

Перелік використаних джерел:

1. ISO 10012:2003. *Measurement management systems – Requirements for measurement process and measuring equipment.*
2. Яцук, В.О. *Методи підвищення точності вимірювань. [Текст]: підручник / В.О. Яцук, П.С. Малахівський // Львів, «Бескид-біт», 2008. – 368 с.*

O PROPOZYCJACH ZMIAN W WYZNACZANIU NIEPEWNOŚCI POMIARÓW WEDŁUG PRZEWODNIKA GUM

Warsza Zygmunt Lech

Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów PIAP, Warszawa Pl.

W szeregu publikacjach opracowanych w wiodących narodowych instytutach metrologicznych (NMI) oraz w uczelniach i innych ośrodkach naukowych proponuje się rozszerzenie i udoskonalenie zaleceń międzynarodowego przewodnika o wyznaczaniu niepewności pomiarów o akronimie GUM [1]. Oceną i wdrożeniem tych propozycji jako zaleceń dla praktyki metrologicznej zajmuje się Międzynarodowy Komitet d/s Przewodników w Metrologii JCGM. W publikacji [2] przedstawiono propozycję nowej wersji GUM 2 opartej na podejściu Bayesa. Zawiera ona zmodyfikowany wzór do wyznaczania standardowej niepewności pomiaru $u(y)$, tj.

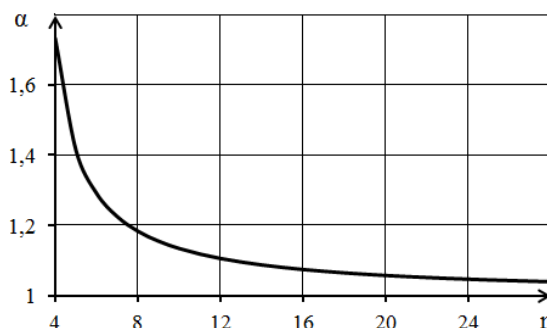
$$u(y) = \sqrt{\frac{n-1}{n-3} u_A^2 + u_B^2} \quad (1)$$

Wzór ten uwzględnia zwiększanie się niepewności u_A obliczanej obecnie wg GUM metodą statystyczną typu A, wraz ze zmniejszaniem się liczby danych pomiarowych n w próbce. Standardowe odchylenie wartości średniej \bar{x} próbki przy pomiarze pojedynczej wielkości X przy niepewności $u_B = 0$ wynosi:

$$u(x) = \alpha s(\bar{q}) \quad (2)$$

gdzie: $\alpha \equiv \sqrt{\frac{n-1}{n-3}}$, $\bar{x} = \bar{q} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n q_i$, $u_A(x) = s(\bar{q}) = \frac{s(q_i)}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (q_i - \bar{q})^2}$

Wykres zależności współczynnika α od n podaje rys.1.



Rysunek 1– Zależność współczynnika α od liczebności próbki n .

Figure 1– Coefficient α as function of the number n of sample elements

Przebieg współczynnika α ze wzoru (1) jest taki jak dla danych próbki z populacji o rozkładzie normalnym i wynika z rozkładu Studenta. Współczynnik α można stosować tylko dla próbek o $n \geq 4$. Botsiura i Zakharov w pracy [8] podają, że symulacja metodą

Monte Carlo wartości średniej ze ścisłego wzoru rozkładu Studenta dla liczby $n=3$ daje też stabilną wartość równą 4.

Podejście Bayesa w zastosowaniu do zagadnień niepewności pomiarów i konsekwencje nowego wzoru (1) oraz sposób obliczania niepewności rozszerzonej U dla próbki z populacji o rozkładzie normalnym omówił w sposób bardzo przystępny P. Fotowicz w publikacjach [3-5]. W Komitecie JCGM d/s przewodników metrologicznych zdania o zastosowaniu wzoru (1) okazały się podzielone i jeszcze nie zdecydowano się rekomendować go w przewodnikach dla praktyki metrologicznej. Pełniejsze uzasadnienie podejścia Bayesa i wzoru (1) zawiera obszerny artykuł [13], który ukazał się ostatnio.

Dla innych rozkładów i ich estymatorów rozszerzanie się rozkładu przebiega inaczej niż dla rozkładu normalnego i również zależy od liczebności próbki n . Przykładem są podane w pracy [6] i omówione w rozdziale 6 monografii [12] przebiegi estymatorów odchyłeń standardowych wartości średniej oraz środka rozstępu próbek o liczebności n z populacji o rozkładzie równomiernym i płasko-normalnym. Są one wyznaczone metodą Monte Carlo. Wyznaczenie niepewności rozszerzonej $U_p(y)$ o zadanym prawdopodobieństwie p , realizowane na podstawie niepewności standardowej $u(y) \equiv s(y)$ dla rozpatrywanego estymatora y menzurandu danych próbki o dowolnym rozkładzie wymaga znajomości jego współczynników α_{py} i k_{py} . Przyjmuje się też, że niepewności rozszerzone U_p dowolnych estymatorów y dla próbek o większych liczbach elementów n , pobieranych wielokrotnie z tej samej populacji mają w przybliżeniu rozkłady Gaussa.

Jeśli jako estymator menzurandu próbki przyjmuje się wartość średnią \bar{y} , to otrzyma się

$$U_{yp}(y) = \alpha_{yp} \cdot k_{yp}(\bar{y}) \cdot s(\bar{y}) \quad (3)$$

W pracy o nowym GUM [2] dla współczynnika rozszerzenia k_p wartości średniej populacji o rozkładzie dowolnym, w tym niesymetrycznym oraz o rozkładzie jedno-modalnym symetrycznym podano następujące wzory przybliżone

$$k_p \leq \frac{1}{\sqrt{1-p}} \quad k_p \leq \frac{2}{3 \cdot \sqrt{1-p}} \quad (4)$$

Dla $p = 0,95$ otrzymuje się odpowiednio $k_p = 4,47$ i $k_p = 2,98$, gdy dla rozkładu normalnego jest $k_p = 1,96$.

Wnikliwą analizę współczynnika k_p metodą Monte Carlo dla kilku rozkładów i różnych liczebności próbki n przeprowadził I. P. Zacharow z współpracownikami [7 - 9]. Wraz z E. A. Klimową podali oni dla wartości średniej kilku podstawowych rozkładów [7] wzory na kurtozę K i współczynnik rozszerzenia k_p dla prawdopodobieństwa p . Zestawiono je w tab. 1.

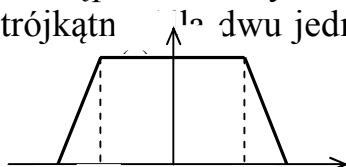
Tabela 1– Wzory współczynnika rozszerzenia k_p dla kilku rozkładów prawdopodobieństwa

Table 1– Formulas of the coverage factor k_p for few basic PDF distributions

Rozkład prawdopodobieństwa	Kurtoza K	Współczynnik rozszerzenia k_p dla prawdopodobieństwa p	k_p dla $p = 0,95$
arc sin	-1,5	$\sqrt{2} \sin \frac{\pi p}{2}$	1,40985
równomierny	-1,2	$p\sqrt{3}$	1,64545
trójkątny	-0,6	$(1 - \sqrt{1-p})\sqrt{6}$	1,90177
normalny	0	$t_p(\infty)$	1,95996
trapezowy Trap	$-1,2 \frac{1+\lambda^4}{(1+\lambda^2)^2}$	$k_{0,95} = \sqrt{3} \frac{1+\lambda - \sqrt{0,2\lambda}}{\sqrt{1+\lambda^2}}$	
Normalny + Studenta	$6/(v-4)$	$k_{0,95} = t_{0,95}(v)\sqrt{(v-2)/v}$	

gdzie: t_p – współczynnik wg rozkładu Studenta, $v=n-1$ - liczba stopni swobody

Rozkład Trap ma postać symetrycznego trapezu liniowego (rys. 2) . Powstaje on jako splot dwu rozkładów równomiernych o różnej szerokości. Długości podstaw trapezu są sumą i różnicą długości rozstępów obu tych rozkładów. Krańcowymi przypadkami rozkładu Trap jest rozkład trójkątny (dwa jednakowych rozkładów równomiernych) i rozkład równomierny.



Rysunek 2– Rozkład trapezowy Trap

Figure2– PDF of trapeze distribution Trap

Jeśli niepewności splecanych rozkładów równomiernych wynoszą u_1 i $u_2 = \lambda u_1$, (gdzie: $0 \leq \lambda \leq 1$), to dla niepewności tworzonego przez nich rozkładu trapezowego otrzymuje się:

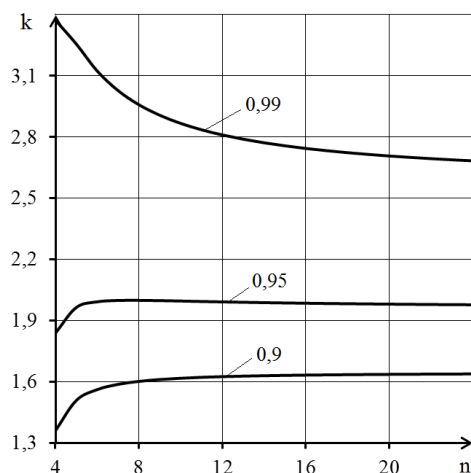
$$u = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = u_1 \sqrt{1 + \lambda^2} \quad (5)$$

Podane na rysunku 2 punkty charakterystyczne rozkładu Trap opisane są w funkcji u_1 i λ wzorami:

$$A = \sqrt{3}(1 + \lambda)u_1, \quad B = \sqrt{3}(1 - \lambda)u_1, \quad C = 1/[2\sqrt{3}(1 + \lambda)u_1] \quad (6a,b,c)$$

Wartości kurtozy i współczynnika rozszerzenia $k_{0,95}$ rozkładu Trap podano w Tabeli 1. Inne estymatory dla tego rozkładu omówiono w rozdziałach 7 i 8 monografii [12].

Zakharov i Botsiura w pracy [8] wyznaczyli zależności współczynnika rozszerzenia k_p w funkcji liczebności próbki n dla kilku wartości prawdopodobieństwa p z uwzględnieniem wzorów (1) i (2). Przedstawia je na rys. 3.



Rysunek 3– Współczynnik rozszerzenia k w funkcji liczebności próbki z populacji o rozkładzie normalnym

Figure 3– Coverage coefficient k as function of number of elements in sample from set of Normal PDF

Najbardziej płaski jest przebieg dla $p = 0,95$. Wyznaczyli też współczynnik k_p dla rozkładu płasko-normalnego jako splotu rozkładu równomiernego z Gaussem.

Ci sami autorzy w pracy [9] zbadali metodą Monte Carlo dokładność różnych wzorów na współczynniki rozszerzenia niepewności wartości średniej, w tym również wg rosyjskiej normy GOST. Wzory (4) dają błędy sięgające nawet 100 %. Do stosowania w praktyce preferują następujące wzory

$$k_{\text{GUM}} = t_{0,95}(v_{\text{eff}}) \sqrt{\frac{(1 + \gamma^2)}{\alpha^2 + \gamma^2}} \quad (7)$$

$$k_3 = \sqrt{\frac{[t_{0,95}(n-1)]^2 + (k_B u_B)^2}{\alpha^2 + \gamma^2}} \quad (8)$$

gdzie: $v_{\text{eff}} = (n-1)(1 + \gamma^2)^2$, $\alpha = \sqrt{\frac{n-1}{n-3}}$, $\gamma = \sqrt{n} \cdot u_B(y)/s$, $t_{0,95}$ – dla rozkładu Studenta

Z badań metodą MC dokładności obu współczynników rozszerzenia k_{GUM} i k_3 dla różnych kombinacji rozkładów normalnego i równomiernego oraz różnych wartości γ i n wynikło szereg interesujących wniosków. I tak wartości k_{GUM} nie zależą od rozkładu niepewności u_B . Natomiast najmniejsze błędy, rzędu $\pm 4,5\%$, uzyskuje się dla k_3 ze wzoru (8). Wzór ten można by uwzględnić w nowym GUM 2 opartym na podejściu wg Bayesa. Międzynarodowa akceptacja tej interesującej propozycji, wymaga jeszcze szerszych badań symulacyjnych dokładności wzoru (8) z uwzględnieniem innych rozkładów niż normalny i równomierny, powtórzenia tych badań w kilku NMI i ośrodkach naukowych oraz publikacji w języku angielskim w głównych (*main stream*) czasopismach metrologicznych.

Dla rozkładów nie-gaussowskich inne estymatory są bardziej efektywne od średniej [6], [10] i rozdz 6 -8 [12]. Pomimo to w literaturze jest niewiele informacji o wyznaczaniu ich niepewności rozszerzonej. M. Dorozhovets, z inspiracji autora, opracował kryteria dla wykrywania outlierów w próbkach o rozkładzie równomiernym [10]. Wyznaczył też

analitycznie odpowiednik rozkładu Studenta dla niepewności s_V środka rozpięcia V tego rozkładu i podany poniżej wzór dla jego niepewności rozszerzonej U_{Vp} .

$$U_{Vp} = k_{VP} \cdot s_V = \left[(1-p)^{-\frac{1}{n-1}} - 1 \right] \cdot (n-1) \cdot \sqrt{\frac{n+2}{2 \cdot (n+1)}} \quad (9)$$

gdzie: $k_{VP} = (1-p)^{-\frac{1}{n-1}} - 1$ współ. rozszerzenia, $V = x_{i\max} - x_{i\min}$ - rozstęp, $s_V = \frac{V \cdot \sqrt{2}}{n-1} \cdot \sqrt{\frac{n+1}{n+2}}$ -

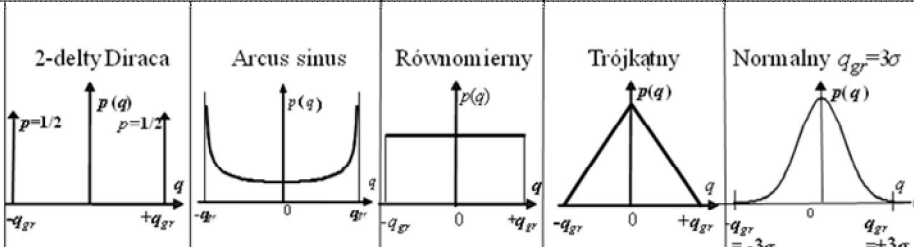
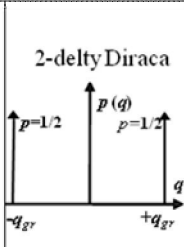
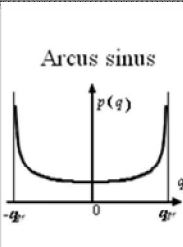
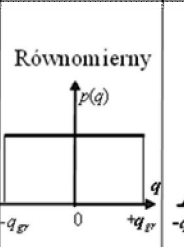
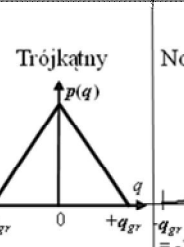
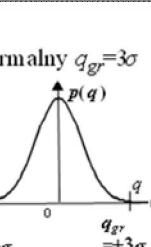
odchylenie standardowe.

Ocena niedokładności przyrządów i nawet dopuszczalnych przedziałów zmian parametrów badanych obiektów nadal jest często dokonywana przez błąd graniczny jako przypadek najgorszy z możliwych. Jeżeli właściwości menzurandu lub dane sygnału w torze pomiarowym modelowane są jednym z rozkładów niegaussowskich, to aby oszacować niepewność rozszerzoną trzeba z błędu granicznego lub z rozstępu danych próbki wyznaczyć odchylenie standardowe σ . Zależności między tymi parametrami dla kilku podstawowych rozkładów podano w tabeli 2 [11].

Tabela 2– Odchylenie standardowe kilku rozkładów gęstości prawdopodobieństwa o znanym rozstępie

q_{gr}

Table 2– Standard deviation of few probability density distributions (PDF) of a known range q_{gr}

Rozkład $p(q)$	2-delta Diraca	Arcus sinus	Równomierny	Trójkątny	Normalny $q_{gr}=3\sigma$
					
Odchylenie standardowe $s(q)$	$\frac{q_{gr}}{1}$	$\frac{q_{gr}}{\sqrt{2}}$	$\frac{q_{gr}}{\sqrt{3}}$	$\frac{q_{gr}}{\sqrt{6}}$	$\frac{q_{gr}}{\sqrt{9}}$
w % od q_{gr}	100%	71%	58%	41%	33%

Literatura

1. Evaluation of measurement data – Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM), BIPM, JCGM 100 (2008) + Supplement 1 – Propagation of distributions using a Monte Carlo method (2007).
2. Bich W., Cox M., Michotte C.: Towards a new GUM-an update. Metrologia 53 (2016), 149 - 159
3. Fotowicz P.: Teoria prawdopodobieństwa warunkowego w metrologii. Metrologia. Biuletyn Głównego Urzędu Miar nr1(16) 2010 s.33-36
4. Fotowicz P.: Alternatywne sposoby obliczania niepewności pomiaru. Pomary Automatyka Kontrola PAK vol. 56, 2010, nr 11, s. 1305 -1307
5. Fotowicz P.: Modyfikacja sposobu obliczania niepewności pomiaru. Pomary Automatyka Robotyka (PAR) 3/2016 s.29-32
6. Kubisa S., Warsza Z. L., Środek rozstępu jako estymator menzurandu dla próbek z populacji o rozkładzie równomiernym i płasko-normalnym. „Pomiary Automatyka Kontrola”, vol. 60, No. 6, 2014, s. 398–401.

7.Zakharov I. P., Klimova K.A.: *Application of excess method to obtain reliable estimate of coverage factor. Sistemy Obrobotki Informacji (SOI) 2014, Vypusk 3 (119) s.24-28 (in Russ.)*

8.Botsiura O.A., Zakharov I.P.: *Peculiarities of evaluation of measurement uncertainty type a based on a Bayesian approach. Sistemy Obrobotki Informacji (SOI) Kharkiv 2015, Vypusk 6 (131) s.17-20 (in Russ.)*

8.Botsiura O.A., Zakharov I.P.: *Comparative analysis of various methods for calculating of coverage factor at implementation of Bayesian approach by the measurement uncertainty evaluation. Sistemy Obrobotki Informacji (SOI) 2016, Vypusk 6 (143) s.20-24 (in Russ.)*

9.Dorozhovets M.: *Testowanie obserwacji istotnie odstających w próbach o rozkładzie jednostajnym. Mechanik (2016) nr 11 s.1596 -1599*

10.Dorozhovets M., Warsza Z.L., *Propozycje rozszerzenia metod wyznaczania niepewności wyniku pomiarów wg Przewodnika GUM (2) Pomiary Automatyka Robotyka (PAR) 2 2007, s. 6 -12*

11.Warsza Z. L., *Metody rozszerzenia analizy niepewności pomiarów. Monografie • Studia • Rozprawy. Oficyna Wydawnicza PIAP Warszawa (2016)*

12.Cox M., Shirono K. *Informative Bayesian type A uncertainty evaluation, especially applicable to a small number of observations. Metrologia 54 (2017) p.642-652*

PUBLIKACJE Z METROLOGII GAZU WSPÓLNE Z PRACOWNIKAMI IFTUNG W POLSCE

Warsza Zygmunt Lech

Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów PIAP, Warszawa Pl.

Polskie Towarzystwo Metrologiczne

Ukraińskie przepisy dotyczące stopni i tytułów naukowych wymagają publikowania prac za granicą. Nie jest to łatwe do spełnienia zadanie zarówno dla aspirantów jak i pracowników naukowo-dydaktycznych z różnych przyczyn, takich jak konieczność śledzenia na bieżąco stanu zagadnienia w literaturze światowej i podejmowania prac o szerszym zastosowaniu niż lokalne przy utrudnionym ze względów finansowych dostępie do czasopism zagranicznych i udziałach w sympozjach i konferencjach za granicą, trudności w redagowaniu publikacji w języku obcym , głównie angielskim i innych, konieczność przygotowywania tekstów "camera ready" wg innych zasad niż dotychczasowe w czasopismach rosyjskojęzycznych oraz niemałe opłaty za druk. Postanowiliśmy pomóc kolegom metrologom z Ukrainy.

Towarzystwo PTM zainicjowało uruchomienie w1998 r. polsko-anglojęzycznego kwartalnika wychodzącego obecnie w Lublinie jako IAPgoś (Informatyka Automatyka i Pomiary) przeznaczonego głównie dla autorów z Europy środkowo-wschodniej. PIAP udostępnia bezpłatnie łamy swoich czasopism naukowo-technicznych, tj. polsko-angielski PAR (Pomiary Automatyka Robotyka) i anglojęzyczny JAMRIS. Zwykle PIAP zwalnia też z opłat konferencyjnych autorów wystąpień na własnych konferencjach naukowych. Jednakże to znacznie nie poprawiło sytuacji.