



УДК 517.9

ОБРАЩЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДОНА-КИПРИЯНОВА РАДИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ⁶⁾

Л.Н. Ляхов, О.И. Попова

Воронежский государственный университет,
пл. Университетская, 1, Воронеж, 394006, Россия, e-mail:
lyakhov@box.vsi.ru, olyaa.popova@yandex.ru

Аннотация. Приведен вывод формулы связи преобразования Радона радиальных функций и преобразования Радона-Киприянова K_γ функции одной переменной. Получена формула K_γ -преобразования радиальной в \mathbb{R}^n функции в виде $K_{\gamma+n-1}$ -преобразования функции одной переменной. Получена формула обращения преобразования Радона-Киприянова функций одной переменной. Результаты обобщают и уточняют результаты, полученные ранее одним из авторов.

Ключевые слова: преобразование Радона, преобразование Радона-Киприянова, радиальные функции.

1. Преобразование Радона как частный случай преобразования Радона-Киприянова

В качестве введения в тему исследований рассмотрим вопрос о том, как преобразование Радона центрально симметричной функции сводится к преобразованию Радона-Киприянова функции одной переменной. Преобразования Радона $R[f]$ (см. [3]) и Радона-Киприянова $K_\gamma[f]$ (введено в [4]) функции f определяются соответственно формулами,

$$R[f](\Theta; p) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \delta(p - \langle x, \Theta \rangle) dx = \int_{\Gamma} f(x) d\Gamma,$$

$$K_\gamma[f](\Theta; p) = K_\gamma[f](p) = \int_{\mathbb{R}_+^n} f(x) \Pi_{x_1}^\nu \delta(p - \langle x, \Theta \rangle) x_1^\gamma dx, \quad \nu = \frac{\gamma - 1}{2}, \quad \gamma > 0. \quad (1)$$

где $x = (x_1, x') \in \mathbb{R}_+^n = (0, +\infty) \times \mathbb{R}_{n-1}$, $\langle x, \Theta \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \Theta_i$, — скалярное произведение векторов в \mathbb{R}^n , $p = \langle x, \Theta \rangle$ — уравнение плоскости Γ с нормальным вектором Θ ($|\Theta| = 1$), находящейся на расстоянии $|p|$ от начала координат, $\delta(P)$ — δ -функция сосредоточенная на $(n-1)$ -мерной поверхности $P(x) = 0$ в \mathbb{R}^n , а в последнем равенстве символ $\Pi_{x_1}^\nu$ обозначает действие оператора Пуассона порядка ν по переменной x_1 (определение этого оператора приведено далее).

Известно, что преобразование Радона имеет смысл только для функций многих переменных и это преобразование радиальных функций представляет собой функцию

⁶⁾В этой работе обобщены и частично уточнены некоторые из результатов, анонсированные ранее в [1] и [2].



одной переменной, например (см. [3], стр. 28),

$$R[e^{-|x|^2}](\Theta; p) = \pi^{\frac{n-1}{2}} e^{-p^2}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (2)$$

Независимость правой части равенства (2) от вектора нормали Θ (при $|\Theta| = 1$) к плоскости Γ , очевидно, есть следствие центральной симметрии, поскольку преобразуемая функция не зависит от угловых координат точки. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Преобразование Радона радиальной функции f , интегрируемой в \mathbb{R}^n , совпадает (с точностью до константы $|S_1(n)|$, равной площади единичной сферы в \mathbb{R}^n) с преобразованием Радона-Киприянова индекса $\gamma = n - 1$ той же функции, рассматриваемой как функции одной (а именно радиальной) переменной:*

$$R[f(|x|)](\Theta; p) = R[f(|x|)](p) = |S_1(n)|K_{n-1}[f(r)](p). \quad (3)$$

□ Доказательство заключается в следующем. Преобразование координат вращением, при котором направляющий вектор оси x_1 перейдет в единичный вектор Θ , приводит к следующему представлению преобразования Радона радиальной (в \mathbb{R}^n) функции f :

$$R[f](\Theta; p) = \int_{\mathbb{R}^n} f(|x|) \delta(p - \langle x, \Theta \rangle) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(|x|) \delta(p - x_1) dx.$$

Из этой формулы уже следует, что преобразование Радона радиальной функции не зависит от единичного вектора нормали Θ к плоскости Γ . Поэтому далее левую часть этого равенства будем записывать в виде $R[f](p)$. Сферическое преобразование координат удобно ввести по формулам

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \varphi_1, \\ x_2 &= r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2, \\ &\dots \dots \\ x_{n-1} &= r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{n-2} \cos \varphi_{n-1}, \\ x_n &= r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{n-2} \sin \varphi_{n-1}, \end{aligned}$$

что приводит к выражению

$$\begin{aligned} R[f](p) &= \int_0^\infty f(r) r^{n-1} dr \times \\ &\times \int_0^\pi \delta(p - r \cos \varphi_1) \sin^{n-2} \varphi_1 d\varphi_1 \int_0^\pi \sin^{n-3} \varphi_2 d\varphi_2 \dots \int_0^\pi \sin \varphi_{n-2} d\varphi_{n-2} \int_0^{2\pi} d\varphi_{n-1}. \end{aligned}$$

Поделим и умножим левую часть этого равенства на

$$\int_0^\pi \sin^{n-2} \varphi_1 d\varphi_1 = \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$



Выделив из полученного выражения площадь единичной сферы $|S_1(n)|$ в \mathbb{R}^n , получим

$$R[f](p) = |S_1(n)| \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^\infty \int_0^\pi \sin^{n-2} \varphi f(r) \delta(p - r \cos \varphi) d\varphi r^{n-1} dr. \quad (4)$$

Здесь, сокращая запись, воспользуемся определением оператора Пуассона (см. [5], [6]) порядка $\nu = (\gamma - 1)/2$, действующего по переменной r следующим образом

$$\Pi_r^\nu f(r, t) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi f(r \cos \alpha, t) \sin^{\gamma-1} \alpha d\alpha.$$

Тогда

$$R[f](p) = |S_1(n)| \int_0^\infty f(r) \Pi_r^\nu \delta(x - r) r^{n-1} dr, \quad \nu = \frac{n-1}{2}, \quad n \geq 2. \quad (5)$$

Определение преобразования Радона-Киприянова (1) мы запишем применив его формально к функции одной переменной:

$$K_\gamma[f](\Theta; p) = K_\gamma[f](p) = \int_0^\infty f(x) \Pi_x^\nu \delta(p - x) x^\gamma dx, \quad \nu = \frac{\gamma-1}{2}, \quad \gamma > 0.$$

Теперь, сравнивая правую часть этого равенства с правой частью равенства (5) (или, что тоже самое, (4)), получим формулу (3), которая связывает преобразование Радона радиальной функции с преобразованием Радона-Киприянова четной функции одной переменной, когда $\gamma = n - 1$ — натуральное число. ■

Следует отметить, что в работе [4] (и в [7], [8]) не предполагалось применять K_γ -преобразование к функциям одной переменной, хотя никаких принципиальных трудностей введения такого преобразования не было, но было ясно, что появится некоторая специфика и даже простота в определениях и формулах, и это надо рассматривать отдельно. Необходимость изучения K_γ -преобразований функций одной переменной связана не только с исследованием преобразования Радона радиальных функций, но и с решением задачи о носителе K_γ -преобразования (см. [9]). В следующем пункте проведены необходимые исследования и уточнена указанные выше формулы (3) или (4) и (5) (см. Теорему 3 и ее следствие).

Сначала приведем пример вычисления преобразования Радона радиальной функции через преобразование Радона-Киприянова функции одной переменной. Снова вернемся к (4), где совершим антиполярное преобразование координат

$$z_1 = r \cos \alpha, \quad z_2 = r \sin \alpha, \quad 0 \leq \alpha \leq \pi, \quad r^{n-1} \sin^{n-2} \alpha dr = z_2^{n-2} dz_1 dz_2.$$

Имеем

$$R[f](\Theta; p) = |S_1(n)| \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma((n-1)/2) \Gamma(1/2)} \int_0^{+\infty} z_2^{n-2} dz_2 \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\sqrt{z_1^2 + z_2^2}\right) \delta(p - z_1) dz_1 =$$



$$= |S_1(n)| \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma((n-1)/2) \Gamma(1/2)} \int_0^{+\infty} z_2^{n-2} f\left(\sqrt{p^2 + z_2^2}\right) dz_2. \quad (6)$$

Отметим, что формулы (3), (4), (5) и (6) эквивалентны и формула (6) получена из определения преобразования Радона-Киприянова (1) заменой функции $f = f(x)$, $x \in R_1$ на функцию вращения

$$\tilde{f} = f(z_1, z_2) = f\left(\sqrt{z_1^2 + z_2^2}\right).$$

Этот подход легко применить для вычисления преобразования Радона радиальной функции. В частности если

$$f(x) = e^{-|x|^2}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad |x|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2,$$

то

$$\begin{aligned} R[f](\Theta; p) &= |S_1(n)| \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} z_2^{n-2} e^{-z_1^2 - z_2^2} \delta(p - z_1) dz_1 dz_2 = \\ &= |S_1(n)| \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})} e^{-p^2} \int_0^{+\infty} z_2^{n-2} e^{-z_2^2} dz_2. \end{aligned}$$

Последний удвоенный интеграл представляет собой Γ -функцию Эйлера от аргумента $(n-1)/2$ и, следовательно,

$$R[f](\Theta; p) = |S_1(n)| \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})} e^{-p^2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) = \pi^{\frac{n-1}{2}} e^{-p^2}.$$

Таким образом получили формулу (2).

Надо отметить, что приведенная схема вычислений классического преобразования Радона радиальных функций не только сокращает рассуждения. Важнее то, что эта схема применима к более общему преобразованию (Радона-Киприянова), а это дает возможность получить новые формулы, которые не известны из классической теории. В работе [1] показано, что для индекса $\gamma \in (0, 2]$ вычисление преобразования Радона-Киприянова функций одной переменной, сводится к вычислению дробного интеграла от $f_1(t) = C f(\sqrt{x})$. Это позволило применить методы обращения интегралов дробного порядка для получения формул обращения преобразования Киприянова-Радона. В настоящей работе подобный результат получен в общем случае $\gamma > 0$ и другим путем.

2. Преобразование Радона-Киприянова радиальных функций

Через \mathbb{R}_+^n будем обозначать евклидово полупространство точек \mathbb{R}^n , определенное неравенством $x_1 > 0$, и пусть γ фиксированное положительное число, а функция $f =$



$f(|x|)$ — радиальная функция, абсолютно интегрируемая с весом x_1^γ , $\langle x, \xi \rangle = p$ — уравнение гиперплоскости, лежащей на расстоянии p от начала координат, с единичным вектором нормали ξ .

Преобразование Радона-Киприянова радиальных функций определяется следующим соотношением:

$$\begin{aligned} K_\gamma[f](\xi; p) &= \int_{\mathbb{R}_n^+} f(|x|) \Pi_{x_1}^\nu \delta(p - \langle x, \xi \rangle) x_1^\gamma dx = \\ &= C(\gamma) \int_{\mathbb{R}_n^+} f(|x|) \int_0^\pi \delta(p - x_1 \cos \alpha \xi_1 - \langle x', \xi' \rangle) \sin^{\gamma-1} \alpha d\alpha x_1^\gamma dx, \end{aligned}$$

где $x' = (x_2, \dots, x_n)$, $\xi' = (\xi_2, \dots, \xi_n)$, а $C(\gamma) = \frac{\Gamma(\frac{\gamma+1}{2})}{\Gamma(\frac{\gamma}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}$ — константа, нормирующая оператор Пуассона.

Далее используем процедуру вращения. Для этого сделаем замену переменных:

$$\begin{cases} x_1 \cos \alpha = z_1 \\ x_1 \sin \alpha = z_2, \end{cases} \quad \left|, \quad 0 \leq \alpha \leq \pi, \quad z_1 \in (-\infty, +\infty), \quad z_2 \in (0, +\infty), \right.$$

$$z = (z_1, z_2, x') \in \mathbb{R}_+^{n+1}, \quad |z| = |x| = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2}.$$

В результате, находим

$$K_\gamma[f](\xi; p) = C(\gamma) \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} f(|z|) \delta(p - z_1 \xi_1 - \langle x', \xi' \rangle) z_2^{\gamma-1} dz.$$

Введем обозначение $\bar{\xi} = (\xi_1, 0, \xi')$ для вектора, лежащего в координатной гиперплоскости $z_2 = 0$. Тогда

$$K_\gamma[f](\xi; p) = C(\gamma) \int_{\mathbb{R}_+^n} f(|z|) \delta(p - \langle z, \bar{\xi} \rangle) z_2^{\gamma-1} dz.$$

Скалярное произведение инвариантно относительно вращений. В данном случае вращение необходимо провести в координатной гиперплоскости $z_2 = 0$. Такое вращение не изменит координаты z_2 и, следовательно, веса z_2^γ под знаком интеграла в полученном равенстве. Поворот совершим вокруг оси z_2 так, чтобы направление оси z_1 совпало с направлением вектора $\bar{\xi}$. Новые координаты вектора $\bar{\xi}$ обозначим $\tilde{\xi} = (|\xi|, 0, 0, \dots, 0)$. Ясно, что $|\tilde{\xi}| = |\bar{\xi}| = |\xi| = 1$. Имеем

$$K_\gamma[f](\xi; p) = C(\gamma) \int_{\mathbb{R}_+^n} f(|z|) \delta(p - z_1) z_2^{\gamma-1} dz.$$



Теперь произведем сферическое преобразование координат (как и раньше, первую координату положим равной $z_1 = r \cos \alpha_1$). Тогда

$$K_\gamma[f](\xi; p) = K_\gamma[f](p) = C(\gamma) \int_0^{+\infty} f(r)r^{n+\gamma-1}dr \int_{S_1(n+1)} \delta(p-r \cos \alpha_1) \sin^{\gamma-1} \alpha_1 \cos^{\gamma-1} \alpha_2 dS,$$

где dS — элемент поверхности единичной сферы в евклидовом пространстве размерности $n + 1$:

$$dS = \sin^{n-1} \alpha_1 d\alpha_1 \sin^{n-2} \alpha_2 d\alpha_2 \dots \sin \alpha_{n-1} d\alpha_{n-1} d\alpha_n.$$

Следовательно

$$K_\gamma[f](p) = C(\gamma) \int_0^{+\infty} f(r)r^{n+\gamma-1}dr \int_0^\pi \delta(p-r \cos \alpha_1) \sin^{n+\gamma-2} \alpha_1 d\alpha_1 \int_0^\pi \cos^{\gamma-1} \alpha_2 \sin^{n-2} \alpha_2 d\alpha_2 \times \\ \times \int_0^\pi \sin^{n-3} \alpha_3 d\alpha_3 \dots \int_0^\pi d\alpha_n.$$

Это выражение умножим и разделим на

$$\int_0^\pi \sin^{n+\gamma-2} \varphi_1 d\varphi_1 = \frac{\Gamma\left(\frac{n+\gamma-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+\gamma}{2}\right)}.$$

Теперь можно воспользоваться формулой «площади весовой сферы» (см [6], формула (1.2.5))

$$|S_1(n)|_\gamma = \int_{S_1^+(n)} \prod_{j=1}^m \Theta_j^{\gamma_j} dS = \frac{\pi^{\frac{n-m}{2}}}{2^{m-1}} \prod_{j=1}^m \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)},$$

где надо положить $m = 1$, $\gamma_1 = \gamma$. Тогда

$$K_\gamma[f](p) = |S_1(n)|_\gamma \int_0^{+\infty} f(r) \Pi_r^\nu(p-r) r^{n+\gamma-1} dr, \quad \nu = \frac{n+\gamma-1}{2}.$$

Здесь, справа, снова видим «одномерное» преобразование Радона-Киприянова, но уже с новым индексом. Итак, получен следующий результат.

Теорема 2. Преобразование Радона-Киприянова индекса γ радиальных функций не зависит от вектора нормали к плоскости интегрирования ξ и представляет собой одномерное преобразование Радона-Киприянова индекса $n + \gamma - 1$, умноженное на площадь весовой полусферы $|S_1^+(n)|_\gamma$:

$$K_\gamma[f](p) = |S_1^+(n)|_\gamma K_{\gamma+n-1}[f](p).$$



Эту формулу интересно сравнить с формулой «преобразование Радона радиальной функции» — с формулой (3). Ясно, что $2 |S_1^+(n)|_\gamma|_{\gamma=0} = |S_1(n)|$. Но тогда

$$K_0[f] = |S_1(n)| K_{n-1}[f](p) = R[f].$$

Вообще говоря, преобразованье K_0 формулой (1) не определено. Полученное равенство справедливо лишь для функций радиальных в евклидовом пространстве размерности $n \geq 2$.

Из теорем 1 и 2 вытекает, что в теории преобразования Радона-Киприянова, а также для приложений данной теории необходимы знания свойств преобразования Радона-Киприянова функций одной переменной. Некоторые из них приведены в следующем разделе.

3. Преобразование Радона-Киприянова функций одной переменной. Связь с преобразованиями Фурье, Ганкеля и операторами преобразования Пуассона-Сонина

Пусть $f = f(x)$ абсолютно интегрируемая по $(0, \infty)$ с весом x^γ функция, число γ положительно и фиксировано. Через $\tilde{f} = \tilde{f}(z)$ будем обозначать функцию

$$\tilde{f}(z) = \tilde{f}(z_1, z_2) = f\left(\sqrt{z_1^2 + z_2^2}\right).$$

Преобразование Радона-Киприянова (1) функции одной переменной $f = f(x)$ легко трансформируется по схеме получения равенства (6) в следующее интегральное выражение

$$K_\gamma[f](p) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_{\{z_1=p\}^+} \tilde{f}(z) z_2^{\gamma-1} d\Gamma = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^{+\infty} f\left(\sqrt{p^2 + z_2^2}\right) z_2^{\gamma-1} dz_2, \quad (7)$$

где $\{z_1=p\}^+$ — полупрямая в $\mathbb{R}_+^2 = \{z = (z_1, z_2), z_2 > 0\}$, заданная уравнением $z_1 = p$.

Очень важной в теории преобразований Радона-Киприянова является формула связи с преобразованиями Фурье и Фурье-Бесселя (см. [4], [7], [8]). В нашем случае роль прямого и обратного преобразований Фурье-Бесселя должно выполнить прямое и обратное преобразования Ганкеля (см. [5]), соответственно

$$H_\gamma[f](\xi) = F_B[f](\xi) = \int_0^\infty j_{\frac{\gamma-1}{2}}(r\xi) f(x) x^\gamma dx,$$

$$H_\gamma^{-1}[f](x) = \left[2^{\gamma-1} \Gamma^2\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)\right]^{-1} H_\gamma[f](x).$$



Ядром этих преобразований Ганкеля служит так называемая j -функция Бесселя j_ν , связанная с функцией Бесселя первого рода J_ν равенством

$$j_\nu(t) = \frac{2^\nu \Gamma(\nu + 1)}{t^\nu} J_\nu(t).$$

Хорошо известно представление j -функций Бесселя в виде интеграла Пуассона ([5])

$$j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x) = \Pi^\gamma \exp[-ix].$$

Отсюда получим следующее представление преобразования Ганкеля:

$$H_\gamma[u](\xi) = C(\gamma) \int_0^\infty \int_0^\pi e^{-ix\xi \cos \alpha} \sin^{\gamma-1} \alpha \, d\alpha \, f(x) \, x^\gamma \, dx, \quad C(\gamma) = \frac{\Gamma(\frac{\gamma+1}{2})}{\Gamma(\frac{\gamma}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})}.$$

Антиполярное преобразование координат

$$z_1 = x \cos \alpha, \quad z_2 = x \sin \alpha, \quad 0 \leq \alpha \leq \pi, \quad x \, dx \, d\alpha = dz_1 dz_2$$

приводит к выражению

$$H_\gamma[f](\xi) = C(\gamma) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iz_1 \xi} \, dz_1 \int_0^{+\infty} f\left(\sqrt{z_1^2 + z_2^2}\right) z_2^{\gamma-1} \, dz_2.$$

Заменив z_1 на p и воспользовавшись определением (7), получим

$$H_\gamma[f](\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ip\xi} K_\gamma[f](p) \, dp = F[K_\gamma[f](p)](\xi),$$

где через F обозначено преобразование Фурье. Эта формула устанавливает связь между преобразованиями Ганкеля, Фурье и одномерным преобразованием Радона-Киприянова. Применение обратного преобразования Фурье дает формулу

$$K_\gamma[f](p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ip\xi} H_\gamma[f](\xi) \, d\xi. \tag{8}$$

Обозначим через $C_{0,ev}^\infty(\mathbb{R})$ подпространство пространства $C_0^\infty(\mathbb{R})$, состоящее из четных функций, а через $S_{ev}(\mathbb{R})$ — подпространство Л.Шварца, также состоящее из четных функций. Через Z_{ev} обозначим образ пространства $C_{0,ev}^\infty(\mathbb{R})$ при \cos -преобразовании Фурье F_c . Приведем следующий известный результат (см. [10]) относительно \cos -преобразования Фурье и относительно преобразования Ганкеля:

Лемма 1. *Операторы F_c и H_γ изоморфно отображают пространства $C_{0,ev}^\infty(\mathbb{R})$ на Z_{ev} и $S_{ev}(\mathbb{R})$ на себя.*



Теперь рассмотрим операторы преобразования Пуассона и Сонина, представленные посредством преобразований Ганкеля и cos-преобразованием Фурье следующим образом⁷⁾

$$P_\gamma = H_\gamma^{-1} F_c = \left[2^{\gamma-1} \Gamma^2 \left(\frac{\gamma+1}{2} \right) \right]^{-1} H_\gamma F_c,$$

$$S_\gamma = F_c^{-1} H_\gamma = (2\pi)^{-1} F_c H_\gamma.$$

Известны следующие свойства операторов преобразования P_γ и S_γ (см. [10]).

Лемма 2. Операторы P_γ и S_γ отображают пространства $C_{0,ev}^\infty(\mathbb{R}_1)$ и S_{ev} изоморфно на себя.

Лемма 3. Для любой функции $f \in S_{ev}$ операторы P_γ и S_γ являются взаимно обратными :

$$S_\gamma P_\gamma f = P_\gamma S_\gamma f = f.$$

Для преобразования Радона-Киприянова функции одной переменной справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. На функциях из пространства $S_{ev}(R_1)$ K_γ -преобразование (1) представляет собой оператор преобразования Пуассона-Сонина S_γ , при этом

$$P_\gamma K_\gamma[f] = f, \quad K_\gamma P_\gamma[f] = f.$$

□ Если $f \in S_{ev}$, то справедливо равенство (8). Законность выполнения всех операций следует из Леммы 1. Учитывая, что $H_\gamma[f](\xi)$ — четная функция, получим $K_\gamma[f](p) = F_c^{-1} H_\gamma[f]$, что в соответствии с определением оператора S_γ дает равенство

$$K_\gamma[f](p) = S_\gamma[f](p).$$

Применение Леммы 3 завершает доказательство. ■

Следствие 1 (О преобразовании Радона радиальных функций). Если $f \in S(\mathbb{R}^n)$ и $f = f(|x|)$, то ее преобразование Радона выражается через преобразование Радона-Киприянова и оператор преобразования Пуассона-Сонина по формулам

$$R[f](\xi; p) = R[f](p) = K_{n-1}[f](p) = S_{n-1}[f](p).$$

При этом $P_{n-1} R[f] = f$.

⁷⁾Оператор Пуассона $\Pi^{\frac{\gamma-1}{2}}$ и оператор преобразования Пуассона P_γ в этой работе суть различные операторы.



4. Применение дробных производных

Ясно, что формулы, полученные в Теореме 3, являются формулами обращения K_γ -преобразования. При этом роль обращающего оператора выполняет оператор Пуассона⁸⁾. Здесь мы получим формулы обращения, основанные на применении дробных производных (ср. с результатами работ [1] и [2]).

Общие формулы обращения РК-преобразования получены в работах [7], [8]. Интерес к обращению одномерного K_γ -преобразования отчасти связан с тем, что во-первых эти формулы имеют очень простой вид, а во-вторых с тем, что в частном случае, когда весовой показатель γ целый, эти формулы окажутся обращающими преобразование Радона радиальных функций, а это имеет значение при решении практических задач и задач компьютерной томографии.

Пусть $f \in S_{ev}$. Согласно теореме 3

$$f(x) = P_\gamma K_\gamma[f] = H_\gamma^{-1} 2F_c K_\gamma[f].$$

Константу, нормирующую обратное преобразование Ганкеля, обозначим через $C_1(\gamma)$. Итак

$$f(x) = C_1(\gamma) \int_0^{+\infty} j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi) \xi^\gamma d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi p} K_\gamma[f](p) dp, \quad C_1(\gamma) = \left[2^{\gamma-1} \Gamma^2\left(\frac{\gamma+1}{2}\right) \right]^{-1}. \quad (9)$$

Введем обозначение

$$\Phi(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi p} K_\gamma[f](p) dp.$$

Поскольку $K_\gamma[f](p)$ — четная функция⁹⁾, то и ее преобразование Фурье (а это cos-преобразование) — четная функция. Нашей следующей целью является распространение интегрирования по ξ в (9) с полуоси на всю действительную ось. Поступим следующим образом

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{+\infty} j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi) \Phi(\xi) |\xi|^\gamma d\xi = \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{+\infty} j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi) \Phi(\xi) |\xi|^\gamma d\xi + \int_0^{+\infty} j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi) \Phi(\xi) |\xi|^\gamma d\xi \right). \end{aligned}$$

Во втором слагаемом заменим ξ на $-\xi$. Тогда

$$M = \frac{1}{2} \left(\int_0^{+\infty} j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi) \Phi(\xi) |\xi|^\gamma d\xi + \int_{-\infty}^0 j_{\frac{\gamma-1}{2}}(-x\xi) \Phi(-\xi) |\xi|^\gamma d\xi \right).$$

⁸⁾В теории обратных задач пара операторов P_γ и S_γ называются «операторы преобразования». Эти операторы преобразуют сингулярный дифференциальный оператор Бесселя с индексом γ во вторую производную и наоборот.

⁹⁾ $K_\gamma[f](-\xi; -p) = K_\gamma[f](\xi; p)$, см. [4], [8]



Учитывая четность подынтегрального выражения во втором слагаемом,

$$M = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi) \Phi(\xi) |\xi|^\gamma d\xi.$$

Теперь равенство (9) принимает вид

$$f(x) = \frac{C_1(\gamma)}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi) \Phi(\xi) \cdot |\xi|^\gamma d\xi$$

Заменяв функцию Бесселя соответствующим интегралом Пуассона, получим

$$f(x) = \frac{C_1(\gamma) C(\gamma)}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\pi e^{-ix\xi \cos \alpha} \sin^{\gamma-1} \alpha d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi p} K_\gamma[f](p) dp |\xi|^\gamma d\xi.$$

Выделим прямое и обратное преобразования Фурье

$$f(x) = \frac{C_1(\gamma) C(\gamma) 2\pi}{2} \int_0^\pi F_{\xi \rightarrow x \cos \alpha}^{-1} [|\xi|^\gamma F_{p \rightarrow \xi} K_\gamma[f]] \sin^{\gamma-1} \alpha d\alpha. \quad (11)$$

Здесь оператор Пуассона применен к классическому псевдодифференциальному оператору $F^{-1}|\xi|^\gamma F[u]$ с символом $|\xi|^\gamma$. Пусть $0 < \alpha < 1$ и $A = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}$. Для функции $f(x)$, заданной на отрезке $[a, b]$, каждое из выражений

$$(\mathcal{D}_{a+}^\alpha f)(x) = A \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^\alpha}, \quad (\mathcal{D}_{b-}^\alpha f)(x) = -A \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{f(t) dt}{(x-t)^\alpha},$$

называется дробной производной Римана-Лиувилля порядка $\alpha \in (0, 1)$, соответственно левосторонней и правосторонней (см. [11]). Если же $\alpha \geq 1$ и не является целым, то

$$\mathcal{D}_{a+}^\alpha f = \left(\frac{d}{dx} \right)^{[\alpha]} \mathcal{D}_{a+}^{\{\alpha\}} f, \quad \mathcal{D}_{b-}^\alpha f = \left(-\frac{d}{dx} \right)^{[\alpha]} \mathcal{D}_{b-}^{\{\alpha\}} f.$$

Мы пользуемся стандартными обозначениями: $[\alpha]$ — целая часть числа α , $\{\alpha\}$ — дробная часть числа α , т. е. $\alpha = [\alpha] + \{\alpha\}$.

Далее полагаем $a = -\infty$, $b = +\infty$. В этом случае для дробных производных Римана-Лиувилля (соответственно левосторонней и правосторонней) используем обозначения \mathcal{D}_+^α , \mathcal{D}_-^α . Для этих производных справедливо следующее представление в образах Фурье (см. [11], стр. 114):

$$F[\mathcal{D}_\pm^\alpha \varphi] = (\mp i\xi)^\alpha F[\varphi](\xi),$$



где $\alpha > 0$, $(\pm ix)^\alpha = |x|^\alpha e^{\pm \frac{i\alpha\pi}{2} \text{sign } x}$. Отсюда вытекают формулы для средней величины дробной производной Римана-Лиувилля

$$\left(\frac{\mathcal{D}_+^\alpha + \mathcal{D}_-^\alpha}{2}\right) \varphi(x) = F^{-1} \left[\cos \frac{\alpha\pi}{2} |\xi|^\alpha F[\varphi](\xi) \right] (x).$$

Введем обозначение

$$\mathfrak{D}^\alpha \varphi(x) = F^{-1} [|\xi|^\alpha F[\varphi](\xi)] (x) = \frac{1}{\cos \frac{\alpha\pi}{2}} \left(\frac{\mathcal{D}_+^\alpha + \mathcal{D}_-^\alpha}{2}\right) \varphi(x). \tag{12}$$

Отметим, что дробные производные Римана-Лиувилля представляются в виде производных Маршо:

$$\mathcal{D}_\pm^\alpha \varphi(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(x \mp t)}{t^{1+\alpha}} dt.$$

Откуда

$$\left(\frac{\mathcal{D}_+^\alpha + \mathcal{D}_-^\alpha}{2}\right) \varphi(x) = \frac{\alpha}{2\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{+\infty} \frac{2\varphi(x) - \varphi(x-t) - \varphi(x+t)}{t^{1+\alpha}} dt.$$

Это равенство с точностью до константы $[\cos \frac{\alpha\pi}{2}]^{-1}$ представляет собой производную Грюнвальда-Летникова-Рисса функции ϕ (см. [11], стр. 280). Из (12) вытекает полугрупповое свойство: $\mathfrak{D}^\alpha \mathfrak{D}^\beta = \mathfrak{D}^{\alpha+\beta}$. В частности, если $\alpha = [\alpha] + \{\alpha\}$, то $\mathfrak{D}^\alpha \varphi(x) = \left(\mathfrak{D}^{\{\alpha\}} \frac{d^{[\alpha]}}{dx^{[\alpha]}}\right) \varphi(x)$.

Следуя [12] (стр. 30), введем оператор

$$(\Lambda^\alpha f)(p) = \begin{cases} \frac{d^\alpha}{dp^\alpha} f(p), & \alpha - \text{четное;} \\ G \frac{d^\alpha}{dp^\alpha} f(p), & \alpha - \text{нечетное;} \\ \mathfrak{D}^\alpha f(x), & \alpha - \text{дробное число,} \end{cases}$$

где G – преобразование Гильберта:

$$(Gf)(t) = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(p)}{t-p} dp.$$

а \mathfrak{D}^α – оператор (12).

Теорема 4. Пусть Λ_p^α – оператор (12), γ – фиксированное положительное число. Для $f \in S_{ev}$ имеет место следующая формула обращения

$$f(x) = A(\gamma) \Pi_x^\gamma (\Lambda_p^\gamma K_\gamma[f])(p)|_{p=x}. \tag{13}$$



При этом в случае целого γ

$$A(\gamma) = \frac{(-i)^{-\gamma} \pi}{2^{\gamma-1} \Gamma^2\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)},$$

а в случае дробного γ

$$A(\gamma) = \frac{\pi}{2^{\gamma-1} \Gamma^2\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}.$$

□ Необходимо рассмотреть три случая, когда γ четное, нечетное или дробное число.

Если $\gamma = 2m$ — четное, то утверждение теоремы следует из того, что выражение $(-i|\xi|)^{2m} = (-i\xi)^{2m}$ представляет собой символ оператора $\frac{d^{2m}}{dp^{2m}}$ (разумеется в образах Фурье).

Если же $\gamma = 2m + 1$ — нечетное, то утверждение теоремы следует из того, что

$$|\xi|^{2m+1} = \text{sign}(\xi) \xi^{2m+1},$$

а $\text{sign}(s)$ — символ представления в образах Фурье преобразования Гильберта (см. например [12], стр. 31, формула (40)) и мы приходим к интегрированию, осуществляемому суперпозицией оператора Гильберта и производной целого порядка $2m + 1$: $G \frac{d^{2m+1}}{dp^{2m+1}}$. Вычисление соответствующей константы не составляет каких-либо трудностей, таким образом для целых значений γ получим (13) с оператором Λ при четных или нечетных значениях γ .

Пусть γ — дробное. В этом случае утверждение теоремы вытекает из определения дробной производной \mathfrak{D}^α (12). ■

Отметим, что второе равенство в (12) дает возможность заменить в формуле (13) производную \mathfrak{D}^α средней величиной дробной производной Римана-Лиувилля. Формулы обращения K_γ -преобразования через производной Маршо или Грюнвальда-Летникова-Рисса выписываются довольно просто.

Теперь покажем, что при целом γ дифференцирование в формуле обращения в Теореме 1 может быть заменено дифференцированием, осуществляемым сингулярным дифференциальным оператором Бесселя.

Теорема 5. Пусть f радиальная функция, определенная в \mathbb{R}^n и принадлежащая пространству Шварца основных функций $S(\mathbb{R}^n)$. Для преобразования Радона функции f имеет место формула обращения преобразования Радона радиальных функций

$$f(r) = \frac{\pi C_1(n-1)}{i^{n-1}} \Pi_r^{n-1} \left[\frac{d^{n-1}}{dp^{n-1}} K_{n-1}[f](p) \right] \Big|_{p=r}. \quad (14)$$

При нечетном n эта формула примет вид

$$f(r) = \frac{\pi C_1(n-1)}{i^{n-1}} B^{(n-1)/2} \Pi_r^{n-1} K_{n-1}[f](r). \quad (15)$$



При четном n

$$f(r) = \frac{\pi C_1(n-1)}{i^{n-1}} B^{(n-2)/2} \Pi_r^{n-1} \frac{d}{dr} K_{n-1}[f](r). \quad (16)$$

□ Как известно, преобразование Радона $R[f]$ радиальной функции оказывается преобразованием Радона-Киприянова функции $K_\gamma[f]$ одной переменной при $\gamma = 1$. Таким образом, полагая в (13) $\gamma = n - 1$, получим формулу обращения преобразования Радона радиальных функций

$$f(r) = \frac{\pi C_1(n-1)}{i^{n-1}} \Pi_r^{n-1} \left[\frac{d^{n-1}}{dp^{n-1}} K_{n-1}[f](p) \right] \Big|_{p=r}.$$

Тем самым формула (14) доказана.

Если размерность n евклидова пространства \mathbb{R}^n нечетное число, то исходя из формулы (см. [17], формула (1.1))

$$B^m \Pi^\gamma = \Pi^\gamma \frac{d^{2m}}{dx^{2m}},$$

где B — сингулярный дифференциальный оператор Бесселя

$$B = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\gamma}{x} \frac{d}{dx},$$

из (15) получим

$$f(x) = A(\gamma) B^{\gamma/2} \Pi_x^\gamma K_\gamma[f](r).$$

При четной размерности пространства n из (14) получим

$$f(r) = \frac{\pi C_1(n-1)}{i^{n-1}} B^{(n-2)/2} \Pi_r^{n-1} \frac{d}{dr} K_{n-1}[f](r). \quad \blacksquare$$

Литература

1. Ляхов Л.Н. RK_γ -преобразование с $\gamma \in (0, 2]$ весовых сферических функций. Соотношения Асгейрсона // Доклады РАН. – 2011. – 439; №5. – С.589-592.
2. Ляхов Л.Н. О преобразованиях Радона и Радона-Киприянова сферически симметричных функций // Доклады РАН. – 2008. – 419; №3. – С.315-319.
3. Гельфанд И.М., Граев М.И., Виленкин Н.Я. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений / М.: ГИФМЛ, 1962. – 656 с.
4. Киприянов И.А., Ляхов Л.Н. О преобразованиях Фурье, Фурье-Бесселя и Радона // Доклады РАН. – 1998. – 360; №2. – С.157-160.
5. Киприянов И. А. Сингулярные эллиптические задачи / М.:Наука, 1997. – 199 с.
6. Ляхов Л.Н. Весовые сферические функции и потенциалы Рисса, порожденные обобщенным сдвигом / Воронеж: Воронеж. гос. технол. акад., 1997. – 144 с.
7. Ляхов Л.Н. Обращение преобразования Радона-Киприянова // Доклады РАН. – 2004. – 399; №5. – С.597-600.
8. Ляхов Л.Н. Преобразование Киприянова-Радона. // ТР.МИАН. 2005. Т.248. С.153-163.



9. Гоц Е.Г. Преобразование Киприянова-Радона основных функций. Теорема о носителе // Труды участников школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н.В. Ефимова. Абрау-Дюрсо / Ростов-на-Дону: Ростовское математическое общество, 2006. – С.185-186.
10. Катрахов В.В. Операторы преобразования и псевдодифференциальные операторы // СМЖ. – 1980. – XXI; №1. – С.86-97.
11. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
12. Хелгасон С. Преобразование Радона / М.: Мир, 1983. – 150 с.
13. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул / М.: Наука, 1974. – 808 с.
14. Ляхов Л.Н. Об одном классе сферических функций и сингулярных псевдодифференциальных операторов // Доклады РАН. – 1983. – 272; №4. – С.781-784.
15. Ляхов Л.Н. О рядах по весовым сферическим функциям // Корректные краевые задачи для неклассических уравнений математ. физики: Сб. научн. тр. / Новосибирск: СО АН СССР, 1984. – С.102-109.
16. Ляхов Л.Н. Весовые сферические функции и сингулярные псевдодифференциальные операторы // Дифференц. уравнения. – 1985. – 21; №6. – С.1020-1032.
17. Киприянов И.А., Кононенко В.И. О фундаментальных решениях некоторых сингулярных уравнений в частных производных // Дифференц. уравнения. – 1969. – 5; №8. – С.1470-1483.

INVERSION OF RADON-KIPRIYANOV'S TRANSFORM OF RADIAL FUNCTIONS

L.N. Lyakhov, O.I. Popova

Voronezh State University,

Universitetskaya Sq., 1, Voronezh, 394006, Russia, e-mail: lyakhov@box.vsi.ru, olyaa.popova@yandex.ru

Abstract. It is done the deduction of the formula connected the Radon transformation of radial functions and the Radon-Kipriyanov K_γ transformation of one-variable functions. It is obtained the formula of K_γ -transformation of radial functions in \mathbb{R}^n . It is done in the form of $K_{\gamma+n-1}$ -transformation of the one-variable function. The formula of inverse Radon-Kipriyanov transformation of one-variable functions is found. The results extend and refine previous ones obtained by one of the authors.

Key words: Radon transform, Radon-Kipriyanov transform, radial functions.