УДК 517.983

# О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ТИПА КОШИ ДЛЯ АБСТРАКТНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ РИМАНА-ЛИУВИЛЛЯ [5)]

**А.В. Глушак, Т.А. Манаенкова**

Белгородский государственный университет,
308007, г. Белгород, ул. Студенческая, 14, e-mail: Glushak@bsu.edu.ru, Manaenkova@bsu.edu.ru

**Аннотация.** Установлен критерий равномерной корректности задачи типа Коши для дифференциального уравнения с дробной производной Римана-Лиувилля.

**Ключевые слова:** дифференциальное уравнение с дробной производной, абстрактная задача типа Коши, критерий разрешимости.

Пусть $A$ — линейный замкнутый оператор, плотно определенный в банаховом пространстве $X$ с областью определения $D(A)$ и непустым резольвентным множеством. При $\alpha > 0$ и $n = [\alpha] + 1$ рассмотрим следующую задачу типа Коши

$$D^{\alpha}_{0+}u(t) = Au(t), \qquad t > 0, \tag{1}$$

$$\lim_{t\to 0+} D^{\alpha-n}_{0+}u(t) = u_0, \quad \lim_{t\to 0+} D^{\alpha-k}_{0+}u(t) = 0, \quad k = 1, ..., n-1. \tag{2}$$

где $D^{\alpha}_{0+}u(t) = \dfrac{d^n}{dt^n}\left(I^{n-\alpha}_{0+}u\right)(t)$ – левосторонняя дробная производная Римана-Лиувилля порядка $\alpha > 0$, $I^{\beta}_{0+}u(t) = \dfrac{1}{\Gamma(\beta)}\displaystyle\int_0^t (t-s)^{\beta-1}\, u(s)\, ds$ – левосторонний дробный интеграл Римана-Лиувилля порядка $\beta > 0$ (см. [1, с. 41], [2, с. 69]), $D^{-\gamma}_{0+}u(t) = I^{\gamma}_{0+}u(t)$ для $\gamma > 0$, $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция, $u_0 \in D(A)$.

Примеры решения некоторых конкретных дифференциальных уравнений с дробными производными Римана-Лиувилля могут быть найдены в [2, 3].

Среди работ, посвященных изучению абстрактных дифференциальных уравнений с дробной производной Капуто порядка $\alpha$, можно отметить работу [4], в которой изучается ослабленная задача Коши, работу [5], в которой приведен критерий равномерной корректности задачи Коши. Неоднородное дифференциальное уравнение порядка $1+\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$ с дробной производной Капуто и позитивным оператором $A$ было исследовано в [6] методом сумм Да Прато и Гривара. Работы [7], [8] содержат различные критерии равномерной корректности задачи типа Коши с дробной производной Римана-Лиувилля. В настоящей работе приводится критерий равномерной корректности задачи типа Коши отличный от приведенных в [7], [8].

[5]Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы (госконтракт № 14.A18.21.0357)

**Определение 1.** *Решением задачи (1), 2) называется функция $u(t)$ такая, что имеют место включения $u(t) \in C(\mathbb{R}_+, D(A))$, $I_{0+}^{k-\alpha}u(t) \in C^k(\overline{\mathbb{R}}_+, X)$ для $k = 0, 1, ..., n-1$, $I_{0+}^{n-\alpha}u(t) \in C^n(\overline{\mathbb{R}}_+, X)$, и которая удовлетворяет условиям (1), (2).*

**Определение 2.** *Задача (1), (2) называется равномерно корректной, если при любом $u_0 \in D(A)$, существует единственное решение $u(t; u_0)$ задачи (1), (2) и если $u_{0,m} \in D(A)$, $u_{0,m} \to 0$ влечет $u(t; u_{0,m}) \to 0$ равномерно по $t$ на любом компактном интервале из $(0, \infty)$.*

Применим к уравнению (1) оператор $I_{0+}^{\alpha}$. Учитывая равенство (см. [1, с. 50], [2, с. 74])

$$I_{0+}^{\alpha} D_{0+}^{\alpha} u(t) = u(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{D_{0+}^{\alpha-k}u(0)}{\Gamma(\alpha-k+1)}\, t^{\alpha-k} \tag{3}$$

и граничные условия (2), можно утверждать, что задача (1), (2) равномерно корректна только тогда, когда следующее интегральное уравнение типа Вольтерра

$$u(t) = \frac{t^{\alpha-n}\, u_0}{\Gamma(\alpha-n+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\,\alpha-1} Au(s)\, ds, \qquad t > 0, \tag{4}$$

равномерно корректно в смысле определения 3, которое мы приводим далее.

**Определение 3.** *Интегральное уравнение (4) называется равномерно корректным, если для каждого $u_0 \in D(A)$ существует единственное решение $u(t; u_0) \in C(\mathbb{R}_+, D(A))$ этого уравнения и если $u_{0,m} \in D(A)$, $u_{0,m} \to 0$ влечет сходимость $u(t; u_{0,m}) \to 0$ равномерно по $t$ на любом компактном интервале из $(0, \infty)$.*

Пусть $\mathcal{B}(X)$ — пространство линейных ограниченных операторов, действующих из $X$ в $X$. Определим разрешающий оператор задачи (1), (2).

**Определение 4.** *Операторная функция $T_\alpha(t) \in \mathcal{B}(X)$ называется разрешающим оператором для задачи (1), (2), если выполнены следующие условия:*

*(i) $T_\alpha(t)$ сильно непрерывна при $t > 0$ и $D_{0+}^{\alpha-n}T_\alpha(0) = I$,*

*(ii) $T_\alpha(t)$ коммутирует с $A$, то есть, $T_\alpha(t)D(A) \subset D(A)$ и $AT_\alpha(t)u_0 = T_\alpha(t)Au_0$ для любого $u_0 \in D(A)$ и $t > 0$,*

*(iii) $T_\alpha(t)u_0$ является решением задачи (1), (2) для любого $u_0 \in D(A)$ и $t > 0$.*

**Определение 5.** *Будем говорить, что оператор $A$ принадлежит классу $\mathcal{G}^\alpha(M, \omega)$, если задача (1), (2) имеет разрешающий оператор $T_\alpha(t)$, удовлетворяющий неравенству*

$$\|T_\alpha(t)\| \leqslant M(t)e^{\omega t}, \quad t > 0, \tag{5}$$

*где $\omega \in \mathbb{R}$ и функция $M(t) \in L^1(\mathbb{R}_+)$.*

Пусть $A \in \mathcal{G}^\alpha(M, \omega)$ и $T_\alpha(t)$ – соответствующий разрешающий оператор. При $\operatorname{Re}\lambda > \omega$ определим преобразование Лапласа для разрешающего оператора

$$H_\alpha(\lambda) = L[T_\alpha(t)](\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_\alpha(t)\, dt\,.$$

Учитывая оценку (5), можно утверждать, что $H_\alpha(\lambda) \in \mathcal{B}(X)$. Используя свойства (ii) и (iii) определения 4 и тождество [см. 2, с. 284] для преобразования Лапласа дробных производных

$$L[D^\alpha_{0+}u](\lambda) = \lambda^\alpha L[u](\lambda) - \sum_{k=1}^{n} \lambda^{k-1} D^{\alpha-k}_{0+}u(0),$$

после преобразования Лапласа из (1), (2), получим следующие соотношения:

$$\lambda^\alpha H_\alpha(\lambda)u_0 - \lambda^{n-1}u_0 = AH_\alpha(\lambda)u_0, \quad u_0 \in X; \quad \lambda^\alpha H_\alpha(\lambda)u_0 - \lambda^{n-1}u_0 = H_\alpha(\lambda)Au_0, \quad u_0 \in D(A).$$

**Лемма 1.** *Пусть $A \in \mathcal{G}^\alpha(M,\omega)$, тогда оператор $(\lambda^\alpha I - A)$ обратим и $H_\alpha(\lambda) = \lambda^{n-1}R(\lambda^\alpha, A)$, то есть, множество $\{\lambda^\alpha : Re\,\lambda > \omega\}$ включено в $\rho(A)$ и*

$$R(\lambda^\alpha, A)u_0 = \lambda^{1-n}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T_\alpha(t)u_0\,dt, \quad u_0 \in X. \tag{6}$$

**Теорема 1.** *Пусть $\alpha > 0$, $n = [\alpha] + 1$. Тогда $A \in \mathcal{G}^\alpha(M,\omega)$ и оператор $D^{\alpha-n}_{0+}T_\alpha(t)$ непрерывен при $t \geq 0$ в равномерной операторной топологии только тогда, когда $A \in \mathcal{B}(X)$.*

□ Пусть $A \in \mathcal{G}^\alpha(M,\omega)$. При $\lambda > \omega$. Тогда, учитывая представление оператора дробного интегрирования через оператор Лапласа [см. 1, с. 117]

$$I^\alpha_{0+}\varphi(t) = L^{-1}[\lambda^{-\alpha}L[\varphi](\lambda)](t),$$

получим соотношение

$$\lambda^{\alpha-n}R(\lambda^\alpha, A) - \frac{I}{\lambda} = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\left(D^{\alpha-n}_{0+}T_\alpha(t) - I\right)dt,$$

откуда

$$\left\|\lambda^{\alpha-n}R(\lambda^\alpha, A) - \frac{I}{\lambda}\right\| \leq \int_0^\infty e^{-\lambda t}\eta(t)\,dt, \tag{7}$$

где $\eta(t) = \left\|D^{\alpha-n}_{0+}T_\alpha(t) - I\right\|$ непрерывна при $t \geq 0$, $\eta(0) = 0$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем $\delta > 0$ такое, что $\eta(t) \leq \varepsilon$ при $t \in [0,\delta]$. Тогда

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\eta(t)\,dt = \int_0^\delta e^{-\lambda t}\eta(t)\,dt + \int_\delta^\infty e^{-\lambda t}\eta(t)\,dt \leq$$

$$\leq \varepsilon\int_0^\delta e^{-\lambda t}\,dt + \int_\delta^\infty e^{-\lambda t}\left(\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1}M(s)e^{\omega s}ds + 1\right)dt \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{\lambda} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_\delta^\infty e^{(\omega-\lambda)t}\left(\int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1}M(s)ds\right)dt + o\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad \lambda \to \infty. \tag{8}$$

Рассмотрим оставшийся интеграл в правой части (8). После разбиения внутреннего интеграла на два по отрезкам $[0,\delta]$ и $[\delta,t]$ и изменения порядка интегрирования получим

$$\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_\delta^\infty e^{(\omega-\lambda)t}\left(\int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1}M(s)ds\right)dt=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\int_\delta^\infty M(s)\int_s^\infty e^{(\omega-\lambda)t}(t-s)^{n-\alpha-1}dtds+\int_0^\delta M(s)\int_\delta^\infty e^{(\omega-\lambda)t}(t-s)^{n-\alpha-1}dtds\right)$$

$$\le\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\int_\delta^\infty M(s)\frac{\Gamma(n-\alpha)}{(\lambda-\omega)^{n-\alpha}}e^{(\omega-\lambda)s}ds+\int_0^\delta M(s)\int_\delta^\infty e^{-(\lambda-\omega)t}(t-\delta)^{n-\alpha-1}\,dtds\right)=$$

$$=\frac{e^{-(\lambda-\omega)\delta}}{(\lambda-\omega)^{n-\alpha}}\int_\delta^\infty M(s)ds+\frac{e^{-(\lambda-\omega)\delta}}{(\lambda-\omega)^{n-\alpha}}\int_0^\delta M(s)ds=o\left(\frac{1}{\lambda}\right),\quad \lambda\to\infty, \tag{9}$$

с учетом того, что $M(t)\in L^1(\mathbb{R}_+)$.

Следовательно, из (7)-(9) для достаточно больших $\lambda$ мы получим $\|\lambda^{\alpha-n+1}R(\lambda^\alpha,A)-I\|<1$. Поэтому $R(\lambda^\alpha,A)$ имеет ограниченный обратный оператор, то есть оператор $R^{-1}(\lambda^\alpha,A)=\lambda^\alpha I-A$ – ограничен и, таким образом, $A\in\mathcal{B}(X)$.

Обратно, пусть $A\in\mathcal{B}(X)$, согласно [1, с. 601] $T_\alpha(t)=t^{\alpha-n}E_{\alpha,\alpha-n+1}(t^\alpha A)$, где $E_{\alpha,\beta}(\cdot)$ — функция Миттаг-Леффлера, определяемая соотношением

$$E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{n=0}^\infty\frac{z^n}{\Gamma(n\alpha+\beta)}\,,\qquad z,\beta\in\mathbb{C},\ \alpha>0.$$

Покажем, что $T_\alpha(t)$ удовлетворяет условиям определения 5 при $M(t)=Kt^{\alpha-n}e^{-\varepsilon t}$, где $K>0$ – некоторая постоянная, $\varepsilon>0$ произвольно. Очевидно,

$$\|T_\alpha(t)\|\le t^{\alpha-n}\sum_{j=0}^\infty\frac{\|A\|^j\,t^{j\alpha}}{\Gamma(j\alpha+\alpha-n+1)}=t^{\alpha-n}E_{\alpha,\alpha-n+1}\left(\|A\|\,t^\alpha\right). \tag{10}$$

Пусть сначала $\alpha\in(0,2)$. Тогда неравенство (10) означает, что $T_\alpha(t)$ экспоненциально ограничена. Действительно, асимптотическое поведение функции Миттаг-Леффлера при $0<\alpha<2$ и $|z|\to\infty$ (см. [9, с. 134])

$$E_{\alpha,\mu}(z)=\frac{1}{\alpha}z^{(1-\mu)/\alpha}\exp\left(z^{1/\alpha}\right)-\sum_{j=1}^n\frac{z^{-j}}{\Gamma(\mu-\alpha j)}+O\left(\frac{1}{|z|^{n+1}}\right),\ |\arg z|\le\nu\pi,\ \nu\in\left(\frac{\alpha}{2},\alpha\right), \tag{11}$$

и непрерывность этой функции при $t\ge0$ означает, что при $\omega>0$ существует постоянная $K>0$ такая, что

$$E_{\alpha,\alpha-n+1}(\omega t^\alpha)\le Ke^{\omega^{1/\alpha}t},\quad t\ge0,\quad \alpha\in(0,2). \tag{12}$$

Из (10), (12) получим оценку

$$\|T_\alpha(t)\| \leq Kt^{\alpha-n}e^{\|A\|^{1/\alpha}t} = M(t)e^{\left(\|A\|^{1/\alpha}+\varepsilon\right)t}, \quad \varepsilon > 0. \tag{13}$$

Если $\alpha \in [2, \infty)$, то зафиксируем $k \in \mathbb{N}$ такое, что $k > \alpha/2$. Тогда

$$\|T_\alpha(t)\| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\|A\|^j t^{j\alpha+\alpha-n}}{\Gamma(j\alpha+\alpha-n+1)} = t^{\alpha-n}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\|A\|^{(1/k)kj}\, t^{(\alpha/k)kj}}{\Gamma((\alpha/k)kj+\alpha-n+1)} \leq$$

$$\leq t^{\alpha-n}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\|A\|^{(1/k)j}\, t^{(\alpha/k)j}}{\Gamma((\alpha/k)j+\alpha-n+1)} = t^{\alpha-n}E_{\alpha/k,\alpha-n+1}\left(t^{\alpha/k}\,\|A\|^{1/k}\right)$$

и, используя (12), опять получим оценку (13).

Следовательно, $A \in \mathcal{G}^\alpha\left(M, \|A\|^{1/\alpha}\right)$ и $T_\alpha(t)$ — соответствующий разрешающий оператор.

Так как $D^{\nu}_{0+}\left(t^{\mu-1}E_{\alpha,\mu}(At^\alpha)\right) = t^{\mu-\nu-1}E_{\alpha,\mu-\nu}(At^\alpha)$ $(\mu > 0,\ \nu \in \mathbb{R})$, то

$$D^{\alpha-n}_{0+}T_\alpha(t) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{A^j t^{j\alpha}}{\Gamma(j\alpha+1)} = E_{\alpha,1}(t^\alpha A). \tag{14}$$

Ряд в (14) сходится по норме при $t \geq 0$ и определяет ограниченный линейный оператор $D^{\alpha-n}_{0+}T_\alpha(t)$. Оценка степенного ряда дает

$$\left\|D^{\alpha-n}_{0+}T_\alpha(t) - I\right\| \leq \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\|A\|^j t^{j\alpha}}{\Gamma(j\alpha+1)} = t^\alpha\,\|A\|\,E_{\alpha,\alpha+1}\left(\|A\|\,t^\alpha\right).$$

Следовательно, $\lim\limits_{t\to 0+}\left\|D^{\alpha-n}_{0+}T_\alpha(t) - I\right\| = 0$, то есть оператор $D^{\alpha-n}_{0+}T_\alpha(t)$ непрерывен в равномерной операторной топологии. ■

**Теорема 2.** *Пусть $A \in \mathcal{G}^\alpha(M,\omega)$ для некоторого $\alpha > 2$ и*

$$\int_0^\infty e^{-\nu t}M(t)dt \leq \frac{K_1}{\nu^{\alpha-n+1}}\,, \qquad \nu > 0, \quad n = [\alpha]+1, \ K_1 > 0\,. \tag{15}$$

*Тогда $A \in \mathcal{B}(X)$.*

□ Если $A \in \mathcal{G}^\alpha(M,\omega)$ при некотором $\alpha > 2$, то в силу леммы 1 $\{\lambda^\alpha : \mathrm{Re}\ \lambda > \omega\} \subseteq \rho(A)$, что, в частности, означает следующее

$$\Lambda_{\alpha,\ \omega} := \left\{\lambda^\alpha : \mathrm{Re}\lambda > \omega,\ |\arg\lambda| \leq \frac{\pi}{\alpha} < \frac{\pi}{2}\right\} \subseteq \rho(A).$$

Следовательно, $\rho(A)$ состоит из целой комплексной плоскости, за исключением некоторого ограниченного множества, содержащего начало координат. Если $\mu \in \mathbb{C}$ достаточно велико, то $\mu = \lambda^\alpha \in \Lambda_{\alpha,\omega}$ и из соотношений (5), (6) и (15) вытекает

$$\|\mu R(\mu, A)\| = \left\|\lambda^{\alpha-n+1}\int_0^\infty e^{-\mathrm{Re}\lambda t}T_\alpha(t)dt\right\| \leq |\lambda|^{\alpha-n+1}\left\|\int_0^\infty e^{-\mathrm{Re}\lambda t}e^{\omega t}M(t)dt\right\| \leq$$

$$\leq \frac{K_1|\lambda|^{\alpha-n+1}}{(\mathrm{Re}\lambda-\omega)^{\alpha-n+1}} \leq \frac{K_1|\lambda|^{\alpha-n+1}}{\left(|\lambda|\cos\dfrac{\pi}{\alpha}-\omega\right)^{\alpha-n+1}} \to \frac{K_1}{\cos^{\alpha-n+1}\dfrac{\pi}{\alpha}}\,, \quad K_1>0, \quad |\lambda|\to\infty.$$

Из этого соотношения следует, что $\|R(\lambda^\alpha,A)\| = O(1/|\lambda|^\alpha)$. Теперь утверждение теоремы следует из приводимой ниже леммы 2 (см. [10], лемма 5.2). ■

Например, в качестве функции $M(t)$, удовлетворяющей неравенству (15), можно рассмотреть функцию $M(t)=M_0t^{\alpha-n}e^{-\varepsilon t}$, $\varepsilon>0$, $n=[\alpha]+1$. Действительно,

$$\int_0^\infty e^{-\nu t}M(t)dt = \int_0^\infty M_0e^{-\nu t}e^{-\varepsilon t}t^{\alpha-n}dt = M_0\int_0^\infty e^{-(\nu+\varepsilon)t}t^{\alpha-n}dt =$$

$$\frac{M_0\Gamma(\alpha-n+1)}{(\nu+\varepsilon)^{\alpha-n+1}} \leq \frac{K_1}{\nu^{\alpha-n+1}}\,.$$

**Лемма 2.** *Если $\sigma(A)$ ограниченное подмножество из $\mathbb{C}$ и $\|R(\mu,A)\|=O(1/|\mu|)$ при $|\mu|\to\infty$, то $A\in\mathcal{B}(X)$.*

Далее рассмотрим задачу (1), (2) при $0<\alpha<1$ и найдем условия ее разрешимости. В этом случае интегральное уравнение (4) и соотношение (6) примут вид

$$u(t)=\frac{t^{\alpha-1}\,u_0}{\Gamma(\alpha)}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\,\alpha-1}Au(s)\,ds, \quad t>0, \tag{16}$$

$$R(\lambda^\alpha,A)u_0=\int_0^\infty e^{-\lambda t}T_\alpha(t)u_0\,dt, \quad u_0\in X, \quad \lambda>\omega. \tag{17}$$

После дифференцирования равенства (17) получим

$$\frac{d^n}{d\lambda^n}(R(\lambda^\alpha,A)u_0)=(-1)^n\int_0^\infty t^ne^{-\lambda t}T_\alpha(t)u_0\,dt, \;\; u_0\in X, \;\; \lambda>\omega, \;\; n=0,1,\ldots\,, \tag{18}$$

что вместе с (5) дает следующую оценку

$$\sum_{n=0}^\infty\frac{(\lambda-\omega)^n}{n!}\left\|\frac{d^nR(\lambda^\alpha,A)}{d\lambda^n}\right\| \leq \int_0^\infty\sum_{n=0}^\infty\frac{(\lambda-\omega)^n\,t^n}{n!}\,e^{-\lambda t}\,\|T_\alpha(t)\|\,dt \leq$$

$$\leq\int_0^\infty e^{t(\lambda-\omega)}e^{-\lambda t}e^{\omega t}M(t)\,dt=\int_0^\infty M(t)\,dt=K_2, \quad \lambda>\omega, \;\; M(t)\in L^1(\mathbb{R}_+). \tag{19}$$

Приведем далее формулировку теоремы 1.4 из [11], которая будет использована при установлении разрешимости задачи (1), (2) для случая $\alpha\in(0,1)$.

**Теорема 3.** *Пусть $A$ – линейный замкнутый оператор с плотной в $X$ областью определения $D(A)$, $u_0\in D(A)$ и пусть $a(t)\in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ удовлетворяет неравенству*

$$\int_0^\infty e^{-\omega t}|a(t)|\,dt<\infty\,.$$

*Тогда операторное уравнение*

$$T(t)u_0 = a(t)u_0 + \int_0^t a(t-s)AT(s)u_0\,ds\,,\quad t>0\,, \tag{20}$$

*имеет решение* $T(t)$, *удовлетворяющее неравенству*

$$\|T(t)\| \leqslant M(t)e^{\omega t}\,,\qquad t>0\,, \tag{21}$$

*с некоторой функцией* $M(t)\in L^1(\mathbb{R}_+)$, *только тогда, когда выполняются условия:*

*1)* $L[a](\lambda)\neq 0$ *и* $1/L[a](\lambda)\in\rho(A)$ *для каждого* $\lambda>\omega$,

*2) при* $\lambda>\omega$ *существует* $(I-L[a](\lambda)A)^{-1}$ *и функция* $Q(\lambda)=L[a](\lambda)(I-L[a](\lambda)A)^{-1}$ *удовлетворяет оценке*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda-\omega)^n\left\|Q^{(n)}(\lambda)\right\|}{n!}\le K_0 \tag{22}$$

*с постоянной* $K_0>0$.

В рассматриваемом нами случае $\alpha\in(0,1)$ уравнение (16) – частный случай уравнения (20), если $a(t)=\dfrac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$. При этом $a(t)\in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$, $L[a](\lambda)=\dfrac{1}{\lambda^\alpha}$ и

$$\int_0^\infty e^{-\omega t}\,\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,dt=\frac{1}{\omega^\alpha}<\infty\,.$$

Составим соответствующую уравнению (16) функцию $Q(\lambda)$

$$Q(\lambda)=\frac{1}{\lambda^\alpha}\left(I-\frac{1}{\lambda^\alpha}A\right)^{-1}=(\lambda^\alpha I-A)^{-1}=R(\lambda^\alpha,A).$$

При этом неравенство (22) примет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda-\omega)^n\left\|Q^{(n)}(\lambda)\right\|}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda-\omega)^n}{n!}\left\|\frac{d^nR(\lambda^\alpha,A)}{d\lambda^n}\right\|\le K_0\,.$$

Следовательно, при $0<\alpha<1$ к уравнению (16) применима теорема 3, которую мы можем переформулировать следующим образом.

**Теорема 4.** *Пусть* $0<\alpha<1$. *В этом случае* $A\in\mathcal{G}^\alpha(M,\omega)$ *только тогда, когда* $(\omega^\alpha,\infty)\subset\varrho(A)$ *и*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda-\omega)^n}{n!}\left\|\frac{d^nR(\lambda^\alpha,A)}{d\lambda^n}\right\|\le K_0\,,\qquad \lambda>\omega\,,\ K_0>0\,. \tag{23}$$

Следующий результат – непосредственное следствие предыдущей теоремы.

**Теорема 5.** *Пусть* $0<\alpha<1$. *Для того чтобы оператор* $A\in\mathcal{G}^\alpha(M,\omega)$, *необходимо и достаточно, чтобы* $(\omega^\alpha,\infty)\subset\varrho(A)$ *и существовала сильно непрерывная операторная* *функция* $T(t)$, *удовлетворяющая неравенству* $\|T(t)\| \leqslant M(t)e^{\omega t}$, $t > 0$, $M(t) \in L^1(\mathbb{R}_+)$ *такая, что*

$$R(\lambda^\alpha, A)u_0 = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)u_0\, dt, \quad u_0 \in X, \tag{24}$$

*и в этом случае* $T_\alpha(t) = T(t)$.

□ Пусть существует функция $T(t)$ с упомянутыми выше свойствами. После дифференцирования под знаком интеграла в (24) получим (18), а из свойств функции $T(t)$ – соотношение (23). Применяя теорему 4, получим $A \in \mathcal{G}^\alpha(M,\omega)$. Пусть $T_\alpha(t)$ – соответствующий разрешающий оператор. Тогда (24) выполняется для обоих операторов $T_\alpha(t)$ и $T(t)$ и, как следует из единственности преобразования Лапласа, $T_\alpha(t) = T(t)$.

Обратное утверждение. Пусть $A \in \mathcal{G}^\alpha(M,\omega)$, тогда в силу определений 3 и 4 существует разрешающий оператор $T_\alpha(t)$ такой, что имеет место оценка (5) и, кроме того, $T_\alpha(t)$ удовлетворяет (1), (2), а следовательно, действуя преобразованием Лапласа на (1) и учитывая (2), получим соотношение (24). ■

**Теорема 6.** *Если* $A$ *является генератором сильно непрерывной* $C_0$*-полугруппы, то* $A \in \mathcal{G}^\alpha(M,\omega^{1/\alpha})$ *для каждого* $\alpha \in (0,1)$ *с некоторой функцией* $M(t) \in L^1(\mathbb{R}_+)$.

□ Пусть $A$ генератор непрерывной $C_0$-полугруппы, тогда по теореме Хилле-Иосиды найдутся постоянные $\omega \in \mathbb{R}$, $C = C(\omega) \geq 1$ такие, что $R(\lambda, A)$ существует для любого $\lambda > \omega$ и

$$\|R^n(\lambda, A)\| \leq \frac{C}{(\lambda-\omega)^n}, \quad \lambda > \omega,\ n \in \mathbb{N}_0\,. \tag{25}$$

Индукцией по $n$ получим следующее представление

$$\frac{d^n}{d\lambda^n}R(\lambda^\alpha, A) = (-1)^n\lambda^{-n-\alpha}\sum_{k=1}^{n+1} b^\alpha_{k,n+1}(\lambda^\alpha R(\lambda^\alpha, A))^k, \quad n \in \mathbb{N}_0,\ \alpha > 0\,, \tag{26}$$

где

$$b^\alpha_{1,1} = 1, \quad b^\alpha_{1,n} = 0,\ n = 2,3,\dots\,, \tag{27}$$

$$b^\alpha_{k,n} = (n-2-(k-1)\alpha)b^\alpha_{k,n-1} + \alpha(k-1)b^\alpha_{k-1,n-1}, \quad 1 < k \leq n, \quad n = 2,3,\dots\,, \tag{28}$$

$$b^\alpha_{k,n} = 0, \quad k > n, \quad n = 1,2,\dots\,. \tag{29}$$

Действительно, при $n = 1$ находим

$$\frac{d}{d\lambda}R(\lambda^\alpha, A) = -\alpha\lambda^{\alpha-1}R^2(\lambda^\alpha, A). \tag{30}$$

С другой стороны, по формулам (27)-(29) получаем $b^\alpha_{1,2} = 0$, $b^\alpha_{2,2} = -\alpha b^\alpha_{2,1} + \alpha b^\alpha_{1,1} = \alpha$, подставляя которые в (26), получим (30).

Предположим теперь, что (26)-(29) верны при $n = m$, то есть, имеет место равенство

$$\frac{d^m}{d\lambda^m}R(\lambda^\alpha, A) = (-1)^m\lambda^{-m-\alpha}\sum_{k=1}^{m+1} b^\alpha_{k,m+1}(\lambda^\alpha R(\lambda^\alpha, A))^k,$$

дифференцируя которое, будем иметь

$$\frac{d^{m+1}}{d\lambda^{m+1}}R(\lambda^\alpha,A)=(-1)^m\sum_{k=1}^{m+1}(-m-\alpha+k\alpha)b^\alpha_{k,m+1}\lambda^{-m-1-\alpha+k\alpha}R^k(\lambda^\alpha,A)+$$

$$+(-1)^{m+1}\sum_{k=1}^{m+1}k\alpha b^\alpha_{k,m+1}\lambda^{-m-\alpha+k\alpha-1}R^{k+1}(\lambda^\alpha,A)\,. \qquad (31)$$

Из формул (26)-(29) получаем следующее представление

$$\frac{d^{m+1}}{d\lambda^{m+1}}R(\lambda^\alpha,A)=(-1)^{m+1}\sum_{k=1}^{m+2}b^\alpha_{k,m+2}\lambda^{-m-1-\alpha+k\alpha}R^k(\lambda^\alpha,A)=$$

$$=(-1)^{m+1}\sum_{k=1}^{m+2}\left((m-k\alpha+\alpha)b^\alpha_{k,m+1}+\alpha(k-1)b^\alpha_{k-1,m+1}\right)\lambda^{-m-1-\alpha+k\alpha}R^k(\lambda^\alpha,A)\,.$$

Заметим, что в первой сумме последнее слагаемое за счет коэффициента $b^\alpha_{m+2,m+1}=0$ обращается в ноль, а во второй суммирование начинается с $k=2$, и, заменяя $k-1$ на $k$, мы окончательно получим (31). Что и означает справедливость формул (26)-(29).

При $\alpha\in(0,1)$, $k,n\in\mathbb{N}$, $b^\alpha_{k,n}>0$. Тогда из (26) – (29) имеем при $\lambda>\omega^{1/\alpha}$

$$\left\|\frac{d^n}{d\lambda^n}R(\lambda^\alpha,A)\right\|\le\sum_{k=1}^{n+1}b^\alpha_{k,n+1}\lambda^{k\alpha-n-\alpha}\|R^k(\lambda^\alpha,A)\|\le$$

$$\le C\sum_{k=1}^{n+1}b^\alpha_{k,n+1}\frac{\lambda^{k\alpha-n-\alpha}}{(\lambda^\alpha-\omega)^k}=(-1)^nC\frac{d^n}{d\lambda^n}\left(\frac{1}{\lambda^\alpha-\omega}\right)\,. \qquad (32)$$

(Отметим, что равенство в (32) является частным случаем (26) при $A=\omega$.)

Далее, мы используем соотношение

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(\omega t^\alpha)\,dt=\frac{\lambda^{\alpha-\beta}}{\lambda^\alpha-\omega},\quad \lambda>\omega^{1/\alpha},\ \ \omega>0\,. \qquad (33)$$

Дифференцирование под знаком интеграла в (33) при $\beta=\alpha$ дает

$$(-1)^n\frac{d^n}{d\lambda^n}\left(\frac{1}{\lambda^\alpha-\omega}\right)=\int_0^\infty t^{n+\alpha-1}e^{-\lambda t}E_{\alpha,\alpha}(\omega t^\alpha)dt\,.$$

Учитывая асимптотическое поведение (11) функции Миттаг-Леффлера, получим следующее неравенство

$$\sum_{j=0}^\infty\frac{(\lambda-\omega_0)^n}{n!}\left\|\frac{d^n}{d\lambda^n}R(\lambda^\alpha,A)\right\|\le\sum_{j=0}^\infty\frac{(\lambda-\omega_0)^n}{n!}\int_0^\infty t^{n+\alpha-1}e^{-\lambda t}E_{\alpha,\alpha}(\omega t^\alpha)\,dt=$$

$$= \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-\lambda t} e^{(\lambda-\omega_0)t} E_{\alpha,\alpha}(\omega t^\alpha)\, dt \le C \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-\omega_0 t} (\omega t^\alpha)^{(1-\alpha)/\alpha} \exp\left(\omega^{1/\alpha} t\right)\, dt =$$

$$= C_1 \int_0^\infty \exp\left(-\omega_0 + \omega^{1/\alpha} t\right)\, dt < K_0, \qquad \omega_0 > \omega^{1/\alpha}.$$

Таким образом, по теореме 4, $A \in \mathcal{G}^\alpha(M, \omega^{1/\alpha})$. ■

Чтобы получить представление разрешающего оператора $T_\alpha(t)$ через резольвенту от $A$, мы используем формулу обращения Поста-Уиддера, которая определяется следующей леммой (см. [12, с. 241]).

**Лемма 3.** *Пусть $u(t)$ непрерывная на $X$ функция, определенная при $t > 0$ такая, что $u(t) = O(e^{\gamma t})$ при $t \to \infty$ для некоторого $\gamma$ и пусть $L[u](\lambda)$ – преобразование Лапласа функции $u(t)$. Тогда*

$$u(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{n}{t}\right)^{n+1} \left(\frac{d^n L[u](\lambda)}{d\lambda^n}\right) \left(\frac{n}{t}\right)$$

*и сходимость равномерная на любом компакте из $(0, \infty)$.*

Лемма 3, совместно с (26) – (29), которые выполняются при любом $0 < \alpha < 1$, дает следующее утверждение.

**Теорема 7.** *Пусть $0 < \alpha < 1$, $A$ – генератор сильно непрерывной $C_0$-полугруппы, тогда соответствующий ему разрешающий оператор задачи (1), (2) имеет вид*

$$T_\alpha(t)u_0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{t}{n}\right)^{\alpha-1} \sum_{k=1}^{n+1} b^\alpha_{k,n+1} \left(I - \left(\frac{t}{n}\right)^\alpha A\right)^{-k} u_0\,, \tag{34}$$

*где $b^\alpha_{k,n}$ константы, определенные формулами (27)-(29). Сходимость равномерна по $t$ на любом компактном интервале из $(0, \infty)$ для каждого фиксированного $u_0 \in X$.*

**Теорема 8.** *Пусть $0 < \alpha < 1$. Если $T_\alpha(t)$ – разрешающий оператор задачи (1), (2), то*

$$Au_0 = \Gamma(\alpha+1) \lim_{t\to 0+} \frac{I^{1-\alpha}_{0+} T_\alpha(t)u_0 - u_0}{t^\alpha} \tag{35}$$

*для тех $u_0 \in X$, для которых этот предел существует.*

□ Для каждой функции $v(t) \in C(\overline{\mathbb{R}}_+; X)$ мы имеем

$$\lim_{t\to 0+} v(t) = \lim_{t\to 0+} \frac{\Gamma(\alpha+1) I^\alpha_{0+} v(t)}{t^\alpha}\,. \tag{36}$$

Выберем $v(t) = I^{1-\alpha}_{0+} D^\alpha_{0+} T_\alpha(t)$ и, используя (1) и (2), в левой части (36) получим

$$\lim_{t\to 0+} I^{1-\alpha}_{0+} D^\alpha_{0+} T_\alpha(t) = \lim_{t\to 0+} I^{1-\alpha}_{0+} A T_\alpha(t) u_0 = Au_0\,. \tag{37}$$

В правой части (36), применяя полугрупповое свойство операторов дробного интегродифференцирования (см. [1] формула (2.21) с. 42) и учитывая формулы (3) и (2.44) из [1], получим

$$\lim_{t\to 0+}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{t^\alpha}I^\alpha_{0+}I^{1-\alpha}_{0+}D^\alpha_{0+}T_\alpha(t)=\lim_{t\to 0+}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{t^\alpha}I^{1-\alpha}_{0+}I^\alpha_{0+}D^\alpha_{0+}T_\alpha(t)=$$

$$=\Gamma(\alpha+1)\lim_{t\to 0+}\frac{I^{1-\alpha}_{0+}(T_\alpha(t)u_0-t^{\alpha-1}u_0/\Gamma(\alpha))}{t^\alpha}=\Gamma(\alpha+1)\lim_{t\to 0+}\frac{I^{1-\alpha}_{0+}T_\alpha(t)u_0-u_0}{t^\alpha}\,. \qquad (38)$$

Равенства (37) и (38)доказывают формулу (35). ■

Отметим, что в работе [7] Бажлекова Э. исследовала задачу

$${}^C D^\alpha_{0+}u(t)=Au(t),\quad t>0,$$

$$u(0)=u_0,\; u^{(k)}(0)=0,\quad k=1,2,...,n-1,$$

где ${}^C D^\alpha_{0+}u(t)=D^\alpha_{0+}\left(u(t)-\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{t^k u^{(k)}(0)}{\Gamma(k+1)}\right)$ — дробная производная Капуто порядка $\alpha>0$, $n=[\alpha]+1$.

Разрешающий оператор $S_\alpha(t)$ этой задачи связан с резольвентой оператора $A$ соотношением (см. [7], формула (2.6)) $L[S_\alpha(t)](\lambda)=\lambda^{\alpha-1}R(\lambda^\alpha,A)$. Поскольку $0<\alpha<1$, то учитывая (6), получим

$$L[I_0^{1-\alpha}T_\alpha(t)](\lambda)=\lambda^{\alpha-1}L[T_\alpha(t)](\lambda)=\lambda^{\alpha-1}R(\lambda^\alpha,A)=L[S_\alpha(t)](\lambda).$$

Следовательно, если $0<\alpha<1$ и существует разрешающий оператор для задачи (1), (2), то существует разрешающий оператор $S_\alpha(t)$ и при этом справедливо равенство $I_0^{1-\alpha}T_\alpha(t)=S_\alpha(t)$. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Далее, рассмотрим аналитические разрешающие операторы задачи (1), (2). Пусть $\Xi(\omega,\theta)$ – открытый сектор с вершиной $\omega\in\mathbb{R}$ и углом $2\theta$ в комплексной области, симметричный относительно действительной положительной оси, то есть

$$\Xi(\omega,\theta)=\{\lambda\in\mathbb{C}:|\arg(\lambda-\omega)|<\theta\}\,,$$

и пусть $\Xi_\theta=\Xi(0,\theta)$.

**Определение 6.** *Разрешающий оператор $T_\alpha(t)$ задачи (1), (2) называется аналитическим, если $T_\alpha(t)$ допускает аналитическое продолжение в сектор $\Xi_{\theta_0}$ при некотором $\theta_0\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.*

**Теорема 9.** *Пусть* $\alpha\in(0,1)$ и $\lambda^\alpha\in\rho(A)$ для каждого $\lambda\in\Xi(\theta_0+\pi/2,\;\omega_0)$. Если для любых $\omega>\omega_0$, $\theta<\theta_0$ существует постоянная $C=C(\theta,\omega)$ такая, что

$$\|R(\lambda^\alpha,A)\|<\frac{C|\lambda|^{1-\alpha}}{|\lambda-\omega|},\qquad \lambda\in\Xi(\theta+\pi/2,\omega)\,, \qquad (39)$$

то линейный замкнутый плотно определенный оператор $A$ является генератором аналитического разрешающего оператора $T_\alpha(t)$, удовлетворяющего неравенству

$$\|T_\alpha(t)\| \leqslant M(|t|)e^{(\omega+\varepsilon)\mathrm{Re}\ t}, \quad t \in \Xi_{\theta_0} \tag{40}$$

с некоторой функцией $M(s) = M_{\theta,\omega}(s)$, принадлежащей $L^1(\mathbb{R}_+)$.

□ Пусть $t \in \Xi_\theta$ для всех $\theta < \theta_0$ и пусть $\delta \in (\theta, \theta_0)$, $\omega > \omega_0$, $\varrho > 0$. Положим

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda t} R(\lambda^\alpha, A)d\lambda\,, \tag{41}$$

где контур $\Gamma = \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2 \bigcup \Gamma_3$, $\Gamma_1 = \big\{\omega + re^{-i(\pi/2+\delta)},\ \varrho \le r < \infty\big\}$, $\Gamma_2 = \{\omega + \varrho e^{i\varphi}$, $|\varphi| \le \pi/2 + \delta\}$, $\Gamma_3 = \big\{\omega + re^{i(\pi/2+\delta)},\ \ \varrho \le r < \infty\big\}$. Направление на контуре определяется движением из нижней полуплоскости в верхнюю. Пусть $\varrho = \dfrac{1}{|t|}$ и $a = \sin(\delta - \theta)$. Тогда из (41), учитывая (39), получим оценку

$$\|T(t)\| \le \frac{C}{2\pi}\int_\Gamma e^{\mathrm{Re}(\lambda t)}|\lambda|^{1-\alpha}\frac{ds}{|\lambda - \omega|}\ . \tag{42}$$

Интегралы по контурам $\Gamma_1$ и $\Gamma_3$ равны. Поэтому рассмотрим только один из них, а именно, по контуру $\Gamma_3$. Так как $t \in \Xi_\theta$, то есть $t = |t|e^{-i\theta}$, и угол наклона переменной $\lambda$ на этом контуре фиксирован, то получаем следующие соотношения:

$$\lambda = \omega + re^{i(\pi/2+\delta)}, \quad \mathrm{Re}(\lambda t) = \omega\mathrm{Re}\ t + r\ |t|\ \cos\Big(\frac{\pi}{2} + \delta - \theta\Big) = \omega\mathrm{Re}\ t - a\ r\ |t|,$$

$$|\lambda| \le |r - \omega| \le r + \omega, \quad |\lambda - \omega| = r\,, \quad ds = dr\,.$$

Поэтому

$$\int_{\Gamma_3} e^{\mathrm{Re}(\lambda t)}|\lambda|^{1-\alpha}\frac{ds}{|\lambda-\omega|} \le \int_\varrho^\infty e^{\omega\mathrm{Re} t - ar|t|}(r+\omega)^{1-\alpha}\frac{dr}{r} \le e^{\omega\mathrm{Re}\ t}|t|^{\alpha-1}\int_1^\infty e^{-as}(s+\omega|t|)^{1-\alpha}\frac{ds}{s}$$

$$\le M_0 e^{\omega\mathrm{Re}\ t}|t|^{\alpha-1}\left(\int_1^\infty e^{-as}\frac{ds}{s^\alpha} + (\omega|t|)^{1-\alpha}\int_1^\infty e^{-as}\frac{ds}{s}\right). \tag{43}$$

Учитывая, что $t \in \Xi_\theta$, то есть $|t| = \mathrm{Re}\ t\cos\theta$, а также сходимость интегралов в (43), получим

$$\int_{\Gamma_3} e^{\mathrm{Re}(\lambda t)}|\lambda|^{1-\alpha}\frac{ds}{|\lambda-\omega|} \le M(|t|)e^{(\omega+\varepsilon)\mathrm{Re}\ t}. \tag{44}$$

Теперь рассмотрим интеграл по контуру $\Gamma_2 = \{\omega + \varrho e^{i\varphi},\ \ |\varphi| \le \pi/2 + \delta\}$, на котором

$$\lambda = \omega + \varrho e^{i\varphi}, \quad \mathrm{Re}(\lambda t) = \omega\mathrm{Re}\ t + \varrho|t|\cos\varphi,$$

$$|\lambda| \le \omega + \varrho, \quad |\lambda - \omega| = \varrho, \quad ds = \varrho\ d\varphi, \quad \varrho = \frac{1}{|t|}\ .$$

После элементарных преобразований будем иметь

$$\int_{\Gamma_2} e^{\mathrm{Re}(\lambda t)}|\lambda|^{1-\alpha}\frac{ds}{|\lambda-\omega|} \le 2\int_0^{\pi} e^{\omega \mathrm{Re}\ t} e^{\varrho|t|\cos\varphi}(\omega+\varrho)^{1-\alpha}\,d\varphi \le$$

$$\le 2e^{\omega \mathrm{Re}\ t}\left(\omega+\frac{1}{|t|}\right)^{1-\alpha}\int_0^{\pi} e^{\cos\varphi}\,d\varphi \le M(|t|)e^{(\omega+\varepsilon)\mathrm{Re}\ t}. \tag{45}$$

Из (42)-(45) следует

$$\|T(t)\| \le M(|t|)e^{\omega_0 \mathrm{Re}\ t}, \qquad \omega_0 > \omega\,.$$

Эта оценка показывает, что интеграл в (41) абсолютно сходится при $t\in\Sigma_\theta$, поэтому $T(t)$ является аналитическим в этой области и выполняется оценка (40).

Далее зафиксируем $\lambda$ такое, что $\mathrm{Re}\ \lambda>\omega$ и возьмем $\varrho<\mathrm{Re}\ \lambda$. Тогда для преобразования Лапласа функции $T(t)$, определенной формулой (41), имеем

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda t}T(t)dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} R(\mu^{\alpha},A)\int_0^{\infty} e^{-(\lambda-\mu)t}dtd\mu = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma\cup ze^{i\psi}}\frac{R(\mu^{\alpha},A)}{\mu-\lambda}\,d\mu\,,\ \ |\arg\psi|\ge\theta\,. \tag{46}$$

В (46) мы использовали теорему Фубини и учли, что интеграл по контуру $re^{i\psi}, |\arg\psi|\ge\theta$ от аналитической убывающей функции $\dfrac{R(\mu^{\alpha},A)}{\mu-\lambda}$ стремится к нулю при $r\to\infty$, а следовательно, интегралы по контурам $\Gamma$ и $\Gamma\cup re^{i\psi}, |\arg\psi|\ge\theta$ совпадают.

Далее, используя теорему Коши, переходим от интеграла по контуру $\Gamma\cup re^{i\psi}$ к интегралу по контуру $C_\rho=\{\mu:|\lambda-\mu|=\rho\}\subset\varrho(A)$. Откуда, после применения интегральной формулы Коши, окончательно получим

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda t}T(t)dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{R(\mu^{\alpha},A)}{\mu-\lambda}\,d\mu = R(\lambda^{\alpha},A), \qquad C_\rho=\{\mu:|\lambda-\mu|=\rho\}\subset\varrho(A).$$

Таким образом, мы доказали, что выполняются условия теоремы 5 и, следовательно, $A\in\mathcal{G}^{\alpha}(M,\omega)$, а соответствующий разрешающий оператор $T_\alpha(t)$ равен $T(t)$. ■

Непосредственно из теоремы 9 получим утверждение.

**Следствие 1.** *Пусть $\alpha\in(0,1)$. Тогда оператор $A$ является генератором аналитического разрешающего оператора $T_\alpha(t)$ при $t\in\Xi_{\theta_0}$, если $\rho(A)\supset\Xi_{\alpha(\pi/2+\theta_0)}$ и для каждого $\theta<\theta_0$ выполняется оценка*

$$\|R(\lambda,A)\| \le \frac{C}{|\lambda|}\,, \qquad \lambda\in\Xi_{\alpha(\pi/2+\theta)}\,. \tag{47}$$

**Следствие 2.** *Если $\varrho(A)\supset\{\lambda: Re\lambda>0\}$ и для некоторой постоянной $C$ выполняется*

$$\|R(\lambda,A)\| \le \frac{C}{Re\ \lambda}\,, \quad Re\ \lambda>0, \tag{48}$$

*то для любого* $\alpha \in (0,1)$ *оператор* $A$ *является генератором аналитического разрешающего оператора* $T_\alpha(t)$ *при* $t \in \Xi_\theta$, *где* $\theta = \min\left\{\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$ .

□ Зафиксируем $\alpha \in (0,1)$ и $\theta_0 = \left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{\pi}{2}$ . Тогда $\alpha\left(\frac{\pi}{2}+\theta_0\right) < \frac{\pi}{2}$ и, таким образом, $\Xi_{\alpha(\pi/2+\theta_0)} \subset \varrho(A)$. Выбирая $\beta$ такое, что $\alpha\left(\frac{\pi}{2}+\theta_0\right) < \beta < \frac{\pi}{2}$ , получаем

$$\|R(\lambda, A)\| \le \frac{C}{\mathrm{Re}\lambda} = \frac{C}{|\lambda|\cos\varphi} < \frac{C}{|\lambda|\cos\beta}, \qquad \lambda \in \Xi_{\alpha(\pi/2+\theta)} ,$$

где $\varphi = \arg\lambda$, и, следовательно, выполняется (47).

**Пример 1.** При $0 < \alpha < 1$ рассмотрим задачу типа Коши с линейным ограниченным оператором $A$

$$D^\alpha_{0+}u(t) = Au(t) , \quad t > 0 ,$$
$$\lim_{t\to 0+} D^{\alpha-1}_{0+}u(t) = u_0 .$$

Ее решением является функция $u(t) = T(t)u_0 = t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha A)u_0$. Покажем, что резольвента ограниченного оператора $A$ удовлетворяет оценке (39). Действительно,

$$\|R(\lambda^\alpha, A)\| = \left\|(\lambda^\alpha I - A)^{-1}\right\| = \left\|\lambda^{-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{A}{\lambda^\alpha}\right)^n\right\| \le$$
$$\le \frac{1}{|\lambda|^\alpha - \|A\|} \le \frac{C|\lambda|^{1-\alpha}}{|\lambda - \omega^{1/\alpha}|} , \qquad \omega = \|A\|, \quad \mathrm{Re}\,\lambda > \omega^{1/\alpha} .$$

**Пример 2.** При $\alpha \in (0,1)$, $\theta \in [0,\pi)$ рассмотрим задачу

$$D^\alpha_{0+}u(x,t) = -e^{i\theta}u_x(x,t) , \quad 0 < x < 1 , \quad t > 0 ,$$
$$D^{\alpha-1}_{0+}u(x,0) = f(x) , \quad u(0,t) = 0 .$$

Положим $X = L^p(0,1)$, $A_\theta = -e^{i\theta}\frac{\partial}{\partial x}$ и $D(A_\theta)$ состоит из всех измеримых на $(0,1)$ функций $f(x)$ таких, что $f(0) = 0$. Оператор $A_0$ генерирует сжимающую $C_0$-полугруппу и

$$\|R(\lambda, A_0)\| \le \frac{1}{\mathrm{Re}\,\lambda} , \quad \mathrm{Re}\,\lambda > 0 . \tag{49}$$

Тогда, используя следствие 2, получим, что $A_0$ является генератором аналитического разрешающего оператора $T_\alpha(t)$ при $t \in \Xi_{\theta_0}$, где $\theta_0 = \min\left\{\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$.

При $\theta \in (0,\pi)$ из (49) имеем

$$\|R(\lambda, A_\theta)\| = \|R(\lambda, e^{i\theta}A_0)\| = \|R(e^{-i\theta}\lambda, A_0)\| \le \frac{1}{|\lambda|\cos(\varphi-\theta)} , \quad \lambda \in \Xi_{\pi/2-\theta} ,$$

где $\varphi = \arg\lambda$. Следовательно, $\Xi_{\pi/2-\theta} \subset \rho(A_0)$ и

$$\|R(\lambda, A_\theta)\| \leq \frac{M(\varepsilon)}{|\lambda|}\,, \quad \lambda \in \Xi_{\pi/2-\theta-\varepsilon}\,.$$

Откуда заключаем, что $A_\theta$ является генератором аналитического разрешающего оператора при $t \in \Xi_\psi$, где $\psi = \min\left\{\dfrac{\pi/2-\theta}{\alpha} - \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right\}$, если $|\theta| < (1-\alpha)\dfrac{\pi}{2}$.

В дальнейших исследованиях нами будет использована неотрицательная функция (см. [13, с. 357])

$$f_{\tau,\nu}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \exp\left(tz - \tau z^\nu\right)\, dz\,, & t \geqslant 0\,, \\ 0, \quad t < 0\,, \end{cases} \tag{50}$$

где $\sigma > 0$, $\tau > 0$, $0 < \nu < 1$, и ветвь функции $z^\nu$ выбрана так, что $\mathrm{Re}\, z^\nu > 0$ при $\mathrm{Re}\, z > 0$. Эта ветвь является однозначной функцией на комплексной $z$-плоскости с разрезом по отрицательной части вещественной оси. Сходимость интеграла (50) обеспечивается множителем $\exp\left(-\tau z^\nu\right)$.

Заметим также, что функция $f_{\tau,\nu}(t)$ при $t > 0$ может быть выражена через функцию Райта (см. [1, с. 54])

$$f_{\tau,\nu}(t) = t^{-1}\phi\left(-\nu, 0; -\tau t^{-\nu}\right), \qquad \phi(a,b;z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!\;\Gamma(ak+b)}\,,$$

или через более общую функцию типа Райта (см. [3, гл. 1])

$$f_{\tau,\nu}(t) = t^{-1} e^{1,0}_{1,\nu}\left(-\tau t^{-\nu}\right)\,,\ e^{\mu,\delta}_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\mu)\;\Gamma(\delta-\beta k)}\,,\ \alpha > \max\{0;\beta\}\,,\ \mu, z \in C. \tag{51}$$

**Теорема 10.** *Пусть $0 < \alpha < \beta \leq 1$, $\gamma = \alpha/\beta$, $\omega \geq 0$. Если $A \in \mathcal{G}^\beta(M,\omega)$ и при этом $M(t) = Ct^{\beta-1}$ $(C > 0)$, то $A \in \mathcal{G}^\alpha(M_1,\omega_1)$ с функцией $M_1(t) = C_1 t^{\alpha-1} \in L^1(R_+)$ и $\omega_1 > \omega^{1/\gamma}$. В этом случае имеет место следующее представление*

$$T_\alpha(t)u_0 = \int_0^\infty f_{\tau,\gamma}(t) T_\beta(\tau) u_0\, d\tau\,, \tag{52}$$

*где функция $f_{\tau,\gamma}(t)$ определяется равенством* (50).

Доказательство теоремы приводится в [14].

**Теорема 11.** *Пусть выполнены условия теоремы 10. Тогда разрешающий оператор $T_\alpha(t)$ задачи (1), (2) обладает следующими свойствами:*

*1) $T_\alpha(t)$ допускает аналитическое продолжение в сектор $\Xi_{\min\{\theta(\gamma),\pi\}}$,*
*2) если $\omega = 0$, то $\|T_\alpha(t)\| \leq C|t|^{\alpha-1}$, где $t \in \Xi_{\min\{\theta(\gamma),\pi\}-\varepsilon}$, $\quad C = C(\gamma,\varepsilon)$,*

*3) если* $\omega > 0$, *то* $\|T_\alpha(t)\| \le C|t|^{\alpha-1}e^{\delta\ \mathrm{Re}\ t}$, *где* $t \in \Xi_{\min\{\theta(\gamma),\ \pi/2\}-\varepsilon}$, $\delta = \delta(\gamma,\varepsilon)$, $C = C(\delta,\gamma,\varepsilon)$.

□ Пусть

$$\|T_\beta(t)\| \le M(t)e^{\omega t}, \quad t > 0 \tag{53}$$

и $\Xi = \Xi_{\min\{\theta(\gamma),\pi\}}$. Функция под знаком интеграла в (52) является аналитической при $t \in \Xi$ и $1/(1-\gamma) > 1$ для $0 < \gamma < 1$. Следовательно, интеграл в (52) абсолютно и равномерно сходится на компактных подмножествах сектора $\Xi$. Отсюда следует, что функция $T_\alpha(t)$, заданная формулой (52), является аналитической функцией в $\Xi$, что доказывает 1).

Обозначим через $C_n$ положительные константы, не зависящие от $t$. Пусть $t \in \Xi_{\min\{\theta(\gamma),\pi\}-\varepsilon}$. Тогда (52) и (53) совместно дают оценку

$$\|T_\alpha(t)\| \le \int_0^\infty |f_{\tau,\gamma}(t)|\,\|T_\beta(\tau)\|\ d\tau \le \int_0^\infty |f_{\tau,\gamma}(t)|M(\tau)e^{\omega\tau}d\tau \le$$

$$\le C_2\int_0^\infty f_{\tau,\gamma}(|t|)\ \tau^{\beta-1}d\tau + C_2\int_0^\infty f_{\tau,\gamma}(|t|)\ e^{\omega\tau}\ d\tau\,.$$

Учитывая равенства (см. [3, формулы (2.2.3), (2.2.31)])

$$\int_0^\infty f_{\tau,\nu}(|t|)\ \tau^{\beta-1}\ d\tau = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\nu\beta)}\ |t|^{\nu\beta-1}, \quad \int_0^\infty f_{\tau,\nu}(|t|)\ e^{\omega\tau}\ d\tau = |t|^{\nu-1}\ E_{\nu,\nu}\left(\omega|t|^\nu\right),$$

получаем

$$\|T_\alpha(t)\| \le C_2\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)}\ |t|^{\alpha-1} + C_2|t|^{\gamma-1}\ E_{\gamma,\gamma}(\omega|t|^\gamma)\,. \tag{54}$$

При $\omega = 0$ из (54) получим оценку

$$\|T_\alpha(t)\| \le C_3\left(\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)}\ |t|^{\alpha-1} + |t|^{\gamma-1}\right) \le C_4|t|^{\alpha-1},$$

которая и доказывает 2).

При $\omega > 0$ из (54) с учетом (12) следует

$$\|T_\alpha(t)\| \le C_4|t|^{\alpha-1}e^{\omega_0|t|} \le C_4|t|^{\alpha-1}e^{\delta\ \mathrm{Re}\ t}, \quad \omega_0 > \omega^{1/\gamma},$$

что и доказывает свойство 3). ■

**Следствие 3.** *Пусть функция* $M(t)$ *такая, что*

$$\int_0^\infty e^{-\nu t}M(t)\ dt \le \frac{1}{\nu^\alpha} \quad \nu > 0. \tag{55}$$

*Если* $A \in \mathcal{G}^\alpha(M,0)$ *для некоторого* $\alpha \in (0,1)$, *то* $A \in \mathcal{G}^\alpha(M,0)$ *при любом* $\alpha \in (0,1)$.

□ Если $A \in \mathcal{G}^\alpha(M,0)$ для некоторого $\alpha \in (0,1)$ , то по теореме 4 $(0,\infty) \subseteq \varrho(A)$. Таким образом, учитывая представление (17) и условие (55), получим оценку

$$\|R(\lambda^\alpha, A)\| \le \int_0^\infty e^{-\lambda t}M(t)\ dt \le \frac{1}{\lambda^\alpha}\,, \quad \lambda > 0\,,$$

из которой, в силу теоремы Хилле-Иосиды, следует, что оператор $A$ является генератором сильно непрерывной $C_0$-полугруппы. Тогда, по теореме 6, $A \in \mathcal{G}^\alpha(M,0)$ для любого $\alpha \in (0,1)$. ■.

**Следствие 4.** *Пусть $\alpha \in (0,1)$ и $A \in \mathcal{G}^\alpha(M,0)$ с мажорантой $M(t)$ такой, что*

$$\int_0^\infty e^{-\nu t} M(t) \le \frac{K}{\nu^\alpha}\,, \quad K > 0\,.$$

*Тогда $T_\alpha(t)$ является аналитическим разрешающим оиератором.*

□ В силу леммы 1, имеют место включение $\{\lambda^\alpha : \mathrm{Re}\,\lambda > \omega\} \subseteq \rho(A)$ и представление (6)

$$R(\lambda^\alpha, A) u_0 = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_\alpha(t)\, dt\,.$$

Поскольку

$$\|R(\lambda^\alpha, A)\| \le \left\| \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_\alpha(t)\, dt \right\| \le \int_0^\infty e^{-\mathrm{Re}\,\lambda t} M(t)\, dt \le \frac{K}{\mathrm{Re}\,\lambda^\alpha}\,, \quad \lambda > 0\,,$$

то по следствию 2 $T_\alpha(t)$ является аналитическим разрешающим оператором.

**Литература**


1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / Минск: Наука и техника, 1987.
2. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and application of fractional differential equation / Math. Studies / Elsevier, 2006.
3. Псху А.В. Краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными дробного и континуального порядка / Нальчик: НИИ ПМА КБНЦ РАН, 2005.
4. Кочубей А.Н. Задача Коши для эволюционных уравнений дробного порядка // Дифференциальные уравнения. – 1989. – 25;8. – С.1359-1368.
5. Bajlekova E. Fractional evolution equations in banach spaces / Ph. D. Thesis / Eindhoven: Eindhoven University of Technology, 2001.
6. Clement Ph., Gripenberg G., Londen S.-O. Regularity properties of solutions of fractional evolution equation. Evolution equations and their applications in physical and life sciences (Bad Herrenalb, 1998)/ Lecture Notes in Pure and Appl. Math. – 215 / New York: Dekker, 2001. – P.235-246.
7. Костин В.А. К задаче Коши для абстрактных дифференциальных уравнений с дробными производными // ДАН СССР. – 1992. – 326;4. – С.597-600.
8. Глушак А.В. О задаче типа Коши для абстрактного дифференциального уравнения с дробной производной // Вестн. Воронежского гос. ун-та. Сер. физ., матем. – 2001. – №2. – С.74-77.
9. Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области / М.: Наука, 1966.
10. Goldstein J. Semigroups and second order differential equations // J. Functional Analysis. – 1969. – 4. – P.50-70.
11. Prüss J. Evolutionary integral equations and applications / Basel, 1993.
12. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы / М.: Изд-во иностраной литературы, 1962.
13. Иосида К. Функциональный анализ / М.: Мир, 1967.

14. Авад Х.К., Глушак А.В. О возмущении абстрактного дифференциального уравнения, содержащего дробные производные Римана-Лиувилля // Дифференц. уравнения. – 2010. – 46;6. – С.859-873.

## ABOUT SOLVABILITY OF CAUCHY-TYPE PROBLEM FOR ABSTRACT DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH FRACTIONAL RIEMANN-LIOUVILLE DERIVATIVE

**A.V. Glushak, T.A. Manaenkova**

Belgorod State University,
Studencheskaja St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: Glushak@bsu.edu.ru, Manaenkova@bsu.edu.ru

**Abstract.** The criterion of well-posed solvability of Cauchy-type problem for abstract differential equations with fractional Riemann-Liouville derivative is found.

**Key words:** differential equation with fractional derivative, abstract Cauchy-type problem, criterion of solvability.