

*МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА,
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ*

УДК 537.8

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ВОЗБУЖДЕНИЯ
ДИФРАГИРОВАННОГО ПЕРЕХОДНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ
РЕЛЯТИВИСТСКИМ ЭЛЕКТРОНОМ
В СЛОИСТОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СРЕДЕ****С.В. Блажевич*, М.Н. Бекназаров*,
И.В. Колосова**, А.В. Носков*****Белгородский государственный университет,
ул. Победы 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: blazh@bsu.edu.ru**Белгородский университет кооперации, экономики и права,
ул.Садовая, 116а, Белгород, 308023, Россия, e-mail: noskovbupk@mail.ru

Аннотация. Построена теория когерентного рентгеновского излучения релятивистского электрона пересекающего искусственную периодическую среду в геометрии рассеяния Лауэ. Получены и исследованы выражения, описывающие спектрально-угловые характеристики излучения в направлении рассеяния Брэгга. Излучение рассматривается по аналогии с излучением в кристаллической среде как результат когерентного сложения вкладов двух механизмов излучения – параметрического рентгеновское (ПРИ) и дифрагированного переходного (ДПИ). Показано, что выход ДПИ из слоистой мишени может более чем на порядок превышать выход излучения частицы в монокристаллическом радиаторе в аналогичных условиях.

Ключевые слова: излучение релятивистского электрона, переходное излучения, динамическая теория дифракции, геометрия рассеяния Лауэ.

Введение

При пересечении заряженной частицы входной поверхности кристаллической пластинки возникает переходное излучение (ПИ) [1], которое затем дифрагирует на системе параллельных атомных плоскостей кристалла, образуя дифрагированное переходное излучение ДПИ [2-4]. Вместе с тем при пересечении заряженной частицей кристаллической пластинки, ее кулоновское поле рассеивается на системе параллельных атомных плоскостей кристалла, порождая параметрическое рентгеновское излучения (ПРИ) [5-7]. В схеме симметричного отражения, когда система дифрагирующих атомных плоскостей кристалла перпендикулярна (геометрия рассеяния Лауэ) или параллельна (рассеяние Брэгга) поверхности кристаллической пластинки, эти механизмы излучения в двухволновом приближение динамической теории дифракции рассматривались в работах [8-11]. В общем случае асимметричного отражения излучения от пластинки, когда дифрагирующие атомные плоскости составляют произвольный угол с поверхностью пластинки, динамические эффекты в ПРИ и ДПИ рассматривались в работах [12-15], в

которых было показано, что, меняя асимметрию отражения, можно существенно увеличить выходы излучений. Традиционно излучение релятивистской частицы в периодически слоистой структуре рассматривалось в геометрии рассеяния Брэгга для случая, когда отражающие слои параллельны входной поверхности, то есть для случая симметричного отражения. Излучение в периодической слоистой структуре обычно рассматривалось как резонансное переходное излучение [5,16]. В работе [17] излучение из искусственной периодической среды представлено в виде суммы дифрагированного переходного излучения (ДПИ) и параметрического рентгеновского излучения (ПРИ). В цитируемых работах излучение релятивистской частицы в искусственной периодической структуре рассматривалось только лишь в геометрии рассеяния Брэгга в частном случае симметричного отражения поля частицы относительно поверхности мишени, т.е. когда дифрагирующие слои располагаются параллельно поверхности мишени.

В настоящей работе рассматривается когерентное рентгеновское излучение релятивистского электрона в направлении рассеяния Брэгга, пересекающего искусственную периодическую структуру в геометрии рассеяния Лауэ. По аналогии с кристаллической средой когерентное излучение рассматривается как сумма ПРИ и ДПИ. На основе двухволнового приближения динамической теории дифракции [18] получены выражения, описывающие спектрально-угловые характеристики излучений.

1. Амплитуда излучения

Пусть релятивистский электрон пересекает со скоростью \mathbf{V} многослойную структуру (рис. 1), состоящую из периодически расположенных аморфных слоев толщиной a и b ($T = a + b$ -период структуры) и имеющие соответственно диэлектрические восприимчивости χ_a и χ_b .

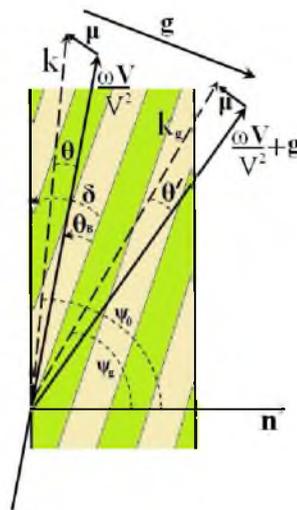


Рис. 1. Геометрия процесса излучения и система обозначений используемых величин; θ и θ' – углы излучения, θ_B – угол Брэгга, k_i и k_g – волновые вектора подающего и дифрагированного фотона.



Рассмотрим уравнение для Фурье-образа электромагнитного поля

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = \int dt d^3\mathbf{r} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \exp(i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r}). \quad (1)$$

Будем использовать двухволновое приближение динамической теории дифракции в которой падающая и дифрагированная волна рассматриваются равноправными. Так как поле релятивистской частицы можно считать практически поперечным, то падающая $\mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \omega)$ и дифрагированная $\mathbf{E}_g(\mathbf{k}, \omega)$ электромагнитные волны, определяются двумя амплитудами с разными значениями поперечной поляризации:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \omega) &= \mathbf{E}_0^{(1)}(\mathbf{k}, \omega)\mathbf{e}_0^{(1)} + \mathbf{E}_0^{(2)}(\mathbf{k}, \omega)\mathbf{e}_0^{(2)}, \\ \mathbf{E}_g(\mathbf{k}, \omega) &= \mathbf{E}_g^{(1)}(\mathbf{k}, \omega)\mathbf{e}_1^{(1)} + \mathbf{E}_g^{(2)}(\mathbf{k}, \omega)\mathbf{e}_1^{(2)}, \end{aligned} \quad (2)$$

где векторы $\mathbf{e}_0^{(1)}$ и $\mathbf{e}_0^{(2)}$ перпендикулярны вектору \mathbf{k} , а векторы $\mathbf{e}_1^{(1)}$ и $\mathbf{e}_1^{(2)}$ перпендикулярны вектору $\mathbf{k}_g = \mathbf{k} + \mathbf{g}$. Векторы $\mathbf{e}_0^{(2)}$, $\mathbf{e}_1^{(2)}$ лежат в плоскости векторов \mathbf{k} и \mathbf{k}_g (π -поляризация), а вектора $\mathbf{e}_0^{(1)}$ и $\mathbf{e}_1^{(1)}$ перпендикулярны ей (σ -поляризация). Вектор \mathbf{g} аналогичен вектору обратной решетке в кристалле, он перпендикулярен слоям среды и его длина равна $g = 2\pi n/T$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Система уравнений для Фурье-образа электромагнитного поля в двухволновом приближение динамической теории дифракции имеет следующий вид [19]:

$$\begin{cases} (\omega^2(1 + \chi_0) - k^2)E_0^{(s)} + \omega^2\chi_{-\mathbf{g}}C^{(s)}E_g^{(s)} = 8\pi^2 i e \omega \theta V P^{(s)} \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{V}), \\ \omega^2\chi_{\mathbf{g}}C^{(s)}E_0^{(s)} + (\omega^2(1 + \chi_0) - k_g^2)E_g^{(s)} = 0, \end{cases} \quad (3)$$

где $\chi_{\mathbf{g}}$, $\chi_{-\mathbf{g}}$ – коэффициенты Фурье разложения диэлектрической восприимчивости периодической структуры по векторам \mathbf{g} :

$$\chi(\omega, \mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{g}} \chi_{\mathbf{g}}(\omega) \exp(i\mathbf{g}\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{g}} (\chi'_{\mathbf{g}}(\omega) + i\chi''_{\mathbf{g}}(\omega)) \exp(i\mathbf{g}\mathbf{r}). \quad (4)$$

Величины $C^{(s)}$ и $P^{(s)}$ в системе (3) определены следующим образом:

$$C^{(s)} = \mathbf{e}_0^{(s)}\mathbf{e}_1^{(s)}, \quad C^{(1)} = 1, \quad C^{(2)} = \cos 2\theta_B,$$

$$P^{(s)} = \mathbf{e}_0^{(s)}(\boldsymbol{\mu}/\mu), \quad P^{(1)} = \sin \varphi, \quad P^{(2)} = \cos \varphi, \quad (5)$$

где $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{k} - \omega\mathbf{V}/V^2$ – составляющая импульса виртуального фотона, перпендикулярная скорости частицы \mathbf{V} ($\mu = \omega\theta/V$, где $\theta \ll 1$ – угол между векторами \mathbf{k} и \mathbf{V}), θ_B – угол Брэгга, φ – азимутальный угол излучения, который отсчитывается от плоскости, образованном векторами скорости \mathbf{V} и вектором \mathbf{g} , который перпендикулярный отражающим слоям. Длину вектора \mathbf{g} также можно выразить через угол Брэгга и частоту Брэгга ω_B : $g = 2\omega_B \sin \theta_B/V$. Угол между вектором $\frac{\omega\mathbf{V}}{V^2}$ волновым вектором падающей



волны \mathbf{k} обозначен θ , а угол между вектором $\frac{\omega \mathbf{V}}{V^2} + \mathbf{g}$ и волновым вектором дифрагированной волны \mathbf{k}_g обозначен θ' . Система уравнений (3) при параметре $s = 1$ описывает поля σ - поляризованные, а при $s = 2$ π -поляризованные. Величины χ_0 и χ_g имеют следующий вид:

$$\chi_0(\omega) = \frac{a}{T}\chi_a + \frac{b}{T}\chi_b, \quad \chi_g(\omega) = \frac{\exp(-iga) - 1}{igT}(\chi_b - \chi_a).$$

$$\chi'_0 = \frac{a}{T}\chi'_a + \frac{b}{T}\chi'_b, \quad \chi''_0 = \frac{a}{T}\chi''_a + \frac{b}{T}\chi''_b,$$

$$\operatorname{Re}\sqrt{\chi_g\chi_{-g}} = \frac{2\sin\left(\frac{ga}{2}\right)}{gT}(\chi'_b - \chi'_a), \quad \operatorname{Im}\sqrt{\chi_g\chi_{-g}} = \frac{2\sin\left(\frac{ga}{2}\right)}{gT}(\chi''_b - \chi''_a). \quad (6)$$

Решая получаемое из системы (3) дисперсионное уравнение

$$(\omega^2(1 + \chi_0) - k^2)(\omega^2(1 + \chi_0) - k_g^2) - \omega^4\chi_{-g}\chi_g C^{(s)^2} = 0, \quad (7)$$

стандартными методами динамической теории [18], найдем k и k_g

$$k = \omega\sqrt{1 + \chi_0} + \lambda_0, \quad k_g = \omega\sqrt{1 + \chi_0} + \lambda_g. \quad (8)$$

$$\lambda_g^{(1,2)} = \frac{\omega}{4} \left(\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\chi_g\chi_{-g}C^{(s)^2}\frac{\gamma_g}{\gamma_0}} \right), \quad (9)$$

$$\lambda_0^{(1,2)} = \omega\frac{\gamma_0}{4\gamma_g} \left(-\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\chi_g\chi_{-g}C^{(s)^2}\frac{\gamma_g}{\gamma_0}} \right), \quad (10)$$

где $\beta = \alpha - \chi_0(1 - \gamma_g/\gamma_0)$, $\alpha = \omega^{-2}(k_g^2 - k^2)$, $\gamma_0 = \cos\psi_0$, $\gamma_g = \cos\psi_g$, ψ_0 – угол между волновым вектором подающей волны \mathbf{k} и вектором нормали к поверхности пластинки \mathbf{n} , ψ_g – угол между волновым вектором \mathbf{k}_g и вектором \mathbf{n} (см. рис. 1). Динамические добавки λ_0 и λ_g для рентгеновских волн связаны соотношением:

$$\lambda_g = \frac{\omega\beta}{2} + \lambda_0\frac{\gamma_g}{\gamma_0}. \quad (11)$$

Так как динамические добавки малы $|\lambda_0| \ll \omega$, $|\lambda_g| \ll \omega$, то можно показать, что $\theta \approx \theta'$ (см. рис. 1), и поэтому в дальнейшем угол θ' будем обозначать θ .

Решение системы уравнений (3) для дифрагированного поля в периодической структуре представим в виде:

$$E_g^{(s)cr} = -\frac{8\pi^2 ieV\theta P^{(s)}}{\omega} \frac{\omega^2\chi_g C^{(s)}}{4\frac{\gamma_0^2}{\gamma_g^2} \left(\lambda_g - \lambda_g^{(1)}\right) \left(\lambda_g - \lambda_g^{(2)}\right)} \delta(\lambda_g - \lambda_g^*) + \\ + E_g^{(s)(1)} \delta(\lambda_g - \lambda_g^{(1)}) + E_g^{(s)(2)} \delta(\lambda_g - \lambda_g^{(2)}), \quad (12a)$$



где $\lambda_0^* = \omega (\gamma^{-2} + \theta^2 - \chi_0) / 2$, $\lambda_g^* = \frac{\omega\beta}{2} + \frac{\gamma_g}{\gamma_0} \lambda_0^*$, $\gamma = 1/\sqrt{1 - V^2}$ – лоренц-фактор частицы, $E_g^{(s)(1)}$ и $E_g^{(s)(2)}$ – свободные дифрагированные поля в кристалле.

Для поля в вакууме перед радиатором решение системы (3) имеет вид:

$$\begin{aligned} E_0^{(s)vacI} &= \frac{8\pi^2 ieV\theta P^{(s)}}{\omega} \frac{1}{-\chi_0 - \frac{2}{\omega}\lambda_0} \delta(\lambda_0 - \lambda_0^*) = \\ &= \frac{8\pi^2 ieV\theta P^{(s)}}{\omega} \frac{1}{\frac{\gamma_0}{\gamma_g} \left(-\chi_0 - \frac{2}{\omega} \frac{\gamma_0}{\gamma_g} \lambda_g + \beta \frac{\gamma_0}{\gamma_g}\right)} \delta(\lambda_g - \lambda_g^*), \end{aligned} \quad (12)$$

где используется соотношение $\delta(\lambda_0 - \lambda_0^*) = \frac{\gamma_g}{\gamma_0} \delta(\lambda_g - \lambda_g^*)$. Наоборот, дифрагированное поле в вакууме позади радиатора имеет вид:

$$E_g^{(s)vac} = E_g^{(s)Rad} \delta\left(\lambda_g + \frac{\omega\chi_0}{2}\right), \quad (12)$$

где $E_g^{(s)Rad}$ – поле когерентного излучения вблизи направления Брэгга.

Из второго уравнения системы (3) следует выражение, связывающее дифрагированное и падающее поля в среде:

$$E_0^{(s)cr} = \frac{2\omega\lambda_g}{\omega^2\chi_g C^{(s)}} E_g^{(s)cr}. \quad (13)$$

Для определения амплитуды поля $E_g^{(s)Rad}$ воспользуемся обычными граничными условиями на входной и выходной поверхностях кристаллической пластинки:

$$\int E_0^{(s)vacI} d\lambda_0 = \int E_0^{(s)cr} d\lambda_0, \quad (14a)$$

$$\int E_g^{(s)cr} d\lambda_0 = 0, \quad (14б)$$

$$\int E_g^{(s)cr} \exp\left(i\frac{\lambda_g}{\gamma_g}L\right) d\lambda_g = \int E_g^{(s)vac} \exp\left(i\frac{\lambda_g}{\gamma_g}L\right) d\lambda_g. \quad (14в)$$

Поле излучения представим в виде двух слагаемых:

$$E_g^{(s)Rad} = E_{ПРИ}^{(s)} + E_{ДПИ}^{(s)}, \quad (15a)$$

$$E_{ПРИ}^{(s)} = -\frac{8\pi^2 ieV\theta P^{(s)}}{\omega} \frac{\omega^2\chi_g C^{(s)}}{8\sqrt{\beta^2 + 4\chi_g\chi_{-g} C^{(s)2} \frac{\gamma_g}{\gamma_0}}} \cdot \frac{\gamma_g}{\gamma_0\lambda_0^*} \times$$

$$\left[\left(\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\chi_g\chi_{-g} C^{(s)2} \gamma_g/\gamma_0} \right) \left(\frac{1 - \exp\left(-i(\lambda_g^* - \lambda_g^{(2)})L/\gamma_g\right)}{\lambda_g^* - \lambda_g^{(2)}} \right) - \right]$$



$$- \left(\beta - \sqrt{\beta^2 + 4\chi_g\chi_{-g}C^{(s)2}\gamma_g/\gamma_0} \right) \left(\frac{1 - \exp\left(-i(\lambda_g^* - \lambda_g^{(1)})L/\gamma_g\right)}{\lambda_g^* - \lambda_g^{(1)}} \right) \times \\ \times \exp \left[i \left(\frac{\omega\chi_0}{2} + \lambda_g^* \right) \frac{L}{\gamma_g} \right], \quad (156)$$

$$E_{\text{ПРИ}}^{(s)} = \frac{8\pi^2 ieV\theta P^{(s)}}{\omega} \frac{\gamma_g\chi_g C^{(s)}}{\gamma_0 \sqrt{\beta^2 + 4\chi_g\chi_{-g}C^{(s)2}\gamma_g/\gamma_0}} \left(\frac{\omega}{-\omega\chi_0 - 2\lambda_0^*} + \frac{\omega}{2\lambda_0^*} \right) \times \\ \times \left[\exp \left(-i \frac{\lambda_g^* - \lambda_g^{(1)}}{\gamma_g} L \right) - \exp \left(-i \frac{\lambda_g^* - \lambda_g^{(2)}}{\gamma_g} L \right) \right] \exp \left[i \left(\frac{\omega\chi_0}{2} + \lambda_g^* \right) \frac{L}{\gamma_g} \right]. \quad (15)$$

Выражения (15б) и (15в) представляют амплитуды поля излучения, аналогичные амплитудам ПРИ и ДПИ в кристалле. ДПИ возникает вследствие дифракции на периодически слоистой искусственной структуре переходного излучения, рождаемого на входной поверхности мишени.

Для дальнейшего анализа излучения, динамические добавки (9) представим в следующем виде:

$$\lambda_g^{(1,2)} = \frac{\omega |\chi_g'| C^{(s)}}{2} \left(\xi^{(s)} - \frac{i\rho^{(s)}(1-\varepsilon)}{2} \pm \sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon - 2i\rho^{(s)} \left(\frac{(1-\varepsilon)}{2} \xi^{(s)} + \kappa^{(s)} \varepsilon \right) - \rho^{(s)2} \left(\frac{(1-\varepsilon)^2}{4} + \kappa^{(s)2} \varepsilon \right)} \right), \quad (16)$$

где

$$\xi^{(s)}(\omega) = \eta^{(s)}(\omega) + \frac{1-\varepsilon}{2\nu^{(s)}}, \\ \eta^{(s)}(\omega) = \frac{\alpha}{2 |\operatorname{Re} \sqrt{\chi_g\chi_{-g}}| C^{(s)}} \equiv \frac{\sin^2 \theta_B}{V^2 C^{(s)} |\chi_b' - \chi_a'| |\sin(ga/2)|} \left(1 - \frac{\omega(1-\theta \cos \varphi \cot \theta_B)}{\omega_B} \right), \\ \nu^{(s)} = \frac{C^{(s)} \operatorname{Re} \sqrt{\chi_g\chi_{-g}}}{\chi_0'} \equiv \frac{2C^{(s)} |\sin(ga/2)|}{g} \left| \frac{\chi_b' - \chi_a'}{a\chi_a' + b\chi_b'} \right|, \\ \rho^{(s)} = \frac{\chi_0''}{|\operatorname{Re} \sqrt{\chi_g\chi_{-g}}| C^{(s)}} \equiv \frac{a\chi_a'' + b\chi_b''}{|\chi_b' - \chi_a'| C^{(s)} 2 |\sin(ga/2)|} g, \\ \kappa^{(s)} = \frac{\chi_g'' C^{(s)}}{\chi_0''} \equiv \frac{2C^{(s)} |\sin(ga/2)|}{g} \left| \frac{\chi_b'' - \chi_a''}{a\chi_a'' + b\chi_b''} \right|, \quad \varepsilon = \frac{\gamma_g}{\gamma_0}. \quad (17)$$

Важным параметром в выражении (17) является параметр ε , определяющий степень асимметрии отражения поля относительно поверхности мишени, который представим в виде

$$\varepsilon = \frac{\sin(\delta + \theta_B)}{\sin(\delta - \theta_B)}, \quad (18)$$

где θ_B – угол между скоростью электрона и отражающими слоями, δ – угол между поверхностью мишени и отражающими слоями. Заметим, что угол падения электрона на поверхность мишени $\delta - \theta_B$ увеличивается, если параметр ε уменьшается и наоборот (см. рис. 2).

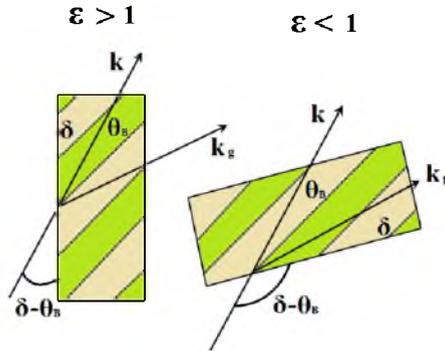


Рис. 2. Асимметричные ($\varepsilon > 1$, $\varepsilon < 1$) отражения излучения от пластинки.
Случай $\varepsilon = 1$ соответствует симметричному отражению.

2. Спектрально-угловая плотность излучений

Подставляя выражение (16) в (15б) и (15в), а затем полученные формулы – в следующее хорошо известное [19] выражение для спектрально-угловой плотности рентгеновского излучения:

$$\omega \frac{d^2 N}{d\omega d\Omega} = \omega^2 (2\pi)^{-6} \sum_{s=1}^2 |E_g^{(s)Rad}|^2, \quad (19)$$

найдем формулы, описывающие вклады в спектрально-угловую плотность излучения механизмов ПРИ и ДПИ, а также формулу, представляющую результат интерференции этих механизмов излучения:

$$\omega \frac{d^2 N^{(s)}}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi^2} P^{(s)2} \frac{\theta^2}{(\theta^2 + \gamma^{-2} - \chi_0')^2} R_{ПРИ}^{(s)}, \quad (20a)$$

$$R_{ПРИ}^{(s)} = \left(1 - \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \varepsilon}} \right)^2 \times$$

$$\times \frac{1 + \exp(-2b^{(s)}\rho^{(s)}\Delta^{(1)}) - 2 \exp(-b^{(s)}\rho^{(s)}\Delta^{(1)}) \cos\left(b^{(s)}\left(\sigma^{(s)} + \frac{\xi - \sqrt{\xi^2 + \varepsilon}}{\varepsilon}\right)\right)}{\left(\sigma^{(s)} + \frac{\xi - \sqrt{\xi^2 + \varepsilon}}{\varepsilon}\right)^2 + \rho^{(s)2}\Delta^{(1)2}} \quad (20б)$$

$$\omega \frac{d^2 N_{ДПИ}^{(s)}}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi^2} P^{(s)2} \theta^2 \left(\frac{1}{\theta^2 + \gamma^{-2}} - \frac{1}{\theta^2 + \gamma^{-2} - \chi_0'} \right)^2 R_{ДПИ}^{(s)}, \quad (21a)$$



$$R_{ДПИ}^{(s)} = \frac{4\varepsilon^2}{\xi^2 + \varepsilon} \exp\left(-b^{(s)}\rho^{(s)}\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\right) \times \\ \times \left[\sin^2\left(b^{(s)}\frac{\sqrt{\xi^2 + \varepsilon}}{\varepsilon}\right) + \operatorname{sh}^2\left(b^{(s)}\rho^{(s)}\frac{(1-\varepsilon)\xi^{(s)} + 2\varepsilon\kappa^{(s)}}{2\varepsilon\sqrt{\xi^2 + \varepsilon}}\right) \right], \quad (216)$$

где

$$\Delta^{(1)} = \frac{\varepsilon + 1}{2\varepsilon} - \frac{1 - \varepsilon}{2\varepsilon} \frac{\xi^{(s)}}{\sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon}} - \frac{\kappa^{(s)}}{\sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon}}, \\ \sigma^{(s)} = \frac{1}{|\chi'_g| C^{(s)}} (\theta^2 + \gamma^{-2} - \chi'_0) \equiv \frac{1}{\nu^{(s)}} \left(\frac{\theta^2}{|\chi'_0|} + \frac{1}{\gamma^2 |\chi'_0|} + 1 \right), \\ b^{(s)} = \frac{\omega |\operatorname{Re}\sqrt{\chi_g \chi_{-g}}| C^{(s)} L}{2 \gamma_0}. \quad (22)$$

Формулы (20-21) составляют главный результат данной работы. Они получены в двухволновом приближении динамической теории дифракции с учетом поглощения излучения в среде и возможности различной ориентации дифрагирующих слоев относительно поверхности пластинки. Эти формулы позволяют исследовать спектрально-угловые характеристики излучений в зависимости от энергии релятивистских электронов и параметров искусственной периодической структуры.

3. Анализ рентгеновских волн ДПИ. Эффект Бормана

Так как две волны рентгеновских волн вносят вклад в выход ДПИ, то для их анализа, выражение для спектральной плотности (216) удобно представить в следующем виде

$$R_{ДПИ}^{(s)} = \frac{\varepsilon^2}{\xi(\omega)^2 + \varepsilon} \left[\exp\left\{-b^{(s)}\rho^{(s)}\left[\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} - \frac{(1-\varepsilon)\xi^{(s)} + 2\varepsilon\kappa^{(s)}}{\varepsilon\sqrt{\xi^2 + \varepsilon}}\right]\right\} + \right. \\ \left. + \exp\left\{-b^{(s)}\rho^{(s)}\left[\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{(1-\varepsilon)\xi^{(s)} + 2\varepsilon\kappa^{(s)}}{\varepsilon\sqrt{\xi^2 + \varepsilon}}\right]\right\} - \right. \\ \left. - 2 \cdot \exp\left\{-b^{(s)}\rho^{(s)}\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\right\} \cdot \cos\left(\frac{2b^{(s)}\sqrt{\xi^2 + \varepsilon}}{\varepsilon}\right) \right]. \quad (23)$$

Изучая выражение (23), можно заметить, что члены в квадратных скобках описывают последовательно волны, принадлежащие первому и второму полям и их интерференции.

Запишем далее выражение (23) в более известной форме

$$R_{ДПИ}^{(s)} = \frac{\varepsilon^2}{\xi(\omega)^2 + \varepsilon} \left[e^{-L_f \mu_1^{(s)}} + e^{-L_f \mu_2^{(s)}} - 2 \cdot e^{-L_f \mu_0 \left(\frac{1+\varepsilon}{2}\right)} \cdot \cos\left(\frac{L_f}{L_{ext}^{(s)}} \sqrt{\xi^2 + \varepsilon}\right) \right], \quad (24)$$



где эффективные коэффициенты поглощения $\mu_1^{(s)}$ и $\mu_2^{(s)}$ для двух различных волн в периодической среде имеют следующий вид:

$$\mu_1^{(s)} = \mu_0 \left[\frac{1 + \varepsilon}{2} - \frac{(1 - \varepsilon)\xi^{(s)} + 2\varepsilon\kappa^{(s)}}{2\sqrt{\xi^2 + \varepsilon}} \right], \quad \mu_2^{(s)} = \mu_0 \left[\frac{1 + \varepsilon}{2} + \frac{(1 - \varepsilon)\xi^{(s)} + 2\varepsilon\kappa^{(s)}}{2\sqrt{\xi^2 + \varepsilon}} \right]. \quad (25)$$

где L_f – путь фотона в кристалле, $\mu_0 = \omega\chi_0''$ – линейный коэффициент поглощение рентгеновских волн в аморфной среде, $L_{ext}^{(s)} = (\omega |\operatorname{Re} \sqrt{\chi_g \chi_{-g}}| C)^{-1}$ – длина экстинкции рентгеновских волн в периодической среде.

Несмотря на сложный свой характер, формула (24) показывает яркий динамический эффект Бормана возникающий при прохождении рентгеновских волн ДПИ через периодическую среду. При рассеяние рентгеновских волн в поглощающей периодической среде возникает аномальное поглощение одного поля $\mu_2^{(s)} > \mu_0$ и аномальное прохождение рентгеновских лучей другого поля $\mu_1^{(s)} \ll \mu_0$. При достаточно большом пути фотона в пластинке ДПИ будет формироваться только за счет одного из полей в периодической структуре, а именно с эффективным коэффициентом поглощения $\mu_1^{(s)}$.

Физика эффекта Бормана [20] заключается в образовании падающей и рассеянной рентгеновскими волнами стоячей волны, пучности которой расположены в пространстве среды с меньшей электронной плотностью (первое слагаемое в формулах (23) и (24)). Для другой же волны эти пучности расположены в пространстве с наибольшей электронной плотностью (второе слагаемое в формулах (23) и (24)).

Параметр $\kappa^{(s)}$, входящий в (25), определяет степень проявления эффекта аномального эффекта Бормана в прохождении рентгеновских волн через периодическую структуру. Как и в случае свободных рентгеновских волн в кристалле, необходимым условием проявления данного эффекта в ПРИ является $\kappa^{(s)} \approx 1$. В этом случае линейный коэффициент поглощения $\mu_1^{(s)}$ принимает минимальное значение.

Далее проведем численный анализ каждой из волн в отдельности и их интерференции. Для этого выражение (23) запишем в следующем виде

$$R^{(s)} = R_1^{(s)} + R_2^{(s)} + R_{int}^{(s)}, \quad (26)$$

$$R_1^{(s)} = \frac{\varepsilon^2}{\xi(\omega)^2 + \varepsilon} \exp \left\{ -b^{(s)} \rho^{(s)} \left[\frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon} - \frac{(1 - \varepsilon)\xi^{(s)} + 2\varepsilon\kappa^{(s)}}{\varepsilon\sqrt{\xi^2 + \varepsilon}} \right] \right\}, \quad (26б)$$

$$R_2^{(s)} = \frac{\varepsilon^2}{\xi(\omega)^2 + \varepsilon} \exp \left\{ -b^{(s)} \rho^{(s)} \left[\frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon} + \frac{(1 - \varepsilon)\xi^{(s)} + 2\varepsilon\kappa^{(s)}}{\varepsilon\sqrt{\xi^2 + \varepsilon}} \right] \right\}, \quad (26в)$$

$$R_{int}^{(s)} = -\frac{2\varepsilon^2}{\xi(\omega)^2 + \varepsilon} \exp \left\{ -b^{(s)} \rho^{(s)} \frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon} \right\} \cdot \cos \left(\frac{2b^{(s)} \sqrt{\xi^2 + \varepsilon}}{\varepsilon} \right). \quad (26г)$$

Расчеты будем проводить для σ - поляризованных волн $s = 1$. Для наглядности результата рассмотрим случай, когда слои имеют одинаковую толщину, то есть $T = 2a = 2b$.

Будем рассматривать отражения соответствующие $g = 2\pi/T$. В этом случае параметры, входящие в выражения, принимают следующие значения

$$\xi(\omega) = \frac{2\pi \sin^2(\theta_B)}{|\chi'_b - \chi'_a|} \cdot \left(1 - \frac{\omega}{\omega_B}\right) + \frac{1 - \varepsilon}{2\nu^{(1)}}, \quad \kappa^{(1)} = \frac{2}{\pi} \cdot \left| \frac{\chi''_b - \chi''_0}{\chi''_b + \chi''_0} \right|,$$

$$\rho^{(1)} = \frac{\pi}{2} \cdot \left| \frac{\chi''_b + \chi''_0}{\chi'_b - \chi'_a} \right|, \quad \nu^{(1)} = \frac{2}{\pi} \cdot \left| \frac{\chi'_b - \chi'_a}{\chi'_b + \chi'_a} \right|, \quad b^{(1)} = \frac{\omega_B |\chi'_b - \chi'_a|}{2\pi \sin(\delta - \theta_B)} L. \quad (27)$$

На рис. 3-5 построены кривые по формулам (26), описывающие спектральную плотность ДПИ ($\omega_B = 8 \text{ keV}$) в искусственной периодической структуре, состоящей из аморфных слоев бериллия Be и W для различной толщины мишени в порядке возрастания ее значений.

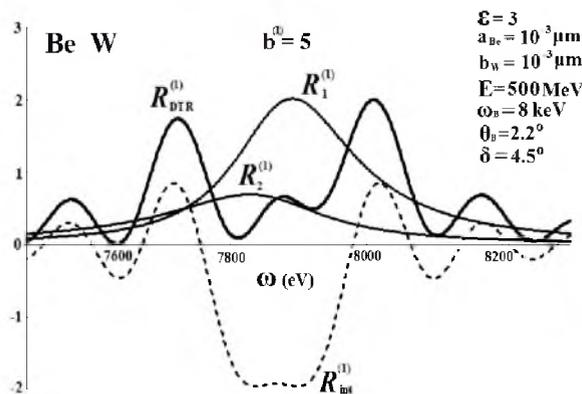


Рис. 3. Вклад двух полней $R_1^{(1)}$ и $R_2^{(1)}$ и их интерференции $R_{int}^{(1)}$ в суммарную спектральную плотность излучения $R_{DTR}^{(1)} = R_1^{(1)} + R_2^{(1)} + R_{int}^{(1)}$ для тонкой мишени ($b^{(1)} = 5$).

Видно, что в этом случае ДПИ формируется за счет двух полей в периодической структуре, при этом существенно влияние их интерференции. Интерференционное слагаемое приводит к осцилляциям в спектральной плотности излучения.

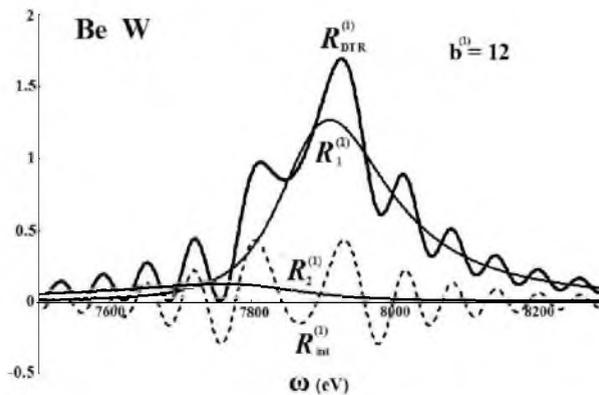


Рис. 4.

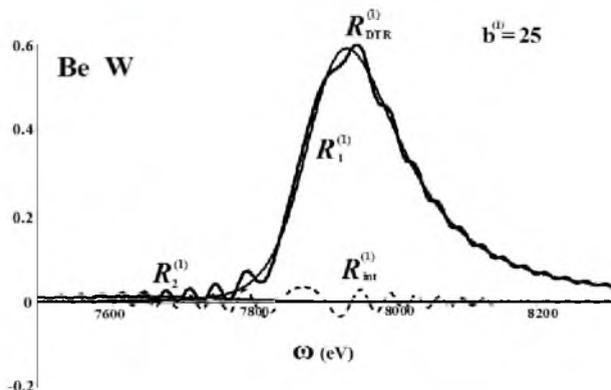


Рис. 5.

С переходом к большим толщинам резко возрастает аномальное высокое поглощение одного из полей (рис. 4 – рис. 5), в результате чего ослабляются и затем совсем исчезают побочные максимумы (рис. 6).

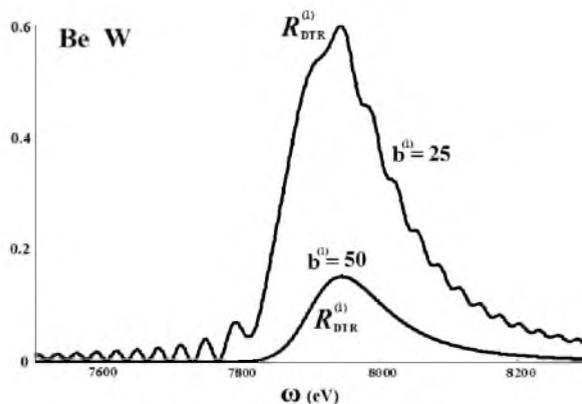


Рис. 6. Спектральная плотность DTR для различных толщин мишени.

Это определяется возросшим поглощением интерференционной части. Необходимо отметить, что на рис. 5 и рис. 6 спектральные кривые построены при большой толщине мишени, когда длина пути фотона больше аморфной длины фотопоглощения фотона $l_{abs} = (\mu_0)^{-1}$, что может свидетельствовать о ярком проявлении эффекта Бормана в периодической структуре. Необходимо отметить увеличение монохроматизации ДПИ при увеличении толщины мишени, а в случае проявления.

4. Угловая плотность ДПИ и ПРИ

Для случая σ - поляризованных волн формулы (20) и (21) описывающие спектрально-угловые распределения ПРИ и ДПИ принимают следующий вид:

$$\omega \frac{d^2 N_{ПРИ}^{(1)}}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi^2} \frac{\theta_{\perp}^2}{(\theta_{\perp}^2 + \gamma^{-2} + |\chi'_a + \chi'_b|/2)^2} R_{ПРИ}, \tag{27a}$$



$$R_{ПРИ} = \left(1 - \frac{\xi(\omega)}{\sqrt{\xi(\omega)^2 + \varepsilon}}\right)^2 \frac{1 + e^{-2b^{(1)}\rho^{(1)}\Delta^{(1)}} - 2e^{-b^{(1)}\rho^{(1)}\Delta^{(1)}} \cos(b^{(1)}\Omega^{(1)}(\omega))}{\Omega^{(1)}(\omega)^2 + (\rho^{(s)}\Delta^{(1)})^2}, \quad (27б)$$

$$\omega \frac{d^2 N_{ДПИ}^{(1)}}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi^2} \theta_{\perp}^2 \left(\frac{1}{\theta_{\perp}^2 + \gamma^{-2}} - \frac{1}{\theta_{\perp}^2 + \gamma^{-2} + |\chi'_a + \chi'_b|/2} \right)^2 R_{ДПИ}, \quad (28а)$$

$$R_{ДПИ} = \frac{4\varepsilon^2}{\xi(\omega)^2 + \varepsilon} \exp\left(-b^{(1)}\rho^{(1)}\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\right) \times \\ \times \left[\sin^2\left(b^{(1)}\frac{(\sqrt{\xi(\omega)^2 + \varepsilon})}{\varepsilon}\right) + \operatorname{sh}^2\left(b^{(1)}\rho^{(1)}\frac{(1-\varepsilon)\xi(\omega) + 2\varepsilon\kappa^{(1)}}{2\varepsilon\sqrt{\xi(\omega)^2 + \varepsilon}}\right) \right], \quad (28б)$$

где

$$\Omega^{(1)}(\omega) = \sigma(\theta, \gamma) + \left(\xi(\omega) - \sqrt{\xi(\omega)^2 + \varepsilon}\right) / \varepsilon, \quad \sigma(\theta, \gamma) = \frac{\pi}{|\chi'_b - \chi'_a|} \cdot \left(\theta_{\perp}^2 + \gamma^{-2} + \frac{|\chi'_a + \chi'_b|}{2}\right),$$

$$\Delta^{(1)} = \frac{\varepsilon + 1}{2\varepsilon} - \frac{1 - \varepsilon}{2\varepsilon} \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \varepsilon}} - \frac{\kappa^{(1)}}{\sqrt{\xi^2 + \varepsilon}}, \quad \xi(\omega) = \frac{2\pi \sin^2(\theta_B)}{|\chi'_b - \chi'_a|} \cdot \left(1 - \frac{\omega}{\omega_B}\right) + \frac{1 - \varepsilon}{2\nu^{(1)}}, \\ \kappa^{(1)} = \frac{2}{\pi} \cdot \left| \frac{\chi''_b - \chi''_a}{\chi''_b + \chi''_a} \right|, \quad \rho^{(1)} = \frac{\pi}{2} \cdot \left| \frac{\chi''_b + \chi''_a}{\chi'_b - \chi'_a} \right|, \quad (29)$$

$$\nu^{(1)} = \frac{2}{\pi} \cdot \left| \frac{\chi'_b - \chi'_a}{\chi'_b + \chi'_a} \right|, \quad b^{(1)} = \frac{\omega_B |\chi'_b - \chi'_a|}{2\pi \sin(\delta - \theta_B)} L, \quad \theta_{\perp} = \theta \sin \varphi.$$

Угловые плотности механизмов ПРИ и ДПИ запишем в следующем виде:

$$\frac{dN_{ПРИ}^{(1)}}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi^2} \frac{\theta_{\perp}^2}{(\theta_{\perp}^2 + \gamma^{-2} + |\chi'_a + \chi'_b|/2)^2} \int R_{ПРИ} \frac{d\omega}{\omega}, \quad (30а)$$

$$\frac{dN_{ДПИ}^{(1)}}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi^2} \theta_{\perp}^2 \left(\frac{1}{\theta_{\perp}^2 + \gamma^{-2}} - \frac{1}{\theta_{\perp}^2 + \gamma^{-2} + |\chi'_a + \chi'_b|/2} \right)^2 \int R_{ДПИ} \frac{d\omega}{\omega}. \quad (30)$$

Для сравнения угловых плотностей излучения в искусственной периодической и кристаллической средах в приближенных условиях, запишем выражения для угловой плотности ДПИ в кристалле для σ -поляризованных волн

$$\frac{dN_{ДПИ}^{(1)Cr}}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi^2} \theta_{\perp}^2 \left(\frac{1}{\theta_{\perp}^2 + \gamma^{-2}} - \frac{1}{\theta_{\perp}^2 + \gamma^{-2} - \chi'_0} \right)^2 \int R_{ДПИ} \frac{d\omega}{\omega}, \quad (31)$$

где соответствующие обозначения (27) имеют вид

$$\kappa^{(1)} = \frac{\chi''_g}{\chi''_0}, \quad \rho^{(1)} = \frac{\chi''_0}{|\chi'_g|}, \quad \nu^{(1)} = \frac{\chi'_g}{\chi'_0}, \quad \sigma(\theta, \gamma) = \frac{1}{|\chi'_g|} \cdot (\theta_{\perp}^2 + \gamma^{-2} - \chi'_0),$$



$$\xi(\omega) = \frac{2 \sin^2(\theta_B)}{|\chi'_g|} \cdot \left(1 - \frac{\omega}{\omega_B}\right) + \frac{1 - \varepsilon}{2\nu^{(1)}}, \quad \theta_{\perp} = \theta \sin \varphi. \quad (32)$$

По формулам (30б) и (31) построены кривые угловой плотности ДПИ ($\omega_B = 8 \text{ keV}$) в кристаллической мишени вольфрама W (см. рис. 7) и ДПИ в искусственной периодической структуре, состоящей из аморфных слоев бериллия Be и W (рис. 8). Пути электрона и фотона ДПИ в мишени $L_e = 50 \mu\text{m}$, $L_{\text{tot}} = 16,6 \mu\text{m}$ выбраны одинаковыми для обоих случаев.

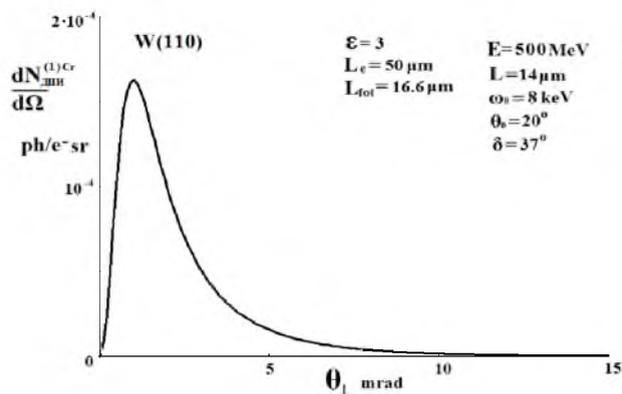


Рис. 7. Угловая плотность DTR релятивистского электрона, пересекающего кристаллическую пластинку (W).

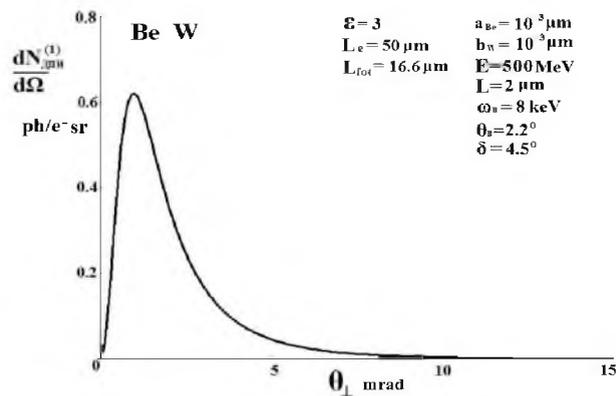


Рис. 8. Угловая плотность DTR релятивистского электрона, пересекающего искусственную периодически слоистую структуру (Be-W) в условиях, аналогичных рис. 7.

Из рис. 7 и рис. 8 следует, что угловая плотность ДПИ из искусственной периодической структуры более чем на три порядка превышает угловую плотность ДПИ из кристалла в аналогичных условиях. Кривые, представленные на рис. 9, построенные по формуле (27), демонстрируют спектры ПРИ в искусственной периодической структуре для различных углов наблюдения.

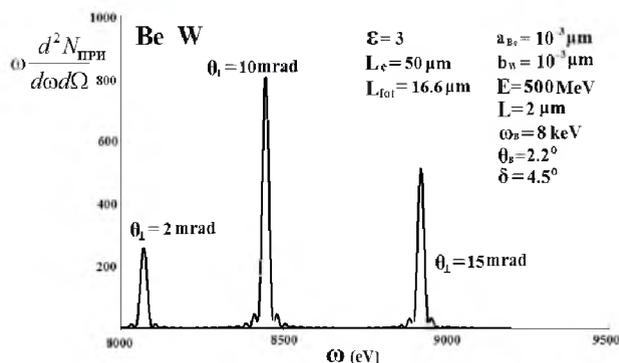


Рис. 9. Спектры PXR для различных углов наблюдения.

Из рис. 9 следует, что частота пика ПРИ сильно зависит от угла наблюдения, что естественно приводит к слабой монохроматичности выхода ПРИ. Кривые, представленные на рис. 10, построенные по формуле (28), демонстрируют спектры ДПИ при двух разных углах наблюдения.

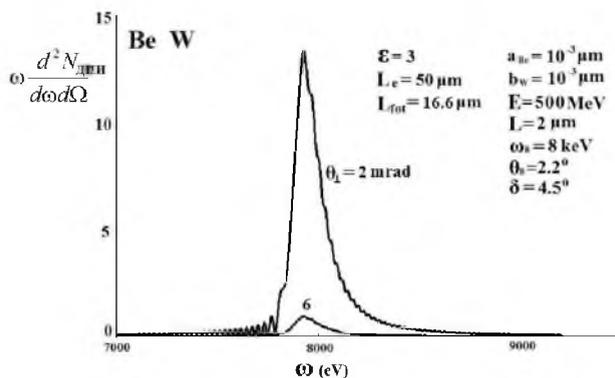


Рис. 10. Спектры DTR для различных углов наблюдения.

Из рис. 10 следует, что ДПИ более монохроматично, чем ПРИ, что является интересным с точки зрения создания интенсивного квазимонохроматического рентгеновского источника. Необходимо отметить, что кривые на рис. 10, как и на рис. 8 построены в условиях, когда ярко проявляется эффект Бормана в искусственной периодической структуре.

Рассмотрим влияние асимметрии отражения поля относительно поверхности мишени на спектрально-угловые характеристики ДПИ. На рис. 11 и рис. 12 представлены кривые аналогичные кривым построенным на рис. 8. и рис. 10, но для другого параметра асимметрии $\epsilon = 8.5$. При этом длина пути фотона в обоих случаях одинакова $L_{tot} = 16,6 \mu m$.

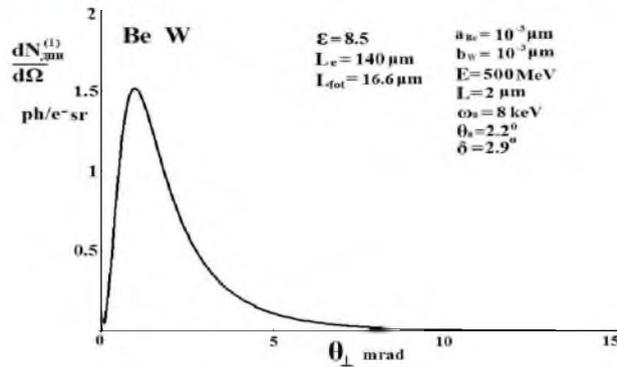


Рис. 11.

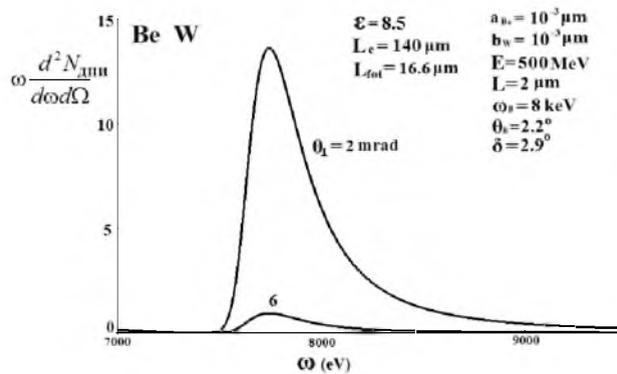


Рис. 12.

Видно, что ширина спектра ДПИ при увеличении асимметрии возросла (рис. 12), что привело к росту угловой плотности ДПИ (рис. 11). Данный эффект обусловлен тем, что зависимость линейного коэффициента поглощения первого поля (25) от частоты зависит от асимметрии отражения.

Рассмотрим возможность оптимизации выхода ДПИ в зависимости от толщины мишени L . Для этого построим зависимость от толщины мишени угловой плотности ДПИ при фиксированном угле наблюдения (см. рис. 13).

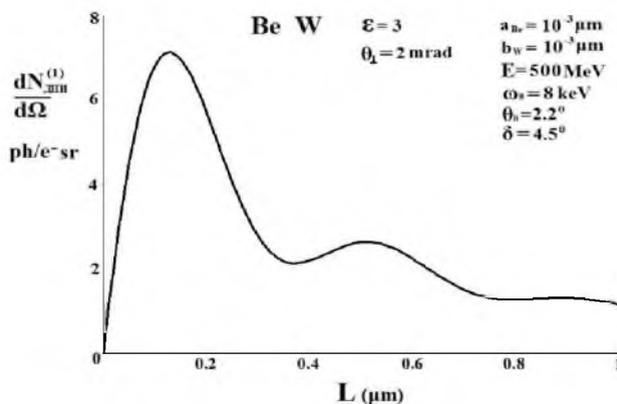


Рис. 13. Зависимость выхода ДПИ от толщины мишени при фиксированном угле наблюдения.

Как и следовало ожидать, из рис. 13 следует, что плотность ДПИ сначала растет с увеличением толщины, затем, из-за поглощения волн средой, падает. В представленной на этом рисунке зависимости, наблюдаются колебания, что отражает процесс перекачки энергии из падающей волны в отраженную и обратно. Толщина мишени, соответствующая первому максимуму на угловой плотности ДПИ, является оптимальной для мишени-радиатора. Построим угловую плотность ДПИ и ПРИ при оптимальной толщине мишени (рис. 14).

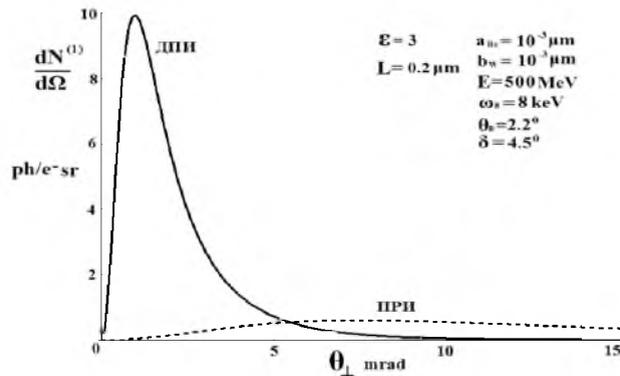


Рис. 14. Сравнение угловых плотностей DTR и PXR при оптимальной для DTR толщине мишени.

Из рис. 14 следует, что в этом случае угловая плотность ДПИ существенно превышает угловую плотность ПРИ и более чем в 10 раз превышает угловую плотность ДПИ для неоптимальной толщины, представленную на рис. 8.

Заключение

Построена теория когерентного рентгеновского излучения релятивистского электрона пересекающего искусственную периодическую структуру в геометрии рассеяния Лауэ. Получены и исследованы выражения, описывающие спектрально-угловые характеристики излучения в направлении рассеяния Брэгга. Исследован вклад двух рентгеновских волн в выход ДПИ. Показано, что с увеличением толщины мишени одна волна поглощается аномально высоко, а другая аномально низко. Показано, что эффект Бормана в ДПИ проявляется в искусственной периодической структуре в геометрии Лауэ.

На основе полученных выражений показано, что угловая плотность ДПИ из слоистой мишени более чем на два порядка превышает угловую плотность в монокристаллическом радиаторе в аналогичных условиях. Выявлено, что ДПИ в искусственной периодической структуре более монохроматичным, чем ПРИ. В связи с этим механизм ДПИ в искусственной периодической структуре будет более перспективным с точки зрения создания нового интенсивного квазимонохроматического источника рентгеновского излучения с перестраиваемой частотой. Показано, что выход ДПИ в искусственной периодической структуре в максимуме угловой плотности растет до некоторой оптимальной толщины пластинки, затем падает из-за фотопоглощения в мишени, то есть существует оптимальная толщина радиатора.



Литература

1. Garibian G.M., Yang C. X- ray Transition Radiation / Erevan, USSR, 1983 (in Russian).
2. Caticha A. // Phys. Rev. A. – 1989. – 40. – P.4322.
3. Nasonov N.N. // Phys. Lett. A. – 1998. – 246. – P.148.
4. Artru X., Rullhusen P. // Nucl. Instr. Meth. B. – 1998. – 145. – P.1.
5. Ter-Mikaelian M. High-Energy Electromagnetic Process in Condensed Media / New York: Wiley, 1972.
6. Garibian G., Yang C. // J. Exp. Theor. Phys. – 1971. – 61. – P.930.
7. Baryshevsky V., Feranchuk I. // J. Exp. Theor. Phys. – 1971. – 61. – P.944.
8. Nasonov N., Noskov A. // Nucl. Instr. Meth. B. – 2003. – 201. – P.67.
9. Kubankin A.S., Nasonov N.N., Sergienko V.I., Vnukov I.E. // Nucl. Instr. Meth. B. – 2003. – 201. – P.97.
10. Adischev Y.N., Arishev S.N., Vnukov A.V., et al. // Nucl. Instr. Meth. B. – 2003. – 201. – P.114.
11. Nasonov N.N., Kaplin V.V., Uglov S.R., et al. // Nucl. Instr. Meth. B. – 2005. – 227. – P.41.
12. Blazhevich S.V., Noskov A.V. // Nucl. Instr. Meth. B. – 2006. – 252. – P.69.
13. Blazhevich S.V., Noskov A.V. // Nucl. Instr. Meth. B. – 2008. – 266. – P.3777.
14. Blazhevich S.V., Noskov A.V. // J. Exp. Theor. Phys. – 1971. – 136. – P.1043.
15. Blazhevich S.V., Noskov A.V. // Nucl. Instr. Meth. B. – 2008. – 266. – P.3770.
16. Piestrup M.A., Boyers D.G., Pincus C.I. et al. // Phys.Rev. A.– 1992.– 45.– P.1183.
17. Nasonov N.N., Kaplin V.V., Uglov S.R., Piestrup M.A., Gary C.K. // Phys. Rev. E. – 2003. – 68. – P.3604.
18. Pinsker Z. Dynamic Scattering of X-rays in Crystals / Berlin: Springer, 1984.
19. Bazylev V., Zhevago N. Emission From Fast Particles Moving in a Medium and External Fields / Moscow: Nauka, 1987.
20. Borrmann G. // Zh. Phys. – 1941. – 42. – P.157.

DIFFRACTED TRANSITION RADIATION OF RELATIVISTIC ELECTRON IN THE ARTIFICIAL PERIODIC STRUCTURE

S.V. Blazhevich*, M.N. Beknazarov*, I.V. Kolosova**, A.V. Noskov**

*Belgorod State University,

Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: blazh@bsu.edu.ru

**University of Cooperation, Economics and Law,

Sadovaya St., 116a, Belgorod, 308023, Russia, e-mail: noskovbupk@mail.ru

Abstract. Theory of coherent X-radiation of relativistic electron crossing the artificial periodic layered structure in Laue geometry is built up. Expressions describing spectral-angular characteristics of radiation in Bragg's scattering direction are derived and investigated. The radiation is considered by analogy with the coherent radiation in crystal medium as the result of coherent sum of contribution from mechanisms: the parametric X-radiation (PXR) and the diffracted transition radiation (DTR). It is shown, that DTR yields from multilayer target. It may be more essentially than partial irradiation in single crystal under similar conditions.

Key words: relativistic electron, transition radiation, dynamical diffraction, angle distribution.