МАТЕМАТИКА

УДК 517.9

А.В. БИЦАДЗЕ. ДОСТОЙНОЕ СЛУЖЕНИЕ НАУКЕ (К СТОЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ)

"A.V.BITSADZE - MERITORIOUS SERVICE TO SCIENCE. TOWARDS THE 100TH ANNIVERSARY OF THE BIRTH"

А.П. Солдатов
A.P. Soldatov

Белгородский государственный национальный исследовательский университет
Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85

Belgorod National Research University, 85 Pobedy St, Belgorod, 308015, Russia

E-mail: polunin@bsu.edu.ru, soldatov@bsu.edu.ru

Аннотация. Данная статья посвящена 100-летию со дня рождения одного из выдающихся советских математиков, члена Национального комитета по математике, проф. А. В. Бицадзе. А. В. Бицадзе также известен как один из основателей Сибирского отделения Академии наук СССР. В статье широко представлены научные интересы проф. А. В. Бицадзе, а также его карьерный рост.

Resume. The article is dedicated to the 100th anniversary of the birth of one of the outstanding Soviet mathematicians, a member of the National Committee for Mathematics, Professor A.V. Bitsadze. A.V. Bitsadze is also well-known as one of the founders of the Siberian Division of Academy of Sciences of the USSR. The article represents in full the areas of Prof. A.V. Bitsadze research interests and his career development.

Ключевые слова: система Моисила–Теодореску, задача Римана–Гильберта, интеграл типа Коши, сингулярные интегральные уравнения.

Key words: Moisil – Teodorescu system, Riemann - Gilbert problem, Cauchy type integral, singular integral equation.

Андрей Васильевич Бицадзе родился 9 (12) мая 1916 года в с. Цхруквети Чиатурского района Грузинской ССР. Трудовая деятельность Андрея Васильевича началась очень рано. Окончив Чиатурский педагогический техникум, он в шестнадцать лет уже работал преподавателем математики и физики в неполных средних школах своего родного района. В 1940 г. Андрей Васильевич с отличием окончил Тбилисский университет и поступил в аспирантуру Тбилисского математического института АН ГССР, где он работал до 1948 г. Именно в этот период под руководством Н. И. Мусхелишвили были проведены первые научные исследования Андрея Васильевича, которые относятся к касательным производным потенциала простого слоя и теории упругости. В частности, им найдено решение в квадратурах обобщенной задачи Герца о местных деформациях при сжатии двух плоских упругих тел.

В этот же период А.В. Бицадзе начинает заниматься эллиптическими системами. Для таких систем с оператором Лапласа в главной части и вещественно аналитическими младшими коэффициентами он распространил известные результаты И.Н. Векуа. Повидимому здесь же были заложены основы тех результатов для эллиптических систем на плоскости с произвольными постоянными коэффициентами, которые сделали его имя широко известным в научном мире.

В 1945 г. А. В. Бицадзе защитил кандидатскую диссертацию и был командирован в докторантуру при Математическом институте им. В.А. Стеклова АН СССР. Прежде всего в этом институте он продолжил свои исследования по эллиптическим системам

$$a_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{L}$$

с постоянными матричными коэффициентами $a_j \in \mathbb{R}^{l \times l}$. Здесь, в частности, он привел знаменитый ныне пример $2 \times 2-$ эллиптической системы (L) с коэффициентами

$$a_0 = -1, \quad a_2 = 1, \quad a_1 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2},$$

для которой однородная задача Дирихле в единичном круге имеет бесконечное число линейно независимых решений. Выступление Андрея Васильевича на заседании Московского математического общества, где был приведен этот пример, произвел эффект "разорвавшейся бомбы" , поскольку ранее молчаливо предполагалось, что как и в случае одного уравнения задача Дирихле для эллиптических систем носит универсальный характер в смысле ее фредгольмовости. Позднее А.В. Бицадзе ввел класс систем, названных им слабо связанными, для которых задача Дирихле фредгольмова. Этот класс описывется следующим образом.

Следуя М.В. Келдышу набор векторов $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^l$, удовлетворяющих уравнениям $p(\nu)x_1 = 0$, $p(\nu)x_2 + p'(\nu)x_1 = 0$ и

$$p(\nu)x_j + p'(\nu)x_{j-1} + \frac{1}{2}p''(\nu)x_{j-2} = 0, \quad 2 \le j \le k,$$

назовем цепочкой собственных и присоединенных векторов квадратичного пучка $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2$, отвечающих собственному значению ν в верхней полуплоскости характеристичесого уравнения $\det p(z) = 0$. В этих обозначениях эллиптическая система слабо связана, если в $\mathbb{C}^l$ существует базис, составленный из таких цепочек.

С помощью цепочек собственных и присоединенных векторов указанного пучка А.В. Бицадзе дал представление общего решения u эллиптической системы через аналитические функции. Пусть множество $\sigma(L)$ состоит из точек $\nu_1, \ldots, \nu_s$ в верхней полуплоскости характеристического уравнения и столбцы матрицы $b_j \in \mathbb{C}^{l \times l_j}$ составлены из цепочек, отвечающих ν_j. Тогда существуют такие l_j- вектор – функции $\psi_j(\zeta)$, аналитические относительно комплексной переменной $\zeta = x + \nu_j y$, что

$$u(x, y) = \sum_{j=1}^{s} \mathrm{Re}\, b_j \sum_{k=0}^{l_j - 1} \frac{y^k}{k!} \Delta_j^k \psi_i^{(k)}(x + \nu_j y),$$

где Δ_j представляет собой матрицу, все элементы которой равны нулю, кроме некоторых элементов на первой диагонали над главной, которые равны единице.

С помощью этого представления А.В. Бицадзе установил фредгольмовость задачи Дирихле для слабо связанной эллиптической системы в классе Гельдера путем сведения задачи к эквивалентной системе сингулярных интегральных уравнений на Γ.

Условие согласования коэффициентов эллиптической системы с коэффициентами граничных операторов, достаточное для сводимости граничной задачи общего вида к регулярным интегральным уравнениям, было впервые получено Я.Б. Лопатинским (УМЖ, 1953). В этой же работе Я. Б. Лопатинский описал метод сведения граничной задачи в ограниченной выпуклой области к системе регулярных интегральных уравнений при помощи построенных и исследованных им потенциалов. Ранее подобный метод применяла З. Я. Шапиро для систем с постоянными коэффициентами в трехмерной области. В настоящее время это условие известно как условие Шапиро – Лопатинского (или условие дополнительности).

Возникает вопрос, как связано это условие с понятием слабой связанности. Средствами только линейной алгебры можно показать (А. Солдатов, 2010), что следующие утверждения эквивалентны:

(a) эллиптическая система (L) слабо связана;

(b) выполнено условие дополнительности;

(c) матричный трехчлен $p(t) = a_0 + ta_1 + t^2 a_2$ удовлетворяет условию

$$\det \int_{\mathbb{R}} p^{-1}(t)dt \neq 0.$$

Пример Бицадзе стимулировал введение различных классов эллиптических систем, для которых задача Дирихле фредгольмова.

По определению эллиптическая система *сильно эллиптична* (М.И. Вишик), если матрица $p(t)$ положительно определена для всех $t \in \mathbb{R}$. Эллиптическую систему (L) назовем *усиленно эллиптичной* (А. Солдатов, 2001), если существует неотрицательно определенная блочная матрица $A = (a_{ij})_1^2$, элементы $a_{ij} \in \mathbb{R}^{l \times l}$ которой связаны с коэффициентами a_j соотношениями $a_0 = a_{11}$, $a_1 = a_{12} + a_{21}$ и $a_2 = a_{22}$. В силу условия (c) эти системы заведомо сильно эллиптичны. Усиленно эллиптические системы характеризуются тем, что задача Дирихле для них однозначно разрешима. Например, система Ламе плоской анизотропной упругости усиленно эллиптична. Еще более узкий класс составляют системы, *сильно эллиптические по Сомильяно*, они определяются условием положительной определенности матрицы A.

Результаты А.В. Бицадзе по эллиптическим системам могли бы составить докторскую диссертацию, они в дальнейшем вошли в его монографию "Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка", изданную в новосибирский период его жизни. Однако его второй научный учитель М.А. Лаврентьев предложил заняться уравнениями смешанного типа. Эти уравнения тесно связаны с трансзвуковой газовой динамикой и в связи с возросшими сверхзвуковыми скоростями летательных аппаратов в середине 40- годов их исследование приобрело особую актуальность. Здесь Андрей Васильевич разработал существенно новые методы, которые позволили значительно продвинуть теорию уравнений смешанного и смешанно-составного типов и получить выдающиеся результаты в постановке и исследовании качественно новых краевых задач, многие из которых в настоящее время носят его имя. Андрей Васильевич впервые доказал теорему однозначной разрешимости общей смешанной задачи для уравнения Лаврентьева - Бицадзе

$$(\operatorname{sgn} y)u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Хотя это уравнение и выглядит как модельное, в действительности оно было предложено М.А. Лаврентьевым и А.В. Бицадзе для описания течения газа, график адиабаты которого имеет в одной точке излом.

В западной литературе общую смешанную задачу часто называют задачей Моравец. Однозначная разрешимость этой задачи показывает некорректность задачи Дирихле в смешанной области, гиперболическая часть которой выпукла относительно характеристик. В дальнейшем однако оказалось, что допущение сколь угодно малой особенности у решения в граничной точке на линии изменения типа сохраняет корректность задачи Дирихле. Для слабых решений уравнения Трикоми это было показано в 70-х годах К.Моравец, для классических решений уравнения Лаврентьева - Бицадзе этот факт также имеет место (А.Солдатов, 1990).

После блестящей защиты в 1951 г. диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук А.В. Бицадзе был оставлен в Математическом институте АН СССР в качестве старшего научного сотрудника. В конце 50-годов он был командирован в Китайскую народную республику, где выступил с циклами докладов по проблемам уравнений смешанного типа и их приложений, и подготовил несколько учеников. В 1958 г. А. В. Бицадзе за выдающиеся заслуги в математике был избран членом-корреспондентом АН СССР.

С 1959 г. начинается новосибирский период Андрея Васильевича. По инициативе М.А. Лаврентьева, С.Л. Соболева и С.А. Христиановича в это время организуется Новосибирский академгородок, где А. В. Бицадзе возглавляет отдел общей теории функций Института математики Сибирского отделения АН СССР и кафедру теории функций Новосибирского государственного университета. Здесь Андрей Васильевич продолжает свои исследования по эллиптическим уравнениям и уравнениям смешанного типа, создав известную научную школу в этих направлениях. В частности, им впервые были установлены теоремы о существовании и размерности пространства решений задачи с наклонной производной для гармонических функций в трёхмерной области в зависимости от структуры множества, где вектор, по направлению которого задаётся производная от искомой функции на границе области, выходит в касательную плоскость. Значительные исследования Андрея Васильевича посвящены проблеме поиска многомерных аналогов задачи Трикомы в смешанных областях, когда многообразия изменения типа уравнения является либо пространственно, либо временным образом ориентированной поверхностью. Андреем Васильевичем предложены также качественно новые задачи (как начальные, так и краевые) для уравнении смешанного типа на плоскости, когда линия изменения типа одновременно является и вырождения порядка.

Совершенно неожиданный эффект обнаружен А.В. Бицадзе и в теории гиперболических систем. Хорошо известно, что в случае одного гиперболического уравнения второго порядка на плоскости задача Гурса является корректно поставленной. Андреем Васильевичем установлено, что для линейных гиперболических систем этот факт может нарушаться даже в случае простых корней характеристического уравнения.

В 1971 г. постановлением Президиума АН СССР Андрей Васильевич был приглашен в Математический институт АН СССР им. В.А. Стеклова, где возглавил вновь созданный отдел уравнений в частных производных. В этом же году А. В. Бицадзе был избран действительным членом АН ГССР. Одновременно по решению ЦК КПСС с 1979 г. по 1983 г. он успешно возглавлял Институт прикладной математики им. И.Н. Векуа Тбилисского университета.

Начиная с 1972 г. А.В. Бицадзе вел исследования по построению широких классов решений квазилинейных уравнений в частных производных, охватывающих уравнения гравитационного поля (уравнения Эйнштейна), уравнения гейзенберговской теории ферромагнетизма, Лоренц-ковариантных уравнений. Найденные Андреем Васильевичем решения вошли в изданные в Советском Союзе и за рубежом монографии и справочники по решениям указанных уравнений. Одновременно он читает курс уравнений в частных производных в Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова. Широко известны также работы А. В. Бицадзе по нелокальным краевым задачам, толчком к их исследованию послужила предложенная Андреем Васильевичем постановка (совместно с А.А. Самарским) нелокальная задача для уравнения Лапласа, когда данные Дирихле на одной части границы области сопрягаются со значениями решения внутри ее.

А.В. Бицадзе был выдающимся организатором российской науки и образования, возглавлял различные научные проекты и коллективы. Ему принадлежат основополагающие результаты по многим направлениям современной математики и её приложениям: в области теории функций и функционального анализа, дифференциальных уравнений и математической физики, вычислительной математики и математического моделирования. В различных разделах теории уравнений в частных производных можно встретить систему Бицадзе, уравнение Лаврентьева- Бицадзе, принцип экстремума Бицадзе, задачу Бицадзе -Самарского. Имя А.В. Бицадзе пользуется высоким международным авторитетом. Многие его монографии и учебники изданы и переведены за границей на английский, немецкий, китайский, польский и др. языки. Андрей Васильевич являлся заместителем редактора "Сибирского математического журнала" , членом бюро Отделения математики АН СССР, членом Национального комитета математиков. Его заслуги высоко оценены государством: он награжден орденом Ленина (1971), орденом Октябрьской революции (1985), двумя орденами Трудового Красного Знамения (1966, 1975).

Андрей Васильевич прожил яркую гражданскую и научную жизнь (9.5.1916 – 6.4.1994). Принципиальный, справедливый, временами эмоционально резкий, он всегда был впереди, пользовался высоким моральным авторитетом в научной среде и служил примером для молодежи. Именно принципиальность и проницательность в оценке людей послужила причиной нескольких неудач при избрании в действительные члены Академии наук, хотя по масштабу личности и выдающимся научным заслугам он давно заслуживал этого. Среди учеников Андрея Васильевича свыше 13 докторов наук и 30 кандидатов наук, однако число людей, которым он помог и среди которых оставил добрую память, неизмеримо больше.