

Université de Montréal

Évaluation des performances de couverture d'un GARCH multivarié à
corrélations conditionnelles dynamiques de type Engle (2002)

Par
Ouegnin François-Alexis

Département de sciences économiques
Faculté des arts et des sciences

Rapport de recherche présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de M.Sc.
en Sciences Économiques
Option Économétrie

Février 2005

© Ouegnin François-Alexis, 2005

Université de Montréal
Faculté des arts et des sciences

Ce rapport de recherche intitulé :

Évaluation des performances de couverture d'un GARCH multivarié à
corrélations conditionnelles dynamiques de type Engle (2002)

Présenté par
Ouegnin François-Alexis

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Benoît Perron
Directeur de recherche

Silvia Gonçalves
Second lecteur

Table des matières

Sommaire

Remerciements

Liste des graphiques

Liste des tableaux

1. Introduction.....	8
2. Revue de la littérature.....	10
3. Méthodologie théorique.....	15
<i>Modèle de couverture risque minimisant</i>	<i>15</i>
4. Spécification économétrique.....	20
5. Description des données.....	23
6. Estimation du modèle.....	25
6.1 <i>Corrélations conditionnelles dynamiques</i>	<i>25</i>
6.2 <i>Calcul des poids et ratios de couverture.....</i>	<i>28</i>
6.3 <i>Couverture du risque de change</i>	<i>29</i>
6.4 <i>Comparaison Out-of-Sample</i>	<i>31</i>
Conclusion.....	34
Bibliographie	36

Annexe

Sommaire

Ce rapport présente l'application d'un modèle de couverture dynamique à un portefeuille composé d'actifs internationaux. Un cadre moyenne variance est utilisé pour construire un modèle théorique de couverture et un modèle économétrique est spécifié, puis appliqué aux données journalières de 8 pays et 6 contrats à termes couvrant la période de janvier 1995 à septembre 2001. La spécification de référence est celle d'un GARCH multivarié de type DCC c'est-à-dire avec corrélations conditionnelles dynamiques, Engle (2002). Ses performances en matière de couverture du risque de portefeuille sont comparées à celles obtenues avec un autre GARCH multivarié où les corrélations sont constantes, Bollerslev (1990), et 2 autres techniques de couverture traditionnelle. Les modèles de type GARCH, parce qu'ils tiennent compte de la dynamique dans les seconds moments, semblent mieux performer. Par contre le choix d'une spécification, avec corrélations conditionnelles dynamiques (DCC) ou avec corrélations conditionnelles constantes, semble moins évident vu que ces deux méthodes dans cette étude affichent des résultats similaires en matière de couverture de risque.

Mots clés : GARCH multivarié, ratio de couverture, out of sample

Remerciements

Je tiens à remercier :

Dieu tout puissant sans qui rien de tout ça n'aurait été possible.

Ma famille, et plus particulièrement mon frère Christian.

M. Benoît Perron, mon directeur de recherche, pour sa grande disponibilité, ses critiques et ses conseils. Merci aussi pour les lettres de recommandations.

Mme Silvia Gonçalves, Mme Anca Jurca et M Sylvain Dessy pour leurs conseils, leurs lettres de référence.

Le département de Sciences Économiques de l'Université de Montréal

Mes amis : le groupe des « chercheurs » : Ahoto Kpelitse Koffi, Ali Fakih, Douwera Grekou, Antoinette Ouattara. Je remercie aussi mes autres amis de la maîtrise qui m'ont fait apprécier «le Canada» : Alexandre Dube, Martin Goulet, Virginie Giroux, Olivier Guilbaud et tous ceux que je ne peux citer faute de place. Merci à tous pour votre amitié, votre support et vos conseils.

Que Dieu vous bénisse.

Liste des graphiques

Figures 1-8 Graphiques des poids dynamiques des actifs43-44

Figures 9-14 Graphiques des ratios de couvertures dynamiques actifs45-46

Liste des tableaux

Tableau 1 :	relation spécification -nombre de paramètres	22
Tableau 2-	-Les statistiques descriptives des 8 marchés.....	24
Tableau 3-	-Estimé des paramètres DCC (1,1)-MVGARCH (1,1).....	27
Tableau 4-	-Les caractéristiques statistiques des ratios de couverture avec les contrats à terme de 6 mois des différents pays.....	29
Tableau 5-	-Risque total (en % d'écart type/jour) et réduction de risque (en %).....	31
Tableau 6-	-Résultats out of sample.....	32
Tableau.7-8	-Résultats des GARCH univarié.....	annexe

1. Introduction

Afin de réduire leur exposition aux risques, les investisseurs professionnels diversifient la composition de leur portefeuille en incorporant des titres étrangers non parfaitement corrélés aux actifs locaux en leur possession. À ce sujet the ‘Securities Industry Association’ (2002) relève que les avoirs étrangers des investisseurs américains ont atteint les 2000 milliards de US\$ en 2001. Depuis la dernière décennie, la tendance chez les investisseurs et les compagnies américaines est à un accroissement de leur détention d’actifs financiers étrangers lesquels représentent, en fin 2001, 11.5% du total des avoirs américains contre 10% en 1997 et 6% en 1994. Le bulletin de l’hiver 2004 de Bertaut Carol C. et Griever William L (2004) avancent le chiffre de 2300 milliards US\$ pour 2001 et précise que dans ceux-ci 1613 milliards US\$ sont en actions, 502 milliards US\$ en dette à long terme et 147 milliards US\$ en dette à court terme. De loin le premier choix des investisseurs internationaux américains, le Royaume Uni à la fin de 2001 attirait plus de 22% de tous les investissements américains en titres étrangers. Il est suivi en popularité par le Japon et le Canada. Mais ces chiffres¹ ne sont rien en comparaison de l’étude récente, 30 juin 2002, sur les avoirs américains des investisseurs étrangers. Les 1800 milliards US\$ en titres étrangers acquis par les investisseurs américains à la fin de 2002 ne couvrent même pas la moitié de ceux que détiennent les investisseurs étrangers, ce qui donne aux États-Unis une position internationale nette négative sur les actifs à long terme. Les avoirs américains des étrangers montent à 4300 milliards US\$ dont 1400 milliards US\$ en actions, 2500 milliards US\$ en dettes à long terme et 400 milliards US\$ en dettes à court terme. Les résidents japonais et du Royaume Uni sont ceux qui ont les plus larges portefeuilles.

La globalisation et l’intégration des marchés financiers de ces deux dernières décennies ont fait de l’internationalisation des actifs financiers une pratique courante en gestion de portefeuilles. Évoluant maintenant dans une sphère d’action de plus en plus grande, les gestionnaires de fonds se trouvent maintenant confrontés en plus du risque de marché à un

¹ Ces chiffres sont ceux de l’étude sur les avoirs étrangers des investisseurs américains. menée par le Department of the Treasury, Federal Reserve Bank of New York

facteur de risque supplémentaire lié à la convertibilité des monnaies autrement dit au change. Le risque de change pourrait se définir comme le risque de dépréciation de la monnaie domestique de l'investisseur vis-à-vis des monnaies étrangères impliquées.

L'expansion rapide du marché des produits dérivés ces 25 dernières années a conduit à un accroissement de l'intérêt en théorie et en pratique des stratégies de couverture contre le risque de change. Plusieurs instruments dérivés peuvent être utilisés pour se couvrir contre le risque de change, mais ce sont généralement dans la littérature les contrats à terme ou 'futures' qui sont les plus utilisés pour le risque de change. Un modèle de minimisation du risque de type moyenne-variance est très souvent adopté afin de déduire les poids et les ratios de couverture optimaux du portefeuille. Le ratio de couverture dans la littérature peut être obtenu de diverses façons: l'approche naïve, celle des moindres carrés ordinaires (M.C.O; Ederington, 1979; Figlewski, 1984) et l'approche d'hétéroscédasticité conditionnelle autorégressive généralisée (GARCH) de Cecchetti et al. (1988), Baillie et Myers (1991), Kroner et Sultan (1991) ou plus récemment Brooks et al. (2002). La première de ces méthodes prône une couverture de 0% ou de 100% du portefeuille, tandis que la seconde déduit d'un modèle de minimisation de risque un ratio de couverture optimal compris entre zéro et l'unité. Plus récemment les stratégies de couvertures dynamiques basées sur les modèles de type GARCH (Bollerslev, 1986,1990; Bollerslev et al, 1988 ; Engle, 1982) ont été proposés. Ces modèles emploient un modèle GARCH de type multivarié afin de capter l'évolution dynamique de la matrice de variance-covariance et de construire un estimé du ratio de couverture optimal utilisant les variances et covariances conditionnelles des rendements comptant et des futures. Il existe un grand nombre de spécification GARCH multivarié mais nous utiliserons, dans le reste de cette étude, celle de Engle (2002). Nous avons choisi ce modèle parce qu'il peut être, d'une part, estimé à partir d'une suite de modèles GARCH univariés et que d'autre part il reste relativement simple à implémenter pour le praticien ou le professionnel qui ne veut pas avoir à imposer de trop lourdes hypothèses de distributions comme dans le cas, par exemple, du modèle GARCH multivarié de Bollerslev (1990).

L'objectif de cette étude est de déduire pour un investisseur américain, et à l'aide du modèle DCC, les poids et ratios de couvertures optimaux correspondant à un portefeuille composé à la fois de titres locaux (US) et étrangers. À partir des résultats obtenus, une étude comparative sera entreprise en vue de juger la performance en matière de couverture dynamique du modèle DCC-MVGARCH vis-à-vis de ces variantes ainsi que d'autres modèles.

Le reste de ce papier s'organise comme suit : nous avons dans une première section la méthodologie théorique adoptée, dans laquelle le modèle de minimisation de la variance est présenté. Ensuite nous présentons la spécification économétrique du DCC, les données et résultats. De ces derniers nous déduisons les poids et ratios de couverture optimaux. Enfin nous comparons ce modèle à d'autres présents dans la littérature et nous concluons.

2. Revue de la littérature

Pour les investisseurs professionnels, il est impératif d'élargir la composition de leur portefeuille en détenant plusieurs sortes d'actifs, en un mot : diversifier. Les titres étrangers, de nos jours plus accessibles, font partie intégrante de cette stratégie de diversification. Cependant en dépit de l'énorme potentiel de diversification qu'ils offrent, ces actifs d'outremers introduisent un risque supplémentaire associé à leur convertibilité en monnaie locale. De ce fait, les fluctuations sur le marché des devises étrangères deviennent des variables importantes dans le choix des actifs du portefeuille parce qu'elles sont en mesure d'augmenter la variabilité des profits.

Solnik (1974) et Black (1990) suggère que le moyen le plus efficace de réduire le risque de change systématique est de le couvrir avec des contrats à terme ou des futures. Dans les premières approches théoriques, Solnik (1974), Adler/Dumas (1983) ont développé un modèle d'évaluation d'actifs internationaux (IAPM²). Pour analyser le risque de marché et

² International Asset Pricing Model

le risque de change ces deux auteurs les considéraient dans leur modèle comme un facteur prix. Dumas/Solnik (1995), DeSantis/Gerard (1998) et Carrieri (2001) soutiennent l'idée du risque de change comme un facteur prix et ajoutent que le portefeuille optimal devrait contenir un montant significatif dans la position de couverture. Sluck (1974) concluent que tous les investisseurs devraient détenir le même portefeuille d'actifs risqués, dans lequel les risques de change sont optimalement couverts par l'ajout de contrats à terme.

Black (1990), avec des hypothèses additionnelles, étend le modèle IAPM de Solnik et suggère l'existence d'un ratio de couverture « universel » qui serait optimal pour tout investissement. Autrement dit, les ratios de couverture devraient être identiques pour tous les investisseurs peu importe leur nationalité, et ceux-ci ne devraient jamais couvrir entièrement leur exposition au risque de change.

Anderson et Danthine (1981) ont dérivé un ratio de couverture risque minimisant en utilisant la matrice de variance-covariance inconditionnelle entre les variations des prix et des prix à terme. Briys et Solnik (1992) et Lioui et Poncet (2002) ont dérivé une demande optimale utilité maximisante de contrats de change à terme pour couvrir le risque de change dans un cadre en temps continu. Ils ont montré, tout comme Jorion (1985,1986), Eun/Resnick (1988,1994), Levy et Lim (1994), Rudolf/Zimmermann (1998), Larson/Reesnik (2000) et Bugon/Maurer (2002), que si les investisseurs ne contrôlaient pas les paramètres d'incertitudes liés à leur exposition aux changes étrangers, les gains potentiels de la stratégie de diversification internationale de leur portefeuille ne suffiraient pas à justifier les coûts de transactions engendrés par cet investissement. Même si dans les études antérieures plusieurs approches ont été utilisées pour gérer efficacement l'exposition aux risques de changes, il n'existe aucun consensus clair sur une ou une autre méthode. Un point faible de la plupart des modèles utilisés dans la littérature est que les ratios de couverture obtenus sont basés sur la forte hypothèse que les volatilités et les corrélations des changements dans les actifs sous-jacents et les prix à termes des monnaies restent constantes dans le temps.

A ce sujet, il existe une vaste littérature empirique qui montre que les volatilités et les corrélations entre les actifs et les contrats à terme varient dans le temps (Kroner/Sultan (1991), Longin/Solnik (1995), Sheedy (1998)).

Dans la procédure d'optimisation, ignorer de telles caractéristiques de la matrice de variance covariance tend à conduire à une mauvaise estimation des poids optimaux des actifs sous-jacents et du nombre de contrats à terme nécessaire pour couvrir une position. Par conséquent, l'investisseur a une solution sous optimale pour construire son portefeuille (Gagnon et al, 1998). La question qui se pose à ce niveau est : comment capter de façon optimale la structure dynamique de corrélation afin d'obtenir un mélange optimale d'actifs sous-jacents avec des niveaux de couverture approprié?

C'est afin de capter les structures dynamiques des seconds moments conditionnels des actifs sous jacents et des variations de prix du change à terme que les récentes études se sont concentrées sur le développement des ratios de couverture variant dans le temps en utilisant les techniques de modélisation de l'hétéroscédasticité conditionnelle.

La spécification hétéroscédastique conditionnelle autorégressive ou ARCH, a été initiée par Engle (1982) pour caractériser la dynamique des seconds moments conditionnels que l'on retrouve dans la plupart des séries financières. Elle a été par la suite généralisée par Bollerslev (1986) avec ce qu'on a appelé l'hétéroscédastique conditionnelle autorégressive généralisée ou GARCH. Kroner et Sultan (1991) ont appliqué un modèle GARCH bivarié avec corrélation constante dans le but de couvrir l'exposition au risque de change. Bauwens et al (2003) propose un résumé des modèles GARCH multivarié.

Tandis que la variance conditionnelle des différents actifs et les changements des prix à terme de la monnaie sont supposés changeantes dans le temps, les corrélations conditionnelles pour les marchés de la monnaie sont supposés constantes afin que la matrice de variance covariance soit définie positive. Cette approche de corrélation conditionnelle constante (CCC), qui a l'avantage d'être facile à implémenter, a été proposée par Bollerslev (1990). Malheureusement, la plupart des séries financières,

incluant les taux de change, contredisent cette hypothèse de corrélation constante comme le montrent Sheedy (1998) ou Tse et Tsui (2002).

Pour capter les différentes caractéristiques de cette corrélation conditionnelle entre les taux de change, Tong (1996), Gagnon (1998) ont adopté la procédure BEKK du modèle GARCH multivarié de Engle et Kroner(1995). Cet algorithme BEKK permet la variation dans le temps de la covariance conditionnelle laquelle assure le caractère défini positif de la matrice de variance covariance conditionnelle. Cependant Sheedy (1998) trouve que la spécification BEKK n'est pas efficace pour enlever la structure dans les corrélations. Bera et al (1997) avaient auparavant trouvé que le modèle BEKK ne performait que passablement dans l'estimation des ratios optimaux de couverture. Un problème de convergence de cette procédure qui en limiterait les applications est aussi évoqué dans Lien et al (2001) et Lioui et al (2002).

Tse et Tsui (2002) ont aussi proposé un modèle GARCH avec corrélation dynamique et matrice de variance covariance définie positive. Cependant aucune tentative n'a été faite, comme le relève Engle et Sheppard (2001), pour permettre d'estimer séparément les processus GARCH univariés et l'estimateur de corrélation dynamique. De plus en permettant le retour à la corrélation inconditionnelle dans l'estimateur de corrélation, le nombre de paramètres nécessaire pour simultanément estimer les paramètres est de $O(k^2)$, k étant le nombre de séries à l'étude, ce qui est seulement légèrement inférieur à la formulation BEKK typique.

Engle (2002) propose une généralisation du modèle CCC de Bollerslev (1990). Sa spécification permet d'obtenir une matrice de corrélation conditionnelle variant dans le temps tout en conservant une matrice de variance covariance définie positive et une simplicité d'implémentation. Les développements théoriques de cette nouvelle classe de modèle avec corrélation conditionnelle dynamique (CCD³), sont exposés dans Engle et Sheppard (2001). De nombreuses applications du modèle DCC existent dans la littérature par exemple les travaux de Bautista (2003) sur la dynamique existante entre taux d'intérêts

³ DCC est la traduction anglaise de CDD et sera utilisé dans le reste du texte.

et taux de change aux Philippines, ceux de Wong et Vlaar (2003) sur les corrélations dynamiques dans les marchés financiers ou encore la variante asymétrique du DCC, Engle et Sheppard (2003) qui est appliqué à l'étude des corrélations dynamiques sur le marché global des actions et des obligations.

Le modèle de Engle, comme beaucoup d'autres dans la littérature impose de la structure à la matrice de variance covariance conditionnelle afin de garantir son caractère défini positif et de réduire le nombre de paramètres.

Toutefois, il y'a un danger à imposer des restrictions que les données peuvent violer. Ledoit et al (2003) a donc trouvé un moyen d'estimer un modèle GARCH multivarié à corrélation dynamique non contraint à l'aide d'une procédure en deux étapes.

Dénonçant comme Ledoit et al (2003) la possibilité que les données ne suivent pas la structure imposée à notre modèle, Hafner et al (2003) affirment que dans le cas du DCC de Engle et Sheppard (2001), et Engle (2002) ce modèle conduit à une sélection sous optimale des titres d'un portefeuille lorsque le nombre d'actifs en jeu est d'environ 20 et 30 alors qu'il est conçu pour des matrices de grandes dimensions. Selon eux ceci est dû au fait que le modèle DCC suppose que les corrélations conditionnelles spécifiques aux actifs suivent toutes la même dynamique qui est une structure de type ARMA. Cette hypothèse peut être facilement satisfaite par un petit nombre de rendements d'actifs sélectionnés mais elle devient de plus en plus improbable quand le nombre de titres augmente. Ils proposent dans le cas de 18 rendements d'actifs allemands du DAX et 25 titres britanniques du FTSE une structure en panel qu'ils nomment DCC généralisé (GDCC). Selon les auteurs, le GDCC améliore le DCC et ils encouragent la recherche sur les interprétations de l'hétérogénéité qu'il engendre. Une seconde critique a été faite par Billio et al (2003) qui pensent aussi que Engle ajoute au modèle CCC une spécification contraignante aux corrélations. Ils incorporent donc une structure bloc diagonal dans le modèle DCC qui permet d'avoir des corrélations identiques seulement dans le même groupe d'actifs. Cette extension Bloc diagonal du modèle (BLOC-DCC) préservent l'aisance d'estimation obtenue depuis Bollerslev (1990) et permet aux corrélations de varier dans le temps. Elle se montre

prometteuse dans la mesure où les estimés confirment bien la présence de seconds moments dynamiques qui montrent des différences entre les groupes.

Il est aussi utile de dire qu'outre les spécifications en panel ou en bloc, une branche de la littérature s'est intéressée à l'impact des régimes non seulement dans le processus de choix d'actifs internationaux mais aussi dans la dynamique des seconds moments. (Cai (1994), Klaassen (2002)). Graflund et Nilsson (2003) analysent les questions de choix dynamiques de portefeuilles et de couverture intertemporelle. Ils insistent sur l'importance des changements des régimes dans les ratios de couvertures et aboutissent entre autre à la conclusion qu'ignorer les changements de régimes à long terme conduit à des pertes significatives de bien être. Une étude antérieure semblable a été menée par Ang et Bekaert (2002) qui avaient résolu à l'aide d'un modèle de changements de régimes le problème de choix de portefeuille international.

Pelletier (2004) propose une alternative au modèle de Engle (2002) en incorporant des changements de régimes dans les corrélations dynamiques et il conclut que ce nouveau modèle a de meilleurs performances statistiques que le DCC standard.

3. Méthodologie théorique

Modèle de couverture risque minimisant (risk- minimising hedge models)

La construction d'un portefeuille de titres, ceux-ci provenant de plusieurs pays, exige en plus du choix de l'origine et de la nature des actifs, de prendre en compte la monnaie dans laquelle ils sont évalués.

L'agent doit optimiser son portefeuille 'international' en maximisant une fonction objective qui varie positivement avec le rendement moyen du portefeuille, μ_p , et négativement avec la variance de celui-ci, soit σ_p^2 .

Cette relation rendement - risque peut être décrite par une fonction d'utilité de la forme $U(\mu_p, \sigma_p^2)$.

En utilisant l'approche et la notation de Guo (2003), rappelons le problème de l'investisseur global.

Supposons que l'agent (l'investisseur) possède, au début de la période $t-1$, un portefeuille composé de:

- $v_{0,t-1}$ unités d'actifs locaux et
- $v_{k,t-1}$ unités d'actifs provenant du $k^{\text{ième}}$ marché, ($k = 1, \dots, N$)

Soient,

$P_{0,t-1}$: le prix des actifs locaux

$P_{k,t-1}$: le prix des actifs étrangers en monnaie étrangère, ($k = 1, \dots, N$)

$E_{k,t-1}$: Le change comptant ou change « spot » de la monnaie k , exprimé en monnaie locale par unité de monnaie étrangère, avec ($k = 1, \dots, N$).

Le prix des actifs étrangers en monnaie locale $S_{k,t-1}$ est défini :

$$S_{k,t-1} = P_{k,t-1} E_{k,t-1}, \quad \text{pour } (k = 1, \dots, N).$$

Nous pouvons en déduire que l'investissement initial de l'agent est alors égal

à $\sum_{k=0}^N v_{k,t-1} S_{k,t-1}$. Cette même somme correspond aussi au montant initial que l'investisseur

expose au risque de change lorsqu'il n'est pas couvert contre ce dernier.

Pour se protéger du risque de change potentiel de chaque monnaie, l'agent utilise des contrats à termes ou des contrats « futures » qui selon Sayee Srinivasan & Steven

Youngren⁴, offrent certains avantages qui les rendent adéquats pour la gestion de l'exposition au risque d'une ou plusieurs monnaies.

Expliquons ceci à l'aide d'un exemple tiré de Hull (2000) :

'...Soit le trésorier d'une grande compagnie US. La compagnie, en date du 5 avril, doit recevoir de sa filiale à Londres 1 million de £ sterling dans 3 mois, soit le 5 juillet. Le trésorier veut protéger cette transaction des mouvements de change. Il décide pour se faire de contacter sa banque et de passer avec elle un contrat selon lequel il est prêt à vendre 1 million de £ sterling à un taux à terme, supposons de 1.6 \$/£ au terme des trois mois. On dit que le trésorier est en position courte dans un contrat à terme de trois mois parce qu'il accepte de vendre à cette date 1 million de £ sterling contre 1,6 million \$, tandis que la Banque est en position longue parce qu'elle accepte de l'acheter. Par cette opération le trésorier peut ainsi stabilisé le montant de son dépôt futur...'

Dans cet exemple, l'agent a choisi de couvrir la totalité de son avoir. Dans notre cas, l'agent couvre ses positions en passant en courte position sur $-\phi_{k,t-1}$ unités pour la $k^{\text{ième}}$ monnaie étrangère, ($k = 1, \dots, N$). Nous pouvons définir un ratio de couverture, noté $h_{k,t-1}$, comme suit :

$$h_{k,t-1} = \frac{\phi_{k,t-1}}{V_{k,t-1} P_{k,t-1}}$$

où si $h_{k,t-1} = 1$ on parle de couverture complète (full hedging) de l'actif sous-jacent
comme dans notre exemple

si $h_{k,t-1} = 0$ on parle d'actif non couvert (no hedging).

Dans un modèle statique, ce ratio ne varie pas avec le temps. Cependant si nous construisons un modèle de couverture dynamique, le ratio de couverture s'ajuste dans le temps en fonction des changements dans la variance covariance entre les actifs et les taux à terme.

⁴ Ils sont directeurs associés au département de la recherche et du développement des produits du Chicago Mercantile Exchange. Voir "Using Currency Futures to Hedge Currency Risk", Strategy Papers, Product Research & Development, Chicago Mercantile Exchange Inc. <http://www.cme.com/files/FXFOWCME.pdf>

Le rendement de l'actif sous-jacent k est défini : $r_{k,t}^s = \frac{S_{k,t} - S_{k,t-1}}{S_{k,t-1}}$

Le rendement du portefeuille non couvert est : $r_{p,t}^u = \sum_{k=0}^N w_{k,t-1} r_{k,t}^s$ avec $w_{k,t-1}$ le poids de

l'investissement initial dans l'actif k tel que $w_{k,t-1} = \frac{v_{k,t-1} S_{k,t-1}}{\sum v_{k,t-1} S_{k,t-1}}$.

Le rendement d'un portefeuille couvert contre le risque de change serait :

$$r_{p,t} = \frac{\sum_{k=0}^N v_{k,t-1} (S_{k,t} - S_{k,t-1}) - \sum_{k=1}^N \phi_{k,t-1} (F_{k,t} - F_{k,t-1})}{\sum_{k=0}^N v_{k,t-1} S_{k,t-1}}$$

$$= \sum_{k=0}^N w_{k,t-1} r_{k,t}^s - \sum_{k=1}^N h_{k,t-1} w_{k,t-1} r_{k,t}^f$$

où $r_{k,t}^f$ est un rendement normalisé, par rapport au taux de change spot, des contrats

à terme c'est-à-dire que $r_{k,t}^f = \frac{F_{k,t} - F_{k,t-1}}{E_{k,t-1}}$.

L'introduction de contrats à terme dans la composition de notre portefeuille, pour en atténuer les fluctuations, ne se fait pas sans risque. En effet, ces contrats sont transigés et donc peuvent générer des gains tout comme des pertes. Par conséquent ils peuvent, sur une base quotidienne, amplifier ou amoindrir les fluctuations de notre portefeuille.

Soit $X_{t-1} = (w_{0,t-1}, w_{1,t-1}, \dots, w_{N,t-1}, -h_{1,t-1} w_{1,t-1}, -h_{2,t-1} w_{2,t-1}, \dots, -h_{N,t-1} w_{N,t-1})$ le vecteur de poids des actifs sous-jacents et de leur couverture respective.

Soit $R_t = (r_{0,t}^s, r_{1,t}^s, \dots, r_{N,t}^s, r_{1,t}^f, r_{2,t}^f, \dots, r_{N,t}^f)$ le vecteur des rendements des actifs sous-jacents et de leurs couvertures respectives.

Sous forme matricielle le rendement du portefeuille couvert est obtenu

$$r_{p,t} = X'_{t-1} R_t$$

Notre problème de maximisation est le suivant :

$$\underset{h_{k,t-1}, w_{k,t-1}}{\text{Max}} \left(E(r_{p,t} | I_{t-1}) - \frac{1}{2} \lambda \text{Var}(r_{p,t} | I_{t-1}) \right) = \underset{h_{k,t-1}, w_{k,t-1}}{\text{Max}} \left\{ E(r_{p,t} | I_{t-1}) - \frac{1}{2} \lambda X'_{t-1} (\Omega_t | I_{t-1}) X_{t-1} \right\}$$

$$\text{Sujet à : } \sum_{k=0}^N w_{k,t-1} = 1 \text{ et } h_{k,t-1} \leq 1 \text{ pour } (k = 1, \dots, N)$$

où I_{t-1} est l'information disponible au temps t-1 et la matrice de variance covariance conditionnelle $\Omega_t | I_{t-1} = \Sigma_t$.

Guo (2003) la partitionne en 4 sous matrices de variance covariance conditionnelle :

$\Sigma_{ss,t}$: est la matrice $(N+1) \times (N+1)$ de variance covariance conditionnelle des taux spot de rendements d'actifs domestiques et étrangers

$\Sigma_{sf,t}$: est la matrice $(N+1) \times (N)$ de variance covariance conditionnelle des rendements d'un actif et d'un contrat à terme.

$\Sigma_{ff,t}$: est la matrice $(N) \times (N)$ de variance covariance conditionnelle des rendements des contrats à terme.

Nous obtenons ainsi la matrice de variance covariance conditionnelle :

$$\Sigma_t = \begin{bmatrix} \Sigma_{ss,t} & \Sigma_{sf,t} \\ \Sigma'_{sf,t} & \Sigma_{ff,t} \end{bmatrix}_{(2N+1) \times (2N+1)}$$

Au lieu de résoudre le problème standard de maximisation d'utilité Guo (2003) et Valiani Shohreh (2004) se concentre sur la minimisation du risque du portefeuille sujet aux fluctuations du marché. La raison pour laquelle ils abordent ainsi ce problème est que les contrats à terme ont un faible pouvoir prédictif sur les rendements espérés conditionnels ce

qui conduit à des solutions optimales instables. Guo (2003) justifie cette vision alternative en supposant que les taux à terme sont des martingales c'est-à-dire que $E(r_{k,t}^f | I_{t-1}) = 0$.

Donc si on suppose que notre agent minimise le risque de sa position totale laquelle est sujette aux fluctuations des taux de change, notre problème de minimisation devient le suivant :

$$\begin{aligned} \underset{h_{k,t-1}, w_{k,t-1}}{\text{Min}} \left(\text{Var}(r_{p,t} | I_{t-1}) \right) &= \underset{h_{k,t-1}, w_{k,t-1}}{\text{Min}} \left\{ X'_{t-1} (\Omega_t | I_{t-1}) X_{t-1} \right\} \\ \text{Sujet à } \sum_{k=0}^N w_{k,t-1} &= 1 \text{ et } h_{k,t-1} \leq 1 \text{ pour } (k = 1, \dots, N). \end{aligned}$$

4. Spécification économétrique

Soit le vecteur de rendement :

$$R_t = (r_{0,t}^s, r_{1,t}^s, \dots, r_{N,t}^s, r_{1,t}^f, r_{2,t}^f, \dots, r_{N,t}^f)$$

Posons un processus VAR-GARCH qui se caractérise comme suit

$$r'_t = \mu + \sum_{i=1}^p \alpha_i r'_{t-i} + \varepsilon_t \quad \text{où } E(\varepsilon_t) = 0; \quad \text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2 I; \quad \text{et } \text{Var}(\varepsilon_t | I_{t-1}) = H_t$$

Supposons que les rendements sont imputés de leur moyenne soit que $r_t = r'_t - \mu$.

En admettant la normalité conditionnelle de ceux-ci, nous avons $r_t | I_{t-1} \sim N(0, H_t)$

H_t représente la matrice de covariance conditionnelle.

On peut à la manière de Bollerslev (1990) décomposer cette matrice en une matrice diagonale et une matrice de corrélation:

$$H_t = D_t R_t D_t \quad \text{avec } D_t = \text{diag} \left\{ \sqrt{h_{i,t}} \right\}$$

où R_t est la matrice de corrélation conditionnelle variant dans le temps

D_t est une matrice diagonale dont les éléments sont des écarts-type variant dans le temps respectant individuellement la spécification d'un GARCH univarié c'est-à-dire :

$$h_{i,t} = \omega_i + \sum_{pi} \alpha_{pi} r_{i,t-pi}^2 + \sum_{qi} \beta_{qi} h_{i,t-qi} \quad i = 1 \dots N$$

$$\text{et } \varepsilon_t = D_t^{-1} r_t \text{ où } \varepsilon_t \sim N(0, R_t)$$

Nous pouvons maintenant utiliser la spécification de Engle (2002) pour modéliser cette corrélation dynamique :

$$Q_t = \left(1 - \sum_m \alpha_m^* - \sum_n \beta_n^* \right) \bar{Q} + \sum_m \alpha_m^* (\varepsilon_{t-m} \varepsilon'_{t-m}) + \sum_n \beta_n^* Q_{t-n}$$

$$R_t = \tilde{Q}_t^{-1} Q_t \tilde{Q}_t^{-1}$$

\tilde{Q}_t est une matrice diagonale contenant les écarts-type sur la diagonale de Q_t

\bar{Q} est une matrice de covariances non conditionnelle des rendements standardisés obtenu lors de la première étape d'estimation.

Cette spécification est aussi appelé modèle DCC (m, n).

Un des atouts majeurs du modèle de Engle (2002) est qu'il permet de réduire le nombre de paramètres et donc de faire des gains substantiels de temps de calcul. Nous présentons dans l'annexe 3 autres spécifications GARCH multivarié avec le nombre de paramètres de chacune d'elles.

À la différence du modèle BEKK, de k séries d'actifs, qui demande dans sa formulation générale un nombre de coefficients à estimer de l'ordre de $o(k^4)$, $o(k^2)$ dans le cas standard, ou encore de la spécification de Tse et Tsui (2002) qui bien qu'elle tient compte des corrélations conditionnelles dynamiques entre les actifs requiert l'estimation d'un ordre $o(k^2)$ paramètres, le DCC n'impose que l'estimation de $o(k)$ paramètres. Ceci est une avancée importante dans la mesure où un plus grand nombre de séries pourront être étudié simultanément (nombre limité généralement à 5 par le passé en raison du temps d'exécution des programmes), un gain de temps de calcul a été fait, mais aussi des interprétations relativement simples peuvent être faites. Ce dernier point est une des limites du modèle GARCH orthogonal d'Alexander (2000) qui malgré le fait qu'il ramène aussi le

nombre de paramètres à l'ordre $o(k)$, pose des difficultés quant il s'agit d'interpréter les coefficients.

Pour avoir une idée plus claire des avantages du DCC, nous avons placé en annexe un bref rappel de 3 spécifications GARCH multivarié usuelles, du nombre de paramètres qu'elles exigeraient dans le cas d'un GARCH bivarié. Le tableau suivant résume la relation spécification et nombre de paramètres dans le cas d'un GARCH(1,1):

Tableau 1 : relation spécification -nombre de paramètres dans le cas GARCH(1,1)

Spécification	Nombre de séries=2	Nombre de séries=5	Nombre de séries=10
VECH	21	465	6105
BEKK	11	42	255
CCC	7	25	75
DCC(1,1)	9	27	77

Pour ce qui est de l'estimation, Engle et Sheppard (2001), ainsi que Engle (2002), utilisent comme méthode d'estimation un pseudo maximum de vraisemblance (ou Quasi maximum de vraisemblance, QMLE⁵ en anglais) avec des écarts types robustes tout en faisant remarquer qu'il est possible d'utiliser les moindres carrés généralisés (M..M.G.).

La fonction de vraisemblance est de la forme suivante :

$$L = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left(N \log(2\Pi) + \log|H_t| + r_t' H_t^{-1} r_t \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left(N \log(2\Pi) + 2 \log|D_t| + r_t' D_t^{-1} D_t^{-1} r_t - \varepsilon_t' \varepsilon_t + \log|R_t| + \varepsilon_t' R_t^{-1} \varepsilon_t \right)$$

Cette fonction de vraisemblance, noté $L(\theta, \phi)$, se décompose en un terme pour la volatilité ($L_v(\theta)$) et un pour la corrélation ($L_c(\theta, \phi)$), et prend donc la forme

$$L(\theta, \phi) = L_v(\theta) + L_c(\theta, \phi)$$

La maximisation de cette fonction se fera en deux étapes :

- Étape 1 : trouver $\hat{\theta}$ tel que $\hat{\theta} = \operatorname{argmax} \{ L_v(\theta) \}$

⁵ QMLE : Quasi Maximum Likelihood Estimation

Dans cette première estimation, un modèle GARCH(p,q) univarié est appliqué au variance conditionnelle de chaque actif. À l'issue de celle-ci, les coefficients qui expliquent la volatilité de chaque actif pris individuellement sont obtenus.

➤ Étape 2 : $\max_{\phi} \{L_c(\hat{\theta}, \phi)\}$

Dans cette seconde phase d'estimation, les coefficients des volatilités obtenues lors de la première étape, $\hat{\theta}$, sont maintenues constants, et servent à conditionner la fonction de vraisemblance utilisée pour estimer les paramètres de la dynamique des corrélations, ϕ . Cette procédure réduit grandement le temps de calcul mais au prix d'une perte d'efficacité dans la mesure où ce n'est qu'une partie de la vraisemblance, celle des corrélations $L_c(\theta, \phi)$, qui est maximisé lors de la seconde étape.

5. Description des données

Dans notre étude, nous considérons 8 marchés :

- Les États-Unis représentent le marché domestique.
- Les marchés étrangers sont représentés par : Allemagne, Brésil, Canada, France, Japon, Royaume-Uni, Suisse

Les données journalières proviennent de Datastream et couvrent la période de janvier 1995 à septembre 2001. Ce sont :

- _ les indices des prix des (7) différentes places financières énoncées plus haut
- _ les taux de change du dollar US en deutschemark, réal brésilien, dollar canadien, franc français, le yen, livre sterling, franc suisse.
- _ les contrats à terme de 1, 3 et 6 mois de 6 pays Allemagne, Canada, France, Japon, Royaume-Uni, Suisse.

Les taux de rendement en monnaie domestique (le \$US) sont calculés selon les transformations suivantes :

. pour les USA :

$$r_{0,t}^s = \frac{S_{0,t} - S_{0,t-1}}{S_{0,t-1}} \text{ où } r_{0,t}^s \text{ est le rendement du spot américain}$$

. pour les marchés étrangers :

$$r_{k,t}^s (\text{en USD}) = r_{k,t}^s (\text{en monnaie locale}) * (E_{k,t} / E_{k,t-1}) + \left(\frac{E_{k,t} - E_{k,t-1}}{E_{k,t-1}} \right) \text{ avec } k = 1 \dots 7$$

Les statistiques descriptives des 8 marchés sont :

Tableau 2

	USA	Brésil	Royaume-Uni	Canada
moyenne (%)	0.058	0.041	0.033	0.033
variance	1.193	8.550	1.101	1.332
Skewness	-0.185	0.790	-0.069	-0.649
Kurtosis	6.858	13.19	8.455	8.455
	Allemagne	France	Japon	Suisse
moyenne (%)	0.042	0.043	-0.032	0.045
variance	1.953	1.724	2.879	1.411
skewness	-0.123	0.060	0.510	0.046
kurtosis	4.870	4.613	7.236	5.758

La procédure Dcc-Mvgarch⁶ en deux étapes commence par l'estimation de GARCH univariés pour chacune des séries de rendements (spot et à terme) avant l'estimation de la matrice de corrélations conditionnelles dynamiques. Intéressons nous à ces GARCH univariés.

⁶ Programme MATLAB disponible sur le site de <http://www.kevinsheppard.com/research/MatlabAtlas/MatlabAtlas.htm>

6. Estimation du modèle

6.1 Corrélations conditionnelles dynamiques

Nous voulons estimer les poids et les ratios de couverture dynamiques des 8 actifs en notre possession. Pour ce faire, nous commençons par estimer les corrélations conditionnelles dynamiques existant entre les 14 séries. À l'aide ces dernières, nous obtiendrons les poids et les ratios de couvertures.

La première étape de la procédure utilisée dans Engle (2002) renvoie à l'estimation d'un GARCH pour chacune des séries.

Afin d'obtenir les paramètres p et q des GARCH univariés, nous avons utilisé l'approche Box-Jenkins (1976) que nous avons appliqué à chacune des 14 séries:

- _ Test de stationnarité Dickey Fuller Augmentés
- _ Autocorrélogramme des rendements
- _ Test de Engle pour la présence des ARCH
- _ Estimation du GARCH (p, q) et test de Ljung-Box

Le choix des paramètres p et q d'une série donnée est obtenu en prenant le modèle qui a le critère d'information bayésien (BIC) le plus petit.

Le GARCH (1,1) apparaît comme une spécification raisonnable pour chacune des séries.

Par conséquent nous utiliserons un GARCH (1,1) pour chacune des séries et pour simplifier la démarche nous nous limiterons au cas DCC (1,1).

1) Étape 1 : Estimation des GARCH (1,1) univariés.

Rappelons la spécification :

$$r_t | I_{t-1} \sim N(0, H_t), \quad H_t = D_t R_t D_t \quad \text{avec } D_t = \text{diag}\{\sqrt{h_{i,t}}\}$$

Hypothèse d'un GARCH univariés:

$$R_t = I_n, \quad \text{où } I_n \text{ est la matrice d'identité de dimension } n \times n$$

$$h_{i,t} = \omega_i + \alpha_i r_{i,t-i}^2 + \beta_i h_{i,t-i} \quad i = 1 \dots N \quad \text{et} \quad \varepsilon_t = D_t^{-1} r_t \quad \text{où} \quad \varepsilon_t \sim N(0, I_n)$$

Les résultats de ces estimations sont fournis dans les tableaux 7 et 8 en annexe.

Interprétations: GARCH univariés.

Les 8 marchés

Sur ces différents marchés, il existe, en général, une persistance $(\alpha + \beta)$ proche de l'unité, malgré la contrainte $(\alpha + \beta) < 1$ imposée.

Ceci étant, les pays qui ont une volatilité plus sensible aux innovations que les autres (α élevé) sont le Brésil et le Canada avec respectivement 0.179 et 0.097. Inversement, la France (0.0405) et Le Royaume-Uni (0.04172) ont une volatilité qui semble moins affectée par les chocs. Les 4 autres pays (Usa, Allemagne, Japon, Suisse) ont une sensibilité aux chocs oscillant entre [0.05, 0.08].

En ce qui concerne les effets autorégressifs de ces volatilités, on remarque qu'il est dans l'ensemble supérieur à .90, sauf pour le Brésil où il n'est que de 0.79, et inférieur à 0.96. La France et Le Royaume-Uni sont les pays avec des coefficients autorégressifs les plus élevés, 0.954 et 0.9525.

Les 6 contrats à terme

Contrairement à nos 8 actifs, on constate dans l'ensemble une persistance beaucoup moins élevée pour les contrats à terme, à l'exception de celui de la France (environ 0.99).

Mais cette faiblesse relative est accompagnée d'une sensibilité aux chocs beaucoup plus importante. En effet, Les contrats les plus sensibles à l'afflux de nouvelles informations sont ceux de la Suisse (0.222), du Japon (0.219) mais les contrats provenant des autres pays, à l'exception de la France (0.0281), ont des coefficients qui restent supérieurs 0.08.

Les coefficients autorégressifs sont moins importants si on les compare à ceux des 8 actifs. La France fait, une fois de plus, figure d'exception avec un effet autorégressif de même ordre que celle de la volatilité du rendement de son indice (0.9630). Bien que possédant des rendements d'actifs avec un β de volatilité de même amplitude (environ 0.93), le Japon et la Suisse ont des contrats à terme avec des effets autorégressifs d'amplitude fort différente,

respectivement de 0.0652 et 0.233. Il est aussi à noter que les contrats de ces pays exhibent les β de volatilités les plus faibles.

2) *Étape 2 : DCC (1,1)-MVGARCH (1,1)*

Après l'obtention des estimés des séries univariées, soit le vecteur de paramètre $\hat{\theta}$, nous l'utilisons pour obtenir les estimés des corrélations, ce qui correspond à la deuxième étape de Engle (2002) soit la maximisation par rapport à ϕ de $L_C(\hat{\theta}, \phi)$.

Les corrélations conditionnelles du DCC (1,1)-MVGARCH(1,1) ont la structure suivante :

$$Q_t = (1 - \alpha^* - \beta^*)\bar{Q} + \alpha^*(\varepsilon_{t-1}\varepsilon'_{t-1}) + \beta^*Q_{t-1}$$

$$R_t = \tilde{Q}_t^{-1}Q_t\tilde{Q}_t^{-1}$$

où

\tilde{Q}_t est une matrice diagonale contenant les écarts-type de la diagonale de Q_t .

\bar{Q} est la matrice de covariances non conditionnelle des rendements standardisés obtenus lors de la première étape d'estimation.

On obtient :

Tableau 3 : Estimé des paramètres DCC (1,1)-MVGARCH (1,1)

	Estimé	Écart-type ⁷
α_{DCC}	0.022132	1.2517e-005
β_{DCC}	0.90176	0.015698

⁷ Ces écarts-types sont robustes et respectent la formulation de Engle-Sheppard (2001)

Nous constatons qu'à l'image de la majeure partie séries d'actifs à l'étude, les corrélations conditionnelles dynamiques ont un effet autorégressif supérieur à 0.90. Ce comportement semble beaucoup plus proche de celui qu'on retrouve avec nos 8 actifs que celui qu'on a avec les contrats à terme. Pour ce qui est de la sensibilité aux chocs de nos corrélations, elle est moins importante que celle que l'on trouve pour les 14 séries ci-dessus (0.022132). Nous avons, par conséquent, une volatilité avec une sensibilité aux chocs beaucoup plus faible pour les corrélations comparativement à celle des rendements d'actifs et des contrats à terme.

6.2 Calcul des poids et ratios de couvertures

À l'aide des estimés des corrélations, nous obtenons les poids et les ratios de couverture solutions du problème de minimisation énoncé plus haut à savoir :

$$\mathbf{Min}_{h_{k,t-1}, w_{k,t-1}} \left\{ X'_{t-1} (\Omega_t | I_{t-1}) X_{t-1} \right\}$$

Sujet à $\sum_{k=0}^N w_{k,t-1} = 1$ et $h_{k,t-1} \leq 1$ pour $(k = 1, \dots, N)$.

où

$X_{t-1} = (w_{0,t-1}, w_{1,t-1}, \dots, w_{N,t-1}, -h_{1,t-1}w_{1,t-1}, -h_{2,t-1}w_{2,t-1}, \dots, -h_{N,t-1}w_{N,t-1})$ est le vecteur des poids des rendements et des contrats à terme et $\Omega_t | I_{t-1}$ est la matrice de variance covariance conditionnelle.

Pour résoudre cette inégalité, nous commençons par déduire les poids pour ensuite extraire les ratios de couverture alloués à chacun de nos contrats à terme.

Les figures 1 à 14, en annexe, donnent une idée des poids et couvertures dynamiques obtenues.

Les caractéristiques statistiques des ratios de couverture avec les contrats à terme de 6 mois des différents pays sont résumées dans le tableau ci-dessous.

Tableau 4

DCC	uk	can	all	fr	jp	sw
Moyenne	0.581	0.895	0.398	0.4834	0.777	0.188
Écart-type	0.290	0.267	0.425	0.446	0.243	0.278
Proportion de jours où le ratio est positif (en %)	94.25	93.22	59.89	63.33	98.79	51.78
Proportion de jours où le ratio est négatif (en %)	0.11	0	0.23	0.23	0	0.29

6.3 Couverture du risque de change

Nous allons maintenant analyser la performance de notre méthode de couverture en la comparant à d'autres stratégies. Notre objectif étant la minimisation du risque, nous ne nous focaliserons que sur les seconds moments, même si on reconnaît qu'une analyse moyenne variance des différentes stratégies de portefeuilles pourrait être intéressante.

Pour comparer les niveaux de risques, nous utiliserons des mesures simples de performances. L'investisseur américain, en investissant dans des actifs étrangers, s'expose à un certain niveau de risque de change. Pour réduire son niveau d'exposition, il peut ajouter à la composition de son portefeuille des contrats à termes. Voyons, avec différentes stratégies de couvertures, l'effet de l'ajout de ces contrats à terme sur le risque. Nous opposerons notre modèle à 3 alternatives de base: corrélations conditionnelles constantes

(C.C.C.), couverture constante (disons $h_{k,t}=0.7 \forall k,t$ comme dans Black (1990)), ou encore couverture complète de tous les instruments ($h_{k,t}=1, \forall k,t$).

Mais avant de nous intéresser à ces techniques nous avons, dans un premier temps, calculé le rendement du portefeuille composé de nos 8 actifs seulement, sans inclure les contrats à termes, en tenant compte des corrélations conditionnelles dynamiques existantes entre les actifs et les fluctuations des taux de change. Ensuite nous avons calculé le rendement du portefeuille composé de nos 8 actifs et des 6 contrats à termes. La différence des écarts-type de ces deux séries de rendements nous a donné une idée du niveau d'exposition aux changes, soit 4.24% du risque total.

Dans un second temps, nous avons calculé, pour les 4 méthodes citées plus haut, le rendement du portefeuille composé des 14 actifs (rendement d'indices et contrats à termes inclus) en utilisant tout l'échantillon. Nous avons utilisé l'écart type de chaque série de rendement comme approximation du risque total du portefeuille obtenue à partir d'une couverture donnée et avons comparé ces différents niveau de risque les uns avec les autres.

C'est donc ce qui nous a amené à refaire les calculs de poids et ratios de couvertures, fait avec le DCC plus haut, en utilisant cette fois le modèle de Bollerslev (1990) de corrélation conditionnelle constante (CC_MVGARCH).

Pour le modèle de couverture complète et constante, nous avons commencé par calculer, avec le DCC, la matrice de variance covariance dynamique, puis le vecteur de poids des 8 actifs. Nous n'avons pas eu besoin de chercher les ratios de couverture, la théorie nous les donne : $h_{k,t}=0.7$ pour tous les actifs en tout temps pour le modèle de couverture constante et $h_{k,t}=1 \forall k,t$ pour une couverture complète. Pour chacune de ces stratégies, nous avons obtenu les rendements et les écarts-types comme annoncé et nous avons comparé ces derniers.

Les résultats figurent dans le tableau 5

Tableau 5 : Risque total (en % d'écart type/jour) et réduction de risque (en %)

	Risque total	Réduction de risque ⁸
Non couvert	0.777%	0%
Entièrement couvert	0.767%	1.287%
Universellement Couvert	0.756%	2.70%
CCC_couvert	0.748%	3.73%
DCC_couvert	0.740%	4.76%

Comme on pouvait s'y attendre, les techniques de couvertures qui tiennent compte des corrélations (constantes ou dynamiques) performant mieux que les méthodes traditionnelles de couverture complète et constante. L'écart entre les niveaux de risque total des stratégies peut paraître bien mince (environ 1% sépare une stratégie de l'autre) mais le pourcentage de réduction fait bien ressortir les différences. Les techniques de couverture dynamiques (DCC et CCC dans notre cas) sont plus efficaces dans la mesure où elles se soucient des changements dans les corrélations et qu'elles tiennent compte de leurs dynamiques dans le calcul des poids et des ratios de couvertures optimaux. On peut, avec celles-ci, avoir pour nos actifs des poids qui incorporent une plus grande quantité d'informations sur l'évolution des marchés. D'après nos résultats, le DCC apparaît comme la meilleure option, parmi les 4 étudiées, que puisse avoir un gestionnaire qui veut couvrir ses actifs.

6.4 Comparaison Out-of-Sample

⁸ Le pourcentage de réduction de risque est obtenue en calculant la variation du risque total de la stratégie par rapport au risque du portefeuille non couvert (0.78%).

Cette section n'a pour but que de venir soutenir les conclusions obtenues sur les performances des stratégies. Nous allons jauger les capacités prédictives de nos différents modèles.

Nous commençons par définir une fenêtre d'estimation.

Nous avons choisi une fenêtre de 2 ans (soit environ 522 observations) et un pas de 2 mois (42 observations). En d'autres termes, nous ré-estimons tous les 2 mois les paramètres de notre modèle en n'utilisant que l'information contenue dans les 2 dernières années.

À la fin de la procédure, on compare les niveaux moyens de risques obtenus avec nos 4 méthodes.

Les résultats sont dans le tableau 6 suivant :

Tableau 6 Résultats out of sample

	Risque moyen
Entièrement couvert	0.754%
Universellement Couvert	0.744%
CCC_couvert	0.728%
DCC_couvert	0.727%

Une fenêtre mobile de 522 jours (2 ans) et un pas de 2 mois a été utilisée.

Force est de constater que le classement obtenu en utilisant tout l'échantillon reste le même lorsque l'on utilise une fenêtre mobile. Les techniques de couverture qui tiennent compte de la structure dynamique des seconds moments produisent les meilleurs résultats. Par contre entre elles, nous constatons que peu importe celle que l'on choisit on obtiendra un niveau moyen d'environ 0.73%. Le DCC semble meilleur que le CCC mais ce n'est qu'à un millièmes près et statistiquement parlant il serait intéressant de tester cette différence.

Conclusion

L'objectif de ce papier était de déduire, à partir d'un modèle théorique de gestion de portefeuille, les poids et ratios de couvertures optimaux d'actifs internationaux.

Le cadre théorique de notre étude a été construit à partir d'un cadre moyenne variance et une spécification de type GARCH multivarié a été choisie pour capter la structure dynamique des seconds moments conditionnels des actifs de notre portefeuille.

La spécification DCC de Engle et Sheppard (1998) et Engle (2002) a été retenue comme modèle économétrique de référence et ses résultats en matière de couverture ont été comparés à ceux de trois autres modèles. Nous justifions le choix de ce modèle par le fait que comparé à ces prédécesseurs (VECH, BEKK, CCC), le DCC permet de réduire de manière significative le nombre de paramètres à estimer et il fournit une interprétation relativement simple des corrélations. Ce type de GARCH est donc beaucoup plus rapide à implémenter et beaucoup plus conviviale lorsque vient le moment d'interpréter les coefficients, c'est ce l'avantage qu'il offre aux professionnels de la finance.

Des données journalières de 8 pays et 6 contrats à termes, soient 14 actifs, couvrant la période janvier 1995 à septembre 2001, ont été utilisées. La méthode Box-Jenkins nous a permis de choisir les paramètres $p=1$ et $q=1$, soit un GARCH (1,1), pour chacune des 14 séries et nous avons choisi un DCC (1,1). Les résultats de l'estimation de ce DCC (1,1)-MVGARCH (1,1) montre que les corrélations conditionnelles dynamiques existant entre ces actifs ont une sensibilité aux chocs beaucoup plus faible que celle des volatilités conditionnelles de chacune des séries pris individuellement. L'effet autorégressif des corrélations conditionnelles est lui par contre dans le même ordre de grandeur que celui des 8 séries d'actifs, mais dans l'ensemble inférieur à celui des contrats à terme.

Cette structure de corrélation a été, par la suite, utilisée pour calculer les poids et les ratios de couvertures. Pour évaluer les performances de couverture de notre modèle, nous l'avons

comparé à 3 autres stratégies (CCC, couverture complète et constante). Les méthodes qui tiennent compte des corrélations conditionnelles (DCC et CCC) semblent être, en face des méthodes traditionnelles, beaucoup plus efficaces pour réduire le risque. Plus précisément, la stratégie où le DCC a été utilisé pour calculer le vecteur de poids apparaît comme la meilleure alternative en matière de couverture que ce soit lorsqu'on fait une régression sur tout l'échantillon (réduction de risque de 4.76%, immédiatement suivi du CCC (3.66%)) ou que ce soit lorsque l'on utilise une méthode de fenêtre mobile.

Bibliographie

Adler M. and B. Dumas (1983): International Portfolio Choice and Corporation Finance: A Synthesis. *The Journal of Finance*, 38, 3, pp. 925-984.

Ang A and Bekaert G (2002): International Asset Allocation with Regime Shifts . *Review of Financial Studies*, 15, No 4, pp 1137-1187.

Baillie R. T. and Myers R. J. (1991): Bivariate GARCH Estimation of the Optimal Commodity Futures Hedge. *Journal of Applied Econometrics* 6, pp 109-124

Bertaut Carol C. and Grier William L (2004): Recent Developments in Cross-Border Investment in Securities. *Federal Reserve Bulletin Winter 2004*
http://www.federalreserve.gov/pubs/bulletin/2004/winter04_if.pdf

Binbin Guo (2003): Currency Risk Hedging with Time-Varying Correlations. *Working Paper No. 539 University of California, Santa Cruz - Department of Economics*

Black F. (1990): Equilibrium Exchange Rate Hedging. *The Journal of Finance*, 45, pp. 899-907

Bollerslev T., Engle, R. F. and Wooldridge, J. M. (1988): A capital asset pricing model with time-varying covariance. *Journal of Political Economy*, 96, pp 116-31.

Bollerslev T. (1990): Modelling the Coherence in Short-Run Nominal Exchange Rates: A Multivariate Generalized ARCH Model. *Review of Economics and Statistics*, 72, pp 498-505.

Bugar G. and R. Maurer (2002): International Equity Portfolios and Currency Hedging, The View Point of German and Hungarian Investors. *Astin Bulletin*, 32, pp. 171-197.

Cai (1994): A Markov Model of Switching-Regime ARCH, *Journal of Business & Economic Statistics*, *American Statistical Association*, 12, pp 309-16

Cappiello L., Engle R, and Sheppard K. (2003): Asymmetric dynamics in the correlations of global equity and bond returns. *European Central Bank Working Paper Series*, *Working Paper No. 204*

De Santis G. and Gerard B (1998): How Big is the Premium for Currency Risk? *Journal of Financial Economics* 49, pp. 375-412.

Dumas D. and Solnik M (1995): The World Price of Foreign Exchange Risk. *Journal of Finance* 50, pp. 445-479.

Ederington L. H. (1979): The Hedging Performance of the New Futures Markets. *Journal of Finance*, 34, pp 157-170.

- Engle R. F. (1982): Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica*, 50, pp 987-1007.
- Engle R. F. (2002): Dynamic conditional correlation: a new simple class of multivariate GARCH models. *Journal of Business and Economic Statistics*, 20, pp 339-350.
- Eun C. S. and Resnick B. G (1988): Exchange Rate Uncertainty, Forward Contracts and International Portfolio Selection. *Journal of Finance*, 43, pp. 197-215.
- Eun C. S. and Resnick B. G (1994): International Diversification of Investment Portfolios, US and Japanese Perspective. *Management Science*, 40, pp. 140-160.
- Graflund A and Nilsson B (2003): Dynamic Portfolio Selection: The Relevance of Switching Regimes and Investment Horizon. *European Financial Management*, 9, pp 179-200
- Hull, John (2000): Options, Futures, and Other Derivatives (4th Edition)
- Jorion P. (1985): Bayes-Stein Estimation for Portfolio Analysis. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 21, 3, pp. 279-292.
- Jorion P. (1986): International Portfolio Diversification with Estimation Risk. *Journal of Business*, 58, pp. 259-278.
- Klaassen F (2002): Improving GARCH volatility forecasts with regime-switching GARCH. *Empirical Economics*, 27, pp 363-394.
- Kroner K. F. and Sultan J. (1991): Exchange Rate Volatility and Time Varying Hedge Ratios in Rhee. S. G. and Chang, R. P. (eds.) *Pacific Basin Capital Markets Research Elsevier, North Holland*
- Ledoit O., Santa-Clara P. and Wolf M. (2003): Flexible Multivariate GARCH Modelling with an Application to International Stock Markets. *Review of Economics and Statistics*, 85, pp 735-747.
- Levy H. and K. C. Lim (1994): Forward Exchange Bias, Hedging and the Gains from International Diversification of Investment Portfolios. *Review of Economics and Statistics*, 85, pp 735-747.
- Lioui, A. and Poncet P (2002): Optimal Currency Risk Hedging. *Journal of International Money and Finance*, 21, pp. 241-264.
- Longin, F. and Solnik B (1995): Is the Correlation in International Equity Returns Constant: 1960-1990? *Journal of International Money and Finance*, 14, pp.3-26.

Rudolf M. and Zimmermann H (1998): An Algorithm for International Portfolio Selection and Optimal Currency Hedging. *W. T. Ziemba and J. M. Mulvey (eds.), Worldwide Asset and Liability Modelling*, pp.135-149.

The Securities Industry Association (2002): World markets increasingly important to U.S. financial services industry. *Press release*.
http://www.sia.com/press/2002_press_releases/html/pr_world_markets.html

Sheedy E. (1998): Correlation in Currency markets: A Risk-Adjusted Perspective. *Journal of Financial Markets, Institutions and Money*, 8, pp. 59-82.

Tong W. (1996): An Examination of Dynamic Hedging. *Journal of International Money and Finance*, 15, pp. 19-35.

Tse Y. K. and Tsui A. (2002): A Multivariate Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity Model with Time-Varying Correlations. *Journal of Business and Economics Statistics*, 20, pp. 351-362.

Valiani shohreh (2004): Application of Multivariate GARCH in Optimal Dynamic Hedging and International Asset Allocation *Graduate Program "Finance and Monetary Economics"*, *School of Business and Economics, Goethe University, Frankfurt am Main*,
<http://www.wvz.unibas.ch/cofi/efma/papers/252.pdf>

Wooldridge, Jeffrey (2000): *Introductory Econometrics, A modern Approach*

ANNEXE

Différents modèles GARCH multivarié

Considérons le cadre général de modélisation d'un GARCH multivarié

$$H_t = \omega + C(L)H_t + D(L)\left[E_t E_t'\right]$$

$$C(L) = \sum_{i=1}^p C_i L^i \quad D(L) = \sum_{i=1}^q D_i L^i$$

où H_t représente la matrice de variance covariance dépendante du temps
 E_t les résidus
 $\omega, C(L), D(L)$ les paramètres

Les différentes spécifications sont VECH, BEKK, CCC, DCC.

➤ **La représentation VECH**

$$\text{Représentation : } \text{Vech}(H_t) = \text{Vech}(\omega) + C(L)\text{Vech}(H_{t-1}) + D(L)\text{Vech}(E_t E_t')$$

où ω est une matrice définie positive de dimension $n \times n$,
 $C(L), D(L)$ sont des matrices carrées de dimensions $r \times r$ avec $r = \frac{n(n+1)}{2}$
où n est le nombre de séries

Nombre de paramètres $r \times [1 + r(p+q)]$

Exemple : dans le cas bivarié ($n=2$), on a 21 paramètres à estimer.

➤ **La représentation BEKK de Baba, Engle, Kraft et Kroner (cas standard)**

$$\text{Représentation : } H_t = \omega + \sum_{i=1}^p C_i H_{t-i} C_i' + \sum_{j=1}^q D_j E_{t-j} E_{t-j}' D_j'$$

où C_i et D_j sont des matrices $n \times n$
 ω est une matrice définie positive symétrique de dimension $n \times n$

Nombre de paramètres $r + n \times n \times (p+q)$

Exemple : dans le cas bivarié, on estime 11 paramètres.

➤ **LA représentation CCC GARCH de Bollerslev (1990)**

Représentation :

$$H_t = D_t R D_t \quad \text{avec } D_t = \text{diag}\{\sqrt{h_{i,t}}\}$$

R est la matrice des corrélations constantes et

D_t est une matrice diagonale dont les éléments sont des écarts-type variant dans le temps respectant individuellement la spécification d'un GARCH univarié :

$$h_{i,t} = \omega_i + \sum_{j=1}^p \beta_{i,j} \sigma_{i,t-j}^2 + \sum_{j=1}^q \alpha_{i,j} \varepsilon_{i,t-j}^2 \quad i = 1 \dots n$$

$$\sigma_{ij,t} = \rho_{ij} \sigma_{i,t} \sigma_{j,t}$$

où $\sigma_{ij,t}$ représentent les covariances et ρ_{ij} les corrélations constantes pour $i, j = 1 \dots n, i \neq j$

Nombre de paramètres $(p + q + 1)n + n \left(\frac{n-1}{2} \right)$

Exemple : dans le cas bivarié, on estime 7 paramètres.

➤ **Le DCC** (\bar{p}, \bar{q})

Représentation :

$$H_t = D_t R_t D_t \quad \text{avec } D_t = \text{diag} \left\{ \sqrt{h_{i,t}} \right\}$$

où R_t est la matrice de corrélation conditionnelle variant dans le temps

D_t est une matrice diagonale dont les éléments sont des écarts-type respectant individuellement la spécification d'un GARCH univarié

$$h_{i,t} = \omega_i + \sum_{pi} \alpha_{pi} r_{i,t-pi}^2 + \sum_{qi} \beta_{qi} h_{i,t-qi} \quad i = 1 \dots n$$

$$Q_t = \left(1 - \sum_p \alpha_p^* - \sum_q \beta_q^* \right) \bar{Q} + \sum_p \alpha_p^* (\varepsilon_{t-p} \varepsilon'_{t-p}) + \sum_q \beta_q^* Q_{t-q}$$

$$R_t = \tilde{Q}_t^{-1} Q_t \tilde{Q}_t^{-1}$$

où

Q_t est une matrice de covariances conditionnelle dynamique

\tilde{Q}_t est une matrice diagonale contenant les écarts-type sur la diagonale de Q_t

\bar{Q} est une matrice de covariances non conditionnelle des rendements standardisés obtenu lors de la première étape d'estimation.

Nombre de paramètres $(p + q + 1)n + (\bar{p} + \bar{q}) + \frac{n(n-1)}{2}$ où \bar{p} et \bar{q} sont les ordres du DCC

Exemple : dans le cas bivarié, on estime 11 paramètres

On voit bien, qu'au-delà du fait qu'il nous permet de tenir compte des corrélations dynamiques, le DCC réduit grandement le nombre de paramètres quand on augmente le nombre de séries étudiées.

Tableau 7 et 8: Résultats des GARCH univarié

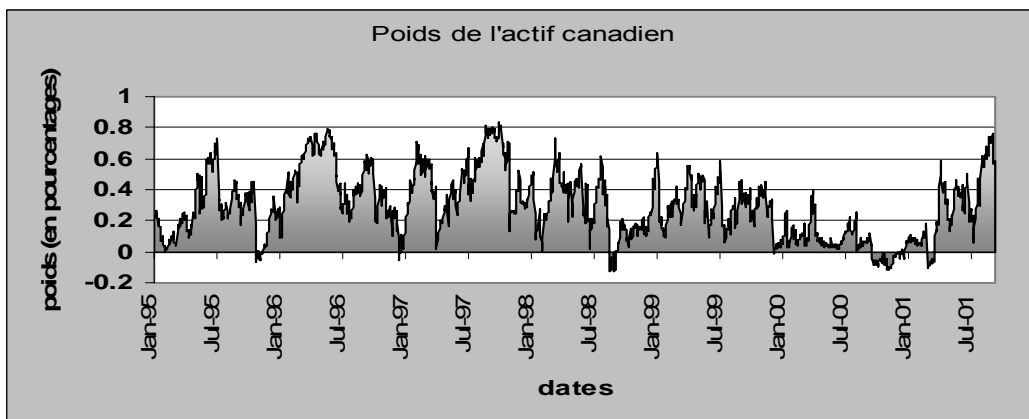
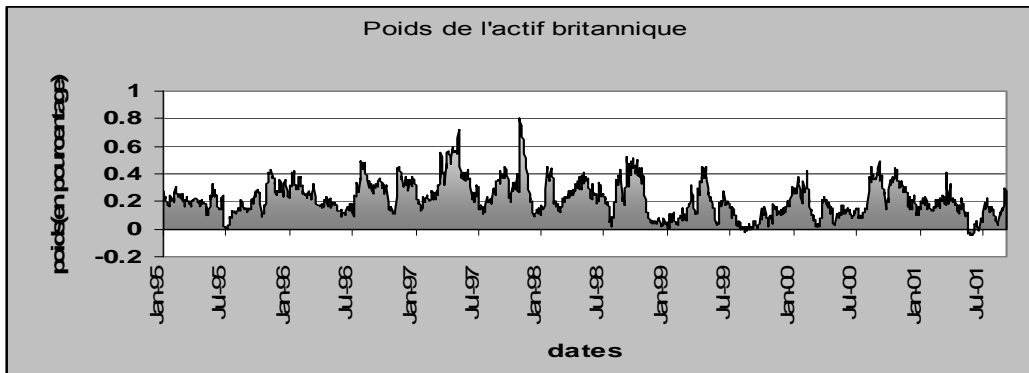
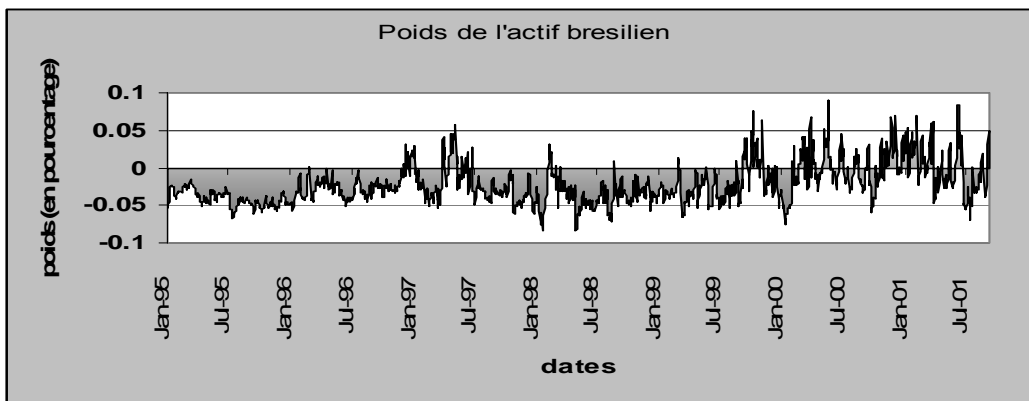
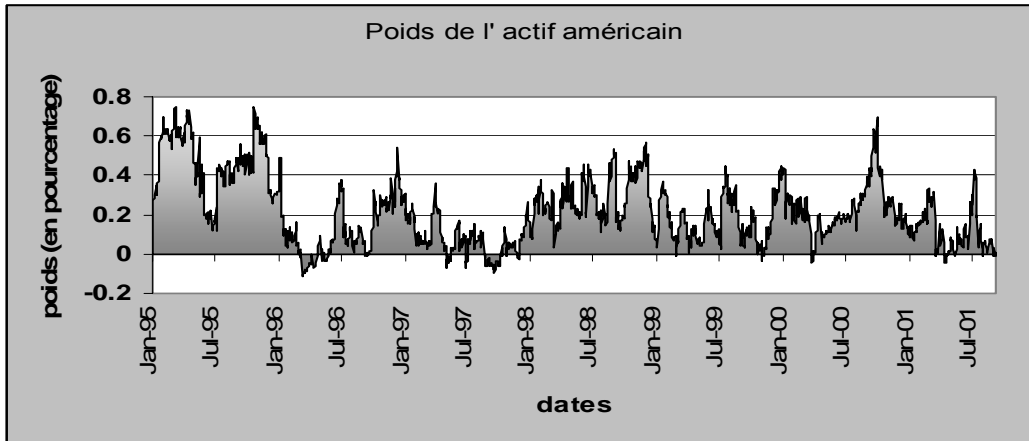
Rendements des 8 pays :

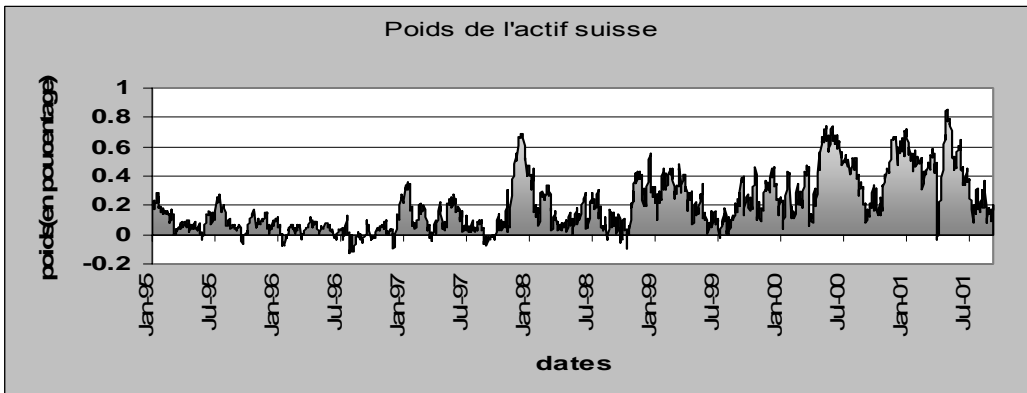
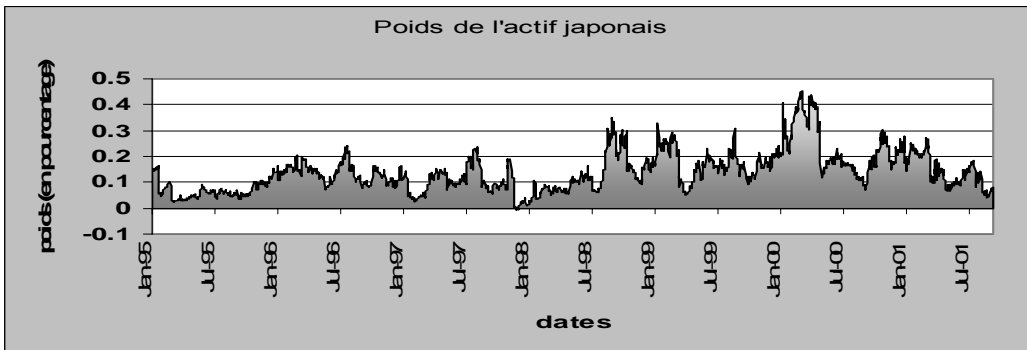
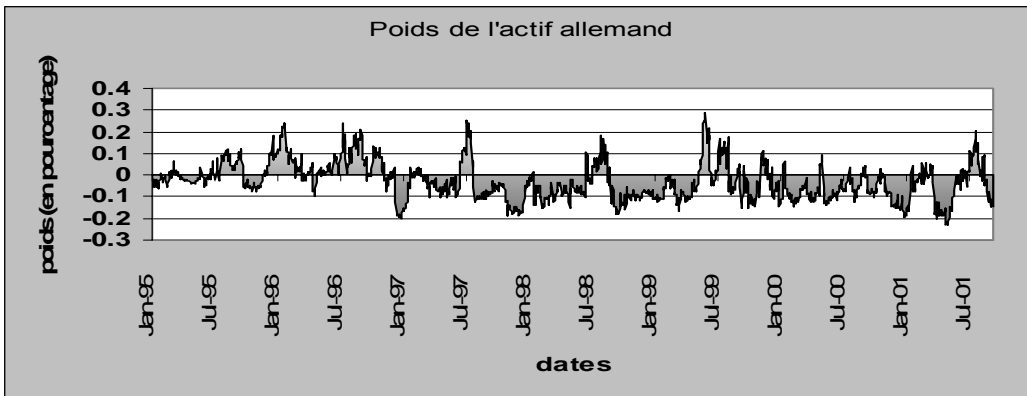
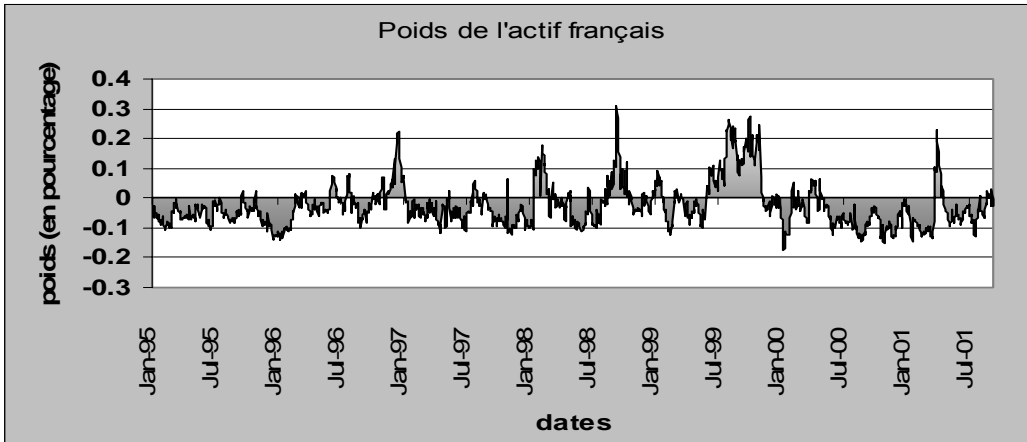
		Estimés	Écart-type robuste			Estimés	Écart-type robuste	
usa	ω	0.0082311	0.0048676		allemagne	ω	0.0196556	0.011006
	α	0.0807898	0.021513			α	0.0791495	0.0199554
	β	0.9176188	0.0205605			β	0.9134078	0.0220731
brésil	ω	0.2731478	0.097124		france	ω	0.0099658	0.0078094
	α	0.1797076	0.0339283			α	0.0405117	0.0124549
	β	0.7918483	0.0375228			β	0.9545027	0.0151715
uk	ω	0.0067151	0.0048248		japon	ω	0.0325421	0.0212044
	α	0.0417272	0.0129434			α	0.059466	0.0172403
	β	0.9525881	0.0162611			β	0.930926	0.0202445
canada	ω	0.0122332	0.0097486		suisse	ω	0.0323703	0.0208806
	α	0.0973645	0.044234			α	0.060258	0.0172749
	β	0.9006742	0.0432721			β	0.9302589	0.0201222

Rendements des contrats à terme à 6 mois nous obtenons :

		Estimés	Écart-type robuste			Estimés	Écart-type robuste
uk	ω	0.0462196	0.03946	france	ω	0.0038559	0.0029653
	α	0.0965228	0.0129311		α	0.0281085	0.0090773
	β	0.7546399	0.1666169		β	0.9630167	0.0128009
canada	ω	0.0441583	0.0257521	japon	ω	0.6834911	0.1390706
	α	0.1281689	0.0396444		α	0.2197422	0.0643683
	β	0.5566007	0.2089364		β	0.0652594	0.0956246
allemagne	ω	0.1963729	0.0802612	suisse	ω	0.3366416	0.0728218
	α	0.1421018	0.0444178		α	0.2222474	0.0746512
	β	0.4443654	0.1868068		β	0.2331968	0.1305038

Figures 1 à 8: Poids dynamiques





Figures 9 à 14: Ratio de couvertures dynamiques

