MSC 46H25

О ДВУХ ОПРЕДЕЛЕНИЯХ СПЕКТРА ВЕКТОРА

В.Е. Струков

Воронежский государственный университет,
Университетская пл., 1, Воронеж, 394036, Россия, e-mail: sv.post.of.chaos@gmail.com

Аннотация. В статье рассмотрены два определения спектра векторов в банаховых $L^1(\mathbb{R})$-модулях и доказана их эквивалентность.

Ключевые слова: спектр Берлинга вектора, локальный спектр вектора, банахов модуль.

1. Введение. Пусть X – комплексное банахово пространство, $\mathrm{End}\, X$ – банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в банаховом пространстве X. Пусть $L^1(\mathbb{R})$ – банахова алгебра измеримых суммируемых па $\mathbb{R}$ (классов) комплекспозначных функций со сверткой в качестве умножения, а $W_1^1(\mathbb{R})$ – банахово пространство Соболева, т.е. пространство функций из $L^1(\mathbb{R})$, имеющих обобщенную производную первого порядка. Зададим па банаховом пространстве X структуру банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля с помощью изометрического представления $T : \mathbb{R} \to \mathrm{End}\, X$, порождаемого генератором iA, по формуле

$$T(f)x = fx = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)T(-t)x dt\,.$$

Банахов $L^1(\mathbb{R})$-модуль X со структурой, порождаемой представлением T, будем обозначать (X,T). Оператор A будем также называть генератором $L^1(\mathbb{R})$-модуля (X,T). Потребуем также, чтобы банахов модуль (X,T) был невырожденным, т.е. для всех $f \in L^1(\mathbb{R})$ из равенства $fx = 0$ следовало, что $x = 0$. Пусть $S : \mathbb{R} \to \mathrm{End} L^1(\mathbb{R})$ - изометрическая группа операторов сдвига на пространстве $L^1(\mathbb{R})$, для кусочно-непрерывных функций $x \in L^1(\mathbb{R})$ приобетающая вид $(S(t)x)(s) = x(t+s)$.

В настоящей работе будут рассмотрены определения локального спектра и спектра Берлинга векторов из банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля, перечислены свойства и доказана их эквивалентность указанных спектров. Аналогичные результаты приведены в [1, глава 1.5].

Замечание 1. Для рассматриваемого банахова модуля (X,T) справедливы следующие свойства:

1. Для всех $x \in X$, $f \in L^1(\mathbb{R})$, $t \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $T(t)(fx) = (S(t)f)x = f(T(t)x)$.

2. Для всех $x \in X$ и $f \in L^1(\mathbb{R})$ справедливо неравенство $\|fx\| \le \|f\|_1\|x\|$, где $\|\cdot\|_1$ - норма в пространстве $L^1(\mathbb{R})$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 13-01-00378, 14-01-31196) и РНФ (проект № 14-21-00066).

Лемма 1. *Отображение* $f \mapsto T(f) : L^1(\mathbb{R}) \to \mathrm{End}X$ *является гомоморфизмом алгебр* $L^1(\mathbb{R})$ *и* $\mathrm{End}X$.

□ Линейность данного отображения следует из линейности интеграла. Докажем, что $T(f*g) = T(f)T(g)$ для всех $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Для этого рассмотрим оператор $T(f*g)$ на некотором векторе $x \in X$.

$$T(f*g)x = \int_{\mathbb{R}} (f*g)(t)T(-t)xdt = \int_{\mathbb{R}} \left\{ \int_{\mathbb{R}} f(s)g(t-s)ds \right\} T(-t)xdt =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left\{ \int_{\mathbb{R}} f(s)T(-s)g(t-s)T(-t+s)xds \right\} dt =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(s)T(-s) \left\{ \int_{\mathbb{R}} g(t-s)T(-t+s)xdt \right\} ds = T(f)T(g)\,,$$

где изменен порядок интегрирования согласно теореме Фубини

2. Определение и основные свойства спектра Берлинга.

Используемые далее понятия и результаты из спектральной теории модулей можно найти в [1–4].

Определение 1. *Спектром Бёрлинга подмножества* $M \subset X$ *называется множество* $\Lambda(M) = \Lambda(M,T) \subset \mathbb{R}$, *являющееся дополнением в* $\mathbb{R}$ *к множеству*

$$\Big\{\lambda \in \mathbb{R} : \text{ существует } f \in L^1(\mathbb{R}) \text{ со свойством } \widehat{f}(\lambda) \neq 0 \text{ такое,}$$

$$\text{что для всех } \quad x \in M \quad \text{ справедливо } \quad fx = 0\Big\}\,.$$

Если $M = \{x\}$, *то будем обозначать* $\Lambda(M,T) = \Lambda(x,T) = \Lambda(x)$, *причем*

$$\Lambda(x) = \Big\{\lambda \in \mathbb{R} : \text{ для всех } \ f \in L^1(\mathbb{R}) \ \text{ со свойством } \ \widehat{f}(\lambda) \neq 0 \ \text{ справедливо } \ fx \neq 0\Big\}.$$

Множество $\Lambda(x)$ будем называть *спектром Берлинга* вектора x.

Лемма 2. *Множество* $\Lambda(M)$ *совпадает с линейной оболочкой инвариантного относительно сдвига двустороннего замкнутого идеала* $I(M) = \{f \in L^1(\mathbb{R}) : fx = 0$ *для всех* $x \in M\}$, *т.е.* $\Lambda(M) = \{\lambda \in \mathbb{R} : \widehat{f}(\lambda) = 0$ *для всех* $f \in I(M)\}$ *- общее множество нулей преобразования Фурье функций из идеала* $I(M)$.

□ По определению для произвольного $\lambda_0 \in \Lambda(M)$ из того, что для всякого $f \in L^1(\mathbb{R})$ и $\widehat{f}(\lambda_0) \neq 0$ следует, что существует $x \in M$ такой, что $fx \neq 0$. Это эквивалентно тому, что для произвольного $\lambda_0 \in \Lambda(M)$ из того, что для любых $f \in L^1(\mathbb{R})$, таких, что для всех $x \in M$ имеет место равенство $fx = 0$, следует, что $\widehat{f}(\lambda_0) = 0$.

Покажем теперь, что $I(M)$ является инвариантным относительно сдвига двусторонним замкнутым идеалом в алгебре $L^1(\mathbb{R})$. Рассмотрим произвольную функцию $f \in I(M)$. Поскольку для нее имеет место равенство $fx = 0$ для всех $x \in M$, то для функции $S(h)f$, $h \in \mathbb{R}$, справедливо

$$(S(h)f)x = \int\limits_{\mathbb{R}} (S(h)f)(t)T(-t)xdt = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)T(h-t)xdt = T(h)fx = 0\,.$$

Для доказательства замкнутости рассмотрим последовательность функций $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset I(M)$, сходящуюся к некоторой функции $f_0 \in L^1(\mathbb{R})$. Тогда для любого $x \in M$ будет справедлива оценка $\|f_0x\| \le \|f_nx\| + \|(f_n - f_0)x\| \le \|f_n - f_0\|_1\|x\|$, из которой, с учетом сходимости последовательности $\{f_n\}$, получаем, что $f_0x = 0$. То, что $I(M)$ - идеал, следует из коммутативности свертки и равенства $f(gx) = (f*g)x = (g*f)x = g(fx)$, для любых $f \in I(M)$, $g \in L^1(\mathbb{R})$ и $x \in M$. ■

Для идеала $I(M)$ справедлива следующая

Лемма 3. *Если для всякого $\lambda \in \mathbb{R}$ найдется функция $f \in I(M)$ такая, что $\widehat{f}(\lambda) \ne 0$ и $fx = 0$, то $I(M) = L^1(\mathbb{R})$.*

□ Доказательство вытекает из аппроксимационной теоремы Винера в [5, глава III.76] и леммы 2. ■

Лемма 4. *Пусть (X, T) - банахов $L^1(\mathbb{R})$-модуль. Справедливы следующие утверждения:*

1. *Спектр $\Lambda(M)$ замкнут для любого подмножества $M \subseteq X$ и $\Lambda(M) = \emptyset$ тогда и только тогда, когда $M = \{0\}$.*

2. *$\Lambda(Ax + By) \subseteq \Lambda(x) \cup \Lambda(y)$ для всех операторов $A, B \in \mathrm{End}X$, перестановочных с операторами $T(f)$, $f \in L^1(\mathbb{R})$.*

3. *$\Lambda(fx) \subset \mathrm{supp}\,\widehat{f} \cap \Lambda(x)$ для всех $x \in X$, $f \in L^1(\mathbb{R})$.*

4. *Если функция $f \in L^1(\mathbb{R})$ такова, что $\widehat{f} = 0$ в некоторой окрестности множества $\Lambda(x)$, то $fx = 0$.*

5. *Если функция $f \in L^1(\mathbb{R})$ такова, что $\widehat{f} = 1$ в некоторой окрестности множества $\Lambda(x)$, то $fx = x$.*

6. *Если функция $f \in L^1(\mathbb{R})$ такова, что $\widehat{f}(\lambda) = \lambda$ в некоторой окрестности множества $\Lambda(x)$, то $fx = Ax$.*

7. *Если функция $f_\lambda \in L^1(\mathbb{R})$ такова, что $\widehat{f_\lambda}(z) = (z-\lambda)^{-1}$ в некоторой окрестности множества $\Lambda(x)$ и $\lambda \notin \Lambda(x)$, тогда $f_\lambda x = R(\lambda, A)x$.*

□ 1. Покажем, что дополнение к спектру Бёрлинга открыто. Пусть $\lambda_0 \in \Lambda(M)$, тогда по определению найдется $f \in L^1(\mathbb{R})$ со свойством $\widehat{f}(\lambda_0) \ne 0$ такое, что для любого

$x \in M$ справедливо равенство $fx = 0$. Поскольку преобразование Фурье функции из $L^1(\mathbb{R})$ непрерывно, то найденная функция f будет иметь отличное от нуля преобразование Фурье в окрестности точки λ_0, что означает, что произвольная точка λ_0 входит в $\mathbb{R}\backslash\Lambda(M)$ вместе с некоторой окрестностью. Таким образом, $\mathbb{R}\backslash\Lambda(M)$ открыто, а $\Lambda(M)$ – замкнуто.

Пусть $\Lambda(M) = \emptyset$. Тогда для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$ существует $f \in L^1(\mathbb{R})$, такая, что $\widehat{f}(\lambda) \neq 0$, а $fx = 0$ для всех $x \in M$. Тогда согласно леммам 2 и 3 идеал $I(M)$ совпадает с алгеброй $L^1(\mathbb{R})$. В силу невырожденности банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля получаем, что $M = \{0\}$.

Обратно, если $x \in M = \{0\}$, то $fx = 0$ для всех $f \in L^1(\mathbb{R})$. То есть, $I(M) = L^1(\mathbb{R})$ и для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ найдется функция $f \in L^1(\mathbb{R})$ со свойством $\widehat{f}(\lambda) \neq 0$ такая, что для всех $x \in M$ справедливо $fx = 0$. Таким образом, $\Lambda(M) = \emptyset$.

2. Пусть $\lambda \notin \Lambda(A) \cup \Lambda(B)$, тогда существуют такие функции $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ такие, что $\widehat{f}(\lambda) \neq 0$, $\widehat{g}(\lambda) \neq 0$ и $fx = 0$, $gy = 0$. Пусть функция $h = f * g$, тогда $\widehat{h}(\lambda) = \widehat{f}(\lambda)\widehat{g}(\lambda) \neq 0$ и справедливо равенство

$$h(Ax + By) = hAx + hBy = T(h)Ax + T(h)By =$$

$$= AT(h)x + BT(h)y = A(f * g)x + B(f * g)y = Ag(fx) + Bf(gy) = 0\,,$$

то есть, $\lambda \notin \Lambda(Ax + By)$.

3. Пусть $\lambda_0 \notin \operatorname{supp} \widehat{f}$, тогда найдется $\delta > 0$, такое, что $(\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta) \cap \operatorname{supp} \widehat{f} = \emptyset$. Рассмотрим функцию $g \in L^1(\mathbb{R})$ такую, что $\operatorname{supp} \widehat{g} \subset (\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta)$. Согласно лемме 1 справедливо равенство $f(gx) = (f * g)x = 0$, поскольку $\widehat{f * g}(\lambda) = \widehat{f}(\lambda)\widehat{g}(\lambda) = 0$. Таким образом, $\lambda_0 \notin \Lambda(fx)$.

Пусть теперь $\lambda_0 \notin \Lambda(x)$. Тогда, по определению, существует функция $g \in L^1(\mathbb{R})$, такая, что $\widehat{g}(\lambda_0) \neq 0$ и $gx = 0$. Снова применим лемму 1 и получим $g(fx) = (f * g)x = f(gx) = 0$, т.е. $\lambda_0 \notin \Lambda(fx)$.

4. Доказательство непосредственно вытекает из предыдущего утверждения данной леммы.

5. Рассмотрим произвольное $\lambda_0 \in \mathbb{R}$. Если $\lambda_0 \notin \Lambda(x)$, то найдем такую функцию $g \in L^1(\mathbb{R})$, что $\widehat{g}(\lambda_0) \neq 0$, а $gx = 0$. Тогда $g(fx - x) = f(gx) - gx = 0$, т.е. $\lambda_0 \notin \Lambda(fx - x)$. С другой стороны, для всех $\lambda_0 \in \Lambda(x)$ функция $\widehat{f} \equiv 1$ и для произвольной функции $g \in L^1(\mathbb{R})$ такой, что $\widehat{g}(\lambda_0) \neq 0$, преобразование Фурье функции $f * g - g$ принимает вид $\widehat{f}(\lambda)\widehat{g}(\lambda) - \widehat{g}(\lambda) = 0$ для всех λ в некоторой окрестности множества $\Lambda(x)$. Таким образом, согласно предыдущему пункту, $g(fx - x) = 0$ и $\lambda_0 \notin \Lambda(fx - x)$. Таким образом, для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda \notin \Lambda(fx - x)$, и, согласно первому утверждению данной леммы, $fx - x = 0$.

6. Пусть $\widehat{f}(\lambda) = \lambda$ на некоторой окрестности $U_0(\Lambda(x)) = U_0$ спектра Берлинга $\Lambda(x)$ вектора x. Рассмотрим функцию $g \in W_1^1(\mathbb{R})$, такую, что $\widehat{g} \equiv -i$ на U_0. Тогда, интегрируя по частям, получим

$$g'x = \int\limits_{\mathbb{R}} g'(t)T(-t)x\,dt = g(t)T(-t)x|_{-\infty}^{+\infty} + iA\int\limits_{\mathbb{R}} g(t)T(-t)x\,dt = iA(gx)\,.$$

С учетом предыдущего свойства получаем, что $g'x = iA(gx) = iA(-ix) = Ax$. Напомним, что для преобразования Фурье функции $g \in L^1(\mathbb{R})$ с суммируемой производной справедливо равенство $\widehat{g'}(\lambda) = i\lambda\widehat{g}(\lambda)$. Таким образом, на множестве U_0 спектра Берлинга $\Lambda(x)$ имеет место равенство $\widehat{g'}(\lambda) = i\lambda\widehat{g}(\lambda) = \lambda$. Поскольку $\widehat{f}(\lambda) - \widehat{g}(\lambda) = 0$ в окрестности U_0 спектра Берлинга $\Lambda(x)$, то $(f - g')x = 0$, и $fx = g'x = Ax$.

7. Рассмотрим функцию $f_\lambda \in L^1(\mathbb{R})$ такую, что $\widehat{f_\lambda}(z) = z - \lambda$ в некоторой окрестности $U(\Lambda(x))$ спектра Берлинга $\Lambda(x)$, тогда согласно предыдущим свойствам $f_\lambda x = (A - \lambda I)x$. Предположим, что $\lambda \notin \Lambda(x)$ и рассмотрим функцию $g_\lambda \in L^1(\mathbb{R})$ такую, что $\widehat{g_\lambda} = 1/\widehat{f_\lambda}$. Применим функцию g_λ к вектору $f_\lambda x$ и получим равенство $g_\lambda(f_\lambda x) = (g_\lambda * f_\lambda)x$. Применим преобразование Фурье к функции $g_\lambda * f_\lambda$ и получим $(g_\lambda * f_\lambda)\widehat{\ }(z) = \widehat{g_\lambda}(z)\widehat{f_\lambda}(z) \equiv 1$ для всех $z \in U(\Lambda(x))$, таким образом, $(g_\lambda * f_\lambda)x = x$. В силу коммутативности свертки получаем, что оператор $T(g_\lambda)$ совпадает с $R(\lambda, A)$ на векторе x при $\lambda \notin \Lambda(x)$. ■

Лемма 5. *Для произвольного множества $M \subset X$ справедливо равенство*

$$\Lambda(M) = \bigcup_{x \in M, \xi \in X*} \Lambda(<\psi_x, \xi>)\,, \text{ где } <\psi_x, \xi> = \xi(\psi_x) = \xi(T(t)x) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}.$$

□ Пусть $\lambda_0 \notin \Lambda(M)$, тогда найдется такая функция $f \in L^1(\mathbb{R})$, что $\widehat{f}(\lambda_0) \neq 0$, такая, что для всех $x \in M$ $fx = 0$. Фиксируем произвольное $h \in \mathbb{R}$ и применим к равенству $fx = 0$ сначала оператор $T(h)$, затем произвольный характер $\xi \in X^*$. Получим, что для произвольного $\xi \in X^*$ и для всех $x \in M$ справедливо равенство $< f(T(h)x), \xi > = < T(h)(fx), \xi > = 0$, таким образом, для произвольного $\xi \in X^*$ точка $\lambda_0 \notin \Lambda(<\psi_x, \xi>)$ и $\bigcup_{x \in M, \xi \in X^*} \Lambda(<\psi_x, \xi>) \subset \Lambda(M)$.

Обратно, если $\lambda_0 \in \bigcup_{x \in M, \xi \in X^*} \Lambda(<\psi_x, \xi>)$, то для произвольного $x \in M$ и произвольного $\xi \in X^*$ найдется такая функция $f \in L^1(\mathbb{R})$, что $\widehat{f}(\lambda) \neq 0$ и $<\psi_x, \xi> * f = 0$. Поскольку для всех характеров $\xi \in X^*$ справедливо равенство

$$(<\psi_x, \xi> * f)(h) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\xi(T(h-t))x dt = \xi\left(\int_{\mathbb{R}} f(t)T(h)T(-t)x dt\right) =$$

$$= < T(h)(fx), \xi > = 0\,,$$

то из следствия 13 [6, глава II.3] теоремы Хана-Банаха о продолжении линейного функционала вытекает, что $fx = 0$ и $\lambda_0 \notin \Lambda(x)$ для всех $x \in M$. ■

3. Определение и основные свойства локального спектра вектора.

Определение 2. *Будем говорить, что замкнутый оператор $A : D(A) \subset X \to X$ обладает свойством однозначного распространения, если для любой голоморфной функции $f : U \subset \mathbb{C} \to D(A)$ из равенства $(A - \lambda I)f(\lambda) = 0$, $\lambda \in U$, следует, что $f \equiv 0$.*

Определение 3. *Пусть оператор $A : D(A) \subset X \to X$ обладает свойством однозначного распространения, а $x \in X$. Множество точек $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, для которых существует* *открытая окрестность $U_0 = U(\lambda_0)$ точки λ_0 и голоморфная функция $f : U_0 \to D(A)$ такая, что $f(\lambda) \in D(A)$, $\lambda \in U_0$, и выполнено равенство $(A - \lambda I)f(\lambda) = x$, $\lambda \in U_0$, называется локальным резольвентным множеством вектора $x \in X$ и обозначается $\rho_A(x)$.*

Определение 4. *Локальный спектр вектора $x \in X$ относительно оператора A - это множество $\sigma_A(x) = \mathbb{C}\backslash\rho_A(x)$.*

Лемма 6. *Справедливы следующие свойства:*

1. *$\sigma_A(x)$ - замкнутое подмножество из $\sigma(A)$.*

2. *Если $A \in \mathrm{End}X$, то $\sigma_A(x) = \emptyset$ тогда и только тогда, когда $x = 0$.*

3. *$\sigma_A(\alpha x + \beta y) \subset \sigma_A(x) \cup \sigma_A(y)$ для любых векторов $x, y \in X$.*

4. *$\sigma_A(Bx) \subset \sigma_A(x)$ для любого вектора $x \in X$ и любого оператора $B \in \mathrm{End}X$, перестановочного с A (т.е. $BD(A) \subset D(A)$ и $AB = BA$ для любого $x \in D(A)$).*

□ 1. Множество $\sigma_A(x)$ замкнуто по определению.

Пусть $\lambda_0 \notin \sigma(A)$, тогда для всех $x \in X$ и для всех окрестностей $U(\lambda_0) \subset \rho(A)$ точки λ_0 найдется голоморфная функция $f : U \to \mathbb{C}$, $f(\lambda) = R(\lambda, A)x$. Для такой функции f будет справедливо равенство $(A - \lambda I)f(\lambda) = x$, то есть $\lambda_0 \notin \sigma_A(x)$. Следовательно, $\sigma_A(x) \subset \sigma(A)$.

2. Пусть $A \in \mathrm{End}X$. Если $x = 0$, то по свойству однозначного распространения для всех $\lambda \in \mathbb{C}$ найдется голоморфная функция $f \equiv 0$, для которой будет выполнено равенство $(A - \lambda I)f(\lambda) = 0 = x$, т.е. $\lambda \in \rho_A(x)$ и $\sigma_A(x) = \emptyset$.

Теперь, если $\sigma_A(x) = \emptyset$, то $\rho_A(x) = \mathbb{C}$ и для каждой $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ возможно будет найти такие окрестность $U(\lambda_0)$ точки λ_0 и такую функцию $f : U(\lambda_0) \to D(A)$, что $(A - \lambda I)f(\lambda) = x$. Поскольку $A \in \mathrm{End}X$, то для всех $\lambda > \|A\|$ и для всех $x \in X$ справедливо равенство $(A - \lambda I)(A - \lambda I)^{-1}x = x$. В силу свойства однозначного распространения получаем, что $f(\lambda) = R(\lambda, A)x$ для всех $\lambda > \|A\|$, поэтому имеет место равенство $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \|f(\lambda)\| = 0$. По теореме Лиувилля [6, глава III.14] для голоморфной функции получаем, что $f \equiv 0$. Из этого следует, что $x = 0$.

3. Пусть $\lambda_0 \in \mathbb{C}\backslash(\sigma_A(x) \cup \sigma_A(y))$, тогда существует такая окрестность $U(\lambda_0)$ точки λ_0 и найдутся такие функции $f : U(\lambda_0) \to D(A)$ и $g : U(\lambda_0) \to D(A)$ такие, что $(A - \lambda I)f(\lambda) = x$, $(A - \lambda I)g(\lambda) = y$ для всех $\lambda \in U(\lambda_0)$. Тогда для всех $\lambda \in U(\lambda_0)$ справедливо равенство $(A - \lambda I)(\alpha f(\lambda) + \beta g(\lambda)) = \alpha x + \beta y$, то есть $\lambda_0 \in \mathbb{C}\backslash\sigma_A(\alpha x + \beta y)$.

4. Пусть $\lambda_0 \in \mathbb{C}\backslash\sigma_A(x)$, тогда найдется некоторая окрестность $U(\lambda_0)$ точки λ_0 и голоморфная функция $f : U(\lambda_0) \to D(A)$ такая, что $(A - \lambda I)f(\lambda) = x$. Применим к обеим частям равенства оператор $B \in \mathrm{End}X$, перестановочный с оператором A в указанном выше смысле. $B(A - \lambda I)f(\lambda) = Bx$. В силу перестановочности оператора B с оператором A для всех $\lambda \in U(\lambda_0)$ получаем $(A - \lambda I)Bf(\lambda) = Bx$. Заметим, что функция $Bf(\lambda)$ голоморфна в окрестности $U(\lambda_0)$, поэтому $\lambda_0 \in \mathbb{C}\backslash\sigma_A(Bx)$. Таким образом доказано, что $\sigma_A(Bx) \subset \sigma_A(x)$. ■

4. Об эквивалентности спектра Берлинга и локального спектра. Для доказательства основного результата данной работы необходима следующая

Лемма 7. *Пусть A - генератор $L^1(\mathbb{R})$-модуля (X, T) с изометрическим представлением T, тогда A обладает свойством однозначного распространения.*

□ Заметим, что поскольку оператор A производит изометрическое представление, то его спектр лежит на вещественной прямой. Доказательство леммы следует из наблюдения о том, что если $\overline{\rho(A)} = \mathbb{C}$, то оператор A обладает свойством однозначного распространения. ■

Основным результатом данной работы является следующая

Теорема 1. *Локальный спектр (относительно генератора A модуля (X, T)) и спектр Берлинга вектора $x \in X$ совпадают, т.е.*

$$\sigma_A(x) = \Lambda(x)\,.$$

□ Докажем сначала, что $\sigma_A(x) \subset \Lambda(x)$.

Пусть $\lambda_0 \notin \Lambda(x)$. Положим $\varepsilon = \frac{1}{2}\mathrm{dist}(\lambda_0, \Lambda(x))$ и $U_0 = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon\}$. Поскольку $U_0 \cap \Lambda(x) = \emptyset$, рассмотрим функцию $g_\lambda \in L^1(\mathbb{R})$ такую, что $\widehat{g_\lambda}(z) = (z - \lambda)^{-1}$ в окрестности $\Lambda(x)$. Согласно свойству 7 леммы 4 справедливо равенство $g_\lambda x = R(\lambda, A)x$, в том числе и на множестве U_0. Таким образом, найдена открытая окрестность U_0 и голоморфная функция $f : U_0 \to D(A)$, $f(\lambda) = g_\lambda x = R(\lambda, A)x$, т.е. $\lambda_0 \notin \sigma_A(x)$.

Теперь докажем, что $\Lambda(x) = \sigma_A(x)$. Предположим, что $\Lambda(x) \neq \sigma_A(x)$ и пусть $\lambda_0 \in \Lambda(x) \backslash \sigma_A(x)$. Рассмотрим функцию $g \in L^1(\mathbb{R})$ с компактным носителем преобразования Фурье и такую, что $\widehat{g}(\lambda_0) \neq 0$ и $\mathrm{supp}\,\widehat{g} \cap \sigma_A(x) = \emptyset$. Тогда $gx \neq 0$, поскольку функция g имеет ненулевое преобразование Фурье на спектре Берлинга вектора x. С другой стороны, по доказанному ранее в данной теореме и свойству 3 леммы 4 справедливо включение $\sigma_A(gx) \subset \Lambda(gx) \subset \mathrm{supp}\ \widehat{g} \cap \Lambda(x)$. Из условий на функцию g получаем, что $\sigma_A(gx) = 0$. Согласно утверждению 1 леммы 6 получаем, что $gx = 0$ и $\lambda_0 \notin \Lambda(x)$, что противоречит предположению. Следовательно, $\Lambda(x) = \sigma_A(x)$. ■

Литература

1. Баскаков А.Г. Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов // СМФН. – 2004. – 9. – С.3-151.
2. Баскаков А.Г., Криштал И.А. Гармонический анализ каузальных операторов и их спектральные свойства // Изв. РАН. Серия матем. – 2005. – 69. – № 3. – С.3-54.
3. Баскаков А.Г., Калужина Н.С. Теорема Берлинга для функций с существенным спектром из однородных пространств и стабилизация решений параболических уравнений // Матем. заметки. – 2012. – 92, № 5. – С.643-661.
4. Баскаков А.Г. Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений // УМН. – 2013. – 68, № 1. – С.77-128.
5. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации // М.: Наука. – 1965. – 408 с.
6. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория, т.1 // М.: Мир, 1962. – 896 с.

ABOUT TWO CONCEPTS OF VECTORS' SPECTRUM

V.E. Strukov

Voronezh state university,
Universitetskaya Sq., 1, Voronezh, 394036, Russia, e-mail: sv.post.of.chaos@gmail.com

Abstract. Two concepts of vectors' spectrum in Banach $L^1(\mathbb{R})$-modules are under consideration and their equivalence is proved.

Key words: Beurling's spectrum of a vector, local spectrum of a vector, Banach's module.