MSC 45A05

ОПЕРАТОР-ФУНКЦИИ С МНОГОМЕРНЫМИ ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

А.С. Калитвин, А.И. Иноземцев

Липецкий государственный педагогический университет,
ул. Ленина, 42, Липецк, 398020, Россия, e-mail: kalitvinas@mail.ru, inozemcev.a.i@gmail.com

Аннотация. Получены критерии в пространствах $C(D), L^1(D), L^\infty(D)$ и достаточные условия в пространстве $L^p(D)$ $(1 < p < \infty)$ сильной и равномерной непрерывности оператор-функций с многомерными частными интегралами, где $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$.

Ключевые слова: оператор с частными интегралами, многомерные частные интегралы, сильная и равномерная непрерывность, пространства со смешанной нормой, регулярный и двойственный оператор.

1. Введение. Статья содержит условия сильной непрерывности и непрерывности по норме оператор-функций с многомерными частными интегралами в пространствах $C(D)$, где $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, и $L^p(D)$, где $1 \leq p \leq \infty$. В случае $D = [a, b] \times [c, d]$ такие условия изучались в работах Ю. Аппелля, П. П. Забрейко, А. С. Калитвина, В.А. Калитвина, Е.В. Фроловой и содержатся в работах [1-4]. В работе установлены критерии сильной и равномерной непрерывности оператор-функций с многомерными частными интегралами в пространствах $C(D)$, $L^1(D)$ и $L^\infty(D)$ и приведены достаточные условия в $L^p(D)$ $(1 < p < \infty)$, где $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$. Существенную роль при этом играют критерии и достаточные условия действия операторов с многомерными частными интегралами в заданных пространствах [1-4].

2. Критерии действия операторов с многомерными частными интегралами в пространствах $C(D)$, $L^\infty(D)$ и $L^1(D)$.

Определение 1. *Линейным оператором с многомерными частными интегралами называется оператор*

$$(Kx)(t) = \sum_\alpha \int_{D_\alpha} k_\alpha(t, S_\alpha) x(s_\alpha)\, dS_\alpha \,, \tag{1}$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндекс, причем $\alpha_j \in \{0, 1\}$ при $j = 1, \ldots, n$, $t \in R^n$, $S_\alpha \subset \{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n\}$, $dS_\alpha \subset \{d\tau_1, d\tau_2, \ldots, d\tau_n\}$.

Вектор s_α получается заменой компонент вектора t соответствующими элементами S_α, $j = 1, \ldots, n$, $D_\alpha = \prod_{j=1}^{n} [a_j, b_j]^{\alpha_j}$ — измеримые множества, а интегралы понимаются в смысле Лебега. В случае $\alpha_k = 0$ получим $[a_k, b_k]^0$, тогда отрезок $[a_k, b_k]$ исключается из декартова произведения.

Работа поддержана Минобрнауки России (проект №2014/351. НИР №1815.)

Обозначим

$$(|K|x)(t) = \sum_{\alpha} \int\limits_{D_\alpha} |k_\alpha(t, S_\alpha)| x(s_\alpha)\, dS_\alpha$$

и

$$(K^{\#}y)(t) = \sum_{\alpha} \int\limits_{D_\alpha} k^*_\alpha(t, S_\alpha) y(s_\alpha)\, dS_\alpha\,,$$

где $k^*_\alpha(t, S_\alpha) = k_\alpha(s_\alpha, t_\alpha)$, t_α — набор координат t_j, для которых $\alpha_j = 1$.

Достаточные условия и критерий действия оператора (1) в пространстве $C(D)$ приведены в работе [5].

Критерии действия оператора (1) в пространствах $L^p(D)$, при $p = 1$ или $p = \infty$ содержатся в теоремах 1 и 2. Доказательства лемм 1 и 2 аналогично доказательствам, приведенным в работе [2].

Пусть (D, Σ) — пространство с σ - конечной полной мерой, $\mathcal{M} = \mathcal{M}(D, \Sigma)$ — пространство всех вещественных измеримых почти всюду конечных функций на D. Эквивалентные функции отождествляются. Пространство $\mathcal{M}$ линейно, в нем естественно вводится полуупорядоченность: для $x, y \in \mathcal{M}$ $x \leq y$, если $x(t) \leq y(t)$ почти всюду на D.

Идеальным пространством (ИП) на D называется линейное множество X в $\mathcal{M}$ такое, что из $x \in X$, $y \in \mathcal{M}$, $|y| \leq |x|$ следует $y \in X$. Для каждой функции x определяется носитель $supp\, x = \{t \in D\colon x(t) \neq 0\}$, а для пространства X носитель определяется как наименьшее измеримое множество, вне которого все функции из X равны нулю. В дальнейшем считаем, что D — носитель пространства X и пользуемся записью $X(D)$. Носители определяются с точностью до множества нулевой меры. ИП с монотонной нормой ($\|x\| \leq \|y\|$, если $x, y \in X$ и $|x| \leq |y|$) называется нормированным идеальным пространством (НИП), полное нормированное идеальное пространство называется банаховым идеальным пространством (БИП).

Определение 2. *Линейный оператор $A\colon X \to Y$ называется регулярным, если существует такой положительный оператор $\tilde{A}$, действующий из БИП X в БИП Y, что $|Ax| \leq \tilde{A}|x|$ $(x \in X)$. (Оператор $\tilde{A}$ называется положительным, если $\tilde{A}x \geq \theta$ при $x \geq \theta$). Оператор $\tilde{A}$ называют мажорантой оператора A. Наименьшую мажоранту (в смысле индуцированной упорядоченности пространства линейных операторов) называют абсолютной величиной A и обозначают через $|A|$.*

Лемма 1. *Пусть оператор K с многомерными частными интегралами действует из БИП X в БИП Y. Тогда он является регулярным оператором в том и только в том случае, когда из X в Y действует оператор $]K[$. При этом $|K| =]K[$.*

□ Достаточность. Очевидное неравенство $|Kx| \leq]K[|x|$ $(x \in X)$, означает, что оператор $]K[$ является одной из мажорант оператора K. Получим $|K| \leq]K[$. Таким образом оператор K — регулярен.

Необходимость. Пусть K — регулярный оператор из X в Y. Для любой неотрицательной функции x из X $|K|x = \sup\{|Kz|\colon |z| \leq x\} \in Y$ [6]. В множестве $\{z\colon |z| \leq x\}$

существует счетное и плотное по метрике $\mathcal{M}(D)$ множество E функций, для которого $|K|x = \sup\{|Kz|\colon z \in E\}$ [7]. Построим такие последовательности множеств $D_{\alpha k}$, $(k = 1, 2, \ldots)$, что $\lim\limits_{k\to\infty} \operatorname{mes}(D_{\alpha k}) = 0$, $D_\alpha = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} D_{\alpha k}$ и каждая точка $t_\alpha \in D_\alpha$ принадлежит бесконечной последовательности множеств $D_{\alpha k}$, где $\operatorname{mes}(D_{\alpha k})$ — мера множества $D_{\alpha k}$. Пусть $U_{\alpha k} = \left(\prod\limits_{\beta\neq\alpha} D_\beta\right) \times D_{\alpha k}$ и

$$E^* = \left\{ y(t)\operatorname{sign} k_{(0,\ldots,0)}(t) \prod_\alpha \chi_{U_{\alpha k}} + \sum_\alpha \left[v_\alpha(t) \prod_\alpha \chi_{U_{\alpha k}} \times \prod_\alpha \chi_{U'_{\bar\alpha k}} \right] \right\},$$

где $v_\alpha \in E$, $k = 1, 2, \ldots$, χ_U — характеристическая функция множества $U \subset D$, а $U' = D \setminus U$. Так как $E \subset E^* \subset \{z\colon |z| \leq x\}$, то $|K|x = \sup\{|Kz|\colon z \in E^*\}$, а так как E^* — счетное множество, то почти при всех $t \in D$

$$|K|x(t) = \sup\{|Kz(t)|\colon z \in E^*\}. \tag{2}$$

Пусть $t \in D$ — точка, для которой справедливо (2), и k_p — подпоследовательность, для которой $t_\alpha \in D_{\alpha k_p}$, и пусть $v_{\alpha p}$ — такие последовательности функций из E, для которых $v_{\alpha p}(\tau) \to \operatorname{sign} k_\alpha(t, S_\alpha)x(\tau)$. Положим

$$z_p(\tau) = x(\tau)\operatorname{sign} k_{(0,\ldots,0)}(\tau) \prod_\alpha \chi_{\tilde U'_{\alpha k_p}}(\tau) + \sum_\alpha \left[v_{\alpha p}(\tau) \prod_\alpha \chi_{\tilde U'_{\alpha k_p}}(\tau) \times \prod_\alpha \chi_{\tilde U_{\bar\alpha k_p}}(\tau) \right],$$

где $\tilde U_{\alpha k_p} = \left(\prod\limits_{\beta\neq\alpha} D_\beta\right) \times D_{\alpha k_p}$. По теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла

$$\lim_{p\to\infty} |Kz_p(t)| = \sum_\alpha \int\limits_{D_\alpha} |k_\alpha(t, S_\alpha)| x(s_\alpha)\, dS_\alpha =]K[x(t),$$

а так как $z_p \in E^*$ $(p = 1, 2, \ldots)$, то

$$]K[x(t) = \lim_{p\to\infty} |Kz_p(t)| \leq \sup\{|Kz|\colon z \in E^*\}(t).$$

Из полученного неравенства и (2) получим

$$]K[x(t) \leq |K|\, x(t),$$

тогда $]K[x \leq |K|x$ и, следовательно, $]K[\leq |K|$. То есть оператор $]K[$ неотрицательные функции из X преобразует в функции из Y. Но каждую функцию из X можно представить в виде разности неотрицательных функций из X, тогда $]K[$ преобразует любые функции из X в функции из Y, т.е. $]K[$ действует из X в Y. По доказанному $]K[\leq |K|$, учитывая $|K| \leq]K[$, получим $|K| =]K[$. ■

Теорема 1. *Оператор (1) действует в $L^\infty(D)$ тогда и только тогда, когда*

$$\|K\| = \operatorname*{vraisup}_{D} \left[\sum_{\alpha} \int\limits_{D_\alpha} |k_\alpha(t, S_\alpha)| \, dS_\alpha \right] < \infty \, .$$

□ Ввиду того, что любой непрерывный в L^∞ линейный оператор регулярен, то в силу леммы 1 достаточно доказать, что $\|K\| = \operatorname*{vraisup}_{D} \left[\sum_{\alpha} \int\limits_{D_\alpha} |k_\alpha(t, S_\alpha)| \, dS_\alpha \right]$. Если $[K] = \sup\{|Kx(t)|\colon \|x\| \leq 1\}$ — абстрактная норма действующего в L^∞ оператора (1), то $[K] = [|K|]$, где в силу леммы 1 $|K| =]K[$. Получим $\|K\|_{L^\infty} = \|[K]\|_{L^\infty} = \||K|\|_{L^\infty} = \||K|e\|_{L^\infty} = \operatorname*{vraisup}_{D} \left[\sum_{\alpha} \int_{D_\alpha} |k_\alpha(t, S_\alpha)| \, dS_\alpha \right]$, где $e(t) \equiv 1$. ■

Определение 3. *Линейный оператор A' называется двойственным к линейному оператору A, действующему из БИП X в БИП Y, если выполняется равенство $(Ax, y) = (x, A'y)$ $\quad (x \in X, y \in Y')$, где (Ax, y) — действие функционала Ax на y и $(x, A'y)$ — действие функционала x на $A'y$.*

Аналогично [1,2] доказывается

Лемма 2. *Пусть оператор K с многомерными частными интегралами действует из БИП X в БИП Y. Тогда он обладает двойственным оператором и $K'y = K^{\#}y$ $(y \in Y', K^{\#}y \in \mathcal{M}(D))$, где $\mathcal{M}(D)$ — пространство измеримых по совокупности переменных на D вещественных или комплексных функций.*

Из теоремы 1 и леммы 2 вытекает

Теорема 2. *Оператор (1) действует в $L^1(D)$ тогда и только тогда, когда*

$$\|K\| = \operatorname*{vraisup}_{D} \left[\sum_{\alpha} \int\limits_{D_\alpha} |k_\alpha(t, S_\alpha)| \, dS_\alpha \right] < \infty \, .$$

2. Оператор-функции с многомерными частными интегралами в $C(D)$.

Определение 4. *Оператор-функцией с многомерными частными интегралами называется оператор-функция*

$$K(\varphi)x(t) = \sum_{\alpha} \int_{D_\alpha} k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha) x(s_\alpha) \, dS_\alpha \, , \tag{3}$$

где k_α — измеримые по совокупности переменных $\varphi \in J$, $t_\alpha, \tau_\alpha \in D_\alpha$ функции, J — конечный или бесконечный промежуток в $(-\infty, +\infty)$.

При каждом фиксированном φ оператор-функция вида (3) есть оператор вида (1). Будем рассматривать оператор-функции (3) со значениями в пространстве $\mathcal{K}_n(X)$ операторов с многомерными частными интегралами, действующих в пространстве $X =$

$L^p(D)$ $(1 \le p \le \infty)$ или в $X = C(D)$ непрерывных по совокупности переменных па D функций; в любом случае для любого $\varphi \in J$ $K(\varphi) \in \mathcal{K}_n(X)$.

Определение 5. *Оператор-функция $K(\varphi)$ со значениями в пространстве $\mathcal{K}_n(X)$ называется сильно непрерывной, если $\lim\limits_{\varphi\to\varphi_0} \|K(\varphi)x - K(\varphi_0)x\|_X = 0$ для любого $x \in X$ и равномерно непрерывной или непрерывной по норме, если $\lim\limits_{\varphi\to\varphi_0} \|K(\varphi) - K(\varphi_0)\|_{\mathcal{L}(X)} = 0$.*

Несмотря па то, что оператор-функция (3) задает в пространстве $\mathcal{K}_n(X)$ семейство операторов, зависящих от параметра φ, каждый из которых определяется функциями $k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha)$, сильная и равномерная непрерывность оператор-фупкции (3) не характеризуется свойствами непрерывности по φ заданных функций [1-4]. В связи с этим возникает вопрос о зависимости свойств функций $k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha)$ от φ, которая приводит к сильной или равномерной непрерывности оператор-фупкции (3).

Оценка нормы оператора $K(\varphi) - K(\varphi_0)$ приводит к условиям равномерной непрерывности оператор- функции (3) в $\mathcal{L}(X)$. Ограниченность нормы оператор-функции (3) на J и сходимость $K(\varphi)x \to K(\varphi_0)x$ при $\varphi \to \varphi_0$ на некотором множестве функций x, линейная оболочка которых всюду плотна в X, с применением теоремы Банаха-Штейнгауза приводит к условиям сильной непрерывности. В различных пространствах получим различные условия сильной непрерывности оператор-функции (3).

В теоремах 3 и 4 приведены критерии сильной и равномерной непрерывности соответственно оператор-функции (3) в $\mathcal{L}(C)$.

Пусть $D_\alpha = \prod\limits_j [a_j, b_j]^{\alpha_j}$ $(j = \overline{1,n})$,

$$B(\varphi, t) = \sum_\alpha \int\limits_{D_\alpha} k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha)\, dS_\alpha\,, \tag{4}$$

$$B_\alpha(\varphi, t) = \int\limits_D x_\alpha\, dg(\varphi, t, \tau) = \sum_\alpha (-1)^{\dim D_\alpha} \left\{ \int\limits_{D_\alpha} g(\varphi, t, \tau)\, dx_\alpha \Bigg|_{\bar{D}_\alpha} \right\}, \tag{5}$$

$$\gamma(\varphi, t) = \sum_\alpha \int\limits_{D_\alpha} |k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha)|\, dS_\alpha\,, \tag{6}$$

где

$$g(\varphi, t, \tau) = \sum_\alpha \int\limits_{D_\alpha} k_\alpha(\varphi, t, \bar{S}_\alpha)\, d\bar{S}_\alpha\, \chi(t_{\bar{\alpha}}, \tau_{\bar{\alpha}})\,,$$

$D_\alpha = \prod\limits_\alpha [a_i, \tau_i]^{\alpha_i}$, $\alpha_i = 0$ или 1; $t_{\bar{\alpha}} = s_\alpha \setminus S_\alpha$, $\tau_{\bar{\alpha}} = \tau \setminus S_\alpha$, $\bar{S}_\alpha$ — набор переменных интегрирования $\bar{\tau}_\alpha$, $\chi(t_{\bar{\alpha}}, \tau_{\bar{\alpha}}) = \begin{cases} 1, & \forall i\ \tau_i \ge t_i > a_i \text{ или } \tau_i > t = a_i, \\ 0, & \exists i\ \tau_i < t_i \text{ или } \tau_i = t_i = a_i. \end{cases}$

В силу критерия действия оператора (3) в пространстве $C(D)$ [5] имеют место следующие теоремы.

Теорема 3. *Оператор-функция (3) является сильно непрерывной в пространстве $\mathcal{L}(C)$ тогда и только тогда, когда функции (4), (5) непрерывны, а функция (6) ограничена на каждом ограниченном подмножестве своей области определения.*

□ Пусть $K(\varphi)$ сильно непрерывна в $\mathcal{L}(C)$. Из равенств $B(\varphi,t)=K(\varphi)1(t)$, $B_\alpha(\varphi,t)=K(\varphi)x_\alpha$, $\sup\limits_D \gamma(\varphi,t)=\|K(\varphi)\|$, где $x_\alpha=\prod\limits_{j=1}^{n} x_{\xi_j}^{\alpha_j}(t_j)$, с $\alpha_j=0$ или 1 $(j=1,2,\ldots,n)$, и

$$x_{\xi_j}(t_j)=\begin{cases}\xi_j-t_j & \text{при } a_j\le t_j\le\xi_i\le b_j,\\ 0 & \text{при } b_j>t_j>\xi_i>a_j,\end{cases}$$

из теоремы Банаха-Штейнгауза следует непрерывность функций (4), (5) и ограниченность (6) на каждом ограниченном множестве своей области определения.

Обратно. Покажем, что функция $K(\varphi)x$ непрерывна по φ на J для некоторого множества M функций $x\in C$, всюду плотного в пространстве C. В качестве M возьмем линейную оболочку функций x_α. Тогда любую функцию $x\in M$ можно представить в виде линейной комбинации этих функций. Из того, что функции $K(\varphi)x_\alpha$ непрерывны по φ на R, следует, что по φ на J непрерывна и функция $K(\varphi)x(t)$, которая в силу линейности $K(\varphi)$ является их линейной комбинацией. ■

Теорема 4. *Пусть значения оператор-функции (3) при любом $\varphi\in J$ принадлежат $\mathcal{K}_n(C)$. Тогда она является непрерывной по норме операторов $\mathcal{L}(C)$ в том и только в том случае, когда функция $k_{(0,\ldots,0)}(\varphi,t)$ равномерно относительно t непрерывна по φ на J, а функции k_α обладают следующими свойствами:*

$$\lim_{\varphi\to\varphi_0}\sup_D \operatorname{mes}\{S_\alpha\colon |k_\alpha(\varphi,t,S_\alpha)-k_\alpha(\varphi_0,t,S_\alpha)|>\theta\}=0\,, \tag{7}$$

$$\lim_{\varphi\to\varphi_0}\sup_D \int\limits_{A_\alpha}|k_\alpha(\varphi,t,S_\alpha)-k_\alpha(\varphi_0,t,S_\alpha)|\,dS_\alpha=0 \quad (\operatorname{mes}(A_\alpha)\to 0)\,, \tag{8}$$

где $\operatorname{mes}(A)$ *— мера множества A.*

□ Пусть $K(\varphi)$ — непрерывная по норме оператор-функция в пространстве $\mathcal{K}_n(C)$. Тогда для любого $\varphi_0\in J$ в силу критерия действия оператора (1) в $C(D)$ [5] получим

$$\lim_{\varphi\to\varphi_0}\sup_D |k_{(0,\ldots,0)}(\varphi,t)-k_{(0,\ldots,0)}(\varphi_0,t)|=0\,, \tag{9}$$

из чего следует утверждение теоремы для функции $k_{(0,\ldots,0)}$.

Равенство

$$\lim_{\varphi\to\varphi_0}\sup_D \int\limits_{D_\alpha}|k_\alpha(\varphi,t,S_\alpha)-k_\alpha(\varphi_0,t,S_\alpha)|\,dS_\alpha=0 \tag{10}$$

и оценки

$$\operatorname{mes}\left(\{S_\alpha\colon |k_\alpha(\varphi,t,S_\alpha)-k_\alpha(\varphi_0,t,S_\alpha)|\ge\theta\}\right)\le\int\limits_{D_\alpha}|k_\alpha(\varphi,t,S_\alpha)-k_\alpha(\varphi_0,t,S_\alpha)|\,dS_\alpha\,,$$

$$\int\limits_{A_\alpha} |k_\alpha(\varphi,t,S_\alpha) - k_\alpha(\varphi_0,t,S_\alpha)|\, dS_\alpha \le \int\limits_{D_\alpha} |k_\alpha(\varphi,t,S_\alpha) - k_\alpha(\varphi_0,t,S_\alpha)|\, dS_\alpha$$

влекут (8).

Пусть для любого $\varphi \in J$ $K(\varphi)$ — непрерывный линейный оператор в пространстве $C(D)$, функция $k_{(0,\dots,0)}(\varphi,t)$ равномерно относительно t непрерывна по φ на J и выполнены равенства (7) и (8). В силу критерия действия оператора (1) в $C(D)$ достаточно показать справедливость равенств (9) и (10).

Равенство (9) очевидно. Докажем равенство (10). Для любого $\epsilon > 0$ в неравенстве

$$\int\limits_{D_\alpha} |k_\alpha(\varphi,t,S_\alpha) - k_\alpha(\varphi_0,t,S_\alpha)|\, dS_\alpha \le \theta \cdot \mu(D_\alpha) + \int\limits_{A_\alpha} |k_\alpha(\varphi,t,S_\alpha) - k_\alpha(\varphi_0,t,S_\alpha)|\, dS_\alpha\,,$$

где $A_\alpha = \{S_\alpha \colon |k_\alpha(\varphi,t,S_\alpha) - k_\alpha(\varphi_0,t,S_\alpha)| \ge \theta\}$, $\mu(D_\alpha)$ — мера множества D_α, положим $\theta = \dfrac{\epsilon}{2\mu(D_\alpha)}$. В силу (8) $\lim\limits_{\varphi\to\varphi_0} \sup\limits_{D} \mathrm{mes}(A_\alpha) = 0$, отсюда и (9) вытекает равенство

$$\lim_{\varphi\to\varphi_0} \sup_{D} \int\limits_{A_\alpha} |k_\alpha(\varphi,t,S_\alpha) - k_\alpha(\varphi_0,t,S_\alpha)|\, dS_\alpha = 0\,.$$

Следовательно,

$$\sup_{D} \int\limits_{D_\alpha} |k_\alpha(\varphi,t,S_\alpha) - k_\alpha(\varphi_0,t,S_\alpha)|\, dS_\alpha \le \frac{\epsilon}{2\mu(D_\alpha)} \cdot \mu(D_\alpha) + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

при $\varphi \to \varphi_0$. ■

Определение 6. *Функции $k_\alpha(\varphi,t,S_\alpha)$ называются L^1-непрерывными, если*

$$\lim_{r\to 0} \int\limits_{D_\alpha} |k_\alpha(\varphi,t,S_\alpha) - k_\alpha(\varphi_0,t_0,S_\alpha)|\, dS_\alpha = 0\,,$$

где $r = |\varphi - \varphi_0| + \sum\limits_{j=1}^{n} |t_j - t_{j0}|$, и L^1-ограниченными при каждом φ, если

$$\sup_{D} \int\limits_{D_\alpha} |k_\alpha(\varphi,t,S_\alpha)|\, dS_\alpha = K_\alpha(\varphi) < \infty\,.$$

Теорема 5. *Пусть функция $k_{(0,\dots,0)}$ непрерывна по совокупности переменных, а функции $k_\alpha(\varphi,t,S_\alpha)$ L^1-непрерывны и L^1-ограничены для любого φ. Тогда оператор-функция $K(\varphi)$ непрерывна по норме операторов пространства $\mathcal{L}(C)$.*

□ Для действия оператора $K(\varphi)$ в $C(D)$ достаточно непрерывности функции $k_{(0,\dots,0)}$, L^1-непрерывности и L^1-ограниченности функций $k_\alpha(\varphi,t,S_\alpha)$ для любого φ.

Покажем, что $\lim\limits_{\varphi\to\varphi_0} \|K(\varphi) - K(\varphi_0)\| = 0$. Имеем

$$\|K(\varphi) - K(\varphi_0)\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|(K(\varphi) - K(\varphi_0))x\| = \sup_{\|x\|\le 1} \max_D |(K(\varphi) - K(\varphi_0))x(t)| \le$$

$$\le \sum_\alpha \max_D \int_{D_\alpha} |k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha) - k_\alpha(\varphi_0, t, S_\alpha)|\, dS_\alpha\,.$$

В силу непрерывности по φ функции $k_{(0,\dots,0)}(\varphi, t)$ в точке (φ_0, t) и L^1-непрерывности функций $k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha)$ для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$|k_{(0,\dots,0)}(\varphi, t) - k_{(0,\dots,0)}(\varphi_0, t)| < \frac{\epsilon}{2^n}\,,$$

$$\int_{D_\alpha} |k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha) - k_\alpha(\varphi_0, t, S_\alpha)|\, dS_\alpha < \frac{\epsilon}{2^n} \qquad (|\varphi - \varphi_0| < \delta)\,.$$

Отсюда получаем $\|K(\varphi) - K(\varphi_0)\| < 2^n \cdot (\epsilon/2^n) = \epsilon$ при $|\varphi - \varphi_0| < \delta$. ■

Условие данной теоремы и L^1-непрерывность ядер $k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha)$ выполняются, если $k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha)$ — непрерывные по совокупности переменных функции. Аналогично [4], из приведенного утверждения вытекает

Следствие 1. *Пусть для всех $\varphi \in J$, $t \in D$, $\|k_\alpha(t, \cdot)\|_{L^{p_\alpha}} \le A < \infty$, для любого α $1 < p_\alpha < \infty$, и пусть ядра $k_\alpha(t, S_\alpha)$ имеют разрывы только вдоль конечного числа поверхностей $\tau_\alpha = \varphi_\alpha(t)$, где τ_α — набор τ_j из S_α, $\varphi_\alpha(t)$ — набор непрерывных функций $\varphi_\alpha^j(t)$ таких, что $\tau_j = \varphi_\alpha^j(t)$. Тогда ядра $k_\alpha(t, S_\alpha)$ L^1-непрерывны.*

3. Оператор-функции со значениями в $\mathcal{K}_n(L^\infty)$ и $\mathcal{K}_n(L^1)$.

Теорема 6. *Оператор-функция (3) сильно непрерывна в пространстве $\mathcal{L}(L^\infty)$ тогда и только тогда, когда функция (6) ограничена в существенном на $J \times D$ для каждого ограниченного промежутка $J \subset (-\infty, +\infty)$, вектор-функция $\varphi \to k_{(0,\dots,0)}(\varphi, t)$ непрерывна как функция со значениями в $L^\infty(D)$, а вектор-функции аргумента φ*

$$\int_{\tilde{D}_\alpha} k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha)\, dS_\alpha$$

непрерывны по φ при каждом измеримом $\tilde{D}_\alpha \subset D_\alpha$, как функции со значениями в $L^\infty(D)$.

Аналогично, оператор-функция (3) сильно непрерывна в пространстве $\mathcal{L}(L^1)$ в том и только в том случае, когда:

$$\sum_\alpha \int_{D_\alpha} |k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha)|\, dS_\alpha \le \mathrm{const} < \infty$$

для почти всех t на каждом ограниченном промежутке $J \subset (-\infty, +\infty)$; вектор-функция $\varphi \to k_{(0,\dots,0)}(\varphi, t)$ непрерывна как функция со значениями в $L^\infty(D)$; вектор-функции *аргумента* φ

$$\int\limits_{\tilde{D}_\alpha} k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha)\, dS_\alpha$$

непрерывны по φ *при каждом измеримом* $\tilde{D}_\alpha \subset D_\alpha$, *как функции со значениями в* $L^1(D)$.

□ Заметим, что сильная непрерывность оператор-функции (3) в заданных пространствах равносильна сильной непрерывности оператор-функций

$$K_\alpha(\varphi)x(t) = \int\limits_{D_\alpha} k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha)x(s_\alpha)\, dS_\alpha\,.$$

Выбирая в качестве всюду плотного множества линейные комбинации функций $\chi(\tilde{D}_\alpha, t_\alpha)$, где $\tilde{D}_\alpha \subset D_\alpha$ — измеримые множества, а $\chi(\tilde{D}_\alpha, t_\alpha)$ — их характеристические функции, и используя теоремы 1 и 2 получим требуемые утверждения. ■

Пусть $X_\alpha = L^1(D_\alpha)$, $L^p = L^p(D)$ $(1 \le p \le \infty)$, а $L^p[X_\alpha]$ — пространства со смешанной нормой, состоящие из измеримых по совокупности переменных функций $x_\alpha(t, S_\alpha)$, для которых конечны нормы

$$\|\|x_\alpha(t,\cdot)\|_{X_\alpha}\|_{L^p}\,.$$

Из теоремы 6 следует критерий непрерывности по норме оператор-функции (3) в $\mathcal{L}(L^\infty)$ и в $\mathcal{L}(L^1)$.

Теорема 7. *Оператор-функция (3) непрерывна по норме в* $\mathcal{L}(L^\infty)$ *(в* $\mathcal{L}(L^1)$*) в том и только в том случае, когда вектор-функции* $\varphi \to k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha)$ $(\varphi \to k_\alpha(\varphi, s_\alpha, t_\alpha))$ *непрерывны как вектор-функции со значениями в* L^∞, $L^\infty[X_\alpha]$.

Так как $C(D) \subset L^\infty(D)$, то из теорем 3 и 6 следует еще один критерий сильной непрерывности оператор-функции (3) в $C(D)$.

Следствие 2. *Пусть оператор-функция (3) принимает значения в* $\mathcal{K}_n(C)$. *Тогда она сильно непрерывна в том и только в том случае, когда функция (6) ограничена на* $J \times D$ *для каждого ограниченного промежутка* $J \subset (-\infty, +\infty)$, *вектор-функция* $\varphi \to k_{(0,\ldots,0)}(\varphi, t)$ *непрерывна как вектор-функция со значениями в* $L^\infty(D)$, *а вектор-функции аргумента* φ

$$\int\limits_{\tilde{D}_\alpha} k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha)\, dS_\alpha$$

непрерывны по φ *при каждом* $\tilde{D}_\alpha \subset D_\alpha$ *как функции со значениями в* $L^\infty(D)$.

4. Оператор-функции со значениями в $\mathcal{K}_n(L^p)$ где $1 < p < \infty$. Критерии сильной непрерывности и непрерывности по норме оператор-функции (3) со значениями в $\mathcal{K}_n(L^p)$ $(1 < p < \infty)$ неизвестны, но со значениями в пространстве $\mathcal{K}_r(L^p)$ $(1 < p < \infty)$ регулярных в L^p операторов (1) с частными интегралами имеются признаки ее сильной непрерывности и непрерывности по норме. Пусть $\mathcal{R}_{k_\alpha}(L^p)$ — множество измеримых по совокупности переменных функций $k_\alpha(t,S_\alpha)\colon\ D\times D_\alpha\to(-\infty,+\infty)$, для которых конечна норма

$$\|k_\alpha\|_{\mathcal{R}_{k_\alpha}(L^p)}=\sup_{\|x\|_{L^p}\le 1}\left\|\int\limits_{D_\alpha}|k_\alpha(t,S_\alpha)|x(s_\alpha)\,dS_\alpha\right\|_{L^p}.$$

Аналогично [2], регулярность в L^p оператора (1) означает, что $k_{(0,\ldots,0)}(t)\in L^\infty$, $k_\alpha(t,S_\alpha)\in\mathcal{R}_{k_\alpha}(L^p)$.

Определение 7. *Оператор-функция (3) со значениями в $\mathcal{K}_r(L^p)$ абсолютно сильно непрерывна, если при $\varphi\to\varphi_0$ $\||K(\varphi)-K(\varphi_0)|x\|\to 0$ $(x\in L^p)$ и абсолютно непрерывна по норме, если $\||K(\varphi)-K(\varphi_0)|\|\to 0$.*

Из абсолютной сильной непрерывности оператор-функции (3) в $\mathcal{K}_n(L^p)$, следует ее сильная непрерывность, из абсолютной непрерывности по норме следует непрерывность по норме. Обратное утверждение не верно при $1<p<\infty$ уже для $n=2$ [2]. Из теоремы Банаха-Штейнгауза вытекает критерий абсолютной сильной непрерывности оператор-функции (3) со значениями в $\mathcal{L}(L^p)$.

Теорема 8. *Пусть $1<p<\infty$ и $k_\alpha(t,S_\alpha)$ — измеримые по совокупности переменных функции. Оператор-функция (3) со значениями в $\mathcal{K}_n(L^p)$ абсолютно сильно непрерывна тогда и только тогда, когда выполнены условия:*

1. *Вектор-функция $\varphi\to k_{(0,\ldots,0)}(\varphi,t)$ принимает значения в $L^\infty(D)$ при любом $\varphi\in J$, ограничена на каждом отрезке из J как вектор-функция со значениями в $L^\infty(D)$ и непрерывна как вектор-функция со значениями в $L^1(D)$.*

2. *Вектор-функции $\varphi\ \to\ k_\alpha(\varphi,t,S_\alpha)$ при каждом $\varphi\ \in\ J$ принимают значения в $\mathcal{R}_{k_\alpha}(L^p)$ и как вектор-функции со значениями в $\mathcal{R}_{k_\alpha}(L^p)$ ограничены на каждом отрезке из J.*

3. *Для любых измеримых множеств $\tilde{D}_\alpha\subset D_\alpha$ вектор-функции*

$$\varphi\to k_\alpha(\varphi,t,S_\alpha)\prod_\alpha\chi(\tilde{D}_\alpha,S_\alpha)$$

со значениями в $L^p[X_\alpha]$, непрерывны на J, где $\chi(\tilde{D}_\alpha,S_\alpha)$ — характеристическая функция множества $\tilde{D}_\alpha$, а $L^p[X_\alpha]$ — пространства со смешанной нормой.

Сильная непрерывность оператор-функции (3) со значениями в $\mathcal{K}_n(L^p)$ сохранится, если в теореме условие 3 заменить условием:

3'. для любых измеримых множеств $\tilde{D}_\alpha\subset D_\alpha$ непрерывны по $\varphi\in J$ следующие вектор-функции со значениями в L^p :

$$\int\limits_{\tilde{D}_\alpha}k_\alpha(\varphi,t,S_\alpha)\,dS_\alpha\,.$$

Следующая теорема содержит условия непрерывности по норме оператор-функции (3) со значениями в $\mathcal{K}_r(L^p)$

Теорема 9. *Пусть* $1 < p < \infty$ *и* $p^{-1} + q^{-1} = 1$. *Пусть, далее, выполнены условия:*

1. *Функция* $\varphi \to k_{(0,0,\dots,0)}(\varphi, t)$ *непрерывна как вектор-функция со значениями в* $L^\infty(D)$.

2. *Функции* $\varphi \to k_\alpha(\varphi, t, S_\alpha)$ *непрерывна как вектор-функция со значениями в одном из пространств со смешанной нормой* $L^\infty[L^p[L^q]]$ *или* $L^\infty[L^q[L^p]]$, *где норма в* $L^p(D_\alpha)$, $L^q(D_\alpha)$, $L^\infty(D_{\bar\alpha})$ *вычисляется по переменным* t_α, S_α, $t_{\bar\alpha}$, *соответственно.*

3. *Функция* $\varphi \to k_{(1,1,\dots,1)}(\varphi, t, \tau)$ *непрерывна как вектор-функция со значениями в* $L^p[L^q]$ *или* $L^q[L^p]$, *где норма в* $L^p(D)$ $(L^q(D))$ *вычисляется по переменным* t (τ).

   Тогда вектор-функция (3) непрерывна по норме пространства $\mathcal{K}_r(L^p)$.

□ Доказательство теоремы получается применением неравенства Гельдера и обобщенного неравенства Минковского. ■

Литература

1. Appell J.M., Kalitvin A.S., Zabrejko P.P. Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations / New York-Basel: Marcel Dekker, 2000. – 560 p.
2. Калитвин А.С. Линейные операторы с частными интегралами / Воронеж: ЦЧКИ, 2000. – 252 с.
3. Калитвин А.С., Калитвин В.А. Интегральные уравнения Вольтерра и Вольтерра-Фредгольма с частными интегралами / Липецк: ЛГПУ, 2006. – 177 с.
4. Калитвин А.С., Фролова Е.В. Линейные уравнения с частными интегралами. C-теория / Липецк: ЛГПУ, 2004. – 195 с.
5. Иноземцев А.И. Критерий определенности на $C(D)$ линейных операторов с многомерными частными интегралами // Научные ведомости БелГУ. Математика. Физика. – 2014. – №5(176). Вып. 34. – С.17-26.
6. Канторович Л.В., Вулих Б.З., Пинскер А.Г. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах / М.-Л.: Гостехиздат, 1950. – 548 с.
7. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ / М.: Наука, 1977. – 744 с.

OPERATOR-FUNCTIONS WITH MULTIDIMENSIONAL PARTIAL INTEGRALS

A.S. Kalitvin, A.I. Inozemtsev

Lipetsk State Pedagogical University,
Lenin St., 42, Lipetsk, 398020, Russia, e-mail: kalitvinas@mail.ru, inozemcev.a.i@gmail.com

Abstract. Criteria on spaces $C(D), L^1(D), L^\infty(D)$ and sufficient conditions on the space $L^p(D)$ $(1 < p < \infty)$ of strong and norm continuity of operator-functions with multidimensional partial integrals are found where $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$.

Key words: operator with partial integrals, multudimensional partial integrals, strongly continuous and norm-continuous operator functions, spaces with mixed norm, regular and associate operator.