



## О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НА РЕШЕТКЕ ТЕТРАЭДРАЛЬНО-ОКТАЭДРАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ

А.П. Мотайло

Херсонский национальный технический университет,  
Бериславское шоссе, 24, Херсон, 73008, Украина, e-mail: [akilehzna@ukr.net](mailto:akilehzna@ukr.net)

**Аннотация.** В работе установлена сходимость метода конечных элементов на решетке тетраэдрально-октаэдральной структуры с применением кусочно-линейных координатных функций шестиузлового октаэдра. На примере стационарной задачи теплопроводности показана эффективность использования октаэдра в качестве ячейки пространственной решетки.

**Ключевые слова:** октаэдр, кусочно-линейные узловые функции, тетраэдрально-октаэдральная решетка.

**Введение.** Первый опыт применения октаэдра в качестве конечного элемента (КЭ) относится к 1998 г. – времени появления публикации [1] о целесообразности использования такого многогранника в сочетании с тетраэдром при решении методом конечных элементов (МКЭ) задач визуализации. Основным преимуществом пространственной решетки тетраэдрально-октаэдральной структуры (по сравнению с тетраэдральной) при этом является уменьшение размеров матрицы узлов дискретизации, матрицы КЭ и, как следствие, снижение времени вычислений, необходимого для достижения результата заданной точности.

Анализ предшествующих публикаций, цели статьи. Авторы [1] используют модель октаэдра с семью узлами интерполяции (рис.1) и кусочно-линейные узловые функции:  $\varphi_0 = 1 - |x| - |y| - |z|$ ;  $\varphi_{1,3} = (x \pm |x|)/2$ ;  $\varphi_{2,4} = (y \pm |y|)/2$ ;  $\varphi_{5,6} = (z \pm |z|)/2$ . Автором статьи построены несколько различных систем узловых координатных функций для шестиузловой модели октаэдра (без центрального узла), изучены интерполяционные качества каждого набора функций [2]. В работе [3] установлено, что октаэдр с кусочно-линейными узловыми координатными функциями интерполирует точно линейные поля и может быть использован для решения краевых задач математической физики с дифференциальным оператором второго порядка.

Цель статьи – на примере задачи о распределении температуры в сплошной среде установить сходимость метода конечных элементов на решетке тетраэдрально-октаэдральной структуры (рис. 2) с использованием кусочно-линейных узловых координатных функций октаэдра, результаты проверить численным экспериментом.

**Основная часть.** Рассмотрим прямоугольный брус  $V = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq h\}$ , где  $a, b, h > 0$ , изготовленный из изотропного материала, одна из граней которого поддерживается при заданной температуре  $T = f(y)$ , остальные – при температуре  $T = 0$  (рис.3).

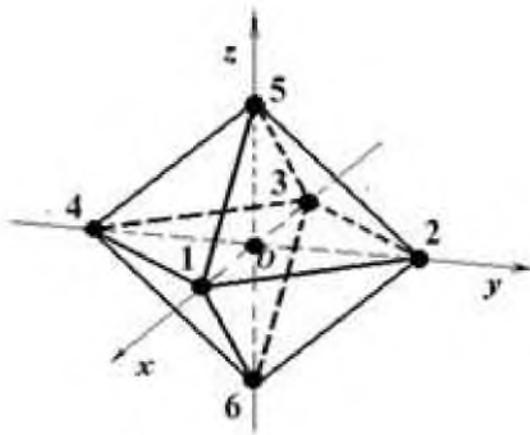
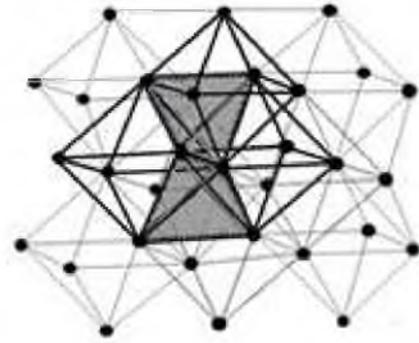
Рис. 1. Октаэдр  $|x| + |y| + |z| \leq 1$ .

Рис. 2. Фрагмент решетки тетраэдрально-октаэдральной структуры.

Стационарное распределение температуры в пространственной области  $V$  удовлетворяет уравнению:

$$\Delta T = 0, \quad (1)$$

где  $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$  – трехмерный оператор Лапласа,  $T = T(x, y, z)$  – температура в произвольной точке  $(x, y, z)$  бруса  $V$ , с граничными условиями Дирихле:

$$T|_{x=0} = T|_{y=0} = T|_{y=b} = T|_{z=0} = T|_{z=h} = 0; \quad T|_{x=a} = f(y). \quad (2)$$

Аналитическое решение задачи (1), (2) найдено в сечении  $V_{xy} = \{(x, y) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$  бруса  $V$  плоскостью  $z = \text{const}$  [4]:

$$T(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{\text{sh}(\pi n x/b)}{\text{sh}(\pi n a/b)} \sin(\pi n y/b),$$

где

$$f_n = \frac{2}{b} \int_0^b f(y) \sin(\pi n y/b) dy.$$

В эквивалентной трехмерной вариационной постановке МКЭ задача (1), (2) сводится к нахождению функции  $T(x, y, z)$ , минимизирующей функционал

$$\chi = \iiint_V \left( (\partial \hat{T} / \partial x)^2 + (\partial \hat{T} / \partial y)^2 + (\partial \hat{T} / \partial z)^2 \right) dx dy dz,$$

где  $\hat{T} = \hat{T}(x, y, z)$  – функция множества допустимых в области  $V$  пробных функций. При этом, согласно [5], функция  $\hat{T}(x, y, z)$  является допустимой в области  $V$ , если  $\hat{T}(x, y, z)$  непрерывна и имеет кусочно-непрерывные частные производные в этой области.

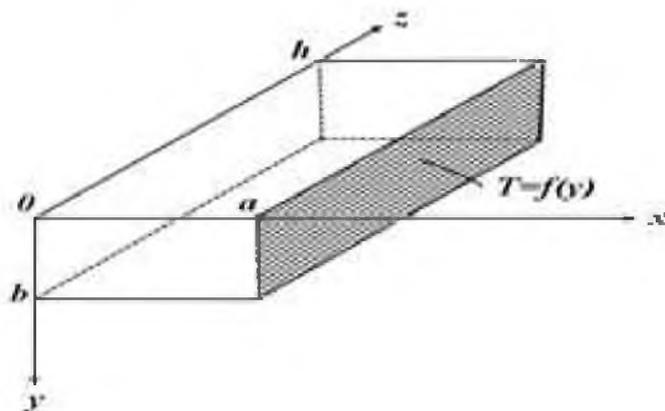


Рис. 3. Брус  $V = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq h\}$ .

Разобьем область  $V$  на  $l$  конечных элементов  $\Omega_r$  в форме октаэдров и тетраэдров. Тогда элементный вклад  $\chi^{\Omega_r}$  в функционал  $\chi = \sum_{r=1}^l \chi^{\Omega_r}$  определяется равенством:

$$\chi^{\Omega_r} = \int \int \int_{\Omega_r} \left( (\partial \hat{T}^{\Omega_r} / \partial x)^2 + (\partial \hat{T}^{\Omega_r} / \partial y)^2 + (\partial \hat{T}^{\Omega_r} / \partial z)^2 \right) dx dy dz,$$

где  $\Omega_r$  — октаэдр  $\Omega_r^o$  или тетраэдр  $\Omega_r^t$ ,

$$\hat{T}^{\Omega_r} = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n_r} N_i T_i & , (x, y, z) \in \Omega_r; \\ 0 & , (x, y, z) \notin \Omega_r \end{cases}$$

— пробная функция,  $N_i = N_i(x, y, z)$  — узловые координатные функции  $\Omega_r$ ,  $T_i = T(x_i, y_i, z_i)$  — значения температуры  $T$  в узлах  $(x_i, y_i, z_i)$  КЭ  $\Omega_r$ ,  $n_r$  — число узлов  $\Omega_r$ , причем  $n_r = 6$ , если  $\Omega_r = \Omega_r^o$ , и  $n_r = 4$ , если  $\Omega_r = \Omega_r^t$ .

Положим, что

$$N_i(x, y, z) = \begin{cases} NL_i(x, y, z), & (x, y, z) \in \Omega_r^o, i = \overline{1, 6}; \\ L_i(x, y, z), & (x, y, z) \in \Omega_r^t, i = \overline{1, 4}, \end{cases} \quad (3)$$

где  $NL_i(x, y, z)$  — кусочно-линейные функции [2], соответствующие узлам октаэдра, а  $L_i(x, y, z)$  — линейные функции, объёмные координаты тетраэдра [4]. При этом  $NL_i(x, y, z)$  получаются из функций

$$NL_i(\xi, \eta, \zeta) = \begin{cases} (1 + 2|\xi| \pm 3\xi - |\eta| - |\zeta|)/6, & i = 1, 3; \\ (1 + 2|\eta| \pm 3\eta - |\xi| - |\zeta|)/6, & i = 2, 4; \\ (1 + 2|\zeta| \pm 3\zeta - |\xi| - |\eta|)/6, & i = 5, 6 \end{cases} \quad (4)$$



заменой  $(x, y, z)^T = [J] \cdot (\xi, \eta, \zeta)^T + (x_{0,r}, y_{0,r}, z_{0,r})^T$ , где  $[J]$  – матрица преобразования локальной системы координат  $O\xi\eta\zeta$  в глобальную  $Oxyz$ ,  $(x_{0,r}, y_{0,r}, z_{0,r})$  – координаты начала  $O\xi\eta\zeta$  для октаэдра  $\Omega_r^o$  в системе  $Oxyz$ .

**Утверждение.** Функция  $\hat{T}(x, y, z) = \sum_{i=1}^n N_i T_i$ , где  $N_i = N_i(x, y, z)$  определяются равенствами (3), (4),  $n$  – число узлов разбиения  $V = \bigcup_{r=1}^l \Omega_r$ , является допустимой в области  $V$ .

□ Покажем, что функция  $\hat{T}(x, y, z) = \sum_{i=1}^n N_i T_i$  непрерывна в области  $V = \bigcup_{r=1}^l \Omega_r$ . Действительно, из определения функции  $\hat{T}^{\Omega_r}(x, y, z)$  в области  $V$  следует, что

$$\hat{T}(x, y, z) = \hat{T}^{\Omega_r}(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \Omega_r, \quad i = \overline{1, l}.$$

Из равенств (3)-(4) следует, что для любого  $r = \overline{1, l}$  функция  $\hat{T}^{\Omega_r}(x, y, z)$  непрерывна в области  $\Omega_r$ :

1) если  $\Omega_r = \Omega_r^t$ , то  $\hat{T}^{\Omega_r}(x, y, z) = \alpha_1^{(r)} + \alpha_2^{(r)}x + \alpha_3^{(r)}y + \alpha_4^{(r)}z$  непрерывна как линейная в области конечного элемента для любого  $r = \overline{1, l_1}$ ;

2) если  $\Omega_r = \Omega_r^o$ , то

$$\hat{T}^{\Omega_r}(x, y, z) = \beta_1^{(r)} + \beta_2^{(r)}x + \beta_3^{(r)}y + \beta_4^{(r)}z + \beta_5^{(r)}|x - x_{0,r}| + \beta_6^{(r)}|y - y_{0,r}| + \beta_7^{(r)}|z - z_{0,r}|$$

непрерывна как кусочно-линейная в области для любого  $r = \overline{1, l_2}$  ( $\alpha_j^{(r)}, \beta_j^{(r)}$  – действительные числа, которые однозначно определяются координатами узлов КЭ  $\Omega_r$  [6, 7],  $l_1 + l_2 = l$ ).

В межэлементной зоне, т.е. на гранях смежных элементов, для любых  $r, s = \overline{1, l}$  равенство  $\hat{T}^{\Omega_r}(x, y, z) = \hat{T}^{\Omega_s}(x, y, z)$  справедливо на непустых множествах  $\Omega_r^t \cap \Omega_s^t$  [6] и  $\Omega_r^o \cap \Omega_s^o$  [3]. Таким образом, функция  $\hat{T}^{\Omega_r}(x, y, z)$  непрерывна в области  $V = \bigcup_{r=1}^l \Omega_r$ .

Последнее означает, что частные производные функции  $\hat{T}^{\Omega_r}(x, y, z)$  в области  $V$  существуют и определяются равенствами:

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial x} = \begin{cases} \alpha_2^{(i)}, & (x, y, z) \in \Omega_i^t, i = \overline{1, l_1}; \\ \beta_2^{(j)} + \beta_5^{(j)} \cdot \text{sgn}(x - x_{0,j}), & (x, y, z) \in \Omega_j^o, j = \overline{1, l_2}; \end{cases}$$

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial y} = \begin{cases} \alpha_3^{(i)}, & (x, y, z) \in \Omega_i^t, i = \overline{1, l_1}; \\ \beta_3^{(j)} + \beta_6^{(j)} \cdot \text{sgn}(y - y_{0,j}), & (x, y, z) \in \Omega_j^o, j = \overline{1, l_2}; \end{cases}$$

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial z} = \begin{cases} \alpha_4^{(i)}, & (x, y, z) \in \Omega_i^t, i = \overline{1, l_1}; \\ \beta_4^{(j)} + \beta_7^{(j)} \cdot \text{sgn}(z - z_{0,j}), & (x, y, z) \in \Omega_j^o, j = \overline{1, l_2}; \end{cases}$$

При этом  $\partial \hat{T} / \partial x, \partial \hat{T} / \partial y, \partial \hat{T} / \partial z$  непрерывны в области  $V \setminus \bigcup_{r=1}^{l_2} \Omega_r^o$  и кусочно-непрерывны

в области  $\bigcup_{r=1}^{l_2} \Omega_r^o$ , т.е.  $\partial \hat{T} / \partial x, \partial \hat{T} / \partial y, \partial \hat{T} / \partial z$  кусочно-непрерывны в области  $V$ . ■



Заметим, что условие допустимости функции  $\hat{T}(x, y, z)$  в области  $V$  является условием сходимости МКЭ к точному решению в рассматриваемой задаче [6, стр.321]. При этом сходимость МКЭ означает, что при неограниченном уменьшении размеров КЭ величина  $\chi$  стремится к нулю.

Минимизация функционала  $\chi = \sum_{r=1}^l \chi^{\Omega_r}$  предполагает дифференцирование по  $T_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ), как по неизвестной величине, функции  $\chi(T_1, T_2, \dots, T_n)$ , связанное с вычислением интегралов по каждому элементу  $\Omega_r$ :

$$\frac{\partial \chi^{\Omega_r}}{\partial T_i} = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega_r} \left( \frac{\partial N_p}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_q}{\partial x} + \frac{\partial N_p}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_q}{\partial y} + \frac{\partial N_p}{\partial z} \cdot \frac{\partial N_q}{\partial z} \right) dx dy dz, \quad (5)$$

где  $p, q$  — глобальные номера узловых координатных функций КЭ  $\Omega_r$ .

Процедура вычисления интеграла (5) по объему тетраэдра  $\Omega_r^t$  описана в [6, 8]. Интегрирование по октаэдру  $\Omega_r^o$  выполним в локальных координатах:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega_r^o} \left( \frac{\partial N_p}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_q}{\partial x} + \frac{\partial N_p}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_q}{\partial y} + \frac{\partial N_p}{\partial z} \cdot \frac{\partial N_q}{\partial z} \right) dx dy dz = \\ = \iiint_{(\Omega_r^o)^*} \left( \frac{\partial N_p}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_q}{\partial x} + \frac{\partial N_p}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_q}{\partial y} + \frac{\partial N_p}{\partial z} \cdot \frac{\partial N_q}{\partial z} \right) |J| d\xi d\eta d\zeta, \end{aligned}$$

где  $(\Omega_r^o)^*$  — октаэдр  $\Omega_r^o$  в системе координат  $O\xi\eta\zeta$  и

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N_p}{\partial x} \\ \frac{\partial N_p}{\partial y} \\ \frac{\partial N_p}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_p}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_p}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_p}{\partial \zeta} \end{pmatrix} \equiv [J][B].$$

При этом, учитывая кусочно-непрерывный характер частных производных функций  $N_p, N_q$ , область октаэдра  $(\Omega_r^o)^*$  может быть представлена в виде  $(\Omega_r^o)^* = \bigcup_{s=1}^8 \Omega_s$ , где  $\Omega_s$  — равновеликие по объему прямоугольные тетраэдры, внутри которых переменные  $\xi, \eta, \zeta$  сохраняют знак. Например, интегрирование по области  $\Omega_1 = \{(\xi, \eta, \zeta) : 0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1 - \xi, 0 \leq \zeta \leq 1 - \xi - \eta\}$ , где  $\xi, \eta, \zeta \geq 0$ , а функции  $\partial N_p / \partial \xi, \partial N_p / \partial \eta, \partial N_p / \partial \zeta$  непрерывны, принимает вид:

$$\iiint_{\Omega_1} \left( \frac{\partial N_p}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_q}{\partial x} + \frac{\partial N_p}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_q}{\partial y} + \frac{\partial N_p}{\partial z} \cdot \frac{\partial N_q}{\partial z} \right) |J| d\xi d\eta d\zeta =$$



$$= \int_0^1 d\xi \int_0^{1-\xi} d\eta \int_0^{1-\xi-\eta} [B_1]^T [J]^T [J] [B_1] |J| d\zeta,$$

где

$$B_1 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

— матрица частных производных узловых координатных функций октаэдра  $\Omega_r^o$ , определенных в области  $\Omega_1$ .

Очевидно, что подынтегральное выражение не зависит от  $\xi, \eta, \zeta$ , при этом объем тетраэдра  $\Omega_1$  равен

$$\int_0^1 d\xi \int_0^{1-\xi} d\eta \int_0^{1-\xi-\eta} d\zeta = \frac{1}{6}.$$

Аналогично можно получить объемные интегралы по  $\Omega_s$ ,  $s = \overline{2, 8}$ . Тогда

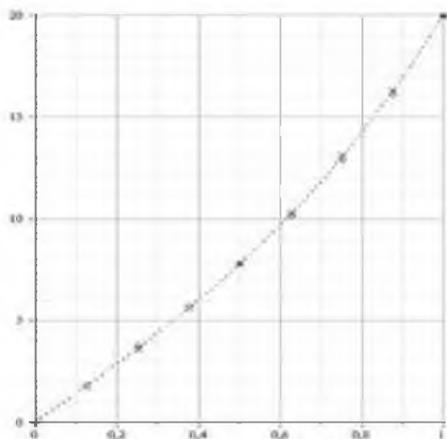
$$\iiint_{\Omega_r^o} \left( \frac{\partial N_p}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_q}{\partial x} + \frac{\partial N_p}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_q}{\partial y} + \frac{\partial N_p}{\partial z} \cdot \frac{\partial N_q}{\partial z} \right) |J| dx dy dz = \frac{|J|}{6} \cdot \sum_{s=1}^8 [B_s]^T [J]^T [J] [B_s], \quad (6)$$

где

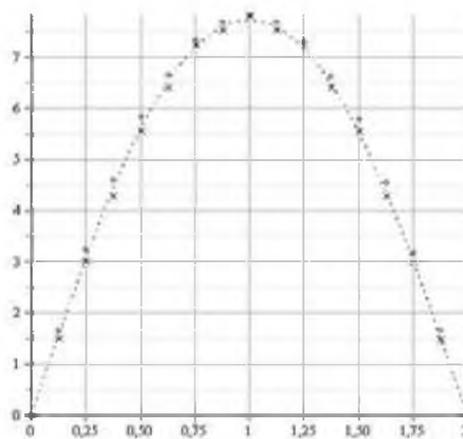
$$\begin{aligned} B_2 &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}; & B_3 &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -5 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}; \\ B_4 &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -5 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}; & B_5 &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}; \\ B_6 &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}; & B_7 &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}; \\ B_8 &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Полученная формула (6) является формулой численного интегрирования по октаэдру  $\Omega_r^o$ .

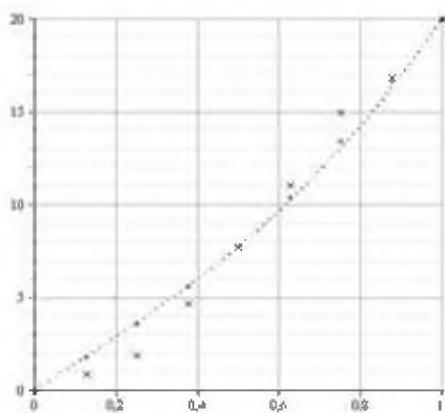
Условия минимума  $\partial\chi/\partial T_i = 0$  функционала  $\chi$  приводят к решению системы линейных алгебраических относительно  $[T] = (T_1, T_2, \dots, T_n)$  уравнений  $[h][T] = 0$ , где  $[h]$  — глобальная матрица теплопроводности, элементы которой определяются равенствами  $h_{ij} = \sum_{r=1}^l (\partial\chi^{\Omega_r}/\partial T_i)$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ . Удовлетворяя главным граничным условиям (2) путем корректирования отдельных строк матрицы  $[h]$  и нулевого вектора в правой части системы, получаем численное решение в виде  $\hat{T}(x, y, z) = \sum_{i=1}^n N_i T_i$ .



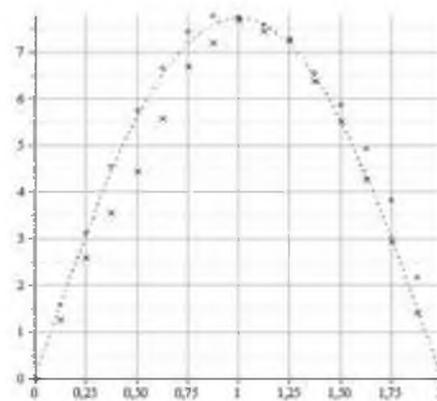
а



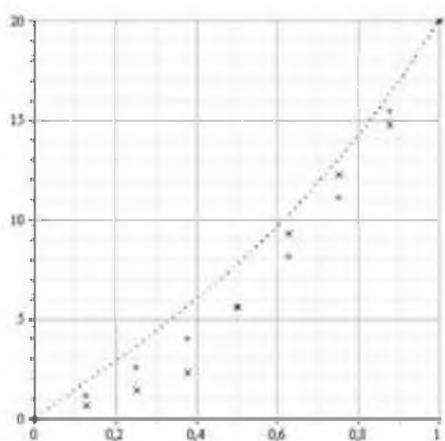
б



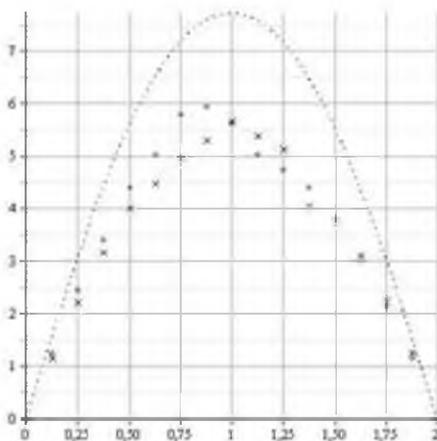
в



г



д



е

Рис. 6. Температура бруса  $V$  вдоль осей сечений  $h = z/2$ ,  $h = z/4$ ,  $h = z/8$ :  $\dots$  — аналитическое решение (с точностью до  $10^{-6}$ );  $\times$  — решение МКЭ на решетке тетраэдрально-октаэдральной структуры;  $\diamond$  — решение МКЭ на решетке тетраэдральной структуры.



Для нахождения численного решения МКЭ задачи (1), (2) с использованием тетраэдральной и тетраэдрально-октаэдральной решеток автором статьи составлены программы в среде Maple. На рис. 4 значения температуры бруса найдены в направлениях осей  $y = b/2$  и  $x = a/2$  в сечениях  $z = h/2$  (4а, 4б);  $z = h/4$  (4в, 4г);  $z = h/8$  (4д, 4е). Результаты численного эксперимента соответствуют размерам  $a = 1$ ,  $b = 2$ ,  $h = 10$  и условию на границе:  $f(y) = t_0 y(b - y)$  для  $t_0 = 20$ .

Анализируя результаты численного эксперимента, заметим, что решение задачи, полученное на решетке тетраэдрально-октаэдральной структуры (8864 тетраэдра, 344 октаэдра, 2121 узел интерполяции), достаточно близко к точному и решению МКЭ с использованием тетраэдральной решетки (24576 тетраэдров, 4913 узлов интерполяции). При этом время работы программы (в секундах) в первом случае 2621.05, во втором — 6402.11. Последнее означает, что, используя октаэдр с кусочно-линейными узловыми координатными функциями, в рассматриваемой задаче можно сократить время и объем вычислений.

**Выводы.** В работе установлена сходимость МКЭ на решетке тетраэдрально-октаэдральной структуры с применением кусочно-линейных координатных функций шести-узлового октаэдра; получены формулы численного интегрирования по октаэдру и решение МКЭ стационарной задачи теплопроводности для прямоугольного изотропного бруса. Результаты численного эксперимента свидетельствуют о том, что использование октаэдра в качестве ячейки пространственной решетки в данной задаче оптимизирует время и объем вычислений, сохраняя достаточно высокую их точность.

### Литература

1. Grosso R., Greiner G. Hierarchical Meshes for Volume Data Computer Graphics International 1998 (CGI'98). – 1998. – P.761-771.  
<http://dblp.uni-trier.de/db/conf/cgi/cgi1998.html#GrossoG98>.
2. Мотайло А.П., Хомченко А.Н. Порівняльний аналіз базисів октаедра // Матеріали. ІХ міжнародної науково-практичної конференції «Найновіші наукові досягнення - 2013». Серія: Математика: Фізика. Сучасні інформаційні технології (7-15 березня 2013 р.). – Софія, Болгарія: «Бял ГРАД-БГ» ООД, 2013. – Т.21 – С.28–33.
3. Мотайло А.П., Хомченко А.Н. Интерполяция кусочно-линейными функциями на решетках тетраэдрально-октаэдральной структуры // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. пр. №8. – Кам'янець-Поділ. нац.ун-т ім. І.Огієнка; Ін-т кібернетики ім. В.М.Глушкова, Нац.акд.наук України. – Кам'янець-Поділ.: К-ПДУ ім. Івана Огієнка, 2013. – С.139-150.
4. Несис Е.И. Методы математической физики / М.: Просвещение, 1977. – 199 с.
5. Норри Д., де Фриз Ж. Введение в метод конечных элементов / Пер. с англ. / М.: Мир, 1981. – 304 с.
6. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / М.: Мир, 1975. – 541 с.
7. Хомченко А.Н., Мотайло А.П. Две модели кусочно-линейной интерполяции на октаэдре // Проблеми інформаційних технологій: зб. наук. пр. – №1. – Херсон: ХНТУ, 2011. – С. 47–50.
8. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов / М.: Мир, 1979. – 392 с.



**ABOUT NUMERICAL CALCULATION  
OF STATIONARY HEAT CONDUCTION PROBLEM  
BY THE FINITE ELEMENT METHOD  
ON THE LATTICE TETRAHEDRAL-OCTAHEDRAL STRUCTURE**

**A.P. Motailo**

Kherson National Technical University,  
Beryslav Highway, 24, Kherson, 73008, Ukraine, e-mail: [akilehzna@ukr.net](mailto:akilehzna@ukr.net)

**Abstract.** Convergence of numerical approximations on the basis of the finite element method is established when the lattice of tetrahedral-octahedral structure is used by six nodal octahedron with piecewise linear functions. The efficiency of octahedron as the cell of space lattice is shown on the basis of the example of stationary heat conduction problem.

**Key words:** octahedron, piecewise linear nodal function, tetrahedral-octahedral lattice structure.