



УДК 621.397

МЕТОД ПРОГНОЗИРОВАНИЯ НА ОСНОВЕ ЧАСТОТНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ
THE PREDICTION METHOD ON THE BASIS OF FREQUENCY REPRESENTATION**А.А. Черногорец, Е.В. Болгова, Д.А. Черногорец, А.Н. Коваленко**
A.A. Chernomorets, E.V. Bolgova, D.A. Chernomorets, A.N. Kovalenko*Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Россия, 308015, Белгород, ул. Победы, 85*
*Belgorod State National Research University, 85 Pobeda St, Belgorod, 308015, Russia**e-mail: Chernomorets@bsu.edu.ru*

Аннотация. В данной работе описан метод прогнозирования на основе косинусного преобразования. Приведены результаты вычислительных экспериментов, которые демонстрируют высокую работоспособность разработанного метода.

Resume. The prediction method basing on the cosine transformation is described in this article. The results of computing experiments are given. They demonstrate high serviceability of developed method.

Ключевые слова: прогнозирование, косинусное преобразование, информационная частотная компонента, доли энергии, линейное предсказание.

Keywords: prediction, cosine transformation, information frequency component, energy parts, linear prediction.

В настоящее время решение многих актуальных научно-технических, экономических, социальных, экологических и других задач связано с применением методов прогнозирования [1], которые на основе зарегистрированных параметров отдельного реального процесса позволяют сделать оценки показателей исследуемого процесса в будущий период. Например, методы прогнозирования используются в интеллектуальных системах автоматического управления инерционными объектами, широко известна классическая задача упреждающего прицеливания зенитного орудия на маневрирующий самолет. Важное значение имеет правильное построение прогнозов при управлении процессом мониторинга и оповещения, например, о загрязненности малых рек и др. Исключительно широкое распространение получил алгоритм линейного предсказания [2], используемый в вокодерах современных систем цифровой связи, в системах сжатия аудио- и видеосигналов.

В данной работе для решения задачи прогнозирования предлагается использовать преобразование исходных зарегистрированных данных на основе частотных представлений (косинусное преобразование). Использование частотных представлений для задач прогнозирования основано на том, что они характеризуют отрезок зарегистрированных данных как в целом, так и в каждом его отсчете, при этом результаты преобразования содержат информацию о закономерностях динамики изменения данных на доступном наблюдению отрезке. Кроме того, в течение определенного промежутка времени существует относительная устойчивость выделенных закономерностей.

В работе процедура преобразования зарегистрированных данных на основе частотных представлений осуществляется с помощью косинусного преобразования Фурье (БПФ), обеспечивающего высокую концентрацию энергии исследуемого отрезка данных в узкой частотной подобласти [3].

В работе [4] предложен новый метод нахождения значений долей энергии двумерных зарегистрированных данных, соответствующих заданным частотным подобластям. Поскольку двумерное косинусное преобразование является разделимым, то в дальнейшем при изложении положений разработанного метода прогнозирования будем рассматривать случай одномерных зарегистрированных данных.

Представим одномерные зарегистрированные данные в виде вектора \vec{x} , содержащего N значений,

$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_N)^T. \quad (1)$$

Косинусное преобразование Фурье значений элементов вектора \vec{x} представляется в следующем виде [3]

$$X(u) = \sum_{i=1}^N x_k \cos u(i - \frac{1}{2}), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad u \in [0, \pi]. \quad (2)$$



При этом в качестве области определения преобразования естественно рассматривать область нормированных частот $0 \leq u < \pi$.

Доля энергии вектора, соответствующая отдельной частотной подобласти $V \in [0, \pi]$, на основании равенства Парсеваля [5] определяется

$$P_V(\vec{x}) = \frac{1}{\pi} \int_{u \in V} |X(u)|^2 du. \tag{3}$$

При условии выбора в качестве V частотной подобласти вида (рисунок 1)

$$V = [u_1, u_2], \tag{4}$$

где

$$0 \leq u_2, u_1 < \pi,$$

и при подстановке в правую часть соотношения (3) определения (2), в результате преобразований можно получить соотношение для нахождения величины доли энергии $P_V(\vec{x})$ вектора \vec{x} в частотной подобласти V в базисе косинусного преобразования [4],

$$P_V(\vec{x}) = P_V = \frac{\vec{x}^T G_V \vec{x}}{\|\vec{x}\|^2} = \frac{\vec{x}^T G_V \vec{x}}{\sum_{i=1}^N x_i^2}, \tag{5}$$

где $G_V = (g_{i_1 i_2})$, $i_1, i_2 = 1, 2, \dots, N$, – симметрическая квадратная квазисубполосная матрица, элементы которой определяются следующими соотношениями:

$$g_{i_1 i_2} = a_{i_1 i_2} + h_{i_1 i_2}, \tag{6}$$

$$a_{i_1 i_2} = \begin{cases} \frac{\sin(u_2(i_1 - i_2)) - \sin(u_1(i_1 - i_2))}{\pi(i_1 - i_2)}, & i_1 - i_2 \neq 0, \\ \frac{u_2 - u_1}{\pi}, & i_1 - i_2 = 0. \end{cases} \tag{7}$$

$$h_{i_1 i_2} = \frac{\sin(u_2(i_1 + i_2 - 1)) - \sin(u_1(i_1 + i_2 - 1))}{\pi(i_1 + i_2 - 1)}. \tag{8}$$

Схематичное изображение частотной подобласти V вида (4) приведено на рисунке 1.

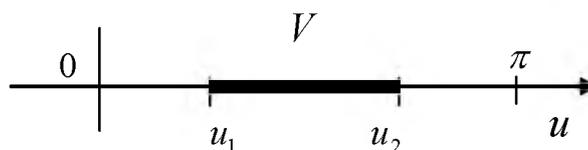


Рис. 1. Частотная подобласть V
Fig. 1. Frequency subdomain V

В ходе вычислительных экспериментов с реальными зарегистрированными данными было исследовано важное свойство реальных процессов – энергетические характеристики в последовательных отрезках зарегистрированных данных сохраняются в течение определенного периода времени.

На основании данного свойства, был предложен метод прогнозирования, позволяющий определить для некоторого зарегистрированного отрезка данных $\vec{x} = (x_1, \dots, x_N)^T$ значение x_{N+1} из будущего периода, при котором сохраняются значения долей энергии в выбранной частотной подобласти для отрезка $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_N, x_{N+1})$.

Основные положения метода прогнозирования на основе частотных представлений заключаются в следующем.

Пусть в течение некоторого периода регистрации были зарегистрированы N значений, представленных в виде вектора $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{N-1}, x_N)^T$. Предположим, что определена частотная подобласть V , соответствующая наиболее значимой частотной компоненте данного вектора, то есть такой компоненте, которая соответствует заданной доле m энергии исходного вектора (в дальнейшем, будем называть ее информационной частотной компонентой [6]).



Для частотной подобласти V , вычислим квазисубполосную матрицу $G_V^N = (g_{i_1 i_2}^N)$, $i_1, i_2 = 1, 2, \dots, N$, размерности $N \times N$, в соответствии с (6), а также значение соответствующей доли энергии P_V вектора \bar{x} на основании соотношения (5).

Тогда, при условии совпадения долей энергии векторов $(x_1, x_2, \dots, x_{N-1}, x_N)^T$ и $(x_1, x_2, \dots, x_N, x_{N+1})^T$ в частотной подобласти V , имеем

$$P_V = \frac{1}{\sum_{i=1}^N x_i^2} (x_1, x_2, \dots, x_N) G_V^N \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$P_V = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N+1} x_i^2} (x_1, x_2, \dots, x_N, x_{N+1}) G_V^{N+1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \\ x_{N+1} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где G_V^{N+1} – квазисубполосная матрица $G_V^{N+1} = (g_{i_1 i_2}^{N+1})$, $i_1, i_2 = 1, 2, \dots, N+1$, размерности $(N+1) \times (N+1)$, соответствующая частотной подобласти V .

Значения x_{N+1} вычислим следующим образом. Для этого соотношение (10) запишем в виде:

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ x_{N+1} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} B_V^{N+1} & \bar{g}_N \\ \bar{g}_N^T & g_{N+1, N+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ x_{N+1} \end{pmatrix} = P_V \sum_{i=1}^{N+1} x_i^2, \quad (11)$$

где $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ – исходный вектор, содержащий N элементов, $B_V^N = (g_{i_1 i_2}^N)$, $i_1, i_2 = 1, 2, \dots, N$, – матрица размерности $N \times N$, являющаяся угловой подматрицей матрицы G_V^{N+1} , и используемая для следующего представления симметрической матрицы G_V^{N+1} ,

$$G_V^{N+1} = \begin{pmatrix} B_V^{N+1} & \bar{g}_N \\ \bar{g}_N^T & g_{N+1, N+1} \end{pmatrix},$$

\bar{g}_N – вектор-столбец, элементы которого совпадают с элементами $\{g_{N+1,1}; g_{N+1,2}; \dots; g_{N+1,N}\}$ матрицы G_V^{N+1} ,

x_{N+1} – искомое значение очередного элемента отрезка зарегистрированных данных.

Преобразуем левую часть выражения (11) следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ x_{N+1} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} B_V^{N+1} & \bar{g}_N \\ \bar{g}_N^T & g_{N+1, N+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ x_{N+1} \end{pmatrix} = (\bar{x}^T B_V^{N+1} + x_{N+1} \bar{g}_N^T; \bar{x}^T \bar{g}_N + x_{N+1} g_{N+1, N+1}) \begin{pmatrix} \bar{x} \\ x_{N+1} \end{pmatrix} = \\ = \bar{x}^T B_V^{N+1} \bar{x} + x_{N+1} \bar{g}_N^T \bar{x} + \bar{x}^T \bar{g}_N x_{N+1} + x_{N+1} g_{N+1, N+1} x_{N+1}. \end{pmatrix}$$

Следовательно,

$$\bar{x}^T B_V^{N+1} \bar{x} + x_{N+1} \bar{g}_N^T \bar{x} + \bar{x}^T \bar{g}_N x_{N+1} + x_{N+1}^2 g_{N+1, N+1} = P_V \sum_{i=1}^{N+1} x_i^2. \quad (12)$$

На основании выражения (12) можно получить квадратное уравнение относительно величины x_{N+1} :

$$x_{N+1}^2 (g_{N+1, N+1} - P_V) + x_{N+1} (\bar{g}_N^T \bar{x} + \bar{x}^T \bar{g}_N) + \bar{x}^T B_V^{N+1} \bar{x} - P_V \sum_{i=1}^N x_i^2 = 0. \quad (13)$$

Используя очевидное равенство

$$\bar{g}_N^T \bar{x} = \bar{x}^T \bar{g}_N,$$

уравнение (13) преобразуем к следующему виду:

$$x_{N+1}^2 (g_{N+1, N+1} - P_V) + 2x_{N+1} \bar{g}_N^T \bar{x} + (\bar{x}^T B_V^{N+1} \bar{x} - P_V \sum_{i=1}^N x_i^2) = 0. \quad (14)$$

Корни x_{N+1} уравнения (14) определяется соотношением:



$$x_{N+1} = \frac{-\bar{g}_N^T \bar{x} \pm \sqrt{(\bar{g}_N^T \bar{x})^2 - (g_{N+1,N+1} - P_V)(\bar{x}^T B_V^{N+1} \bar{x} - P_V \sum_{i=1}^N x_i^2)}}{g_{N+1,N+1} - P_V} \quad (15)$$

В качестве искомого значения x_{N+1} выбирается значение (15), отличное от нуля.

Аналогично, при условии сохранения части энергии, соответствующей подобласти V , например,

$$P_V = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N+2} x_i^2} (x_1, x_2, \dots, x_{N+1}, x_{N+2}) G_V^{N+2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N+1} \\ x_{N+2} \end{pmatrix}, \quad (16)$$

могут быть получены последующие прогнозируемые значения, например, x_{N+2} и т.д.

Для проверки работоспособности разработанного метода были использованы модельные значения зарегистрированных данных, представленные в виде значений вектора \bar{x} ,

$$\bar{x} = \sin(i), \quad i = 1, 2, \dots, 32,$$

и отображенные в виде графика на рисунке 2а. На рисунке 2б в виде диаграммы отображены значения долей энергии данного вектора в базисе косинусного преобразования при разбиении частотной области на 32 подобласти. На рисунке 2б также отмечена информационная частотная подобласть V , содержащая не менее 80% энергии рассматриваемого вектора ($m = 0.8$).

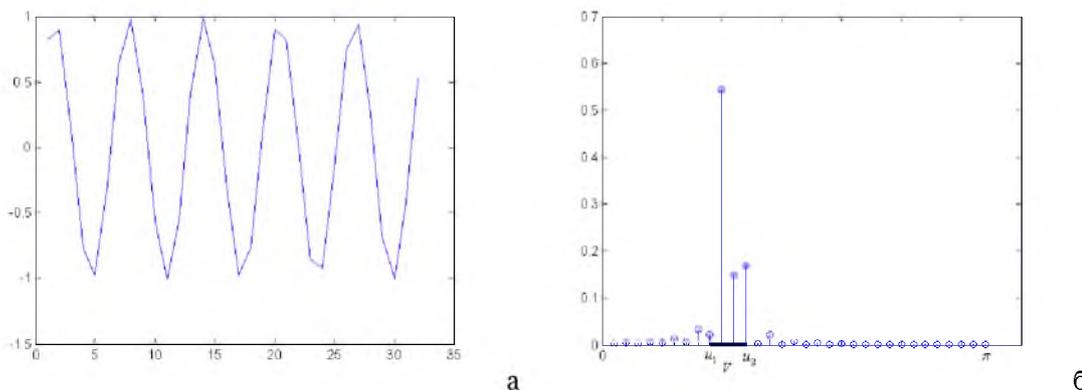


Рис. 2. Исходные данные:

а – вектор модельных данных; б – доли энергии вектора \bar{x} в отдельных частотных подобластях

$$(u_1 = \frac{5}{16} \pi, u_2 = \frac{3}{8} \pi)$$

Fig. 2. The initial data:

a – vector of model data; b – energy fractions of the vector \bar{x} in separate frequency sub-areas

$$(u_1 = \frac{5}{16} \pi, u_2 = \frac{3}{8} \pi)$$

На рисунке 3 приведена информационная частотная компонента вектора \bar{x} , соответствующая заданной частотной подобласти V , и ее доли энергии в базисе косинусного преобразования в частотной области.

Диаграмма значений долей энергии, представленная на рисунке 3б, также демонстрирует, что выделенная частотная компонента не содержит энергии за пределами заданной подобласти V .

Диаграмма значений долей энергии, представленная на рисунке 3б, также демонстрирует, что выделенная частотная компонента не содержит энергии за пределами заданной подобласти V .

Для вектора \bar{x} и информационной частотной компоненты, приведенных на рисунке 2 и рисунке 3, результаты прогнозирования 10 значений на основе разработанного метода отображены на рисунке 4а.

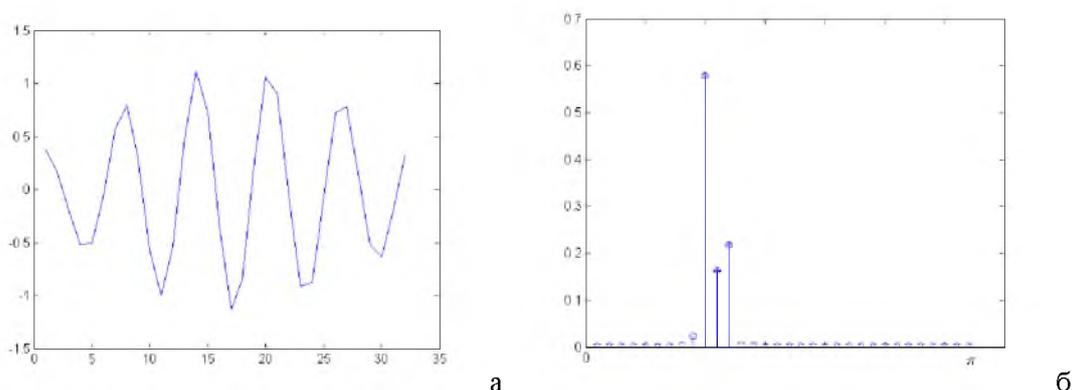


Рис. 3. Информационная частотная компонента вектора \bar{x} :
 а – информационная частотная компонента; б – доли энергии
 Fig. 3. The information frequency component of the vector \bar{x} :
 а – information frequency component; б – energy fractions

Также на рисунке 4 и в таблице 1 приведены результаты вычислительных экспериментов по сравнению результатов прогнозирования на основе разработанного метода и метода линейного предсказания [2] (коэффициенты линейного предсказания для определения очередного значения рассчитывались в среде Matlab на основе всего множества предшествующих значений).

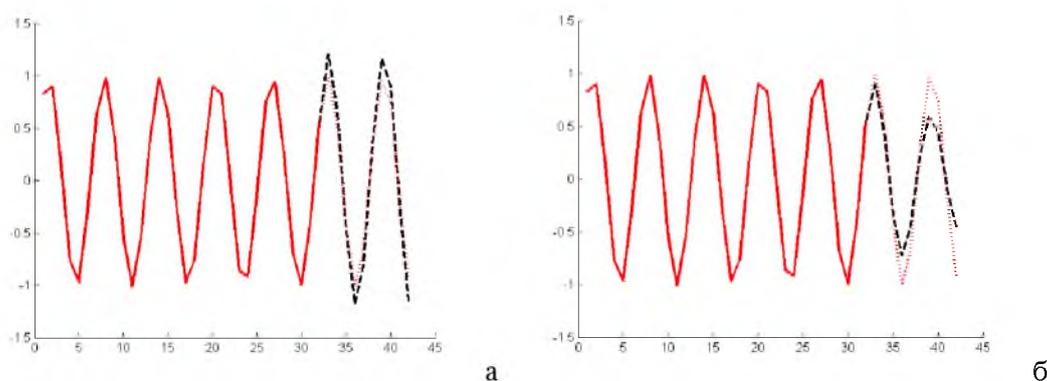


Рис. 4. Результаты прогнозирования: а – разработанный метод, б – метод линейного предсказания
 (..... – реальные значения модельного сигнала, — — — исходные данные для прогнозирования,
 — — — прогнозируемые значения)

Fig. 4. The prediction results: а – developed method, б – linear prediction
 (..... – the real values of the model signal, — — — the original data for prediction,
 — — — the predicted values)

В таблице приведены 10 последовательно вычисленных значений прогнозируемых величин и их относительные погрешности вычисления.

Таблица
Table

Результаты прогнозирования
The prediction results

№ точки прогнозирования	Модельные значения	Результат прогнозирования (разработанный метод)	Относительная погрешность (разработанный метод)	Результат прогнозирования (метод линейного предсказания)	Относительная погрешность (метод линейного предсказания)
1	0.987	1.210	0.227	0.899	0.088
2	0.516	0.653	0.266	0.447	0.133
3	-0.442	-0.485	0.099	-0.336	0.239
4	-1.005	-1.186	0.180	-0.729	0.275



5	-0.657	-0.785	0.195	-0.440	0.331
6	0.283	0.344	0.216	0.202	0.287
7	0.950	1.167	0.228	0.594	0.375
8	0.732	0.893	0.220	0.430	0.413
9	-0.172	-0.228	0.323	-0.084	0.509
10	-0.930	-1.152	0.239	-0.456	0.509
7	0.987	1.210	0.227	0.899	0.088
8	0.516	0.653	0.266	0.447	0.133
9	-0.442	-0.485	0.099	-0.336	0.239
10	-1.005	-1.186	0.180	-0.729	0.275

Результаты, приведенные на рисунке 4 и в таблице демонстрируют преимущество разработанного метода по сравнению с широко используемым методом линейного предсказания.

На основе данных, приведенных в таблице, средняя относительная погрешность прогнозирования на основе разработанного метода равна 0.22, на основе метод линейного предсказания – 0.32, что также указывает на преимущество разработанного метода.

Аналогичные сравнительные вычислительные эксперименты по прогнозированию на основании предлагаемого метода при использовании различных зарегистрированных данных также показали его высокую эффективность.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 14-47-08052

Список литературы References

1. Шурыгин А. Математические методы прогнозирования. – М.: Горячая линия -Телеком, 2009. – 180 с. Shurygin A. Matematicheskie metody prognozirovaniya. – М.: Gorjachaja linija -Telekom, 2009. – 180 s.
2. Солонина А.И. Основы цифровой обработки сигналов. – М.: Книга по требованию, 2005. – 766 с. Solonina A.I. Osnovy cifrovoj obrabotki signalov. – М.: Kniga po trebovaniyu, 2005. – 766 s.
3. Черноморец, А.А.. Об анализе данных на основе косинусного преобразования / А.А.Черноморец, Е.В. Болгова // Научные ведомости БелГУ. Сер. История. Политология. Экономика. Информатика. – 2015. – № 1 (198). – Вып. 33/1. – С. 68-73.
Chernomorec, A.A.. Ob analize dannyh na osnove kosinusnogo preobrazovanija / A.A.Chernomorec, E.V. Bolgova // Nauchnye vedomosti BelGU. Ser. Istorija. Politologija. Jekonomika. Informatika. – 2015. – № 1 (198). – Vyp. 33/1. – S. 68-73.
4. Черноморец А.А., Болгова Е.В. Об интегральных оценках косинусного преобразования Фурье / Общество, наука и инновации: сборник статей Международной научно-практической конференция (04 апреля 2015 г., г. Стерлитамак). – Стерлитамак: РИЦ АМИ, 2015. – С. 45-48.
Chernomorec A.A., Bolgova E.V. Ob integral'nyh ocenках kosinusnogo preobrazovanija Fur'e / Obshhestvo, nauka i innovacii: sbornik statej Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoy konferencija (04 aprelja 2015 g., g. Sterlitamak). – Sterlitamak: RIC AMI, 2015. – S. 45-48.
5. Черноморец, А.А. Обобщенный субполосный анализ на основе унитарных преобразований / А.А.Черноморец, Е.В. Болгова, Д.А. Черноморец // Научные ведомости БелГУ. Сер. Экономика. Информатика. – 2015. – № 7 (204). – Вып. 34/1. – С. 146-151.
Chernomorec, A.A. Obobshhennyj subpolosnyj analiz na osnove unitarnyh preobrazovanij / A.A. Chernomorec, E.V. Bolgova, D.A. Chernomorec // Nauchnye vedomosti BelGU. Ser. Jekonomika. Informatika. – 2015. – № 7 (204). – Vyp. 34/1. – S. 146-151.
6. Черноморец, А.А. О частотной концентрации энергии изображений / А.А. Черноморец, В.А. Голощапова, И.В. Лысенко, Е.В. Болгова // Научные ведомости БелГУ. Сер. История. Политология. Экономика. Информатика. – 2011. – № 1 (96). – Вып. 17/1. – С. 146-151.
Chernomorec, A.A. O chastotnoj koncentracii jenergii izobrazhenij / A.A. Chernomorec, V.A. Goloshhapova, I.V. Lysenko, E.V. Bolgova // Nauchnye vedomosti BelGU. Ser. Istorija. Politologija. Jekonomika. Infor-matika. – 2011. – № 1 (96). – Vyp. 17/1. – S. 146-151.