_n tels que tous les autres covariants s'expriment comme fonction polynomiale dans les variables f_1, \dots, f_n . Comme pour les invariants, nous pourrons alors étudier l'application régulière

$$\begin{aligned} \pi : X &\rightarrow \mathbb{A}^n \\ x &\mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x)) \end{aligned}$$

Nous démontrerons enfin un critère analogue au théorème 5.1.1 pour déterminer les fibres de π .

6.1. THÉORÈME DE FINITUDE POUR LES COVARIANTS

Soit V une représentation rationnelle de G . Un covariant de type V est alors une application polynomiale $\varphi : X \rightarrow V$ G -équivariante, c'est-à-dire telle que $\varphi(\sigma \cdot x) =$

$\rho(\sigma)\varphi(x)$. Choisissons un sous groupe de Borel B , U un sous groupe maximal unipotent de B et T un tore maximal normalisant B . Soit $f \in k[X]^U$ un vecteur de plus poids λ et considérons la représentation simple V_λ engendré par f sur G . Nous obtenons alors un homomorphisme $\varphi^* : V_\lambda \hookrightarrow k[X]$ que l'on peut étendre à un homomorphisme $\varphi^* : k[V_\lambda^*] \hookrightarrow k[X]$.

Chaque élément de $k[X]^U$ détermine donc un covariant $\varphi : X \rightarrow V_\lambda^*$. On peut en fait montrer que tous les covariants sont obtenus de cette façon, voir [P, Section 3.14] pour une démonstration. En utilisant des méthodes semblables, il est possible de montrer que $k[X]^U$ est de type fini, voir [P, section 3.14]. Dans ce mémoire, nous démontrerons ce résultat à l'aide de méthodes plus géométriques, ce qui nous permettra d'obtenir une version analogue au critère de Hilbert-Mumford pour les covariants. Dans le reste de ce chapitre, nous parlerons donc des éléments de $k[X]^U$ pour un sous-groupe maximal unipotent fixé pour parler des covariants.

Dans les prochaines sections, nous montrerons que si G est un groupe semi-simple agissant linéairement sur une variété affine X et si U est un sous-groupe maximal unipotent de G , alors $k[X]^U$ est de type fini. Ce résultat se base sur le principe de transfert, que nous démontrerons dans la section 6.1.2, et sur le fait important que $k[G]^U$ est de type fini, résultat que nous démontrerons dans la section 6.1.1.

6.1.1. Covariants de la représentation régulière

La représentation régulière de G est la représentation induite par l'action de G sur $k[G]$, où G agit sur lui-même par multiplication à droite. $k[G]^U$ est alors l'algèbre des covariants pour cette représentation. Dans cette section, nous montrerons que cette k -algèbre est de type fini.

Considérons G/U l'espace d'orbite. Dans [B], Borel montre les résultats suivants :

Théorème 6.1.1. *On peut donner à G/U une structure de variété lisse quasi projective*

DÉMONSTRATION. Voir [B], Theorem 6.8. □

Théorème 6.1.2. *L'anneau de coordonnées de G/U est isomorphe à $k[G]^U$*

DÉMONSTRATION. Voir [B], Theorem 6.5. □

Théorème 6.1.3. *Soit X une variété, G un groupe linéaire algébrique agissant sur X et $x \in X$. Alors $G \cdot x$ est lisse.*

DÉMONSTRATION. Voir [B], Theorem 6.7. □

Nous utiliserons ces résultats pour démontrer que $k[G]^U$ est de type fini. Commençons en énonçant un théorème important de Grosshans sur les groupes maximaux unipotents.

Théorème 6.1.4. *Soit G un groupe linéairement réductif et U un sous-groupe maximal unipotent de G . Alors, il existe une représentation $\rho : G \rightarrow GL(V)$ et un élément $v \in V^U$ tel que (i) $G_v \cong U$ et (ii) $\overline{G \cdot v} - G \cdot v$ est de codimension 2 dans $\overline{G \cdot v}$*

Assumons pour l'instant ce résultat et démontrons le théorème suivant :

Théorème 6.1.5. *Soit G un groupe linéairement réductif et U un sous-groupe maximal unipotent de G . Alors $k[G]^U$ est de type fini.*

DÉMONSTRATION. Par le théorème 6.1.2, $k[G]^U \cong k[G/U]$; par le 1.2.2, la condition (ii) du théorème 6.1.4 implique quant à elle que $k[G \cdot v] \cong k[\overline{G \cdot v}]$ qui est de type fini puisque $\overline{G \cdot v}$ est une variété affine. Il nous reste donc à démontrer que $k[G/U] \cong k[G \cdot v]$. Pour ce faire, nous démontrerons que le morphisme

$$\begin{aligned} \psi_v : G/U &\rightarrow G \cdot v \\ \bar{g} &\mapsto g \cdot v \end{aligned}$$

est un isomorphisme. Par les théorèmes 6.1.1 et 6.1.1, G/U et $G \cdot v$ sont lisse et donc normale. Enfin, ψ_v est bijectif par la condition (i) du théorème et l'isomorphisme découle alors du Théorème principal de Zariski (1.2.2). □

Il nous reste donc à démontrer le théorème 6.1.4 pour compléter la preuve de 6.1.5. La preuve de ce résultat repose sur des propriétés des sous-groupes maximaux unipotents que l'on retrouve par exemple lorsque l'on étudie les représentations du groupe des matrices unipotentes supérieures d'ordre 2.

Exemple 6.1.1. Considérons $U = U_2$, le sous-groupe de $G = SL_2$ constitué des matrices unipotentes supérieures et considérons l'action de U sur G par multiplication à gauche.

Soit $k[x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}]/(\det - 1)$, l'anneau de coordonnées de SL_2 . On vérifie alors que les invariants sont les éléments de $k[x_{11}, x_{21}]$ et donc que $k[G]^U$ est de type fini. Nous montrerons tout de même qu'il est possible de construire une représentation de U_2 satisfaisant les conditions du théorème 6.1.4.

Considérons $V = k^2$ et $\rho : G \rightarrow GL(V)$ la représentation définie par l'action de G sur V par multiplication à droite et remarquons que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$$

En posant $v = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, nous obtenons donc $G_v = U$.

Enfin, remarquons que l'orbite de v est constitué de tous les vecteurs $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ tels que a et b ne soit pas tous deux nul et est donc isomorphe à $\mathbb{A}^2 \setminus \{0, 0\}$ dont le bord est de codimension 2 dans \mathbb{A}^2 .

Exemple 6.1.2. Considérons $U = U_n$, le sous-groupe de $G = SL_n$ constitué des matrices unipotentes supérieures et considérons l'action de U sur G par multiplication à gauche.

$$\text{Soit } V_i = k^{n-i} \text{ et } v_i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le groupe G agit alors sur V_i par multiplication à droite par la sous-matrice inférieure droite d'ordre $n - i$, c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} g_{1,1} & g_{1,2} & \cdots & g_{1,n} \\ g_{2,1} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{n,1} & \cdots & \cdots & g_{n,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{n-i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{1,n-i} & \cdots & g_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{n-i,1} & \cdots & g_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{n-i} \end{pmatrix}$$

Appelons ρ_i la représentation de G dans V_i définie par cette action.

Posons maintenant $V = V_0 \oplus \dots \oplus V_{n-2}$ et $v = (v_0, \dots, v_{n-2})$ et considérons la représentation de G dans V définie par $\rho = \rho_0 \oplus \dots \oplus \rho_{n-2}$, c'est-à-dire.

$$g \cdot w = (g \cdot w_0, \dots, w_{n-2})$$

On a donc

$$g \cdot v = \begin{pmatrix} g_{1,1} & g_{1,2} & \cdots & g_{1,n} \\ g_{2,1} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{n,1} & \cdots & \cdots & g_{n,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \cdots \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{1,1} \\ g_{1,2} \\ \vdots \\ \vdots \\ g_{1,n} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} g_{2,2} \\ g_{2,3} \\ \vdots \\ g_{2,n} \end{pmatrix} \oplus \cdots \oplus \begin{pmatrix} g_{n-1,n-1} \\ g_{n-1,n} \end{pmatrix}$$

et en particulier que $G_v = U$.

De plus, on remarque $G \cdot v = (V_0 - 0) \oplus V_1 \oplus \cdots \oplus V_{n-2}$ puisque les $g_{1,1}, \dots, g_{1,n}$ ne peuvent pas tous être nuls en même temps. On obtient donc que $\overline{G \cdot v} - G \cdot v = 0 \oplus V_1 \oplus \cdots \oplus V_{n-2}$ où $0 \in k^n$ et donc que $G \cdot v$ satisfait la condition de 2.

Montrons maintenant le théorème 6.1.4. Montrons premièrement que U est le stabilisateur de v . Nous aurons pour cela besoin du lemme suivant :

Lemme 6.1.1. *Soit $g \in G$. Alors g agit linéairement sur $v_i \forall i = 1, \dots, n \Leftrightarrow g \in B$. En particulier $G_v \subseteq B$.*

DÉMONSTRATION. Soit $g \in B = TU$. Alors g agit linéairement sur v_i :

$$g \cdot v = t \cdot (u \cdot v_i) = t \cdot v_i \in kv_i$$

De l'autre côté, soit g tel que $g \cdot v_i = \beta_i v_i \forall i = 1, \dots, n$. Par la décomposition de Bruhat, on peut écrire $g = b_1 n b_2$ avec $b_1, b_2 \in B$ et $n \in N_G(T)$. On a donc $n \cdot v_i = \beta'_i v_i$. L'action de \bar{n} vu comme un élément du groupe de Weil sur la base $\{\varpi_1, \dots, \varpi_n\}$ de $X(T)$ est alors triviale puisque $ntn^{-1} \cdot v_i = tv_i \forall i = 1, \dots, n$. On obtient donc $\bar{n} = Id_W$, c'est-à-dire $n \in T$. On en conclut que $g \in B$. \square

Corollaire 6.1.1. $U = G_v$

DÉMONSTRATION. Montrons que $U \subseteq G_v$. Soit $u \in U$, alors $u \cdot v = \sum u \cdot v_i = \sum v_i = v$. Montrons que $U \supseteq G_v$. Soit $\sigma \in G_v$. Par le lemme précédent, on peut alors écrire $\sigma = tu$ où $t \in T$ et $u \in U$. Mais alors $t \cdot v = t \cdot v = tu \cdot v = v$, et donc $t \cdot v_i = v_i \forall i = 1, \dots, n$, c'est-à-dire $\varpi_i(t) = 1 \forall i = 1, \dots, n$. Puisque $\varpi_1, \dots, \varpi_n$ est une base de caractères pour $X(T)$, on conclut que $t = 1_G$, c'est-à-dire que $\sigma \in U$. \square

Montrons maintenant que le bord de $G \cdot v$ est au moins de codimension 2 dans sa fermeture. L'idée de la preuve est la suivante : Nous montrerons que les éléments

du bord de $G \cdot v$ ont un stabilisateur dont la dimension est de 2 de plus que celle du stabilisateur des éléments de $G \cdot v$. La conclusion sera alors immédiate.

Nous utiliserons pour cela le lemme suivant :

Lemme 6.1.2. *Les composantes irréductibles de $\overline{G \cdot v} \setminus G \cdot v$ sont de la forme $G \cdot w$ ou w est de la forme $w = (0, \dots, 0, w_m, \dots, w_n)$.*

DÉMONSTRATION. Soit $w = (w_1, \dots, w_n) \in \overline{G \cdot v}$ avec $w_i \neq 0 \forall i = 1, \dots, n$. Considérons le morphisme

$$\begin{aligned} \tilde{\pi} : (V_1 \setminus \{0\}) \otimes \dots \otimes (V_n \setminus \{0\}) &\rightarrow \text{Proj}(V_1) \otimes \dots \otimes \text{Proj}(V_n) \\ (w_1, \dots, w_n) &\mapsto ([w_1], \dots, [w_n]) \end{aligned}$$

Puisque $w \in \overline{G \cdot v}$, on obtient que $\pi(w) \in \overline{\pi(G \cdot v)}$.

On voudrais avoir $\pi(w) \in \pi(G \cdot v)$. $k[X]^U$

Remarquons que l'image de $G \cdot v$ coïncide avec l'image de la variété projective G/B sous le morphisme

$$\begin{aligned} \tilde{\pi} : G/B &\rightarrow \text{Proj}(V_1) \otimes \dots \otimes \text{Proj}(V_n) \\ \bar{g} &\mapsto ([g \cdot v_1], \dots, [g \cdot v_n]) \end{aligned}$$

Cette image est donc fermé puisque G/B est complète, c'est-à-dire : $\overline{\pi(G \cdot v)} = \pi(G \cdot v)$.

On a donc $\pi(w) = \pi(g \cdot v)$ pour un certain $g \in G$ c'est-à-dire : $[w_i] = [g \cdot v_i] \forall i = 1, \dots, n$. On peut donc trouver des scalaires non nuls c_1, \dots, c_n tel que $w_i = c_i g \cdot v_i$. Soit maintenant t tel que $\lambda_i(t) = c_i$. On a alors $w = (gt) \cdot v$ c'est-à-dire $w \in G \cdot v$ \square

Remarque 6.1.1. Dans l'exemple 6.1.1, nous avons trouver $w = 0 \in V$ alors que dans l'exemple 6.1.2, nous avons $w = (0, v_1, \dots, v_{n-2}) \in V_0 \oplus \dots \oplus V_{n-2}$. Dans chacun des cas, le nombre de composantes nulles était d'exactly une. Dans ([G], p.4, note 1), Grosshans mentionne que ce résultat est vrai en général.

Proposition 6.1.1. $\overline{G \cdot v} \setminus G \cdot v$ a codimension ≥ 2 dans $\overline{G \cdot v}$

DÉMONSTRATION. Soit $G \cdot w$ une des composantes irréductibles de $\overline{G \cdot v} \setminus G \cdot v$. Par le lemme précédent, on sait que $w = (0, \dots, 0, w_m, \dots, w_n)$. Nous montrerons que $\dim(G_w) \geq \dim(U) + 2$. Nous aurons alors terminé puisque

$$\begin{aligned}
\text{codim}_{\overline{G \cdot v}}(G \cdot w) &= \dim(G \cdot v) - \dim(G \cdot w) \\
&= \dim(G) - \dim(U) - (\dim(G) - \dim(G \cdot w)) \\
&= \dim(G_w) - \dim(U) \geq 2
\end{aligned}$$

Remarquons premièrement que $w \in V_{\overline{w_1}}$ puisque $w_1 = 0$. Considérons maintenant les groupes de racines U_{α_1} et $U_{-\alpha_1}$. Puisque w est dans la fermeture de l'orbite de v , G_w contient au U et doit donc contenir au moins un des 2 groupe de racines, disons U_{α_1} . Par le lemme 1.4.2, il les contient donc tous les 2. G_w contient donc le groupe de dimension 3 G_{α_1} . On obtient alors le résultat en remarquant que $G_{\alpha_1} \cap U$ est de dimension 1. \square

DÉMONSTRATION. Démonstration du théorème 6.1.4 La condition (i) est satisfaite par le corollaire 6.1.1 alors que la condition (ii) découle de la proposition 6.1.1. \square

6.1.2. Principe de transfert de Borel

Utilisé depuis longtemps pour l'étude des covariants, on doit entre autres à Borel l'utilisation récente du principe de transfert en géométrie algébrique. Comme son nom l'indique, ce théorème permet déduire certaines informations sur les U -invariants de l'étude, plus simple, des covariants (les éléments de $k([G]^U \otimes_k k[X])^G$).

Soit G un groupe semi-simple agissant rationnellement sur une variété affine X et U un sous-groupe maximal unipotent de G . Définissons alors l'action de $G \times U$ sur $G \times X$ par $(\sigma, \tau) * (g, x) = (\sigma g \tau^{-1}, \sigma * x)$ et posons $G/U := \text{Spec}(k[G]^H)$. Avant de montrer le principe de transfert, énonçons d'abord un lemme de Nagata.

Lemme 6.1.3. *Soit G_1 un groupe linéaire algébrique agissant rationnellement sur une k -algèbre A_1 tel que $A_1^{G_1}$ soit de type fini et G_2 un groupe agissant rationnellement sur une k -algèbre A_2 tel que $A_2^{G_2}$ soit de type fini. Alors $(A_1 \otimes A_2)^{G_1 \times G_2} \cong A_1^{G_1} \otimes A_2^{G_2}$ où l'action de $G_1 \times G_2$ sur $A_1 \otimes A_2$ est définie par $(\sigma, \tau) * a_1 \otimes a_2 = a_1 \otimes \tau a_2$.*

Théorème 6.1.6. *Soit G , un groupe semi-simple agissant rationnellement sur une variété affine X et H , un sous-groupe de G tel que $k[G]^H$ est une k -algèbre de type fini. Alors $(k[G]^H \times k[X])^G \cong k[X]^H$.*

DÉMONSTRATION. Nous montrerons que $(G \times X)^{G \times H}$ est à la fois isomorphe à $(k[G]^H \otimes k[X])^G$ et à $k[X]^H$.

Commençons par $(k[G] \otimes k[X])^{G \times H} \cong (k[G]^H \otimes k[X])^G$. Il est suffisant pour cela de montrer que $(k[G] \otimes k[X])^{(1) \times H} \cong k[G]^H \otimes k[X]$; nous n'aurons ensuite qu'à prendre les invariants par $G \times \{1\}$ de chaque côté. Pour cela, remarquons que $(G \times X)^{(1) \times H} \cong k[G]^H \otimes k[X]$ est un cas particulier du lemme 6.1.3 (H n'agit que sur $k[G]$ et $k[G]^H$ est de type fini par hypothèse).

Montrons maintenant que $(k[G] \otimes k[X])^{G \times H} \cong (k[X])^H$. Montrons d'abord que $(k[G] \otimes k[X])^{G \times (1)} \cong k[G]^H \otimes k[X]$; nous n'aurons ensuite qu'à prendre les invariants par $\{1\} \times H$ de chaque côté.

Considérons l'application $\varphi : k[G] \otimes k[X]^{(1) \times H} \rightarrow k[X]$ définie par $\sum f_i \otimes h_i \mapsto \sum f_i(e) \otimes h_i$. On démontre que cette application est un homomorphisme de k -algèbre.

Montrons l'injectivité. Soit $\sum f_i \otimes h_i \in \text{Ker}(\varphi)$. Quitte à remplacer ceux qui sont linéairement dépendants, on peut supposer que les h_i sont linéairement indépendants. Puisque $\varphi(\sum f_i \otimes h_i) = \sum f_i(e) \otimes h_i = 0$, on doit avoir $f_i(e) = 0 \forall i$. Enfin, les f_i étant invariants sous l'action de G , on obtient que $f_i(g) = f_i(ge) = g * f_i(e) = 0 \forall i$ c'est-à-dire que $f_i = 0 \forall i$ et donc que $\sum f_i \otimes h_i = 0$

La surjectivité enfin. Soit $f \in k[X]$. On peut considérer f comme un élément de $(k[G] \otimes k[X])$ en posant $f(g, x) = g^{-1} \cdot x$. Soit $\sigma \in G$ et $(g, x) \in G \times X$. Alors, $\sigma * f(g, x) = f(\sigma g, \sigma x) = f((\sigma g)^{-1} \sigma x) = f(g^{-1} \sigma^{-1} \sigma x) = f(g^{-1} x) = f(g, x)$ c'est-à-dire $f \in (k[G] \otimes k[X])^{G \times (1)}$. Enfin $\varphi(f)(x) = f(e \cdot x) = f(x)$, démontrant la surjectivité. \square

Remarque 6.1.2. Géométriquement, le principe de transfert nous dit que le morphisme $(G \times_U X)/G \rightarrow X/U$ défini par $(g, x) \mapsto g \cdot x$ est un isomorphisme de variété.

Démontrons maintenant un résultat important du chapitre 3 que l'on retrouve en partie grâce au principe de transfert.

Théorème 6.1.7. $A^U/I^U \cong (A/I)^U$

DÉMONSTRATION. $A^U/I^U \cong (k[G]^U \otimes A)^G / (k[G]^U \otimes I)^G \cong (k[G]^U \otimes A/I)^G \cong (A/I)^U \quad \square$

Remarque 6.1.3. Dans ([G2], théorème 1.3), Grosshans démontre par des méthodes issues de la théorie des groupes linéaires que si G est un groupe réductif (donc géométriquement réductif) agissant rationnellement sur une k -algèbre A et I un idéal G -invariant de A , alors $(A/I)^U$ est entière sur A^U/I^U . Remarquons qu'il serait aussi possible d'obtenir ce résultat à partir de la démarche précédente à partir des résultats du chapitre 7.

6.1.3. Théorème de finitude

En utilisant le principe de transfert, nous obtenons le théorème le plus important de cette section.

Théorème 6.1.8. *Soit G un groupe linéairement réductif agissant sur une variété affine X et $U < G$ un sous-groupe maximal unipotent. Alors $k[X]^U$ est de type fini.*

DÉMONSTRATION. $k[G]^U \otimes k[X]$ est de type fini puisque $k[X]$ et $k[G]^U$ sont de type fini. Par le théorème de finitude de Hilbert, $(k[G]^U \otimes k[X])^G$ est donc aussi de type fini. Le théorème suit alors du principe de transfert. \square

6.2. PROPRIÉTÉS DE SÉPARATION DES COVARIANTS

Soit G , un groupe semi-simple agissant sur une variété affine X . Par le théorème 6.1.8, $k[G]^U$ est alors de type fini et comme au chapitre 3, on peut considérer la variété affine $\text{Spec}(k[X]^U)$. Dans cette section, nous étudierons à l'aide d'exemples simples quelques propriétés géométriques de l'application $\pi_U : X \rightarrow \text{Spec}(k[X]^U)$ induite par l'injection de $k[X]^U$ dans $k[X]$. Nous observerons que contrairement au cas réductif, la paire $(\text{Spec}(k[X]^U), \pi_U)$ n'est pas un quotient de X par U puisque les U -orbites fermées ne sont pas séparées par π_U .

Le lemme suivant nous indique qu'un quotient de X par U devrait être un quotient géométrique.

Lemme 6.2.1 (Humphreys). *Soit G un groupe linéairement réductif agissant sur une variété affine X et soit U un sous-groupe maximal unipotent de G . Pour tous $x \in X$, l'orbite $U \cdot x$ est fermé.*

DÉMONSTRATION. Voir [Hu], Proposition 4.10 \square

Les exemples suivants nous indiquent la propriété de séparation n'est généralement pas satisfaite.

Exemple 6.2.1. Considérons l'action de SL_2 sur \mathbb{A}^2 définie par

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

Soit maintenant U_2 , le sous-groupe de SL_2 constitué des matrices triangulaires supérieures unipotentes. U_n agit donc sur \mathbb{A}^2 par

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + by \\ y \end{pmatrix}$$

Les orbites sont donc les ensembles de la forme

$$\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} * \\ b \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire les points de l'axe des x de même que les droites parallèles à cet axe.

On vérifie que $k[X]^{U_n} = k[y]$. L'application quotient est donc la projection

$$\begin{aligned} \pi_U : \quad \mathbb{A}^2 &\longrightarrow \mathbb{A}^1 \\ (x, y) &\longmapsto y \end{aligned}$$

qui ne sépare pas les points de l'axe des x . La variété affine $X//U$ ne satisfait donc pas les propriétés d'un quotient.

Exemple 6.2.2. Dans le cas de l'action de U_3 sur \mathbb{A}^3 , les orbites sont les points de l'axe des x , les droites parallèles à l'axe des x et les plans parallèles au plan Oxy .

On vérifie que $k[X]^{U_n} = k[z]$. L'application quotient est donc la projection

$$\begin{aligned} \pi_U : \quad \mathbb{A}^3 &\longrightarrow \mathbb{A}^1 \\ (x, y, z) &\longmapsto z \end{aligned}$$

qui ne sépare ni les points de l'axe des x ni les droites parallèles à l'axe des x . La variété affine $X//U$ ne satisfait donc pas les propriétés d'un quotient.

Dans les deux exemples précédents, on voit que la propriété de séparation est toujours obtenue si l'on jette la fibre au dessus de 0. Ce n'est malheureusement pas toujours le cas. Considérons l'exemple suivant.

Exemple 6.2.3. Représentation adjointe de SL_2

Considérons l'action de $G = SL_2$ sur $X = \mathfrak{sl}_2$ par conjugaison. Nous obtenons alors que $k[\mathfrak{sl}_2]^{SL_2} = k[\det]$. L'application quotient est alors donnée par

$$\begin{aligned} \pi : \mathfrak{sl}_2 &\rightarrow \mathbb{A}^1 \\ A &\mapsto \det(A) \end{aligned}$$

Suivant les résultats obtenus dans la section 3.1, les G -fibres contenant une orbite fermée de la forme

$$O\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}\right)$$

contiennent aussi l'orbite ouverte

$$O\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}\right)$$

alors que les autres fibres ne contiennent qu'une seule orbite.

Considérons maintenant l'action de U_2 , le sous-groupe des matrices unipotentes supérieures de SL_2 , sur \mathfrak{sl}_2 induite par l'action de SL_2 . On vérifie alors que $k[\mathfrak{sl}_2]^{U_2} = k[x_{21}, \det]$. L'application π_U est alors donnée par

$$\begin{aligned} \pi_U : \mathfrak{sl}_2 &\longrightarrow \mathbb{A}^2 \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\longmapsto (c, ab - cd) \end{aligned}$$

Considérons la fibre au dessus de $(0, -1)$. Cette fibre contient entre autre les U -orbites disjointes

$$O_U\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_{-1} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & \lambda_{-1} \end{pmatrix}$$

et

$$O_U \left(\begin{pmatrix} \lambda_{-1} & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \lambda_{-1} & * \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

De même, la fibre au dessus de $(0, 1)$ contient entre autre les U -orbites disjointes

$$O_U \left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

et

$$O_U \left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \right) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & u \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} : u \neq 0 \right\}$$

En fait, on vérifie de façon similaire que les fibres aux dessus des points $(0, y)$ contiennent tous plusieurs orbites disjointes. On peut aussi vérifier que les autres fibres ne contiennent qu'une seule orbite. L'ouvert constitué des matrices (a_{ij}) de \mathfrak{sl}_2 dont le coefficient a_{12} est non nul admet donc un quotient géométrique par U_2 .

Remarque 6.2.1. Contrairement aux exemples 6.2.1 et 6.2.2, dans l'exemple précédent, les points problématiques n'étaient seulement les points où tous les covariants s'annulaient, mais aussi ceux où seul le covariant non invariant était nul. Nous conjecturons qu'un quotient géométrique peut toujours être obtenu en jetant les points où les covariants qui ne sont pas des covariants s'annulent. Les deux premiers exemples étaient des cas particuliers où il n'y avait pas d'invariants et satisfont donc cette conjecture.

6.3. CRITÈRE DE HILBERT-MUMFORD-BRION

Contrairement au cas réductif, nous remarquons dans les exemples de la section précédente que les points de la fibre au dessus de 0 ne sont pas les points contenant 0 dans la fermeture de leur orbite, dans lequel cas nous aurions eu $\pi_U^{-1}(0) = \{0\}$ par le lemme 6.2.1. Dans [Br] Brion utilise le principe de transfert vu au chapitre 6 pour déduire du critère de Hilbert-Mumford un critère pour cette fibre.

Théorème 6.3.1 (Brion). *Soit X une G -variété affine. Pour $x \in X$, les conditions suivantes sont alors équivalentes : (i) $f(x) = 0 \forall f \in \mathbb{C}[X]^U$; (ii) $\exists \lambda \in \text{hom}(\mathbb{C}^\times, T)$ tel que $\langle \lambda_v, \varpi_i \rangle > 0$ et $u \in U$ tels que $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t) \cdot u \cdot x = 0$.*

Un de nos objectifs était d'obtenir un critère semblable pour les U -fibres à partir du critère général de Hilbert-Mumford. Dans la preuve de Brion, le fait le T soit contenu dans le stabilisateur de 0 joue un rôle fondamental. Malheureusement, pour un point $y \in X$ en général, T n'est pas contenu dans le stabilisateur de y . Nous n'avons pas su contourner cette difficulté. Nous obtenons donc un critère valable seulement pour les U -fibres dont les points d'orbite fermé sont stabilisés par T . Cette condition est satisfaite au moins dans le cas des représentations adjointes. En fait, la condition $T \subseteq G_y$ peut être substantiellement affaiblie. Nous verrons qu'il est seulement nécessaire que $\lambda(t) \subseteq G_y$ pour un sous-groupe à 1 paramètre bien précis.

Nous obtenons donc le théorème suivant :

Théorème 6.3.2 (Brion généralisé). *Soit X une G -variété affine et soit $x \in X$ tel que $G \cdot x$ est fermée et tel $G_y \supseteq \lambda_v(\mathbb{C}^\times)$. Pour $x \in X$, les conditions suivantes sont alors équivalentes : (i) $f(x) = f(y) \forall f \in \mathbb{C}[X]^U$; (ii) $\exists \lambda \in \text{hom}(\mathbb{C}^\times, T)$ tel que $\langle \lambda, \varpi_i \rangle > 0$ et $u \in U$ tels que $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t)u \cdot x \in G \cdot y$.*

DÉMONSTRATION. Soit $v = \sum v_i$, ou $v_i \in V_i^U$, V_i un G -module simple de plus haut poids ϖ_i . Alors par le théorème 6.1.6, nous obtenons que l'application

$$\phi : \mathbb{C}[\overline{G \cdot v} \times X]^G \rightarrow \mathbb{C}[X]^U$$

où $\phi(f)(x) = f(v, x)$ est un isomorphisme d'algèbre. La condition (i) implique donc que $f(v, x) = f(v, y) \forall f \in \mathbb{C}[\overline{G \cdot v} \times X]^G$.

On obtient donc que

$$f(v, x) = f(v, y) = f(\lambda(t)v, \lambda(t)y) = f(\lambda(t)v, y) = f(0, y)$$

pour tous $f \in \mathbb{C}[\overline{G \cdot v} \times X]^G$.

Par le critère de Hilbert-Mumford 5.1.1 appliqué à $\overline{G \cdot v} \times X$, il existe alors $\lambda \in \text{hom}(\mathbb{C}^\times, T')$ pour un certain tore maximal T' tel que $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t) \cdot (v, x) \in G \cdot (0, y)$.

Il ne nous reste donc plus qu'à remplacer λ par un sous-groupe à un paramètre de T . Nous utiliserons pour cela le lemme 1.3.5.

Soit $P_\lambda = \{g \in G \mid \lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t)g\lambda(t)^{-1} \text{ existe}\}$. Nous savons que P_λ est parabolique par le lemme 1.3.5 et donc que l'intersection de P_λ et de B contient un tore maximal, disons T'' (lemme 1.4.1).

Remarquons que T' est aussi un tore maximal de P_λ puisque $\lambda_v(\mathbb{C}^\times) \in T'$. Ils sont conjugués dans P_λ , c'est-à-dire que $T'' = gT'g^{-1}$ pour un certain $g \in P_\lambda$. D'un autre côté, remarquons que T et T'' deux tore maximaux de B et sont donc conjugués dans B , c'est-à-dire que $T = uT''u^{-1}$ pour un certain $u \in U$. On obtient donc finalement que $T = ugT'g^{-1}u^{-1}$ avec $u \in U$ et $g \in P_\lambda$.

Considérons maintenant le sous-groupe à 1 paramètre $\lambda' = ug\lambda g^{-1}u^{-1} \in \text{hom}(\mathbb{C}^\times, T)$ défini par $\lambda'(t) = ug\lambda(t)g^{-1}u^{-1}$. Nous prétendons que $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda'(t) \cdot u \cdot (v, x) \in G \cdot y$.

Nous obtenons en effet que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \lambda'(t) \cdot u(v, x) = \lim_{t \rightarrow 0} ug\lambda(t)g^{-1}u^{-1}u(v, x) = \lim_{t \rightarrow 0} ug\lambda(t)g^{-1}\lambda(t)^{-1}\lambda(t)(v, x).$$

Par construction de λ' , nous savons que $\lim_{t \rightarrow 0} ug\lambda(t)g^{-1}\lambda(t)^{-1}$ existe et que

$$\lim_{t \rightarrow 0} ug\lambda(t)(v, x) \in G \cdot y.$$

La limite $\lim_{t \rightarrow 0} ug\lambda(t)g^{-1}\lambda(t)^{-1}(v, x)$ est donc dans $G \cdot y$ et $\lambda'(t)$ est alors le sous-groupe à 1 paramètre que l'on cherche puisque

$$\lim_{t \rightarrow 0} \lambda'(t) \cdot v = 0 \Leftrightarrow \langle \lambda_v, \varpi_i \rangle > 0$$

et que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \lambda'(t) \cdot u \cdot x \in G \cdot y$$

□

Corollaire 6.3.1 (de la preuve). *Soit $y \in X$ tel que $G \cdot x$ est fermé et tel $G_x \supseteq \lambda_v(\mathbb{C}^\times)$.*

Soit $\sigma \in G$ tel que $G_\sigma x \supseteq \lambda_v(\mathbb{C}^\times)$. Alors $f(x) = f(\sigma x) \quad \forall f \in \mathbb{C}[X]^U$

DÉMONSTRATION. Soit $f \in \mathbb{C}[X]^U$. Soit $h \in \mathbb{C}[\overline{G \cdot v} \times X]^G$ tel que $f(x) = h(v, x) \quad \forall x \in X$.

Alors

$$\begin{aligned} f(x) &= h(v, x) = h(\lambda_v(t)v, \lambda_v(t)x) = h(\lambda_v(t)v, x) = h(0, x) = h(\sigma \cdot (0, x)) = h(0, \sigma x) = \\ &f(\sigma x) \end{aligned}$$

□

Chapitre 7

RÉSULTATS EN CARACTÉRISTIQUE P

En caractéristique nulle, les groupes linéairement réductifs sont très peu nombreux en comparaison des groupes réductifs¹. Les théorèmes de la théorie géométrique des invariants que nous venons de voir se limitent donc de facto au cas de caractéristique nulle. Dans la préface de la première édition de [GIT], Mumford conjecture qu'un groupe algébrique est réductif si et seulement s'il est géométriquement réductif. Cette conjecture sera montrée par Haboush [Ha, Théorème 5.2] et permettra d'étendre la théorie géométrique en caractéristique p pour les groupes réductifs². La notion de groupe géométriquement réductif est en effet une généralisation naturelle de la notion de groupe linéairement réductif. Les propriétés de ces groupes restent suffisantes pour démontrer les résultats de la théorie géométrique des invariants. Nous utilisons dans cet appendice certaines méthodes d'algèbre commutative nous permettant de pallier l'absence d'opérateur de Reynolds pour un groupe géométriquement réductif. Nous démontrerons entre autres des versions des théorèmes 3.2.1 et 7.0.3 pour ces groupes. On retrouvera plus de détails sur la construction d'un quotient pour un groupe géométriquement réductif dans [Ne] et en appendice de [GIT].

Définition 7.0.1 (Réductivité géométrique). Un groupe algébrique linéaire et géométriquement réductif si pour toute représentation rationnelle V et pour tout $v \in V^G$ non nul, il existe $f \in k[V]^G$ homogène de degré n tel que $f(v) = 1$.

¹Nagata montrera dans [N] qu'en caractéristique p , les seuls groupes linéairement réductifs sont les extensions de tore par un groupe d'ordre relativement premier à p .

²Voir par exemple la section A de l'appendice au chapitre 1 de [GIT] pour un rappel historique des résultats concernant cette conjecture.

Lemme 7.0.1. *Soit A une k -algèbre et G un groupe géométriquement réductif agissant rationnellement sur A . Si I est un idéal G -stable de A et si $a \in (A/I)^G$ alors $a^n \in A^G/I^G$ pour un certain n .*

DÉMONSTRATION. Soit $\bar{a} \in (A/I)^G$ non nul. Par le lemme 1.3.2 il existe W un sous-espace vectoriel de G -stable et de dimension finie W tel que $a \in W$. Clairement $W \cap I$ est aussi G -stable et de dimension finie. Si e_1, \dots, e_s est une base pour $W \cap I$, alors a, e_1, \dots, e_s est une base pour $V := ka + W \cap I$ puisque $a \notin I$. Soit $a^* \in V^*$ la forme linéaire définie par $a^*(a) = 1$ et $a^*(e_i) = 0$. Montrons que a^* est G -invariant. Soit $v = \alpha a + \sum \alpha_i e_i \in V$ et $\sigma \in G$.

Alors $a^*(\sigma e_i) = a^*(e_i) = 0$ puisque $\sigma e_i \in W \cap I$ et $a^*(\sigma a) = a^*(a)$ puisque $\sigma a - a \in W \cap I$ ($\bar{a} \in (A/I)^G$).

On a alors

$$a^*(\sigma v) = \alpha a^*(\sigma a) + \sum \alpha_i a^*(\sigma e_i) = \alpha a^*(a) + \sum \alpha_i a^*(e_i) = a^*(v)$$

Par hypothèse sur G il existe donc $f \in k[V^*]^G$ homogène de degré n tel que $f(a^*) = 1$, qu'on peut écrire sous la forme $f = \beta a^n + \sum \beta_i \prod e_j^{n_j}$, où $\sum n_j = n$. On a alors

$$1 = f(a^*) = \beta a^*(a)^n + \sum \beta_i \prod a^*(e_j)^{n_j} = \beta a^*(a)^n = \beta$$

et on peut réécrire f sous la forme $f = a^n + v$, ou $v \in I$. On a donc $f \in A^G$ tel que $\bar{f} = \bar{a}^n$, c'est-à-dire $\bar{a}^n \in A^G/I^G$ \square

Corollaire 7.0.2. *Suivant la notation du théorème précédent $(A/I)^G$ est entière sur A^G/I^G .*

DÉMONSTRATION. Soit $a \in (A/I)^G$. Alors a est une racine de $x^n - a^n$ qui est élément de $A^G/I^G[x]$ par le théorème précédent. \square

Théorème 7.0.3. *Si A est une k -algèbre graduée de type fini et G est un groupe géométriquement réductif agissant sur A , alors A^G est de type fini.*

DÉMONSTRATION. Considérons Σ l'ensemble des idéaux homogène G -stable I de A tels que $(A/I)^G$ n'est pas de type fini. Si $\Sigma = \emptyset$ alors $A = A/(0)$ est de type fini. On peut

donc supposer que $\Sigma \neq \emptyset$. Σ possède alors un élément maximal, disons $I_0 \neq A$ tel que $(A/I_0)^G$ n'est pas de type fini. Posons $B := A/I_0$ et soit $\bar{a} \in B^G$ non nul.

Supposons pour commencer que \bar{a} n'est pas un diviseur de zéro dans B et supposons, en plus, que ce n'est pas une unité $((\bar{a}(B)^G)_+ = \bar{a}(B)^G)$. Par maximalité de I_0 , $B/\bar{a}B = A/(I_0 + aA)$ est de type fini. Mais comme $(B/\bar{a}B)^G$ est entière sur $B^G/(\bar{a}B)^G$ (corollaire 7.0.2) alors $B^G/(\bar{a}B)^G$ est aussi de type fini et donc noethérien. Mais puisque \bar{a} n'est pas un diviseur de zéro, l'inclusion $\bar{a}B^G \hookrightarrow (\bar{a}B)^G$ est un isomorphisme et $B^G/\bar{a}(B)^G$ est noethérien. L'idéal irrelevant, $(B^G)_+/\bar{a}(B)^G$ (lemme 1.1.1) est alors finiment engendré sur $B^G/\bar{a}(B)^G$, disons par x_1, \dots, x_n et $(B^G)_+$ est à son tour finiment engendré sur (B^G) par x_1, \dots, x_n, \bar{a} . B^G est donc de type fini (lemme 1.1.1), une contradiction.

Supposons maintenant que \bar{a} est un diviseur de zéro dans B , c'est-à-dire $(\bar{0} : \bar{a}) \neq \emptyset$. Par maximalité de I_0 , $(B/(\bar{0} : \bar{a}))^G = (A/(I_0 + (I_0 : a)))^G$ est de type fini. Mais comme $(\bar{0} : \bar{a})$ est le noyau de l'homomorphisme de k -algèbre $B \rightarrow \bar{a}B$, $(\bar{a}B)^G = (B/(\bar{0} : \bar{a}))^G$ est aussi de type fini et donc noethérien comme anneau et à donc comme B^G module. Comme précédemment B^G/A^G est aussi noethérien comme anneau et donc comme B^G module. On a donc la courte séquence exacte

$$0 \rightarrow (\bar{a}B)^G \rightarrow (B)^G \rightarrow (B)^G/(\bar{a}B)^G \rightarrow 0$$

Mais B^G est alors noethérien comme B^G module (lemme 1.1.7), c'est-à-dire comme anneau et donc de type fini (lemme 1.1.1), une contradiction.

Enfin, si B^G ne contient que des unités, alors $B^G = (B^G)_0 = k$, clairement de type fini, une contradiction. □

La propriété démontrée par le corollaire 7.0.2 a des conséquences géométriques importantes. On retrouve en effet la propriété de séparation que l'on avait dans le cas linéairement réductif.

Montrons tous d'abord le lemme suivant, une version affaiblie du lemme 3.3.2 mais ayant les mêmes conséquences géométriques.

Lemme 7.0.2. *Soit I_1 et I_2 des idéaux G -stables de R , et soit $f \in (I_1 + I_2)^G$. Il existe alors $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^n \in I_1^G + I_2^G$*

DÉMONSTRATION. Soit $f \in (I_1 + I_2)^G$, disons $f = f_1 + f_2$, tels que $\sigma \cdot f_1 + \sigma \cdot f_2 = f_1 + f_2$. On remarque que $\overline{f_i} \in (I_i / (I_1 \cap I_2))^G$ pour $i = 1, 2$. Puisque I_1 et I_2 sont aussi des k -algèbre sur lesquelles G agit rationnellement, en appliquant le lemme 7.0.1, nous obtenons que $\overline{f_i^{n_i}} \in I_i^G / (I_1 \cap I_2)^G$. Nous obtenons finalement que $f_i^{n_i} = h_i + g_i$, où $h_i \in I_i^G$ et $g_i \in (I_1 \cap I_2)^G$ pour $i = 1, 2$, d'où $f^{n_1 n_2} \in I_1^G + I_2^G$. \square

Lemme 7.0.3. *Soit W_1 et W_2 des fermés disjoints de X . Il existe alors $f \in k[X]^G$ tel que $f(W_1) = 0$ et $f(W_2) = 1$.*

DÉMONSTRATION. Soit I_1 et I_2 tels $W_i = \mathcal{V}(I_i)$ pour $i = 1, 2$. Par le Nullstellensatz, nous obtenons alors que $1 \in I_1 + I_2$, d'où l'on tire que $1 \in (I_1 + I_2)^G$. Nous pouvons alors appliquer le lemme précédent pour obtenir que $1 \in I_1^G + I_2^G$, disons $1 = f_1 + f_2$ où $f_i \in I_i$. La fonction f_1 est alors la fonction recherchée. \square

En conclusion, comme pour un groupe linéairement réductif, l'application

$$\begin{aligned} \pi : X &\rightarrow X//G \\ m &\mapsto m \cap A^G \end{aligned}$$

sépare donc les orbites fermées et par continuité les classes d'orbites équivalentes de fermeture.

BIBLIOGRAPHIE

- [A] ATIYAH, MICHAEL F. ; MACDONALD, IAN G. *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley Publishing Co., London, 1969.
- [Ar] ARONHOLD, SIEGFRIED *Theorie der homogenen Functionen dritten Grades von drei Variabeln*, in *Journal für die reine und angewandte Mathematik, Crelle*, 97–191, 1858.
- [B] BOREL, ARMAND. *Linear algebraic groups, Second edition*, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [Bi] BIRKES, DAVID. *Orbits of linear algebraic groups*, *Annals of Mathematics, Second Series*, Volume 93, 459–475, 1971.
- [Br] BRION, MICHEL. *Invariants d'un sous-groupe unipotent maximal d'un groupe semi-simple*, *Annales de l'Institut Fourier, Grenoble*, Volume 33, no.1, 1–27, 1983.
- [E] EISENBUD, DAVID. *Commutative algebra. With a view toward algebraic geometry*, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [E2] EISENBUD, DAVID ; HARRIS, JOE. *The geometry of schemes*, Springer-Verlag, New York, 2000.
- [EGA] GROTHENDIECK, ALEXANDER. *Éléments de géométrie algébrique. II. Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes.*, *Publications Mathématiques de l'Institut de Hautes Études Scientifiques*, No. 28, 1966.
- [G] GROSSHANS, FRANK D. *Algebraic homogeneous spaces and invariant theory*, Springer-Verlag, New York, 1997.
- [G2] GROSSHANS, FRANK D. *The invariants of unipotent radicals of parabolic subgroups*, *Inventiones Mathematicae*, Volume 73, no. 1, 1–9, 1983.
- [GIT] MUMFORD, DAVID ; FOGARTY, JOHN ; KIRWAN, FRANCES. *Geometric invariant theory. Third edition*, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

- [Go] GORDAN, PAUL A. *Ueber ternäre Formen dritten Grades*, Mathematische Annalen, Volume 1, no. 1, 90–128, 1869.
- [H] HILBERT, DAVID. *Hilbert's invariant theory papers*, Math Sci Press, Brookline, 1978.
- [H] HARTSHORNE, ROBIN. *Algebraic geometry*, Springer-Verlag, New York, 1977.
- [Ha] HABOUSH, WILLIAM J. *Reductive groups are geometrically reductive*, Annals of Mathematics. Second Series, Volume 102, no. 1, 67–83, 1975.
- [He] HESSELINK, WIM H. *Desingularizations of varieties of nullforms*, Inventiones Mathematicae, Volume 55, no. 2, 141–163, 1979.
- [Hu] HUMPHREYS, JAMES E. *Linear algebraic groups*, Springer-Verlag, New York, 1975.
- [Hu2] HUMPHREYS, JAMES E. *Conjugacy classes in semisimple algebraic groups*, American Mathematical Society, Providence, 1995.
- [K] KEMPF, GEORGE R. *Instability in invariant theory*, Annals of Mathematics. Second Series, Volume 108, no. 2, 299–316, 1978.
- [Kr] KRAFT, HANSPETER. *Geometrische Methoden in der Invariantentheorie*, Aspects of Mathematics, Braunschweig, 1984.
- [Kr] KRAFT, HANSPETER, PROCESI, CLAUDIO. *Classical Invariant Theory, a Primer*, <http://www.math.unibas.ch/kraft/>, 2000.
- [M] MUMFORD, DAVID. *The red book of varieties and schemes*, Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [M2] MUMFORD, DAVID. *Algebraic geometry. I. Complex projective varieties*, Springer-Verlag, Berlin, 1981.
- [M3] MUMFORD, DAVID ; SUOMINEN, KALEVI. *Introduction to the theory of moduli, dans Algebraic geometry, Oslo 1970*, Proc. Fifth Nordic Summer-School in Math, 171–222, 1972.
- [Mu] MUKAI, SHIGERU. *An introduction to invariants and moduli*, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [N] NAGATA, MASAYOSHI. *On the fourteenth problem of Hilbert*, Proc. Internat. Congress Math., 459–462, 1958.
- [N] NAGATA, MASAYOSHI. *Complete reducibility of rational representations of a matrix group*, Journal of Mathematics of Kyoto University, Volume 1, 87–99, 1962.
- [Ne] NEWSTEAD, PETER E. *Introduction to moduli problems and orbit spaces*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay ; Narosa Publishing House, New Delhi, 1978.

- [O] OLVER, PETER J. *Classical invariant theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [P] POPOV, VLADIMIR L. *Invariant theory, dans Algebraic geometry IV*. Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [S] SALMON, GEORGE. *A treatise on the higher plane curves. 3rd ed.*, Chelsea Publishing Co., New York, 1960.
- [U] UENO, KENJI. *Algebraic geometry*, American Mathematical Society, Providence, 1999-2003.
- [U2] SHIMIZU, YUJI ; UENO, KENJI . *Advances in moduli theory* , American Mathematical Society, Providence, 2003.