MSC 30H20

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ОДНОГО КЛАССА АНАЛИТИЧЕСКИХ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ ФУНКЦИЙ

Р.В. Даллакян

Государственный инженерный университет Армении,
ул. Терян, 105, кор. 12, Ереван, Армения, e-mail: dallakyan57@mail.ru

Аннотация. Пусть $\mathcal{D}$ единичный круг комплексной плоскости $\mathcal{C}$. Аналитическая в $\mathcal{D}$ функция f принадлежит классу A_α^p, если

$$\int_{\mathcal{D}} (1-|z|)^\alpha |f(z)|^p \, dxdy < +\infty .$$

В настоящей работе доказывается, что для функций классов A_α^p дробный интеграл порядка β в частных случаях может принадлежать классам Харди H^p. Пользуясь этими результатами приводятся два представления (соответственно для случаев $0 < p \le 2$ и $2 \le p < \infty$) функций классов A_α^p, которые в частном случае $p = 2$ совпадают с одним представлением функций класса A_α^2, полученным М. М. Джрбашяном.

Ключевые слова: Классы функций H^p, A_α^p, дробный интеграл порядка β функции f.

1. Введение. Пусть $\mathcal{D} = \{z; |z| < 1\}$ – единичный круг комплексной плоскости $\mathcal{C}$. Множество аналитических в круге $\mathcal{D}$ функций обозначим через $Hol(D)$. Далее пусть $0 \le r < 1$, $0 < p < \infty$, $f \in Hol(D)$ и пусть

$$M_p(r,f) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(re^{i\theta}\right)\right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} , \quad M_\infty(r,f) = \sup_{0 \le \theta \le 2\pi} \left| f\left(re^{i\theta}\right)\right| .$$

Скажем, что $f \in Hol(D)$ принадлежит классу Харди H^p, $0 < p \le \infty$, если

$$\|f\|_{H^p} \stackrel{def}{\equiv} \sup_{0<r<1} M_p(r,f) < +\infty .$$

Свойства функций классов Харди описаны в [1], [2]. Обозначим через A_α^p, $0 < p < +\infty$, $-1 < \alpha < +\infty$, множество тех функций f, $f \in Hol(D)$ для которых

$$\|f\|_{A_\alpha^p} \equiv \left(\int_{\mathcal{D}} (1-|z|)^\alpha \, |f(z)|^p \, dA(z) \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty .$$

где $dA(z) = \pi^{-1} dxdy = \pi^{-1} r dr d\theta$ – мера Лебега. Определим $A^p \equiv A_0^p$ Классы A_α^p некоторыми специалистами называются классами Бергмана (см. например [3]). Функции этих классов были исследованы и М.М. Джрбашяном [4], который эти классы обозначил через $H_p(\alpha)$. Свойства этих классов описаны и в [5].

В вышеуказанных работах [3], [4], [5] доказывается, что если $f \in A^p_\alpha$, то

$$|f(z)| \le \frac{C\|f\|_{A^p_\alpha}}{(1-|z|)^{(2+\alpha)/p}}\,, \qquad z \in \mathcal{D}\,. \tag{1}$$

Пусть $\beta > 0$ и $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in Hol\mathcal{D}$. Дробным интегралом порядка β функции f называется следующая функция:

$$f_{[\beta]}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{\Gamma(n+1+\beta)} a_n z^n,\ z \in \mathcal{D}\,.$$

В [6] доказано, что $f_{[\beta]}(z) \in Hol(D)$. Взяв $\beta = \frac{\alpha+1}{p}$ из теоремы F работы [7] получаем, что если $f(z) = \sum a_n z^n \in A^p_\alpha$, то $f_{[\frac{\alpha+1}{p}]}(z) \in A^{2p}$. Известно, что (см. [6]) $H^p \subset A^{p(\alpha+2)}$.

2. Основные результаты.

Теорема 1. *Если $f(z) = \sum a_n z^n \in A^p_\alpha$, $0 < p \le 2$, $\alpha > -1$, то функция*

$$h(z) = \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{p}+1\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{p}+1+n\right)} a_n z^n\,, \quad |z|<1$$

принадлежит классу H^p.

В случае $2 \le p < +\infty$, взяв $\beta = \frac{p+\alpha-1}{p}$ также доказывается, что дробный интеграл порядка β функции f, $f \in A^p_\alpha$ принадлежит классу H^p т.е. справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Если $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in A^p_\alpha$, $2 \le p < +\infty$, $a > -1$, то*

$$h(z) = \frac{p+\alpha-1}{p}\int_0^1 (1-\rho)^{\frac{\alpha-1}{p}} f(\rho z)d\rho = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{2p+\alpha-1}{p}\right)n!}{\Gamma\left(\frac{p+\alpha-1}{p}+1+n\right)} a_n z^n \tag{2}$$

принадлежит классу H^p.

В работах [3], [4], [5] доказано, что если $f \in A^p_\alpha$, $1 \le p < +\infty$, $a > -1$, то f имеет следующий вид

$$f(z) = \frac{1+\alpha}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-r)^\alpha \frac{f\left(\rho e^{i\varphi}\right)}{\left(1-z\rho e^{-i\varphi}\right)^{2+\alpha}}\,\rho d\rho d\varphi\,.$$

М.М. Джрбашяном в [4] (см. также [5]) дано еще одно представление функций класса A^2_α, $a > -1$:

Теорема 3. (М.М. Джрбашян). *Если* $f \in A_\alpha^2$, $a > -1$, *то*

$$h(z) = \frac{1+\alpha}{2} \int_0^1 (1-\rho)^{\frac{\alpha-1}{p}} f(\rho z) d\rho, \ |z| < 1$$

принадлежит классу H^2, *а* $f(z)$ *имеет следующее интегральное представление:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{h\left(e^{i\theta}\right) d\theta}{\left(1 - ze^{-i\theta}\right)^{\frac{3+\alpha}{2}}}. \tag{3}$$

В частном случае $\alpha = 0$ это утверждение доказано М.В. Келдышем [8]. Пользуясь результатами теорем 1 и 2, далее удалось получить интегральные представления типа (3) для функций классов A_α^p, $0 < p < +\infty$, $a > -1$.

Теорема 4. *Пусть* $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in A_\alpha^p$, $0 < p \le 2$, $a > -1$. *Тогда* $f(z)$ *допускает следующее интегральное представление*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{h\left(e^{i\theta}\right) d\theta}{\left(1 - e^{-i\theta} z\right)^{\frac{\alpha+1}{p}+1}} \ ,$$

где

$$h(z) = \frac{1+\alpha}{p} \int_0^1 (1-\rho)^{\frac{\alpha+1}{p}-1} f(\rho z) d\rho =$$

$$= \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{p} + 1\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{p} + 1 + n\right)} a_n z^n \ , \qquad |z| < 1 \ . \tag{4}$$

Теорема 5. *Пусть* $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in A_\alpha^p$, $2 \le p < +\infty$, $a > -1$. *Тогда* $f(z)$ *имеет следующее интегральное представление*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{h\left(e^{i\theta}\right) d\theta}{\left(1 - e^{-i\theta} z\right)^{\frac{2p+\alpha-1}{p}}},$$

где

$$h(z) = \frac{p+\alpha-1}{p} \int_0^1 (1-\rho)^{\frac{\alpha-1}{p}-1} f(\rho z) d\rho = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{p+\alpha-1}{p} + 1\right) n!}{\Gamma\left(\frac{p+\alpha-1}{p} + 1 + n\right)} a_n z^n \ .$$

3. Доказательство теорем.

Доказательство теоремы 1. Пользуясь формулой Стирлинга, нетрудно убедиться, что

$$\frac{\Gamma(1+n)\cdot\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{p}+1\right)}{\Gamma\left(1+n+\frac{\alpha+1}{p}\right)}\sim n^{-\frac{\alpha+1}{p}},$$

когда $n\to+\infty$. Следовательно по лемме 1.1 работы [9], действительно дробный интеграл $h(z)$ принадлежит классу H^p. ■

Доказательство теоремы 2. Сначала докажем справедливость равенства (2). Легко заметить, что

$$h(z)=\frac{p+\alpha-1}{p}\int\limits_0^1(1-\rho)^{\frac{\alpha-1}{p}}f(\rho z)d\rho=\frac{p+\alpha-1}{p}\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n\int\limits_0^1\rho^n(1-\rho)^{\frac{\alpha-1}{p}}d\rho=$$

$$=\frac{p+\alpha-1}{p}\sum_{n=0}^{\infty}B\left(n+1,\frac{p+\alpha-1}{p}\right)a_nz^n=$$

$$=\frac{p+\alpha-1}{p}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{p+\alpha-1}{p}\right)\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(\frac{p+\alpha-1}{p}+1+n\right)}a_nz^n=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{p+\alpha-1}{p}+1\right)\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(\frac{p+\alpha-1}{p}+1+n\right)}a_nz^n.$$

Таким образом равенство (2) доказано. В случае $p=2$ принадлежность функции $h(z)$ классу H^2 доказана в [4]. Пусть $p>2$ и пусть $z=re^{i\theta}$. Пользуясь неравенством Гельдера легко видеть, что

$$|h(z)|^p\le\left(\frac{p+\alpha-1}{p}\right)^p\left(\int\limits_0^1(1-\rho)^{\alpha}\left|f\left(r\rho e^{i\theta}\right)\right|^pd\rho\right)\left[\int\limits_0^1(1-\rho)^{-\frac{q}{p}}d\rho\right]^{\frac{p}{q}},$$

где q – такое число, что $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Значит

$$|h(z)|^p\le\left(\frac{p+\alpha-1}{p}\right)^p\left(\int\limits_0^1(1-\rho)^{\alpha}\left|f\left(r\rho e^{i\theta}\right)\right|^pd\rho\right)\left[\int\limits_0^1(1-\rho)^{-\frac{1}{p-1}}d\rho\right]^{p-1}.$$

Откуда, так как $p>2$ получаем

$$|h(z)|^p\le C\cdot\int\limits_0^1(1-\rho)^{\alpha}\left|f\left(r\rho e^{i\theta}\right)\right|^pd\theta,$$

где C зависит только от p и α. Пользуясь последним неравенством будем иметь

$$\int_0^{2\pi} \left|h\left(re^{i\theta}\right)\right|^p d\theta \le C \cdot \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1-\rho)^\alpha \left|f\left(r\rho e^{i\theta}\right)\right|^p d\rho d\theta \ .$$

Теперь, так как $\int_0^{2\pi} \left|f\left(te^{i\theta}\right)\right|^p d\theta$ является монотонно возрастающей функцией от t и $f \in A^p_\alpha$, легко заметить что

$$\int_0^{2\pi} \left|h\left(re^{i\theta}\right)\right|^p d\theta < C \cdot \|f\|^p_{A^p_\alpha} \ . \quad \blacksquare$$

Доказательство теоремы 4. Сначала докажем справедливость равенства (4). Легко видеть, что

$$h(z) = \frac{\alpha+1}{p}\sum_{n=0}^\infty a_n z^n \int_0^1 (1-\rho)^{\frac{\alpha+1}{p}-1}\rho^n d\rho =$$

$$= \frac{\alpha+1}{p}\sum_{n=0}^\infty B\left(n+1, \frac{\alpha+1}{p}\right) a_n z^n = \frac{\alpha+1}{p}\sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{p}\right)\Gamma(1+n)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{p}+1+n\right)} a_n z^n =$$

$$= \sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{p}+1\right)\Gamma(1+n)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{p}+1+n\right)} a_n z^n \ .$$

Таким образом равенство (4) доказано. Из биномиальной теоремы имеем

$$\frac{1}{(1-e^{-i\theta}z)^{\frac{\alpha+1}{p}+1}} = \sum_{k=0}^\infty \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{p}+1+k\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{p}+1\right)\Gamma(1+k)} e^{-ik\theta} z^k \ .$$

Пользуясь этим равенством нетрудно убедиться, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{h(e^{i\theta})d\theta}{(1-e^{-i\theta}z)^{\frac{\alpha+1}{p}+1}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left[\sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{p}+1\right)\Gamma(1+n)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{p}+1+n\right)} a_n e^{in\theta} \sum_{k=0}^\infty \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{p}+1+k\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{p}+1\right)\Gamma(1+k)} e^{-ik\theta} z^k\right] d\theta =$$

$$= \sum_{n=0}^\infty a_n z^n = f(z) \ . \quad \blacksquare$$

Доказательство теоремы 5. Из биномиальной теоремы имеем

$$\frac{1}{(1-e^{-i\theta}z)^{\frac{2p+\alpha-1}{p}}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{2p+\alpha-1}{p}+k\right)}{\Gamma\left(\frac{2p+\alpha-1}{p}\right)\Gamma(1+k)}e^{-ik\theta}z^k\,.$$

Пользуясь этим равенством, получаем

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{h(e^{i\theta})d\theta}{(1-e^{-i\theta}z)^{\frac{2p+\alpha-1}{p}}}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{2p+\alpha-1}{p}\right)\Gamma(1+n)}{\Gamma\left(\frac{2p+\alpha-1}{p}+n\right)}a_ne^{in\theta}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{2p+\alpha-1}{p}+k\right)}{\Gamma\left(\frac{2p+\alpha-1}{p}\right)\Gamma(1+k)}e^{-ik\theta}z^k\right]d\theta=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n=f(z)\,.\qquad\blacksquare$$

Заключение. В статье доказано, что для $0<p\le 2$, $\alpha>-1$ дробный интеграл порядка $\beta=\frac{\alpha+1}{p}$ аналитической функции класса A^p_α принадлежит классу H^p. Для случая же $2\le p<+\infty$, $a>-1$ доказано, что аналогичное утверждение верно при $\beta=\frac{p+\alpha-1}{p}$. Пользуясь этими утверждениями, получены представления функций классов A^p_α, соответственно для случая $0<p\le 2$ и случая $2\le p<+\infty$. Оба эти представления при $p=2$ совпадают с уже известным представлением функций классов A^2_α

Литература

1. Привалов И.И. Граничные свойства аналитических функций / М.: Гос.изд технико-теоретической литературы, 1950.
2. Duren P.L. Theory of H^p Spaces / NY: Academic Press, 1970.
3. Hedenmalm H., Korenblum B., Zhu K. "Theory of Bergman Spaces-/ in: Graduate Texts in Mathematics. V.199. – Berlin: Springer 2000, 2000.
4. Джрбашян М.М. К проблеме представимости аналитических функций // Сообщения инст. мат. и механики АН Арм.ССР. – 1948. – 2. – С3-40.
5. Djrbashian A.E., Shamoian F.A. Topics in tne theory of A^p_α spaces / in: Teubner Texts in Mathematics, 105. – Leipzig: Teubner, 1988.
6. Duren P.L., Romberg B., Shields A.L. Linear functionals on H^p spaces with $0<p<1$, j // Reine Angew. Math. – 1969. – 238. – P.32-60.
7. Maher M., Marzuq H. Linear functionals on some weighted Bergman spaces // Bull. Austral. Math. Soc. – 1980. – 42. – P.417-425.
8. Keldysch M.V. Sur les Conditions pour Qu'un Systeme de Polynomes Orthogonaux Avec un Poids Soit Ferme // Coptes Rendus (Doklady) Academie des Sciences USSR (ns) – 1941. – 30. – C.778-780.
9. Buckley S.M., Koskela P., Vukotic D. Functional unite gration differentiation, and weighted Bergman spaces / Math. Proc. Comb. Soc. – 1999. – 126. – P.369-385.

ON THE REPRESENTATION OF A CLASS OF FUNCTIONS ANALYTIC IN THE UNIT CIRCLE

R.V. Dallakyan

State Engineering University of Armenia,
Teryan St., 105-12, Yerevan, Armenia, e-mail: dallakyan57@mail.ru

Abstract. Let $\mathcal{D}$ be the unit circle on the complex plane $\mathcal{C}$. A function f being analytic in $\mathcal{D}$ belongs to the class A^p_α if

$$\int_{\mathcal{D}} (1-|z|)^\alpha |f(z)|^p \, dxdy < +\infty.$$

We show that the fractional integral of order β of functions from the class A^p_α may belong in some cases to Hardy's classes H^p. Using this result we obtain two representations (for cases $0 < p \leq 2$ and $2 \leq p < \infty$, respectively) of functions from classes A^p_α, which coincide in the particular case $p = 2$ with the representation obtained by M.M. Djrbashyan for the class A^2_α.

Key words: Classes of functions H^p and A^p_α, fractional integral of order β.