Revêtement galoisien de l'algèbre d'extension par relations partielle et sa catégorie de modules

par

Tanna Sánchez McMillan

Mémoire présenté au Département de mathématiques en vue de l'obtention du grade de Maître ès sciences (M. Sc.)

Faculté des sciences
Université de Sherbrooke

Sherbrooke, Québec, Canada, janvier 2018

Le 31 janvier 2018,

Membres du jury :

Professeur Ibrahim Assem
Directeur de recherche
Département de mathématiques

Professeur Shiping Liu
Membre interne
Département de mathématiques

Professeur Thomas Brüstle
Président-rapporteur
Département de mathématiques

Sommaire

Dans le but de décrire une classe d'algèbres qui, comme les algèbres inclinées amassées, admettent des tranches locales dans leur catégorie de modules, Assem, Bustamante, Dionne, LeMeur et Smith ont introduit dans [ABD+16] l'algèbre B d'extension par relations partielle.

Le but de ce mémoire est de définir une algèbre $\check{C}'$ qu'on appelle répétitive d'extension par relations partielle et un foncteur $\check{C}' \longrightarrow B$ qui est un revêtement de Galois, puis d'étudier le lien entre les catégories de modules mod$\check{C}'$ et mod$B$.

Mots-clefs : revêtement galoisien, algèbre inclinée amassée, extension par relations partielle, foncteur de rabaissement

Remerciements

Je tiens d'abord à remercier mon directeur de maîtrise, Pr.Ibrahim Assem, pour sa supervision, son soutien, et tous les enseignements et encouragements qu'il m'a procurés tout au long de mes études universitaires. Je remercie également M.Patrick LeMeur qui m'a aidé à mieux comprendre les foncteurs de rabaissement et M.Hipolito Treffinger pour sa grande disponibilité et les nombreux échanges qui m'ont été si bénéfiques.

Par ailleurs, je remercie mon mari, Rodolfo Ponce, et mes enfants, Ariel, Gael et Adrián pour être ma source constante de motivation.

Finalement, ce mémoire a été rendu possible grâce au soutien financier de mon directeur de maîtrise, du Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada (CRSNG) et de l'Institut de sciences mathématiques (ISM).

Tanna Sánchez McMillan

Sherbrooke, le 31 janvier 2018

Table des matières

Introduction

Aux fins de mieux comprendre les algèbres amassées introduites en 2002 par Formin et Zelevinsky [FZ02a], la catégorie amassée a fait son apparition [BMR$^+$06a]. Les algèbres inclinées amassées sont les algèbres d'endomorphismes des objets inclinants de cette catégorie [BMR07]. Depuis, les algèbres inclinées amassées ont été étudiées de façon extensive. En particulier, dans [ABS08], les auteurs démontrent que toute algèbre inclinée amassée est une extension triviale d'une algèbre inclinée C par le $C-C$-bimodule $E = \mathrm{Ext}^2_C(DC, C)$.

Dans [ABD$^+$16], une nouvelle algèbre a été introduite : l'algèbre d'extension par relations partielle $B = C \ltimes E'$ qui est une extension triviale de l'algèbre inclinée C par un facteur direct E' de E, ent tant que $C-C$-bimodule.

Le but de ce travail est d'étudier le lien entre la catégorie de modules $\mathrm{mod}B$ de l'algèbre d'extension par relations partielle et la catégorie de modules $\mathrm{mod}\check{C}$ de l'algèbre répétitive amassée $\check{C}$ introduite en [ABS09]. Pour ce faire, on décrit un revêtement galoisien [BG82] [Gab81] de l'algèbre B par une algèbre $\check{C}'$ qu'on appelle répétitive d'extension par relations partielle. Cette algèbre est un quotient de $\check{C}$.

Ainsi, au Chapitre 1, on se penche sur les notions essentielles pour la compréhension des revêtements de Galois des k-catégories et on présente le foncteur de rabaissement associé. Par la suite, au deuxième chapitre, on décrit les algèbres inclinées amassées, d'extension par relations, répétitive amassée, d'extension par relations partielle, ainsi que leurs carquois ordinaires. Finalement, le Chapitre 3 est dédié à décrire un foncteur plein et dense entre la catégorie de modules mod$\check{C}$ et mod$B$ qui se factorise par mod$\check{C}'$ où l'algèbre $\check{C}'$ est un revêtement de Galois de l'algèbre B.

Chapitre 1

Revêtements galoisiens de k-catégories

Dans ce travail, nous nous servirons de revêtements galoisiens de certaines algèbres de dimension finie sur un corps k algébriquement clos. L'application de la technique des revêtements nécessite de considérer les k-algèbres comme des k-catégories. Ainsi, dans ce premier chapitre, nous commençons par faire un court rappel, dans la Section 1.1, sur quelques notions de base liées aux k-catégories et, par après, on donne les définitions des k-catégories localement de dimension finie et localement bornées. Par la suite, dans la Section 1.2, nous introduisons la notion de revêtement galoisien de k-catégories et de leurs carquois liés associés. La fin du chapitre sera dédiée à présenter brièvement les foncteurs de rabaissement associés aux revêtement galoisiens.

Tout au long de ce mémoire, on se fixe un corps k algébriquement clos et quand on parle d'algèbre, on se réfère à une algèbre sur le corps k. Pour les notions d'algèbre et de carquois utilisées dans le texte, on renvoie le lecteur à [ASS06] ou [Sch14].

1.1 k-catégories

Définition 1.1.1. 1. [Ass97, III.1] Une catégorie $\mathcal{C}$ est définie par la donnée

i) d'une classe d'objets notée $\mathcal{C}_0$;

ii) pour chaque paire (x, y) d'objets de $\mathcal{C}$, d'un ensemble $\mathcal{C}(x, y)$ de morphismes ;

iii) d'une composition, pour x, y et z dans $\mathcal{C}_0$,

$$\mathcal{C}(x, y) \times \mathcal{C}(y, z) \to \mathcal{C}(x, z)$$
$$(f, g) \mapsto g \circ f,$$

qui satisfait aux conditions suivantes :

a) Si, pour des objets u, v, w, x de $\mathcal{C}$, on a $f \in \mathcal{C}(u, v)$, $g \in \mathcal{C}(v, w)$, $h \in \mathcal{C}(w, x)$, alors $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

b) Pour chaque objet x de $\mathcal{C}$, il existe un morphisme

$$1_x \in \mathcal{C}(x, x)$$

appelé le *morphisme identité* sur x et tel que, si $f \in \mathcal{C}(x, y)$ et $g \in \mathcal{C}(w, x)$, alors $f \circ 1_x = f$ et $1_x \circ g = g$

2. [BG82, p.336] Une *k-catégorie* $\mathcal{C}$ est une catégorie tel que l'ensemble de morphismes est un k-espace vectoriel et dont la composition de morphismes est k-bilineaire.

Exemple 1.1.2. 1) Pour une algèbre A, la catégorie des A-modules à droite de type fini, notée mod$A$, est une k-catégorie dont les objets sont les A-modules (à droite) et les morphismes sont les morphismes de A-modules avec la composition habituelle.

2) Soit Q un carquois. La *catégorie de chemins* kQ est aussi une k-catégorie, ayant comme objets les sommets du carquois Q, et comme espace vectoriel de morphismes $kQ(x, y)$ l'ensemble des combinaisons linéaires de chemins allant de x vers y. La composition de morphismes est induite de la composition de chemins.

Avant d'aborder le sujet des k-catégories localement bornées, on rappelle au lecteur les définitions d'idéal et de quotient d'une catégorie :

Définition 1.1.3.

[Ass97, (III.6)] Soit $\mathcal{C}$ une k-catégorie.

1. Un *idéal bilatère* I de $\mathcal{C}$ est définie par la donnée, pour chaque paire (x, y) d'objets de $\mathcal{C}$, d'un sous-espace vectoriel $I(x, y)$ de $\mathcal{C}(x, y)$ tel que :
   (i) $f \in I(x, y)$ et $g \in \mathcal{C}(y, z)$ entraînent $g \circ f \in I(x, z)$;
   (ii) $f \in I(x, y)$ et $h \in \mathcal{C}(w, x)$ entraînent $f \circ h \in I(w, y)$.
2. Étant donné un idéal bilatère I de $\mathcal{C}$, on définit la *catégorie quotient* $\mathcal{C}/I$ comme étant la catégorie dont les objets sont les mêmes que ceux de $\mathcal{C}$, et les morphismes de x vers y sont donnés par

$$(\mathcal{C}/I)(x, y) = \mathcal{C}(x, y)/I(x, y).$$

   Enfin, la composition des morphismes est induite de celle de $\mathcal{C}$. On verifie sans peine que $\mathcal{C}/I$ est bien une k- catégorie et que le foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}/I$ appliquant chaque objet sur lui même et chaque morphisme $f \in \mathcal{C}(x, y)$ sur sa classe $f + I(x, y) \in (\mathcal{C}/I)(x, y)$ est un foncteur plein et dense.

Définition 1.1.4.

[Gab81] [BG82]

1. Une k-catégorie $\mathcal{C}$ est *localement de dimension finie* si elle satisfait aux conditions suivantes :
   (a) Deux objects distincts de $\mathcal{C}$ ne sont pas isomorphes ;
   (b) Pour tout objet x dans $\mathcal{C}$, $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(x)$ est une algèbre locale ;
   (c) L'espace vectoriel $\mathcal{C}(x, y)$ est de dimension finie pour tous x, y dans $\mathcal{C}_0$.
2. On dit que $\mathcal{C}$ est *localement bornée* si elle est localement de dimension finie et si

(d) chaque $x \in \mathcal{C}_0$ admet au plus un nombre fini de $y \in \mathcal{C}_0$ telles que $\mathcal{C}(x, y) \neq 0$ ou $\mathcal{C}(y, x) \neq 0$.

Comme expliqué au début de ce chapitre, dans le but d'utiliser la technique de revêtements pour des algèbres, on devra les considérer comme des k-catégories. Avant de décrire le lien entre les deux, quelques définitions et rappels s'imposent :

On notera Q_0 et Q_1 respectivement l'ensemble de sommets et l'ensemble de flèches d'un carquois Q. On définit aussi s et b des applications $s, b : Q_1 \to Q_0$ telles que, étant donnée une flèche α de Q, le point $s(\alpha)$ est la *source* de α, le point $b(\alpha)$ son *but*, et on écrit $\alpha : x \to y$ pour décrire une flèche de source $s(\alpha) = x$ et but $b(\alpha) = y$. On note ϵ_x le chemin stationnaire en x.

Soient, pour un sommet x de Q, x^+ l'ensemble des flèches de source x et x^- l'ensemble des flèches de but x. On dit qu'un carquois est *localement fini* lorsque x^+ et x^- sont finis pour tout sommet x. Considérons l'idéal kQ^{+n} de la k-catégorie de chemins kQ, dont l'évaluation sur toute paire d'objets (x, y) est le sous-espace $kQ^{+n}(x, y)$ engendré par les chemins de longueur au moins n allant de x vers y. On appelle un idéal I de kQ *admissible* lorsque

1. $I \subseteq kQ^{+2}$, soit que I ne contient que des combinaisons linéaires de chemins de longueur au moins 2, et
2. pour tout $x \in Q_0$ il existe un nombre naturel non nul n_x (ou m_x) tel que I contient tout chemin de longueur au moins n_x (ou m_x) dont le but (ou la source, respectivement) est x. Autrement dit, lorsque

$$kQ^{+m_x}(x, \_) \subseteq I(x, \_) \text{ et}$$

$$kQ^{+n_x}(\_, x) \subseteq I(\_, x)$$

Dans ce cas, on appelle la paire (Q, I) un *carquois lié*.

Par ailleurs, soit $\mathcal{C}$ une k-catégorie localement de dimension finie. Le *radical* rad$\mathcal{C}$ de $\mathcal{C}$ est l'idéal qui assigne à chaque paire d'objets (x, y) le sous-espace rad$\mathcal{C}(x, y)$ de $\mathcal{C}(x, y)$ composé des morphismes non inversibles. De plus, étant donné $m \geqslant 1$, on définit la m-ième puissance rad$^m\mathcal{C}$ du rad$\mathcal{C}$ en prenant, pour rad$^m\mathcal{C}(x, y)$, le sous espace de rad$\mathcal{C}(x, y)$ composé de toutes les sommes finies de morphismes de la forme

$$x = x_o \xrightarrow{h_1} x_1 \xrightarrow{h_2} x_2 \xrightarrow{h_3} \dots \xrightarrow{h_{m-1}} x_{m-1} \xrightarrow{h_m} x_m = y$$

où $h_j \in \mathrm{rad}\mathcal{C}(x_{j-1}, x_j)$. En outre, le *radical infini* rad$^\infty\mathcal{C}$ de $\mathcal{C}$ est défini comme suit :

$$\mathrm{rad}^\infty\mathcal{C} = \cap_{m\geq 1}\mathrm{rad}^m\mathcal{C}.$$

Finalement, un morphisme $g \in \mathcal{C}(x, y)$ non nul est dit *irréductible* si $g \in \mathrm{rad}\mathcal{C}(x, y)$, mais $g \notin \mathrm{rad}^2\mathcal{C}(x, y)$.

Lemme 1.1.5.

Soit $\mathcal{C}$ une k-catégorie localement bornée, alors rad$^\infty\mathcal{C}(x, y) = 0$ pour toute paire d'objets (x, y).

Démonstration. Soit x, y deux objets de $\mathcal{C}$. Il existe une suite de sous-espaces vectoriels $\mathcal{C}(x, y) \supseteq \mathrm{rad}\mathcal{C}(x, y) \supseteq \mathrm{rad}^2\mathcal{C}(x, y) \supseteq \dots$. Mais $\mathcal{C}(x, y)$ est un k-espace de dimension finie. Donc, il existe $m \geq 0$ tel que $\mathrm{rad}^m\mathcal{C}(x, y) = 0$. En particulier, $\mathrm{rad}^\infty\mathcal{C}(x, y) = 0$.

□

Théorème 1.1.6.

[BG82] Soit (Q, I) un carquois lié avec I un idéal admissible. Alors la k-catégorie kQ/I est localement bornée si et seulement si Q est un carquois localement fini. De plus, pour toute k-catégorie localement bornée $\mathcal{C}$, il existe un carquois Q localement fini et un idéal admissible I tel que $\mathcal{C} \cong kQ/I$.

Démonstration. Supposons que la catégorie de carquois lié kQ/I est localement bornée, et prouvons que Q est localement fini. L'espace vectoriel de morphismes $\frac{kQ(x,y)}{I(x,y)}$ pour tous $x, y \in (kQ/I)_0$ correspond à l'ensemble des combinaisons linéaires de chemins allant de x vers y n'appartenant pas à $I(x, y)$. Cet espace vectoriel, en vertu de la condition (c) de la Définition 1.1.4, est de dimension finie pour toute paire d'objets (x, y). Ainsi, il existe pour chaque paire de sommets (x, y) un nombre fini de chemins entre eux. De plus, la condition (d) de la Définition 1.1.4 dit que chaque sommet x admet au plus un nombre fini de sommets y tel qu'il existe des chemins non nuls allant de x vers y et de y vers x. En particulier, le nombre de flèches qui entrent et qui sortent de chaque sommet dans Q est fini, ce qui fait de Q un carquois localement fini. Réciproquement, si le carquois Q est localement fini, alors, par définition, pour tout $x \in Q_0$, il existe au plus un nombre fini de flèches sortant de et arrivant à x. De plus, le fait que l'idéal I soit admissible garantit une borne supérieure à la longueur de tout chemin non nul dans Q. Par conséquent, les conditions (c) et (d) de la Définition 1.1.4 sont satisfaites. En outre, les objets de la k-catégorie de carquois lié kQ/I étant les sommets de Q, la première condition est satisfaite. Finalement, $\mathrm{End}_{kQ/I}(x)$ est locale du fait qu'elle est de dimension finie (car kQ/I satisfait aux conditions (c) et (d)) et que les objets $x \in (kQ/I)_0$ sont indécomposables [ASS06, (A.3.6)(b)].

Maintenant, soit $\mathcal{C}$ une k-catégorie localement bornée. On veut définir un foncteur $H : kQ \longrightarrow \mathcal{C}$ qui soit plein et dense. Pour ce faire, on construit le carquois ordinaire $Q_{\mathcal{C}}$ de $\mathcal{C}$ de la façon suivante :

i) $(Q_{\mathcal{C}})_0$ se compose des objets de $\mathcal{C}$. Ainsi, il existe une bijection d'objets

$$\begin{aligned} H : kQ &\longrightarrow \mathcal{C} \\ \epsilon_x &\longmapsto x \end{aligned}$$

En particulier, H est dense.

ii) On choisit une base de l'espace vectoriel $\frac{\mathrm{rad}\mathcal{C}(x,y)}{\mathrm{rad}^2\mathcal{C}(x,y)}$ et, pour chaque élément $f_\alpha + \mathrm{rad}^2\mathcal{C}(x,y)$ de cette base, on aura une flèche $\alpha : x \longrightarrow y$ dans Q. Ainsi, le nombre de flèches entre x et y est égal à la dimension de $\frac{\mathrm{rad}\mathcal{C}(x,y)}{\mathrm{rad}^2\mathcal{C}(x,y)}$.

Prenons maintenant un morphisme non nul $g \in \mathcal{C}(x,y)$. En vertu du Lemme 1.1.5, $g \notin \mathrm{rad}^\infty\mathcal{C}(x,y)$. On a que g est une combinaison linéaire de morphismes irréductibles. Posons $g = \sum_{\gamma=1}^{n} \lambda_i g_{i1} \circ g_{i2} \circ \ldots \circ g_{it}$ avec $\lambda_i \in k$ et g_i des morphismes irréductibles dans $\mathcal{C}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, t\}$. Pour chaque i, j, il existe une flèche $\beta_{i,j}$ telle que $g_{i,j} = H(\beta_{i,j})$. Ainsi, $g = \sum_{\gamma=1}^{n} \lambda_i H(\beta_{i1}) \circ H(\beta_{i2}) \circ \ldots \circ H(\beta_{it})$ et H et plein.

Montrons maintenant que $I = \mathrm{Ker}H$ est un idéal admissible. D'abord, par construction de H, on a que $H(kQ_{\mathcal{C}}^{+}) \subseteq \mathrm{rad}\mathcal{C}$. Alors, $H(kQ_{\mathcal{C}}^{+l}) \subseteq \mathrm{rad}^l\mathcal{C}$ pour tout $l \geq 1$. Puisque $\mathcal{C}$ est localement bornée, il existe, pour tous $x, y \in \mathcal{C}_0$, un $m_{x,y} \geqslant 1$ tel que $\mathrm{rad}_{\mathcal{C}}^{m_{x,y}}(x,y) = 0$ en vertu du Lemme 1.1.5. On a ainsi, por x, y un $m_{x,y} \geqslant 1$ tel que $kQ^{+m_{x,y}}(x,y) \subseteq I(x,y)$. Le nombre de y tels que $\mathcal{C}(x,y) \neq 0$ étant fini, prenons $m_x = \sup_y m_{x,y}$. Alors, $(kQ)^{+m_x}(x, \_) \subseteq I(x, \_)$. De même, on trouve $n_x \geq 1$ tel que $(kQ)^{+n_x}(\_, x) \subseteq I(\_, x)$.

Il reste à montrer que $I \subseteq kQ^{+2}$. Fixons une paire (x,y) d'objets de $\mathcal{C}$ et soit $g \in I(x,y)$. On peut écrire

$$g = \sum_{(\alpha:x\to y)\in(Q_{\mathcal{C}})_1} \alpha\mu_\alpha + h$$

avec $\mu_\alpha \in k$ et $h \in kQ^{+2}(x,y)$. Maintenant, $H(g) = 0$ donne

$$\sum_{(\alpha:x\to y)\in(Q_{\mathcal{C}})_1} f_\alpha\mu_\alpha = -H(h) \in \mathrm{rad}^2\mathcal{C}(x,y)$$

d'où

$$\sum_{(\alpha:x\to y)\in(Q_{\mathcal{C}})_1} (f_\alpha + \mathrm{rad}^2\mathcal{C}(x,y))\mu_\alpha = 0$$

dans $\frac{\mathrm{rad}\mathcal{C}(x,y)}{\mathrm{rad}^2\mathcal{C}(e_i,e_j)}$, mais puisque $\{f_\alpha + \mathrm{rad}^2\mathcal{C}(x,y) | \alpha : i \longrightarrow j\}$ est une base de l'espace $\frac{\mathrm{rad}\mathcal{C}(x,y)}{\mathrm{rad}^2\mathcal{C}(x,y)}$, on a $\mu_\alpha = 0$ pour tout $\alpha \in (Q_\mathcal{C})_1$ et donc $g = h \in kQ^{+2}(x,y)$.

Ainsi, pour $I = \mathrm{Ker}H$ admissible, on obtient une équivalence de k-catégories $kQ_\mathcal{C}/I \cong \mathcal{C}$. □

On peut identifier une algèbre à une k-catégorie en considerant le spectroïde de l'algèbre.

Définition 1.1.7.

Soit A une algèbre sobre et connexe. Le *spectroïde* de A, noté $\mathscr{C}(A)$, est la catégorie définie comme suit :

i) $\mathscr{C}(A)_0 = \{e_i\}_i$ est un ensemble complet d'idempotents primitifs deux à deux orthogonaux de A ;

ii) $\mathscr{C}(A)(e_i, e_j) = e_iAe_j$, pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$;

iii) La composition de morphismes est induite de la multiplication de A :

$$e_iAe_j \times e_jAe_k \longrightarrow e_iAe_k.$$

Remarque 1.1.8. La catégorie $\mathscr{C}(A)$ ne dépend pas du choix de l'ensemble complet d'idempotents primitifs deux à deux orthogonaux $\{e_i\}_i$. En effet, les e_i sont en bijection avec les facteurs indécomposables e_iA de la decomposition en somme directe de A_A et les dits facteurs sont uniquement déterminés à isomorphisme près [ASS06, (I.4.10)].

Proposition 1.1.9.

Soit A une algèbre sobre et connexe. Alors, le spectroïde $\mathscr{C}(A)$ est une k-catégorie.

Démonstration. D'abord, on a que $\mathscr{C}(A)(e_i, e_j) = e_iAe_j$ où A est une algèbre et a donc une structure de k-espace vectoriel. Ainsi, e_iAe_j est aussi un k-espace vectoriel. De plus, la composition $e_xAe_y \times e_yAe_z \longrightarrow e_xAe_z$ est k-bilinéaire pour tout $e_x, e_y, e_z \in \mathscr{C}(A)_0$.

En effet, soient $g \in \mathscr{C}(A)(e_y, e_z)$, $f_1, f_2 \in \mathscr{C}(A)(e_x, e_y)$ et $\alpha, \beta \in k$. Ainsi, $g = e_y a_g e_z$, $f_1 = e_x a_{f_1} e_z$ et $f_2 = e_x a_{f_2} e_z$ pour $a_g, a_{f_1}, a_{f_1} \in A$. On veut montrer que $g \circ (\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha(g \circ f_1) + \beta(g \circ f_2)$.

$$\begin{aligned}
g \circ (\alpha f_1 + \beta f_2) &= (e_x(\alpha a_{f_1} + \beta a_{f_2})e_y)(e_y a_g e_z) \\
&= e_x(\alpha a_{f_1} + \beta a_{f_2})e_y a_g e_z \\
&= \alpha e_x a_{f_1} e_y a_g e_z + \beta e_x a_{f_2} e_y a_g e_z \\
&= \alpha(e_x a_{f_1} e_y)(e_y a_g e_z) + \beta(e_x a_{f_2} e_y)(e_y a_g e_z) \\
&= \alpha(g \circ f_1) + \beta(g \circ f_2)
\end{aligned}$$

On démontre de façon semblable que $(\alpha g_1 + \beta g_2) \circ f = \alpha g_1 \circ f + \beta g_2 \circ f$ pour $f \in \mathscr{C}(A)(e_x, e_y)$ et $g_1, g_2 \in \mathscr{C}(A)(e_y, e_z)$.

$\square$

Dans le but de donner des exemples des notions présentées dans ce chapitre, on doit rappeler quelques définitions additionnelles qui, de plus, seront utilisées dans la discussion sur les revêtements à la Section 1.2. Une *relation* ρ d'un carquois Q est une combinaison linéaire $\rho = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \gamma_i$ où les $\omega_i \in k$ sont non nuls et les γ_i sont des chemins de Q de longueur au moins deux ayant la même source et le même but. On peut montrer [ASS06, (II.2.9)] que si I est un idéal admissible de l'algèbre de chemins kQ avec Q fini, il peut être engendré par un ensemble fini $\{\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n\}$ de relations de Q. On note ceci $I = \langle \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n \rangle$.

Exemple 1.1.10. 1. Soit $A = kQ/I$ l'algèbre donnée par le carquois fini (et donc localement fini) Q

$$1 \xrightarrow{\alpha_1} 2 \xrightarrow{\alpha_2} 3 \xrightarrow{\alpha_3} 4 \xrightarrow{\alpha_4} 5$$

avec $I = \langle \alpha_1\alpha_2, \alpha_2\alpha_3\alpha_4 \rangle$ admissible. A est donc, en vertu du Théorème 1.1.6, localement bornée en tant que k-catégorie.

2. Le carquois lié infini (Q, I) avec $I = \langle \alpha_i\alpha_{i+2} \rangle$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$

$$\begin{tikzcd}
 & & 1 & & 4 \arrow[dl, "\alpha_5"'] & & 7 \arrow[dl, "\alpha_1"] & \\
\cdots & & & 3 \arrow[ul, "\alpha_7"'] \arrow[dl, "\alpha_8"'] & & 6 \arrow[ul, "\alpha_3"'] \arrow[dl, "\alpha_4"'] & & \cdots \\
 & & 2 & & 5 \arrow[ul, "\alpha_6"'] & & 8 \arrow[ul, "\alpha_2"'] &
\end{tikzcd}$$

représente une algèbre A de dimension infinie. Le carquois Q étant localement fini et I un idéal admissible, A est, en tant que k-catégorie, localement bornée .

1.2 Revêtement galoisiens

En théorie des représentations, l'utilisation de la technique de revêtements a été initiée par Riedtman [Rie80] pour le carquois d'Auslander-Reiten d'algèbres auto-injectives de représentation finie et par Bongartz-Gabriel [BG82], Gabriel [Gab81] pour des k-catégories localement de dimension finie. Celle-ci a permis de ramener l'étude des représentations d'une algèbre A de représentation finie à celle des représentations d'une algèbre simplement connexe A' appelée revêtement universel de A. Dans cette section on définit notamment les notions de revêtement galoisien de k-catégories et de carquois liés. On verra, entre autres, qu'un revêtement galoisien de carquois lié induit un revêtement galoisien de la k-catégorie de carquois lié associée. Pour finir, on donne la définition du foncteur de rabaissement associé à un revêtement galoisien qui sera utilisé au Chapitre 3 pour décrire le lien entre deux k-catégories de modules.

Définition 1.2.1.

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux k-catégories.

1. Un *k-foncteur* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est un foncteur tel que l'application

$$F : \mathcal{C}(x, y) \to \mathcal{D}(F(x), F(y))$$
$$f \mapsto F(f)$$

   est une application k-linéaire ;

2. Un k-foncteur inversible $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ s'appelle *automorphisme* de la k-catégorie $\mathcal{C}$.

Définition 1.2.2. 1. Soient Q' et Q deux carquois. Un *morphisme de carquois* $f : Q' \longrightarrow Q$ est défini par deux fonctions $f_0 : Q'_0 \longrightarrow Q_0$ et $f_1 : Q'_1 \longrightarrow Q_1$ telles que pour toute flèche α de Q',

$$f_0(s(\alpha)) = s(f_1(\alpha))$$

$$f_0(b(\alpha)) = b(f_1(\alpha)).$$

2. Un morphisme $f : Q' \to Q$ est un *isomorphisme* si f_0 et f_1 sont bijectives.

3. Un isomorphisme $f : Q \to Q$ s'appelle *automorphisme.*

Exemple 1.2.3. 1. Soient Q un carquois. Le morphisme $1_Q : Q \to Q$ est tel que les applications $f_0 : Q_0 \to Q_0$ et $f_1 : Q_1 \to Q_1$ sont les applications identité.

2. Considérons le carquois Q' suivant

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d, "\alpha_{-1}"'] & \\
(1,-1) \arrow[d, "\alpha_0"'] & (2,-1) \arrow[l, "\beta_{-1}"'] \\
(1,0) \arrow[d, "\alpha_1"'] & (2,0) \arrow[l, "\beta_0"'] \\
\vdots &
\end{tikzcd}$$

   et le carquois Q

$$\alpha \circlearrowright 1 \xleftarrow{\beta} 2$$

On obtient un morphisme de carquois en posant, pout tout $i \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} f_0 : Q'_0 &\to Q_0 \\ (1,i) &\mapsto 1 \\ (2,i) &\mapsto 2 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} f_1 : Q'_1 &\to Q_1 \\ \alpha_i &\mapsto \alpha \\ \beta_i &\mapsto \beta. \end{aligned}$$

Définition 1.2.4. 1. Un *morphisme de carquois lié* $\bar{f} : (Q', I') \longrightarrow (Q, I)$ est un morphisme de carquois $f : Q' \longrightarrow Q$ qui préserve les relations, c'est-à-dire que pour $\rho' \in I'$ on a que $\bar{f}(\rho') \in I$;

2. Un morphisme de carquois lié $\bar{f} : (Q', I') \longrightarrow (Q, I)$ est un *revêtement de carquois liés* si les conditions suivantes sont satisfaites :
   (a) Pour tout $x \in Q_0$, on a $\bar{f}^{-1}(x) \neq \emptyset$;
   (b) pour tout $x \in Q_0$ et $x' \in \bar{f}^{-1}(x)$, le morphisme $\bar{f}$ induit des bijections
   $$x'^{+} \to x^{+} \text{ et}$$
   $$x'^{-} \to x^{-},$$
   (c) pour toute paire d'objets x, y dans Q_0, pour toute relation $\rho \in I(x, y)$, et tout $x' \in \bar{f}^{-1}(x)$, il existe $y' \in \bar{f}^{-1}(y)$ et $\rho' \in I'(x', y')$ tels que $\bar{f}(\rho') = \rho$.

Définition 1.2.5.

Un k-foncteur $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ entre deux k-catégories est un *revêtement* (ou *k-foncteur couvrant*) si

1. pour tout objet x dans $\mathcal{D}$, on a $F^{-1}(x) \neq \emptyset$;
2. les applications induites

$$\bigoplus_{y \in F^{-1}(a)} \mathcal{C}(x,y) \longrightarrow \mathcal{D}(Fx,a)$$

$$\bigoplus_{y \in F^{-1}(a)} \mathcal{C}(y,x) \longrightarrow \mathcal{D}(a,Fx)$$

sont des bijections pour tout $x \in \mathcal{C}_0$ et tout $a \in \mathcal{D}_0$.

Etant donné un objet x de $\mathcal{D}$, l'ensemble $F^{-1}(x) = \{x' \in \mathcal{C}_0 | F(x') = x\}$ est appelé la *fibre de F en x*.

Exemple 1.2.6. 1. Soient les carquois sans relations Q'

$$\begin{tikzcd}
 & (2,1) \arrow[r, "\alpha_1"'] \arrow[dl, "\beta_1"] & (1,1) & \\
(3,1) \arrow[d, "\gamma_1"] & & & (4,2) \arrow[ul, "\delta_2"'] \\
(4,1) \arrow[dr, "\delta_1"] & & & (3,2) \arrow[u, "\gamma_2"'] \\
 & (1,2) & (2,2) \arrow[l, "\alpha_2"'] \arrow[ur, "\beta_2"] &
\end{tikzcd}$$

et Q

$$\begin{tikzcd}
3 \arrow[r, "\gamma"] & 4 \arrow[d, "\delta"] \\
2 \arrow[u, "\beta"] \arrow[r, "\alpha"'] & 1
\end{tikzcd}$$

Le morphisme de carquois $f : Q' \longrightarrow Q$ défini par

$$f_0(n,i) = n,$$

$$f_1(\alpha_1) = \alpha, f_1(\alpha_2) = \alpha + \beta\gamma\delta$$

$$f_1(\beta_i) = \beta, f_1(\gamma_i) = \gamma \text{ et } f_1(\delta_i) = \delta$$

pour $n \in \{1,2,3,4\}$ et tout $i \in \{1,2\}$ est un revêtement de carquois. Dans cet exemple, la condition (c) de la Définition 1.2.4(2) est trivialement vérifiée, car I' est nul. Posons $\mathcal{C} = kQ'$ et $\mathcal{D} = kQ$. Le k-foncteur $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ est un revêtement de k-catégories.

2. Soit Q' le carquois

$$\begin{tikzcd}
(1,1) \arrow[d, "\alpha_1"'] \arrow[rr, "\gamma_1"] \arrow[dddrrr, bend right, "\epsilon_1"] & & & (1,2) \arrow[d, "\alpha_2"] \arrow[dll, "\gamma_2"'] \arrow[dddlll, bend left, "\epsilon_2"] \\
(2,1) \arrow[dd, "\beta_1"'] & (3,1) \arrow[ddrr, "\delta_1"] & (3,2) \arrow[ddll, "\delta_2"'] & (2,2) \arrow[dd, "\beta_2"] \\
& & & \\
(4,1) & & & (4,2)
\end{tikzcd}$$

lié par l'idéal I' engendré par toutes les relations de commutativité possibles et Q le carquois

$$\begin{tikzcd}
& 1 \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\gamma"] \arrow[dd, "\epsilon"] & \\
2 \arrow[dr, "\beta"'] & & 3 \arrow[dl, "\delta"] \\
& 4 &
\end{tikzcd}$$

lié par l'idéal $I = \langle \alpha\beta - \gamma\delta \rangle$. Le morphisme de carquois liés $\bar{f} : (Q', I') \longrightarrow (Q, I)$ donné par

$$\bar{f}(n,i) \mapsto n \qquad \bar{f}(\gamma_i) \mapsto \gamma$$
$$\bar{f}(\alpha_i) \mapsto \alpha \qquad \bar{f}(\delta_i) \mapsto \delta$$
$$\bar{f}(\beta_i) \mapsto \beta \qquad \bar{f}(\epsilon_i) \mapsto \epsilon$$

pour tout $n \in \{1,2,3,4\}$ et tout $i \in \{1,2\}$ est un revêtement de carquois liés. Si on pose $\mathcal{C} = kQ'/I'$ et $\mathcal{D} = kQ/I$, le k-foncteur $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ est un revêtement de

k-catégories.

Proposition 1.2.7.

[LM06, (6.2.6)(6.2.7)] Soit $\bar{f} : (Q', I') \longrightarrow (Q, I)$ un morphisme de carquois lié et soit $F : (kQ'/I') \longrightarrow (kQ/I)$ le foncteur induit de $\bar{f}$ entre les k-catégories associés aux carquois liés (Q', I') et (Q, I). Alors, si $\bar{f}$ est un revêtement de carquois liés, $F : (kQ'/I') \longrightarrow (kQ/I)$ est un revêtement de k-catégories. Réciproquement, si F est un revêtement de k-catégories, le morphisme de carquois liés $\bar{f}$ est un revêtement de carquois liés.

Définition 1.2.8.

Soit $\mathcal{C}$ une k-catégorie et G un groupe d'automorphismes k-linéaires de $\mathcal{C}$. On dit que l'action de G sur $\mathcal{C}$ est

1. *libre* si $gx \neq x$ pour tout objet x dans $\mathcal{C}_0$ et tout $g \neq 1_G$ dans G ;
2. *localement bornée* si pour chaque paire d'objets (x, y) dans $\mathcal{C}$, il n'existe qu'un nombre fini de $g \in G$ tels que $\mathcal{C}(x, gy) \cong \mathcal{C}(g^{-1}x, y) \neq 0$.

Définition 1.2.9.

Soit $\mathcal{C}$ une k-catégorie et G un groupe d'automorphismes k-linéaires de $\mathcal{C}$. La *k-catégorie d'orbites $\mathcal{C}/G$* est définie comme suit :

1. Les objets de $\mathcal{C}/G$ sont les G-orbites des objets de $\mathcal{C}$;
2. Pour $a, b \in (\mathcal{C}/G)_0$, le k-espace vectoriel de morphismes $(\mathcal{C}/G)(a, b)$ est défini par

$$(\mathcal{C}/G)(a, b) = \{(f_{x,y}) \in \bigoplus_{(x,y)\in a\times b} \mathcal{C}(x, y) \mid gf_{x,y} = f_{gx,gy} \text{ pour tous } g \in G, x \in a, y \in b\}$$

Pour toutes orbites a, b, c dans $(\mathcal{C}/G)_0$, la composition $h \circ f$ des morphismes $f_{a,b} : a \longrightarrow b$ et $h_{b,c} : b \longrightarrow c$ dans $\mathcal{C}/G$ est définie, pour $(x, z) \in a \times c$ fixes et $y \in b$, par $(h \circ f)_{a,c} = \sum_{y\in b} h_{y,z} \circ f_{x,y}$.

Proposition 1.2.10.

[Gab81, (3.1)] Soient $\mathcal{C}$ une k-catégorie localement de dimension finie et G un groupe

d'automorphismes dont l'action sur $\mathcal{C}$ est libre et localement bornée. Alors, la k-catégorie d'orbites $\mathcal{C}/G$ est localement de dimension finie et la projection canonique $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}/G$ est un revêtement tel que $Fg = F$ pour tout $g \in G$. De plus, pour tout k-foncteur $E : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ tel que $Eg = E$ pour tout $g \in G$, il existe un unique k-foncteur $H : \mathcal{C}/G \longrightarrow \mathcal{D}$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "E"] \arrow[d, "F"'] & \mathcal{D} \\ \mathcal{C}/G \arrow[ur, "H"'] & \end{tikzcd}$$

Le revêtement $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}/G$ envoie un objet x de $\mathcal{C}$ vers sa G-orbite et envoie un morphisme $h \in \mathcal{C}(x, y)$ vers la famille de morphismes Fh telle que $Fh_{g_1x,g_2y} = gh$ ou $Fh_{g_1x,g_2y} = 0$ selon que $g_1 = g_2$ ou $g_1 \neq g_2$ dans G.

On est maintenant en mesure de définir un revêtement galoisien de k-catégories.

Définition 1.2.11.

On appelle *revêtement galoisien de groupe G* (ou *G-revêtement galoisien*) un foncteur $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ tel que $E = Eg$ pour tout $g \in G$ et que l'on a un isomorphisme $H : \mathcal{C}/G \longrightarrow \mathcal{D}$ satisfaisant à $E = HF$.

Puisque les conditions dans la définition précédente ne sont pas toujours facilement vérifiables dans des exemples concrets, on donne à la Proposition 1.2.13 plus bas, une caractérisation alternative d'un G-revêtement galoisien de k-catégories qui s'appuie sur le lien entre ce dernier et le revêtement galoisien du carquois lié associé.

Définition 1.2.12.

Soient (Q', I') et (Q, I) deux carquois liés. Un *revêtement galoisien du carquois lié* (Q, I) est un revêtement de carquois lié $\bar{f} : (Q', I') \longrightarrow (Q, I)$ avec un groupe G d'automorphismes de (Q', I') tel que :

1. l'action de G sur Q'_0 est libre ;

2. $\bar{f}g = f$ pour tout $g \in G$ et $\bar{f}(x) = \bar{f}(y)$ si et seulement si, il existe $g \in G$ tel que $y = g(x)$;

3. I est un idéal engendré par les éléments de la forme $\bar{f}(\rho')$, où $\rho' \in I'$.

Comme dans le cas des revêtements (Proposition 1.2.7), le foncteur entre k-catégories induit par un G-revêtement galoisien de carquois lié, en plus d'être un revêtement, est un G-revêtement galoisien des k-catégories associées [LM06, (6.2.16)].

Proposition 1.2.13.
[Gab81, (3.1)] Soit $\mathcal{C}$ une k-catégorie localement de dimension finie, G un groupe d'automorphismes dont l'action sur $\mathcal{C}$ est libre et localement bornée, $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}/G$ un revêtement et $E : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ un k-foncteur tel que $E = Eg$ pour tout $g \in G$. Alors, E est un revêtement galoisien si et seulement si

1. *E est surjectif sur les objets de $\mathcal{D}$;*

2. *G agit de façon transitive sur la fibre de E, c'est-à-dire que, pour tout $x \in \mathcal{D}_0$ et tous $x', y' \in E^{-1}(x)$, il existe $g \in G$ tel que $gx' = y'$.*

On peut donc voir un G-revêtement galoisien $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ comme un revêtement de k-catégories pour lequel la fibre de E en u, pour u un objet ou un morphisme de $\mathcal{D}$, est la G-orbite de u, avec G un groupe d'automorphismes dont l'action sur $\mathcal{C}$ est libre et localement bornée.

Exemple 1.2.14. 1. Soient le carquois lié (Q', I')

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d, "\alpha_{-1}"'] & \\
(1,-1) \arrow[d, "\alpha_0"'] & (2,-1) \arrow[l, "\beta_{-1}"'] \\
(1,0) \arrow[d, "\alpha_1"'] & (2,0) \arrow[l, "\beta_0"'] \\
\vdots &
\end{tikzcd}$$

avec $I = \langle \alpha_i \alpha_{i+1} \rangle$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$ et le carquois lié (Q, I)

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[loop left, "\alpha"] & 2 \arrow[l, "\beta"']
\end{tikzcd}$$

avec $I = \langle \alpha^2 \rangle$. On prend $\bar{f} : (Q', I') \longrightarrow (Q, I)$ le morphisme de carquois lié défini à l'Exemple 1.2.3(2). On fixe un automorphisme du carquois lié (Q', I') défini, pour tout $i \in \mathbb{Z}$ et $n \in \{1, 2\}$, par

$$\begin{aligned}
g : (Q', I') &\to (Q', I') \\
(n, i) &\mapsto (n, i+1) \\
\alpha_i &\mapsto \alpha_{i+1} \\
\beta_i &\mapsto \beta_{i+1}.
\end{aligned}$$

Ainsi, étant donné l'action du groupe cyclique $\langle g \rangle$ sur (Q', I'), $\bar{f}$ est un G-revêtement galoisien et $F : kQ'/I' \longrightarrow kQ/I$ est un G-revêtement galoisien de k-catégories.

2. Le morphisme de carquois $\bar{f} : (Q', I') \longrightarrow (Q, I)$ dans l'Exemple 1.2.6(1) avec $I = \langle \beta\gamma\delta \rangle$ et $I' = \langle \beta_1\gamma_1\delta_1, \beta_2\gamma_2\delta_2 \rangle$ est un revêtement de carquois liés, mais $\bar{f}$ n'est pas un revêtement galoisien de groupe $\mathbb{Z}_2$, du fait que $f(\alpha_1) \neq f(\alpha_2)$.

1.2.1 Foncteur de rabaissement

Pour le reste du chapitre, on suppose que les algèbres sont, en tant que k-catégories, localement de dimension finie. Pour une algèbre $A = kQ/I$, on considère $M \in \text{mod}A$ comme un foncteur covariant :

$$\begin{aligned} A &\longrightarrow \text{mod}k \\ (e_i \in A_0) &\mapsto Me_i \\ (u \in A(e_i, e_j)) &\mapsto \begin{pmatrix} Me_i \to Me_j \\ m \mapsto mu \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dans les exemples, on identifie un module $M \in \text{mod}(kQ/I)$ à une *représentation* du carquois lié (Q, I) (voir par exemple [ASS06, (III.1)] ou [Sch14, (1.1.2)]). À chaque G-revêtement galoisien d'algèbres, Bongartz et Gabriel [BG82, (3.2)], [Gab81, (2.7)] associent un foncteur de rabaissement entre leurs catégories de modules.

Définition 1.2.15.
Soit $F : A' = (kQ'/I') \longrightarrow A = (kQ/I)$ un G-revêtement galoisien d'algèbres localement de dimension finie, alors le k-foncteur

$$F_\lambda : \text{mod}A' \longrightarrow \text{mod}A$$

est un *foncteur de rabaissement* défini, pour un A'-module M, de la façon suivante :

1. Pour tout $a \in Q_0$,
$$F_\lambda(M)(a) = \bigoplus_{x \in F^{-1}(a)} M(x)$$
où la fibre de a, $F^{-1}(a) = \{x \in Q'_0 | F(x) = a\}$, est une G-orbite.

2. Soit $\alpha : a \longrightarrow b$ dans Q_1. Pour tout $x \in F^{-1}(a)$, il existe une unique $\alpha_x : x \longrightarrow y$ et $\alpha_x \in F^{-1}(\alpha)$ avec $y \in F^{-1}(b)$ et $M(\alpha_x) : M(x) \longrightarrow M(y)$. Supposons que $x' \in F^{-1}(a)$ et $\alpha_{x'} : x' \longrightarrow y'$ dans $F^{-1}(\alpha)$. Si $x' \neq x$, alors $y' \neq y$. On pose
$$F_\lambda(M)(\alpha) : \bigoplus_{x \in F^{-1}(a)} M(\alpha_x) : \bigoplus_{x \in F^{-1}(a)} M(x) \longrightarrow \bigoplus_{x \in F^{-1}(b)} M(y)$$

Remarque 1.2.16. [BG82, (3.2)]Le foncteur de rabaissement F_λ : mod$A' \longrightarrow$ mod$A$ associé à un revêtement de Galois $F : A' \longrightarrow A$

1. est exact
2. adjoint à gauche d'un *foncteur de relèvement* $F_\bullet$: mod$A \longrightarrow$ modA'.

Exemple 1.2.17.

Soit (Q', I') le carquois lié

$$\begin{tikzcd}
\cdots & & (1,0) \arrow[dr, "\alpha_0"] & & (1,1) \arrow[dr, "\alpha_1"] & \cdots \\
& (2,-1) \arrow[ur, "\beta_{-1}"'] & & (2,0) \arrow[ur, "\beta_0"'] & & (2,1)
\end{tikzcd}$$

avec $I' = \langle \alpha_i \beta_i \rangle$ et (Q, I) le carquois lié

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[d, bend left, "\alpha"] \\
2 \arrow[u, bend left, "\beta"]
\end{tikzcd}$$

avec $I = \langle \alpha\beta \rangle$. Considérons le $\mathbb{Z}$-revêtement galoisien $F : kQ'/I' \longrightarrow kQ/I$ et prenons M le (kQ'/I')-module suivant :

$$\begin{tikzcd}
\cdots & & 0 \arrow[dr] & & k \arrow[dr, "1"] & & 0 \arrow[dr] & \cdots \\
& 0 \arrow[ur] & & k \arrow[ur, "1"] & & k \arrow[ur] & & 0
\end{tikzcd}$$

Alors, $F_\lambda(M)$ est le (kQ/I)-module

$$\begin{tikzcd}
k \arrow[d, bend left, "{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}"] \\
k^2 \arrow[u, bend left, "{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}"]
\end{tikzcd}$$

Chapitre 2

Revêtement galoisien de l'algèbre d'extension par relations partielle

Tout au long de ce chapitre, on suppose que les algèbres sont sobres et connexes. Ces deux dernières hypothèses ne sont pas aussi restrictives qu'on pourrait le penser. En effet, premièrement, étant donnée une k-algèbre de dimension finie A, il est possible de lui associer une k-algèbre de dimension finie et sobre A' qui est Morita-équivalente à A, c'est-à-dire telle qu'il existe une équivalence k-linéaire $E : \mathrm{mod}A \to \mathrm{mod}A'$, voir [ASS06, I.6.10]. Deuxièmement, en lien avec la connexité d'une k-algèbre A, supposons $A = A_1 \times A_2$ avec A_1, A_2 deux k-algèbres, alors, en vertu de [Ass97, VI.3.5] il existe une équivalence de k-catégories $\mathrm{mod}A \cong \mathrm{mod}A_1 \times \mathrm{mod}A_2$. Ainsi, dans le but d'étudier la catégorie des A-modules, on peut supposer, sans perte de généralité, que A est sobre et connexe.

On donne dans le présent chapitre les définitions des différentes algèbres dont on se sert au Chapitre 3 et on explique la construction de leurs carquois liés. Puis, on construit un revêtement galoisien des algèbres qui nous intéressent ce qui nous permettra de définir au prochain chapitre le foncteur de rabaissement entre leurs catégories de modules.

2.1 Algèbres inclinées amassées

Suite à l'introduction des algèbres amassées par Formin et Zelevinsky [FZ02b] et leur étude subséquente, les algèbres inclinées amassées ont fait leur apparition [BMR07]. Dans cette section, on définit ces algèbres, puis on s'intèresse, dans un premier moment à la Section 2.2, à la caractérisation des algèbres inclinées amassées en tant qu'extensions triviales, dans un deuxième moment, à leurs carquois liés et, finalement, à la Section 2.3, à leur lien avec l'algèbre répétitive amassée définie au début de cette même section.

Tout d'abord, on définit la catégorie amassées introduite dans [BMR$^+$06a]. Soit A une algèbre héréditaire et $D^b(\text{mod}A)$ la *catégorie dérivée* des complexes bornés de modules dans mod$A$. Cette catégorie est triangulée et il existe deux morphismes de $D^b(\text{mod}A)$: un foncteur [1] appellé *décalage* et la *translation d'Auslander-Reiten* τ. Soit $F = \tau^{-1}[1]$ le foncteur défini par la composition de ces deux. La *catégorie amassée* $\mathcal{C}_A$ de A, voir [BMR$^+$06a] est définie comme étant la catégorie d'orbites

$$\mathcal{C}_A = D^b(\text{mod}A)/F$$

dont les objets sont les F-orbites des objets dans $D^b(\text{mod}A)$. Pour tout $x \in D^b(\text{mod}A)$, on note $\tilde{x} = (F^i x)_{i\in\mathbb{Z}}$ sa F-orbite. Alors, pour deux objets $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$ dans $\mathcal{C}_A$, on définit

$$\mathcal{C}_A(\tilde{x}, \tilde{y}) = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} D^b(\text{mod}A)(x, F^i y).$$

La catégorie amassée $\mathcal{C}_A$ admet une structure triangulée induite de celle de $D^b(\text{mod}A)$.

On note $D = \text{Hom}_k(\_, k)$ la dualité habituelle entre mod$A$ et modA^{op}.

Définition 2.1.1.

Soit $\mathcal{C}_A$ la catégorie amassée d'une algèbre héréditaire A. Un objet $\tilde{t}$ de $\mathcal{C}_A$ est dit *inclinant* lorsque

1. $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}_A}(\tilde{t},\tilde{t}) = \mathcal{C}_A(\tilde{t},\tilde{t}[1]) \cong \mathcal{C}_A(\tilde{t},\tau\tilde{t}) = 0$;
2. le nombre de facteurs directs non-isomorphes de $\tilde{t}$ est égal au nombre de A-modules simples.

Définition 2.1.2.
Soit $\tilde{C}$ une algèbre et Q un carquois fini et acyclique. Alors $\tilde{C}$ est *inclinée amassée de type* Q s'il existe un objet inclinant $\tilde{t}$ dans $\mathcal{C}_{kQ}$ tel que $\tilde{C} = \mathrm{End}_{\mathcal{C}_{kQ}}(\tilde{t})$.

2.2 Algèbre d'extension par relations

On commence par rappeller au lecteur la définition d'extension triviale.

Définition 2.2.1.
Soient C une algèbre de dimension finie et ${}_CM_C$ un $C-C$-bimodule. L'*extension triviale* de C par M, notée $C \ltimes M$, est l'algèbre définie comme suit :

1. $C \ltimes M$ est isomorphe, en tant que k-espace vectoriel à
$$C \oplus M = \{(c,m) | c \in C, m \in M\},$$
2. la multiplication de deux éléments (c,m) et (c',m') de $C \ltimes M$ est donnée par
$$(c,m)(c',m') = (cc', cm' + mc')$$
pour $c, c' \in C$ et $m, m' \in M$.

Dans [ABS08], les auteurs introduissent un cas particulier d'extensions triviales qui sert à caractériser les algèbres inclinées amassées.

On rappelle au lecteur qu'une algèbre A dont le carquois ordinaire Q_A n'a pas de cycle orienté est appelée une *algèbre triangulaire*.

Définition 2.2.2.
Soit C une algèbre triangulaire de dimension globale au plus deux, alors son *extension par relations* est l'algèbre $C \ltimes \mathrm{Ext}^2_C(DC, C)$.

La structure de $C - C$-bimodule sur $\mathrm{Ext}^2_C(DC, C)$ est donnée par

$$a(\mathrm{Ext}^2_C(DC, C)b = \mathrm{Ext}^2_C(D(Cb), aC)$$

pour $a, b \in C$.

On rappelle au lecteur qu'un sous-ensemble $R = \{\rho_1, \ldots, \rho_t\}$ de $\cup_{x,y \in (Q_C)_0} e_x I e_y$ est appellé un *système de relations* de $C = kQ_C/I$ si R, mais aucun sous-ensemble propre de R, engendre I en tant qu'idéal de kQ_C, (voir [Bon83]).

Le nom d'extension par relations vient du fait que, comme on discute en détail plus loin, le carquois ordinaire $Q_{C \ltimes \mathrm{Ext}^2_C(DC,C)}$ de l'extension par relations est obtenu à partir du carquois ordinaire Q_C de l'algèbre originale en ajoutant, pour chaque paire de sommets (x, y) et chaque relation allant de y vers x, une flèche $x \longrightarrow y$.

Le carquois de $C \ltimes \mathbf{Ext}^2_C(DC, C)$

Théorème 2.2.3.
[ABS08, 2.6] Soient $C \cong kQ_C/I$ une algèbre triangulaire de dimension globale au plus 2 et R un système de relations pour C. Le carquois de l'extension par relations $C \ltimes Ext^2_C(DC, C)$ est construit de la façon suivante :

1. *$(Q_{C \ltimes Ext^2_C(DC,C)})_0 = (Q_C)_0$*
2. *Pour $x, y \in (Q_C)_0$, l'ensemble de flèches dans $Q_{C \ltimes Ext^2_C(DC,C)}$ ayant de x vers y est*

*l'ensemble de flèches dans Q_C de x vers y (*anciennes flèches*) plus $|R \cap (e_y I e_x)|$ flèches additionnelles (*nouvelles flèches*).*

Il reste à décrire les relations dans $Q_{C \ltimes \mathrm{Ext}^2_C(DC,C)}$. On fera ceci tout de suite après avoir énoncé le résultat principal de [ABS08] présenté dans le théorème suivant :

Théorème 2.2.4.
[ABS08, 3.4] Une algèbre $\tilde{C}$ est inclinée amassée de type Q si, et seulement si, il existe une algèbre inclinée C de type Q telle que $\tilde{C}$ soit l'extension par relations de C.

On explique maintenant comment trouver le système de relations pour le carquois $Q_{\tilde{C}}$ de l'algèbre inclinée amassée $\tilde{C} \cong C \ltimes \mathrm{Ext}^2_C(DC, C)$. Soient $C = kQ_C/I$ une algèbre triangulaire de dimension globale au plus 2 et $R = \{\rho_1, \ldots, \rho_t\}$ un système de relations pour C. À la relation ρ_i allant de x_i vers y_i, correspond, en vertu du Théorème 2.2.3, une flèche $\alpha_i : y_i \longrightarrow x_i$. Le *potentiel de Keller* sur $\tilde{C}$ est l'élément

$$\omega = \sum_{i=1}^{t} \rho_i \alpha_i$$

de $kQ_{\tilde{C}}$. Pour une flèche γ donnée, la *dérivée partielle cyclique* ∂_γ de ω par rapport à γ définie sur chaque facteur cyclique $\gamma_1 \ldots \gamma_m$ de ω est

$$\partial_\gamma(\gamma_1 \ldots \gamma_m) = \sum_{\gamma_i = \gamma} \gamma_{i+1} \ldots \gamma_m \gamma_1 \ldots \gamma_{i-1}.$$

L'algèbre Jacobienne $\mathcal{J}(Q_{\tilde{C}}, \omega)$ est donnée par le quotient de $kQ_{\tilde{C}}$ par l'idéal engendré par les dérivées partielles cycliques $\partial_\gamma \omega$ du potentiel de Keller ω par rapport à toutes les flèches γ dans $Q_{\tilde{C}}$, voir ([KVdB11, (5.2)]). Dans [AGST16], les auteurs démontrent que l'extension par relations $\tilde{C}$ d'une algèbre triangulaire C de dimension globale au plus 2 est isomorphe à $\mathcal{J}(Q_{\tilde{C}}, \omega)/J$ où J est le carré de l'idéal de $\mathcal{J}(Q_{\tilde{C}}, \omega)$ engendré par les nouvelles flèches. En particulier, si C est inclinée, alors $\tilde{C} = \mathcal{J}(Q_{\tilde{Q}}, \omega)$, voir ([BFP+10, 4.22], [BL05, p.17]). En d'autres termes, si C est inclinée, le carré J de l'idéal engendré par les nouvelles flèches est contenu dans l'idéal engendré par toutes les dérivées partielles cycliques du potentiel de Keller. Ceci donne un système de relations pour l'algèbre inclinée amassée.

Remarque 2.2.5. L'ensemble de relations donné par les dérivées partielles cycliques du potentiel de Keller n'est pas en général un *système de relations minimales*. Suivant [BMR06b], on dit qu'une relation ρ est minimale si, lorsque $\rho = \sum_i \beta_i \rho_i \gamma_i$, où ρ_i est une relation pour tout i, alors il existe un indice i tel que β_i et γ_i sont des scalaires. En d'autres termes, une relation est minimale dans un carquois lié (Q, I) si et seulement si elle est un élément de I qui n'est pas dans $(kQ^+)I + I(kQ^+)$, où kQ^+ est l'idéal bilatère de kQ engendré par toutes les flèches dans Q.

Exemple 2.2.6. 1. Soit C l'algèbre inclinée donnée par le carquois Q_C

$$\begin{tikzcd}
 & & 2 \arrow[dl, "\beta"] \\
4 & 1 \arrow[l, "\epsilon"'] & \\
 & & 3 \arrow[ul, "\delta"']
\end{tikzcd}$$

lié par les relations $\beta\epsilon = 0$ et $\delta\epsilon = 0$.

Des Théorèmes 2.2.3 et 2.2.4 on a que le carquois $Q_{\tilde{C}}$ de l'algèbre inclinée amassée $\tilde{C}$ est

$$\begin{tikzcd}
 & & 2 \arrow[dl, "\beta"] \\
4 \arrow[urr, "\alpha"] \arrow[drr, "\gamma"'] & 1 \arrow[l, "\epsilon"'] & \\
 & & 3 \arrow[ul, "\delta"']
\end{tikzcd}$$

où les nouvelles flèches sont α et γ. Le potentiel de Keller est donc $\omega = \beta\epsilon\alpha + \delta\epsilon\gamma$. Calculons ses dérivées partielles cycliques : $\partial_\alpha(\omega) = \beta\epsilon, \partial_\delta(\omega) = \epsilon\gamma, \partial_\beta(\omega) = \epsilon\alpha, \partial_\gamma(\omega) = \delta\epsilon, \partial_\epsilon(\omega) = \alpha\beta + \gamma\delta$.

Alors, les relations héritées de Q_C sont $\beta\epsilon = 0$ et $\delta\epsilon = 0$, et les nouvelles rélations sont $\epsilon\alpha = \epsilon\gamma = 0$ et $\alpha\beta + \gamma\delta = 0$.

2. Soit C donnée par le carquois Q_C

$$1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3 \xrightarrow{\gamma} 4$$

avec la relation $\alpha\beta\gamma = 0$. Alors $\tilde{C}$ est donnée par le carquois

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[r, "\beta"] & 3 \arrow[r, "\gamma"] & 4 \arrow[lll, bend left, "\delta"] \end{tikzcd}$$

dont les relations, obtenues à partir des dérivées partielles cycliques du potentiel de Keller $\omega = \alpha\beta\gamma\delta$, sont $\alpha\beta\gamma = 0, \beta\gamma\delta = 0, \gamma\delta\alpha = 0$ et $\delta\alpha\beta = 0$.

À la Section 2.4 on se sert de la notion de décomposition en somme directe du potentiel de Keller. On définit d'abord une relation $\sim$, qui est réflexive et symétrique, entre les cycles orientés qui sont termes de ω : on pose $c_1 \sim c_2$ lorsqu'une flèche γ appartient à la fois au cycle c_1 et au cycle c_2. Soit maintenant $\approx$ sa fermeture transitive, c'est-à-dire que $c_1 \approx c_n$ si et seulement s'il existe une suite $c_1, c_2, \ldots, c_n$ telle que $c_i \sim c_{i+1}$ pour $1 \leqslant i < n$. Deux cycles c_1 et c_2 sont *indépendants* si $c_1 \not\approx c_2$ et *dépendants* lorsque $c_1 \approx c_2$. Ainsi, une décomposition $\omega = \omega' + \omega''$ est dite *directe*, et est notée $\omega = \omega' \oplus \omega''$ si, pour tout cycle c_1 dans ω' et pour tout cycle c_2 dans ω'', on a que c_1 est indépendant de c_2.

Exemple 2.2.7. 1. Dans l'Exemple 2.2.6(1), les deux facteurs de $\omega = \beta\epsilon\alpha + \delta\epsilon\gamma$ sont dépendants et la somme n'est pas directe.

2. [ABD$^+$16, (Ex.1.4.3)] Soit C donnée par le carquois

$$\begin{tikzcd}
 & 2 \arrow[dl, "\beta"'] & \\
1 & & 4 \arrow[ul, "\alpha"'] \arrow[dl, "\lambda"] \\
 & 3 \arrow[ul, "\mu"] &
\end{tikzcd}$$

lié par $\alpha\beta = 0$ et $\lambda\mu = 0$. Alors, $\tilde{C}$ est donné par le carquois

$$\begin{tikzcd}
 & 2 \arrow[dl, "\beta"'] & \\
1 \arrow[rr, shift left, "\gamma"] \arrow[rr, shift right, "\nu"'] & & 4 \arrow[ul, "\alpha"'] \arrow[dl, "\lambda"] \\
 & 3 \arrow[ul, "\mu"] &
\end{tikzcd}$$

et le potentiel de Keller a une décomposition en somme directe $\omega = \alpha\beta\gamma \oplus \lambda\mu\nu$.

2.3 L'algèbre répétitive amassée

Soient C une algèbre inclinée. On définit *l'algèbre répétitive amassée* comme étant l'algèbre localement de dimension finie sans identité

$$\check{C} = \begin{bmatrix} \ddots & & & 0 & \\ \ddots & C_{-1} & & & \\ & E_0 & C_0 & & \\ & & E_1 & C_1 & \\ & 0 & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

dont les matrices ont seulement un nombre fini de coefficients non nuls, $C_i = C$ et $E_i = \mathrm{Ext}^2_C(DC, C)$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$ et tous les autres coefficients sont nuls. La multiplication dans $\check{C}$ est induite de celle de C, de la structure de $C-C$-bimodule de $\mathrm{Ext}^2_C(DC,C)$ et de l'application nulle $\mathrm{Ext}^2_C(DC,C)\otimes\mathrm{Ext}^2_C(DC,C)\longrightarrow 0$.

Soit $\{e_1,\ldots,e_n\}$ un ensemble complet d'idempotents primitifs deux à deux orthogonaux de C. Si $\check{C}$ est vue en tant que k-catégorie, ses objets sont les $e_{m,i}$ où $m\in\mathbb{Z}$ et $i\in\{1,\ldots,n\}$ et l'espace vectoriel de morphismes est défini comme suit :

$$\check{C}(e_{m,i},e_{r,j})=\begin{cases} e_iCe_j & \text{si } m=r\\ e_i\mathrm{Ext}^2_C(DC,C)e_j & \text{si } m=r+1\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

On note $\phi_{\check{C}}$ l'automorphisme de $\check{C}$ induit par l'application définie pour tout $(m,i)\in\mathbb{Z}\times\{1,\ldots,n\}$ par

$$\phi_{\check{C}}(e_{m,i})=e_{m+1,i}.$$

Alors, l'action du groupe cyclique infini $\langle\phi_{\check{C}}\rangle$ engendré par $\phi_{\check{C}}$ est libre et localement bornée.

Considérons la catégorie d'orbites $\check{C}/\langle\phi_{\check{C}}\rangle$ dont les objets $\check{e}_{m,i}$, pour $m\in\mathbb{Z}$ et $i\in\{1,\ldots,n\}$, sont les $\langle\phi_{\check{C}}\rangle$-orbites des objets $e_{m,i}$ de $\check{C}$, et dont les espaces vectoriels des morphismes, selon la Définition 1.2.9, sont donnés par

$$\begin{aligned}&\big(\check{C}/\langle\phi_{\check{C}}\rangle\big)(\check{e}_{m,i},\check{e}_{r,j})\\ &\quad=\{(f_{e_{a,i},e_{b,j}})\in\bigoplus_{(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}\check{C}(e_{a,i},e_{b,j})\mid \phi_{\check{C}}f_{e_{a,i},e_{b,i}}=f_{e_{a+1,i},e_{b+1,i}}\ \text{pour}\ \begin{array}{r}(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},\\ i\in\{1,\ldots,n\},\\ j\in\{1,\ldots,n\}\}\end{array}\\ &\quad=\big\{(f_{e_i,e_j})\in(e_iCe_j\oplus e_i\mathrm{Ext}^2_C(DC,C)e_j)\mid i\in\{1,\ldots,n\},j\in\{1,\ldots,n\}\big\}\end{aligned}$$

Ainsi, $\check{C}/\langle\phi_{\check{C}}\rangle \cong C \ltimes \mathrm{Ext}^2_C(DC, C)$ et, par conséquent, au vu de la Définition 1.2.11, le foncteur $G : \check{C} \longrightarrow \tilde{C}$ est un $\langle\phi_{\check{C}}\rangle$-revêtement galoisien.

$$\begin{tikzcd} \check{C} \arrow[r, "G"] \arrow[d, "F"'] & \tilde{C} \\ \check{C}/\langle\phi\rangle \arrow[ur, "\sim"'] & \end{tikzcd}$$

Le carquois de $\check{C}$

La construction du carquois de l'algèbre répétitive amassée $\check{C}$ suit du Théorème 2.2.3 et du fait que $\check{C}$ est un revêtement galoisien de $\tilde{C}$.

Proposition 2.3.1.
Soit $C = kQ_C/I$ une algèbre inclinée et R un système de relations pour C. Le carquois $Q_{\check{C}}$ de l'algèbre répétitive amassée $\check{C}$ est construit de la façon suivante :

1. $(Q_{\check{C}})_0 = (Q_C)_0 \times \mathbb{Z} = \{(x,i) | x \in (Q_C)_0, i \in \mathbb{Z}\}$.
2. *Pour $(x,i), (y,j) \in (Q_{\check{C}})_0$, l'ensemble de flèches de (x,i) vers (y,j) est égal à*
   (a) l'ensemble de flèches de x vers y dans Q_C si $i = j$, plus
   (b) $|R \cap e_y I e_x|$ nouvelles flèches si $i = j+1$,

   et est vide sinon.

Ainsi, le carquois $Q_{\check{C}}$ de $\check{C}$ peut être vu comme étant une infinité de copies $(Q_{C_i})_{i\in\mathbb{Z}}$ du carquois C, reliées par des flèches additionnelles allant de $Q_{C_{i+1}}$ vers Q_{C_i}. Finalement, les relations sont relevées de celles de $\tilde{C}$, soit que, pour tout $\rho \in I_{\check{C}}$, il existe au moins un $\rho' \in I_{\tilde{C}}$ tel que $\rho = F^{-1}(\rho')$.

Exemple 2.3.2. 1. Soient Q_C et $Q_{\check{C}}$ comme dans l'exemple 2.2.6(2), alors l'algèbre $\check{C}$ est donnée par le carquois infini

$$\begin{tikzcd}
 & & \vdots & \\
(1,0) \arrow[r, "{(\alpha,0)}"] & (2,0) \arrow[r, "{(\beta,0)}"] & (3,0) \arrow[r, "{(\gamma,0)}"] & (4,0) \arrow[lllu, "{(\delta,0)}"'] \\
(1,1) \arrow[r, "{(\alpha,1)}"] & (2,1) \arrow[r, "{(\beta,1)}"] & (3,1) \arrow[r, "{(\gamma,1)}"] & (4,1) \arrow[lllu, "{(\delta,1)}"'] \\
 & & \vdots & {} \arrow[lllu, "{(\delta,2)}"']
\end{tikzcd}$$

dont les relations, pour tout i, sont

$$(\alpha, i)(\beta, i)(\gamma, i) = 0, \qquad (\delta, i+1)(\alpha, i)(\beta, i) = 0,$$

$$(\gamma, i+1)(\delta, i+1)(\alpha, i) = 0, \qquad (\beta, i)(\gamma, i)(\delta, i) = 0.$$

2. Soit C l'algèbre inclinée donnée par le carquois Q_C

$$\begin{tikzcd}
1 & & 4 \arrow[dl, "\alpha"] \\
 & 3 \arrow[ul, "\beta"] \arrow[dl, "\delta"'] & \\
2 & & 5 \arrow[ul, "\gamma"']
\end{tikzcd}$$

lié par les relations $\alpha\beta = 0$ et $\gamma\delta = 0$. Alors, le carquois $Q_{\tilde{C}}$ de l'algèbre $\tilde{C}$ est

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[rr, "\lambda"] & & 4 \arrow[dl, "\alpha"] \\
 & 3 \arrow[ul, "\beta"] \arrow[dl, "\delta"'] & \\
2 \arrow[rr, "\mu"'] & & 5 \arrow[ul, "\gamma"']
\end{tikzcd}$$

dont les relations sont $\alpha\beta = 0$, $\gamma\delta = 0$, $\lambda\alpha = 0$, $\beta\lambda = 0$, $\mu\gamma = 0$ et $\delta\mu = 0$. Finalement, le carquois $Q_{\check{C}}$ de l'algèbre répétitive amassée $\check{C}$ est

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & (5,-1) \arrow[dr, "\gamma_{-1}"'] & & (2,-1) \arrow[r, "\mu_{-1}"'] & (5,0) \arrow[dr, "\gamma_0"'] & & (2,0) \arrow[r, "\mu_0"'] & (5,1) \arrow[dr, "\gamma_1"'] & & (2,1) & \\
\cdots & & (3,-1) \arrow[ur, "\delta_{-1}"'] \arrow[dr, "\beta_{-1}"'] & & & (3,0) \arrow[ur, "\delta_0"'] \arrow[dr, "\beta_0"'] & & & (3,1) \arrow[ur, "\delta_1"'] \arrow[dr, "\beta_1"'] & & \cdots \\
 & (4,-1) \arrow[ur, "\alpha_{-1}"'] & & (1,-1) \arrow[r, "\lambda_{-1}"'] & (4,0) \arrow[ur, "\alpha_0"'] & & (1,0) \arrow[r, "\lambda_0"'] & (4,1) \arrow[ur, "\alpha_0"'] & & (1,1) &
\end{tikzcd}$$

avec les relations

$$\begin{array}{lll}
(\alpha, i)(\beta, i) = 0, & (\gamma, i)(\alpha, i+1) = 0, & (\mu, i)(\gamma, i+1) = 0, \\
(\gamma, i)(\delta, i) = 0, & (\beta, i)(\lambda, i) = 0, & (\delta, i)(\mu, i) = 0
\end{array}$$

pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

2.4 Algèbre B d'extension par relations partielle

Dans [ABD$^+$16], les auteurs démontrent que la décomposition en somme directe du potentiel de Keller $\omega = \omega' \oplus \omega''$ de l'extension par relations d'une algèbre triangulaire C de dimension globale au plus deux induit une décomposition en somme directe du $C-C$-bimodule $\mathrm{Ext}^2_C(DC, C) = E = E' \oplus E''$. Dans [ABS08, (2.4)] on démontre que si $\tilde{C} = kQ_{\tilde{C}}/\tilde{I}$, les classes des nouvelles flèches, soit celles dans $(Q_{\tilde{C}})_1 \setminus (Q_C)_1$ (modulo $\tilde{I}$), engendrent E en tant que $C-C$-bimodule. Pour un facteur direct ω' du potentiel ω de $kQ_{\tilde{C}}$, on définit E' comme étant le sous-bimodule de E engendré par les classes de flèches dans $(Q_{\tilde{C}})_1 \setminus (Q_C)_1$ qui apparaissent dans un cycle de ω'. Pour une justification de cette définition, on réfère le lecteur au Lemme 1.2.1 de [ABS08]. On appelle E' le *bimodule de relations partiel* associé à ω'.

Dans ce contexte, on peut aborder l'étude des algèbres appelées d'extension par relations partielle.

Définition 2.4.1.
Soit C une algèbre triangulaire de dimesion globale au plus 2 et E' le bimodule de relations partiel du $C-C$-bimodule $E = \mathrm{Ext}^2_C(DC, C)$ associé au facteur direct ω' de la décomposition en somme directe du potentiel de Keller ω. L'extension triviale $B = C \ltimes E'$ est appelée *l'algèbre d'extension par relations partielle.*

Proposition 2.4.2.
[ABD+16, p.11] Avec la notation précédente, on a que $\tilde{C} = B \ltimes E''$

Au vu de cette proposition, les algèbres d'extension par relations partielle peuvent être vues comme un type intermédiaire d'algèbres entre les algèbres triangulaires de dimension globale au plus 2 et leurs extensions par relations. En particulier, lorque C est une algèbre inclinée, $B = C \ltimes E'$ peut être considérée comme intermédiaire entre l'algèbre inclinée et l'algèbre inclinée amassée.

Le carquois de B

Soit $C = kQ_C/I$. Notre but est de décrire le carquois lié de l'algèbre d'extension par relations partielle $B = C \ltimes E'$ lorsque la décompostion en somme directe de E est induite d'une décomposition en somme directe du potentiel de Keller associée à un système minimal de relations de I. Il suit de [ABS08, (2.4)] que les nouvelles flèches dans $Q_{\tilde{C}}$ engendrent la coiffe du $C-C$-bimodule E. On peut faire une partition de l'ensemble des nouvelles flèches telle que les sous-ensembles $\{\alpha'_1, \ldots, \alpha'_s\}$ et $\{\alpha''_1, \ldots, \alpha''_t\}$ engendrent les coiffes de E' et de E'' respectivement.

Exemple 2.4.3.
Soient $\tilde{C}$ comme dans l'Exemple 2.2.7. La somme directe $\omega = \alpha\beta\gamma \oplus \lambda\mu\nu$ induit une

décomposition directe $E = E' \oplus E''$ où $E' = \langle \gamma \rangle = \{\gamma, \gamma\lambda, \mu\gamma, \mu\gamma\lambda\}$ et $E'' = \langle \nu \rangle = \{\nu, \nu\alpha, \beta\nu, \beta\nu\alpha\}$.

Proposition 2.4.4.

[ABD⁺16, (2.2.1)] Soit $C = kQ/I$ une algèbre triangulaire de dimension globale au plus 2, $\tilde{C} = C \ltimes \mathrm{Ext}^2_C(DC, C)$ son extension par relations, ω le potentiel de Keller associé à un système minimal de relations de I, et J le carré de l'idéal de $\mathcal{J} = (Q_{\tilde{C}}, \omega)$ engendré par les nouvelles flèches. Supposons que ω se décompose en somme directe et que $E = E' \oplus E''$ est la décomposition directe correspondante du $C-C$-bimodule, alors $\alpha''_1, \ldots, \alpha''_t$ sont les nouvelles flèches qui engendrent la coiffe de E'' et $J' = J + \sum_{i=1}^t \tilde{C}\alpha''_i\tilde{C}$. Alors,

$$C \ltimes E' = \mathcal{J}(Q_{\tilde{C}}, \omega)/J'$$

Démonstration. Soit $B = C \ltimes E'$. En vertu de la Proposition 2.4.2, on a que $B \cong \tilde{C}/E''$. Par définition, E'' est le sous-bimodule de $\mathrm{Ext}^2_C(DC, C)$ engendré par les classes des flèches $\alpha''_1, \ldots, \alpha''_t$. Ainsi, le résultat découle du fait que $\tilde{C} \cong \mathcal{J}(Q_{\tilde{C}}, \omega)/J$. □

Par conséquent, B est donnée par le carquois lié obtenu du carquois $Q_{\tilde{C}}$ en enlevant les flèches α''_i du carquois ordinaire et en enlevant des relations tout chemin contenant une telle flèche. Soient $\omega' = \sum_{i=1}^s \rho'_i\alpha'_i$ et $\omega'' = \sum_{i=1}^t \rho''_i\alpha''_i$ où α'_i et α''_j sont les nouvelles flèches et ρ'_i, ρ''_j les éléments du système minimal de relations R associés à α'_i et α''_j respectivement. Alors, la coiffe de E' est engendrée par les α'_i et la coiffe de E'' est engendrée par les α''_j.

Corollaire 2.4.5.

[ABD⁺16, (2.2.2)] Avec la notation précédente, le carquois lié (Q_B, I_B) de $B = C \ltimes E'$ est comme suit :

1. $(Q_B)_0 = Q_0 = (Q_{\tilde{C}})_0$;
2. $(Q_B)_1 = (Q_{\tilde{C}})_1 \setminus \{\alpha''_1, \ldots, \alpha''_t\} = Q_1 \cup \{\alpha'_1, \ldots, \alpha'_s\}$;
3. *l'idéal I_B est engendré par les dérivés partielles cycliques de ω', les relations $\rho''_1, \ldots, \rho''_t$ et J.*

Exemple 2.4.6.

Soient Q_C et $Q_{\tilde{C}}$ comme dans l'Exemple 2.3.2(2). Le potentiel de Keller est $\omega = \alpha\beta\lambda + \gamma\delta\mu$ avec $\omega' = \alpha\beta\gamma$ et $\omega'' = \gamma\delta\mu$ indépendants, d'où $\omega = \omega' \oplus \omega''$. Posant $E' = \mathrm{Ext}^2_C(I_1, P_4)$ et $E'' = \mathrm{Ext}^2_C(I_2, P_5)$, $E = E' \oplus E''$ est une décomposition en somme directe associée à la décomposition de ω décrite auparavant. Ainsi, l'algèbre $B = C \ltimes E'$ est donnée par le carquois

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[rr, "\lambda"] & & 4 \arrow[dl, "\alpha"] \\
& 3 \arrow[ul, "\beta"'] \arrow[dl, "\delta"'] & \\
2 & & 5 \arrow[ul, "\gamma"']
\end{tikzcd}$$

lié par $\alpha\beta = 0$, $\gamma\delta = 0$, $\lambda\alpha = 0$ et $\beta\lambda = 0$.

Chapitre 3

Catégories de modules

Le but de ce dernier chapitre est d'étudier le rapport entre la catégorie de modules mod$B$ de l'algèbre d'extension par relations partielle et la catégorie de modules mod$\check{C}'$ de l'algèbre répétitive d'extension par relations partielle $\check{C}'$ définie à la Section 3.1.

3.1 L'algèbre répétitive d'extension par relations partielle

Dans la Section 2 de [ABS09] on étudie la relation entre la catégorie dérivée $D^b(\text{mod}A)$ et la catégorie de modules mod $\tilde{C}$. Le résultat principal de la dite section est présenté dans le théorème suivant :

Théorème 3.1.1.
[ABS09, (Théorème 2.4)] [ABD⁺16, (2.3.4)] Il existe un diagramme commutatif de foncteurs pleins et denses

$$\begin{tikzcd}
D^b(mod\ A) \arrow[r, "Hom_{D^b(modA)}(\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} F^i\check{t},_)"] \arrow[d, "\pi"'] & mod\ \check{C} \arrow[d, "F_\lambda"] \\
\mathcal{C}_A \arrow[r, "Hom(\pi\tilde{t},_)"'] & mod\ \tilde{C}
\end{tikzcd}$$

où F_λ est le foncteur de rabaissement associé au revêtement galoisien $F : \check{C} \longrightarrow \tilde{C}$.

Définition 3.1.2.

On appelle *algèbre répétitive d'extension par relations partielle*, notée $\check{C}'$, l'algèbre localement de dimension finie sans identité

$$\check{C}' = \begin{bmatrix} \ddots & & & 0 & \\ \ddots & C_{-1} & & & \\ & E'_0 & C_0 & & \\ & & E'_1 & C_1 & \\ & 0 & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

dont les matrices ont un nombre fini de coefficients non nuls, $C_i = C$ et $E'_i = E'$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$, où E' est un $C-C$-sous-bimodule de $\mathrm{Ext}^2_C(DC, C)$ tel que $\mathrm{Ext}^2_C(DC, C) = E' \oplus E''$ est une décomposition en somme directe induite d'une décomposition en somme directe du potentiel. La multiplication dans $\check{C}'$ est induite de celle de C, de la structure de $C - C$-sous-bimodule de E' et de l'application nulle $E' \underset{C}{\otimes} E' \longrightarrow 0$.

Remarque 3.1.3. De façon analogue au cas de l'algèbre répétitive amassée $\check{C}$ et l'algèbre amassée $\tilde{C}$, on a que $F' : \check{C}' \longrightarrow B$ est un $\langle \nu \rangle$-revêtement galoisien, où $\langle \nu \rangle$ est le groupe cyclique engendré par l'automorphisme ν de $\check{C}'$, induit par les applications identité $C_i \longrightarrow C_{i-1}$, $E'_i \longrightarrow E'_{i-1}$.

Lemme 3.1.4.

L'algèbre répétitive d'extension par relations partielle $\check{C}'$ est isomorphe au quotient $\check{C}/\mathcal{E}$

où $\mathcal{E}$ est l'idéal bilatère de $\check{C}$ induit par les chemins dans $Q_{\check{C}}$ passant par les flèches qui engendrent E''.

Démonstration. En tant que k-espaces vectoriels, on a une décomposition directe

$$\check{C} = \begin{bmatrix} \ddots & & & & 0 & \\ \ddots & C_{-1} & & & & \\ & E_0 & C_0 & & & \\ & & E_1 & C_1 & & \\ & 0 & & \ddots & \ddots & \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \ddots & & & & 0 & \\ \ddots & C_{-1} & & & & \\ & (E'_0 \oplus E''_0) & C_0 & & & \\ & & (E'_1 \oplus E''_1) & C_1 & & \\ & 0 & & \ddots & \ddots & \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \ddots & & & & 0 & \\ \ddots & C_{-1} & & & & \\ & E'_0 & C_0 & & & \\ & & E'_1 & C_1 & & \\ & 0 & & \ddots & \ddots & \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \ddots & & & & 0 & \\ \ddots & 0 & & & & \\ & E''_0 & 0 & & & \\ & & E''_1 & 0 & & \\ & 0 & & \ddots & \ddots & \end{bmatrix}$$

où $E''_i = E''$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

Notons $\mathcal{E} = \begin{bmatrix} \ddots & & & & 0 & \\ \ddots & 0 & & & & \\ & E''_0 & 0 & & & \\ & & E''_1 & 0 & & \\ & 0 & & \ddots & \ddots & \end{bmatrix}$. On a donc que $\check{C} = \check{C}' \oplus \mathcal{E}$ en tant qu'espaces vectoriels.

Maintenant, soit, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $\epsilon_i \in \mathrm{Ext}^2_C(DC, C) = E' \oplus E''$. Ainsi, $\epsilon_i =$

$(\epsilon_i', \epsilon_i'')$ avec $\epsilon_i' \in E'$ et $\epsilon_i'' \in E''$. On définit, pour $c_i \in C$, une application $H : \check{C} \longrightarrow \check{C}'$ tel que

$$H\left(\begin{bmatrix} \ddots & & & & 0 & \\ \ddots & c_{-1} & & & & \\ & \epsilon_0 & c_0 & & & \\ & & \epsilon_1 & c_1 & & \\ & 0 & & \ddots & \ddots & \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \ddots & & & & 0 & \\ \ddots & c_{-1} & & & & \\ & \epsilon_0' & c_0 & & & \\ & & \epsilon_1' & c_1 & & \\ & 0 & & \ddots & \ddots & \end{bmatrix}.$$

Ainsi défini, H est un mophisme d'algèbres. En effet, soient $\begin{bmatrix} \ddots & & & & 0 & \\ \ddots & c_{-1}^1 & & & & \\ & \epsilon_0^1 & c_0^1 & & & \\ & & \epsilon_1^1 & c_1^1 & & \\ & 0 & & \ddots & \ddots & \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} \ddots & & & & 0 & \\ \ddots & c_{-1}^2 & & & & \\ & \epsilon_0^2 & c_0^2 & & & \\ & & \epsilon_1^2 & c_1^2 & & \\ & 0 & & \ddots & \ddots & \end{bmatrix}$ deux éléments de $\check{C}$ et considérons le coefficient a_{ij} à la $i^{\text{ième}}$ ligne et $j^{\text{ième}}$ colonne de leur produit. De la multiplication matricielle habituelle, de l'application nulle $\mathrm{Ext}_C^2(DC, C) \otimes \mathrm{Ext}_C^2(DC, C) \longrightarrow 0$ et du fait que E'' est une $C - C$-bimodule, on a que

$$a_{ij} = \begin{cases} c_i^1 c_i^2 & \text{si } i = j \\ \epsilon_i^1 c_j^2 + c_i^1 \epsilon_i^2 & \text{si } i = j + 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Par conséquent,

$$H\left(\begin{bmatrix} \ddots & & & & 0 & \\ \ddots & c^1_{-1} & & & & \\ & \epsilon^1_0 & c^1_0 & & & \\ & & \epsilon^1_1 & c^1_1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddots & & & & 0 & \\ \ddots & c^2_{-1} & & & & \\ & \epsilon^2_0 & c^2_0 & & & \\ & & \epsilon^2_1 & c^2_1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \ddots & & & & 0 \\ \ddots & c^1_{-1}c^2_{-1} & & & \\ & \epsilon'^1_0 c^2_0 + c^1_0\epsilon'^2_0 & c^1_0 c^2_0 & & \\ & & \epsilon'^1_1 c^2_1 + c^1_1\epsilon'^2_1 & c^1_1 c^2_1 & \\ & 0 & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

qu'on peut vérifier être égal au produit de

$$H\left(\begin{bmatrix} & & & & 0 & \\ \ddots & c^1_{-1} & & & & \\ & \epsilon^1_0 & c^1_0 & & & \\ & & \epsilon^1_1 & c^1_1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} & & & & 0 & \\ \ddots & c^1_{-1} & & & & \\ & \epsilon'^1_0 & c^1_0 & & & \\ & & \epsilon'^1_1 & c^1_1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

et

$$H\left(\begin{bmatrix} \ddots & & & & 0 & \\ \ddots & c^2_{-1} & & & & \\ & \epsilon^2_0 & c^2_0 & & & \\ & & \epsilon^2_1 & c^2_1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \ddots & & & & 0 & \\ \ddots & c^2_{-1} & & & & \\ & \epsilon'^2_0 & c^2_0 & & & \\ & & \epsilon'^2_1 & c^2_1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Ce morphisme est évidemment surjectif et son noyau Ker$H$ est $\mathcal{E}$, d'où $\check{C}' \cong \check{C}/\mathcal{E}$. □

3.2 Catégories de modules mod$\check{C}'$ et mod$B$

Soient A et B des algèbres avec A localement bornée en tant que k-catégorie et considérons un revêtement galoisien $F : A \longrightarrow B$. Notre but est de caractériser le foncteur de rabaissement F_λ : mod$A \longrightarrow$ mod$B$ comme un produit tensoriel.

Pour ce faire, commençons par une courte introduction au produit tensoriel sur une catégorie localement bornée.

Définition 3.2.1.

Soit A une k-catégorie localement bornée, L_A et ${}_AM$ des A-modules et V un k-espace vectoriel. Un *produit tensoriel* $L \otimes_A M$ de L et M est défini par la donnée :

a) d'une application k-linéaire $t : L \times M \longrightarrow L \otimes_A M$ qui est A-bilinéaire, c'est-à-dire telle que

   i) $t(l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2, m) = \alpha_1 t(l_1, m) + \alpha_2 t(l_2, m)$

   ii) $t(l, \beta_1 m_1 + \beta_2 m_2) = \beta_1 t(l, m_1) + \beta_2 t(l, m_2)$

   iii) $t(la, m) = t(l, am)$

   pour $l, l_1, l_2 \in L$, $m, m_1, m_2 \in M$, $a \in A$ et $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in k$.

b) En outre, t est universelle pour les applications A-bilinéaires, c'est-à-dire que si $g : L \times M \longrightarrow V$ est A-bilinéaire, alors il existe une unique application A-bilinéaire $\bar{g} : L \otimes_A M \longrightarrow V$ telle que $\bar{g}t = g$.

On note ordinairement $l \otimes m = t(l, m)$.

L'existence d'un produit tensoriel sur une k-catégorie localement bornée suit des résultats généraux de Freyd [Fre64], mais la preuve d'existence donnée dans [Ass97, (V)] se transpose sans changement à notre situation.

Nous avons besoin des lemmes suivants :

Lemme 3.2.2.

Soient A et B deux k-catégories localement bornées, L_A, ${}_AM_B$ et N_B des modules. Alors on a un isomorphisme fonctoriel

$$L \otimes_A (M \otimes_B N) \xrightarrow{\sim} (L \otimes_A M) \otimes_B N$$

Démonstration. Comme dans [Ass97, (V.1.3)], l'application définie sur un générateur du terme de gauche par

$$l \otimes (m \otimes n) \longrightarrow (l \otimes m) \otimes n,$$

où $l \in L, m \in M$ et $n \in N$, est un isomorphisme d'inverse

$$(l \otimes m) \otimes n \longrightarrow l \otimes (m \otimes n)$$

□

Lemme 3.2.3.

Soit A une k-catégorie localement bornée, $e \in A$ un idempotent primitif et L_A, ${}_AM$ deux A-modules. On a alors des isomorphismes fonctoriels

a) $L \otimes_A Ae \cong Le$

b) $eA \otimes_A M \cong eM$

Démonstration. Nous prouvons *b)*, la preuve de *a)* étant semblable. On définit $f : eA \otimes_A M \longrightarrow eM$ par

$$f(ea \otimes m) = eam,$$

où $a \in A$ et $m \in M$. Alors, il est facile de vérifier que f est un isomorphisme d'inverse $em \longmapsto e \otimes m$. □

Le théorème suivant est une version du Théorème de Watts (voir [Ass97, (V.3)]) pour les k-catégories localement bornées.

Théorème 3.2.4.

Soit B une algèbre de dimension finie et $F : A \longrightarrow B$ un revêtement galoisien. Alors, il existe un isomorphisme fonctoriel $F_\lambda \cong \_ \otimes_A B$, où $F_\lambda : modA \longrightarrow modB$ est le foncteur de rabaissement associé à F.

Démonstration. Munissons, d'abord, B d'une structure de A-module à gauche. Le foncteur F_λ induit un morphisme d'algèbres

$$\phi : A \cong \mathrm{End}A_A \longrightarrow \mathrm{End}F_\lambda(A_A) \cong \mathrm{End}B_B$$

où le dernier isomorphisme est démontré dans [BG82, (3.2)]. On définit, ainsi, pour $a \in A$ et $b \in B$,

$$ab = \phi(a)b.$$

Maintenant, soit M un A-module arbitraire. Il existe une présentation projective

$$P_1 \to P_0 \to M_A \to 0.$$

En appliquant les foncteurs exacts à droite F_λ et $\_ \otimes_A B$ à cette suite, on obtient un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
F_\lambda(P_1) \arrow[r] \arrow[d] & F_\lambda(P_0) \arrow[r] \arrow[d] & F_\lambda(M) \arrow[r] & 0 \\
P_1 \otimes_A B \arrow[r] & P_0 \otimes_A B \arrow[r] & M \otimes_A B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où, en vertu de [BG82, (3.2)], pour $i \in \{0,1\}$, $F_\lambda(P_i) = e'_i B$ (où e'_i est l'idempotent de B qui correspond à e_i). On déduit donc, de l'additivité des foncteurs et du Lemme 3.2.3 (b), l'isomorphisme fonctoriel cherché. $\square$

On est maintenant en mesure de montrer le théorème principal de ce mémoire.

Théorème 3.2.5.

Il existe un diagramme commutatif de foncteurs pleins et denses

$$\begin{tikzcd}
mod\ \check{C} \arrow[r, "(_ \underset{\check{C}}{\otimes} \check{C}')"] \arrow[d, "F_\lambda"'] & mod\ \check{C}' \arrow[d, "F'_\lambda"] \\
mod\ \tilde{C} \arrow[r, "(_ \underset{\tilde{C}}{\otimes} B)"'] & mod\ B
\end{tikzcd}$$

où F_λ, F'_λ sont les foncteurs de rabaissement associés respectivement aux revêtements galoisiens $F : \check{C} \to \tilde{C}$ et $F' : \check{C}' \to B$.

Démonstration. En vertu du Théorème 3.2.4,

$$F_\lambda \cong \_ \underset{\check{C}}{\otimes} \tilde{C}$$

et

$$F'_\lambda \cong \_ \underset{\check{C}'}{\otimes} B.$$

Prenons $M \in \mathrm{mod}\check{C}$. Du Lemme 3.2.2, on a la commutativité du diagramme. En effet,

$$(\_ \underset{\tilde{C}}{\otimes} B)(\_ \underset{\check{C}}{\otimes} \tilde{C})(M) = M \underset{\check{C}}{\otimes} (\tilde{C} \underset{\tilde{C}}{\otimes} B) \cong M \underset{\check{C}}{\otimes} B.$$

De même

$$(\_ \underset{\check{C}'}{\otimes} B)(\_ \underset{\check{C}}{\otimes} \check{C}')(M) = M \underset{\check{C}}{\otimes} (\check{C}' \underset{\check{C}'}{\otimes} B) \cong M \underset{\check{C}}{\otimes} B.$$

Il en est de même pour un morphisme f de $\mathrm{mod}\check{C}$.

D'ailleurs, soit $\bar{M}$ un $\check{C}'$-module. On a que $\bar{M}$ admet une structure naturelle de $\check{C}$-module et, par rapport à cette structure, $\bar{M} \underset{\check{C}}{\otimes} \check{C}' \cong \bar{M}_{\check{C}'}$ d'où le foncteur $\_ \underset{\check{C}}{\otimes} \check{C}'$ est plein et dense. En vertu de [ABD+16, (2.3.4)] et le Théorème 3.1.1, F_λ est plein et dense, et dans [ABD+16, (Lemme 2.3.2)] on démontre que $(\_ \underset{\tilde{C}}{\otimes} B)$ est plein et dense, d'où la composition $(\_ \underset{\tilde{C}}{\otimes} B) \circ F_\lambda$ l'est aussi. Par conséquent, F'_λ est plein et dense. □

Exemple 3.2.6.

Pour illustrer les relations entre les différentes catégories de modules du dernier théorème, prenons l'algèbre inclinée C de l'Exemple 2.3.2 et soit $M = \begin{smallmatrix} 2_0 \\ 5_1 \end{smallmatrix} \in \mathrm{mod}\check{C}$. La Figure 1 montre les représentations des carquois associées aux modules correspondants dans les catégories $\mathrm{mod}\tilde{C}$, $\mathrm{mod}B$ et $\mathrm{mod}\check{C}'$.

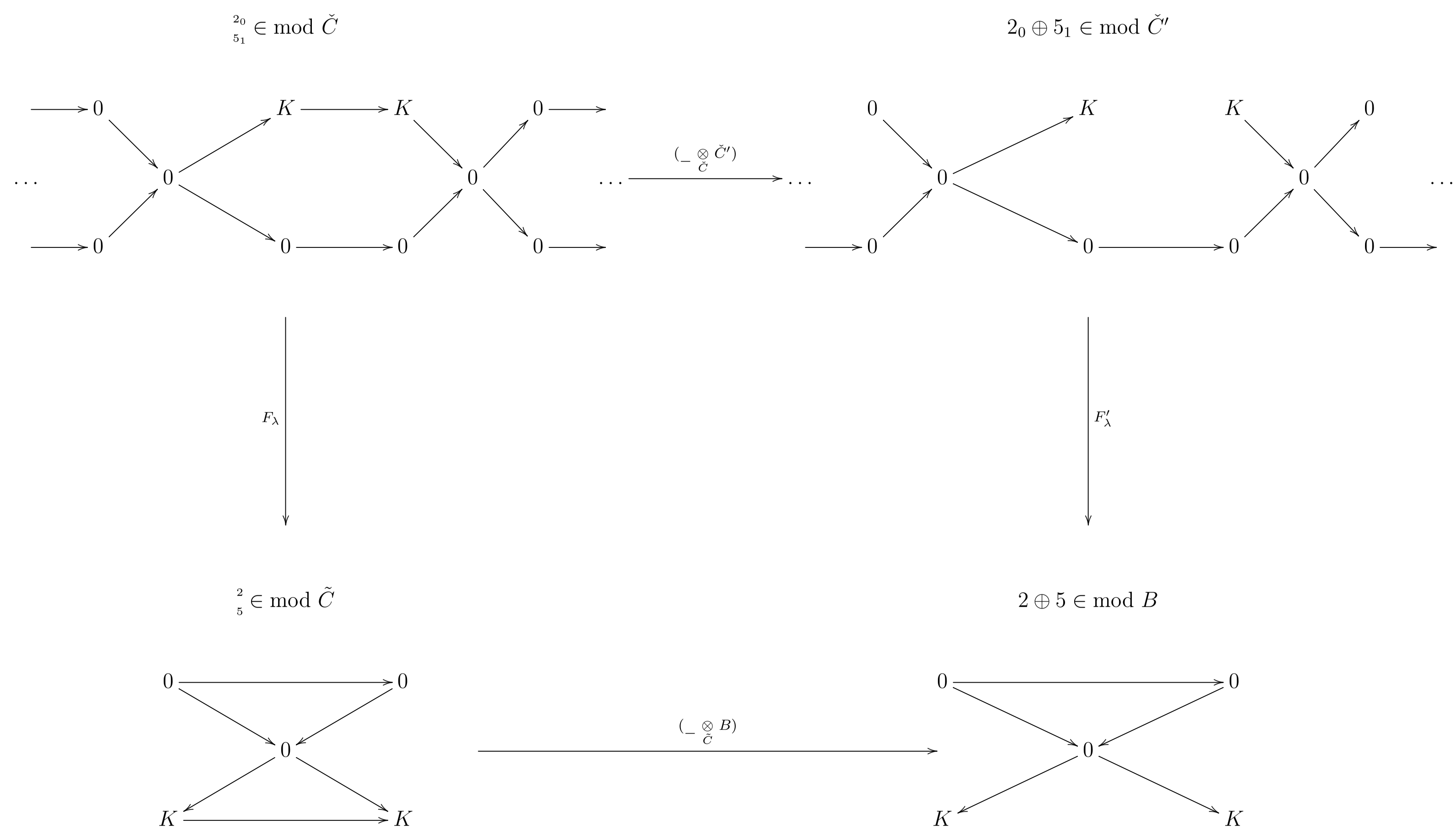
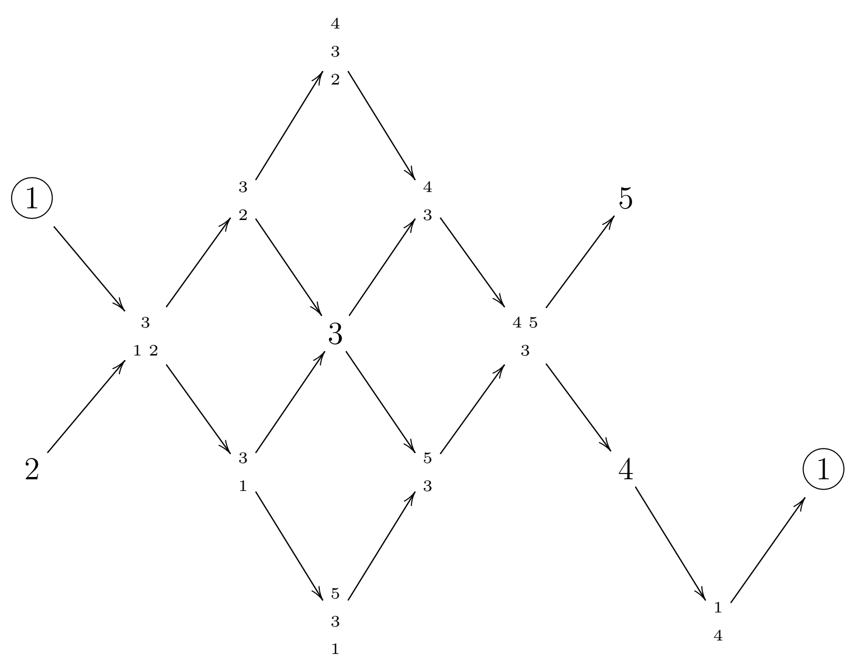


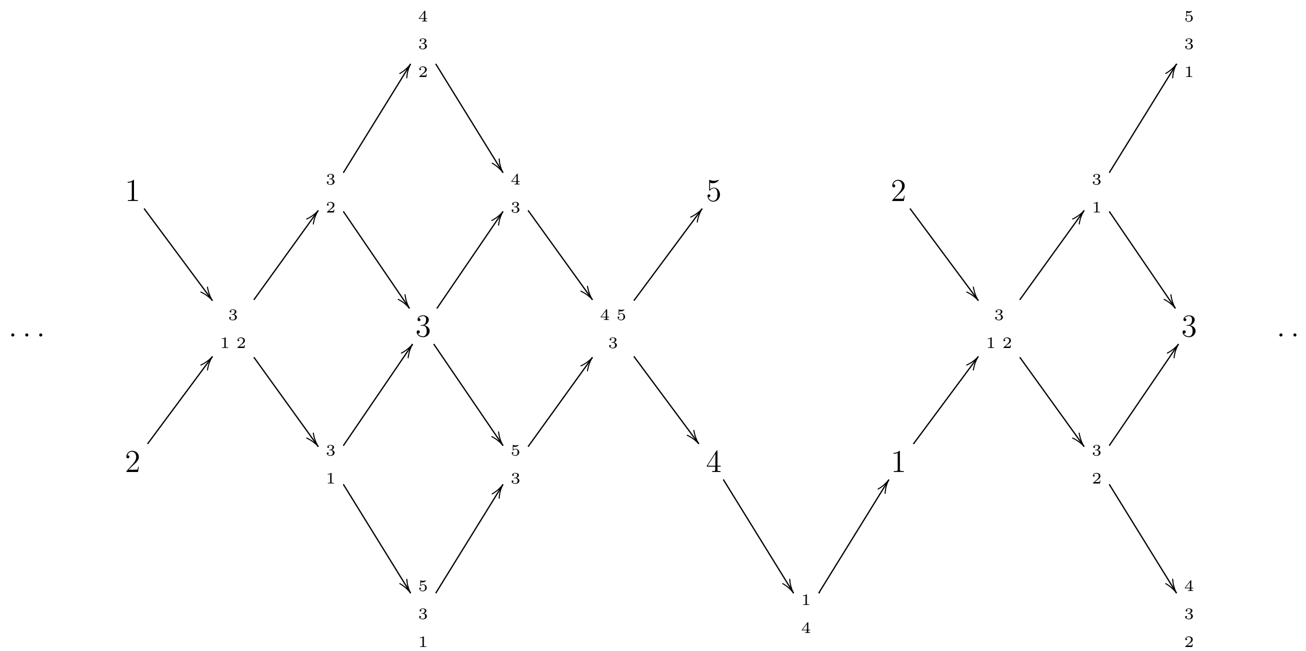
Figure 3.1 – Représentations des carquois associées à $M = \frac{2_0}{5_1} \in \operatorname{mod}\check{C}$ dans les catégories de modules sur les algèbres $\tilde{C}$, $\check{C}'$ et B

Exemple 3.2.7.

Soient $\check{C}'$ et B comme dans l'exemple précédent. Alors, le carquois d'Auslander-Reiten $\Gamma(\text{mod } B)$ de mod$B$ est



où les deux copies encerclées du module 1 sont identifiées. Le carquois $\Gamma(\text{mod } \check{C}')$ est



Pour finir ce mémoire, on liste des possibles conséquences du Théorème 3.2.5, soit des questions qui restent ouvertes pour des prochaines investigations :

1. On a vu au Théorème 3.1.1 qu'il existe un foncteur plein et dense $\psi : \mathrm{D}^b(\mathrm{mod}A) \longrightarrow \mathrm{mod}\check{C}$ entre la catégorie dérivée $\mathrm{D}^b(\mathrm{mod}A)$ et la catégorie de modules $\mathrm{mod}\check{C}$ de l'algèbre répetitive amassée $\check{C}$. Le foncteur ψ induit l'équivalence
$$\mathrm{mod}\check{C} \cong \frac{\mathrm{D}^b(\mathrm{mod}A)}{\mathcal{J}}$$
avec $\mathcal{J}$ l'idéal de $\mathrm{D}^b(\mathrm{mod}A)$ décrit dans [ABS09, (2.1)]. La composition
$$(\_ \underset{\check{C}'}{\otimes} \check{C}') \circ \psi : \mathrm{D}^b(\mathrm{mod}A) \longrightarrow \check{C}'$$
est alors aussi un foncteur plein et dense qui permettrait de décrire une équivalence
$$\mathrm{mod}\check{C}' \cong \frac{\mathrm{D}^b(\mathrm{mod}A)}{\mathcal{K}}$$
où $\mathcal{K}$ est un idéal de $\mathrm{D}^b(\mathrm{mod}A)$ à déterminer.

2. Pour l'algèbre répetitive $\hat{C}$ [ABS09, (Théorème 3.4)] on décrit un foncteur φ : $\mathrm{mod}\hat{C} \longrightarrow \mathrm{mod}\check{C}$ plein et dense qui induit l'équivalence des catégories

$$\mathrm{mod}\check{C} \cong \frac{\mathrm{mod}\hat{C}}{\mathcal{L}}$$

pour un idéal $\mathcal{L}$ de $\mathrm{mod}\hat{C}$. On se demande si, étant donné l'existence d'un foncteur plein et dense $(\_ \underset{\check{C}'}{\otimes} \check{C}') : \mathrm{mod}\check{C} \longrightarrow \mathrm{mod}\check{C}'$, on pourrait trouver une équivalence

$$\mathrm{mod}\check{C}' \cong \frac{\mathrm{mod}\hat{C}}{\mathcal{I} \oplus \mathcal{J}}$$

où l'idéal I reste à déterminer, mais serait probablement relié à l'idéal $\mathcal{E}$ de $\check{C}$.

3. De plus, tel que décrit à la Section 2.4, l'algèbre d'extension par relations partielle B peut être vue comme étant une algèbre intemédiaire entre l'algèbre inclinée amassée $\tilde{C}$ et l'algèbre inclinée C et dans [ABD+16] on propose qu'il existe toute une famille de telles algèbres intemédiaires, toutes admettant des tranches locales (voir aussi [Tre17]). Or, il existe les revêtements galoisiens $F : \check{C} \longrightarrow \tilde{C}$ et $F' : \check{C}' \longrightarrow B$. Ainsi, il se peut que, comme dans le cas de $\mathrm{mod}\check{C}$ et $\mathrm{mod}\check{C}'$, la k-catégorie de modules des revêtements de chacune des algèbres intermédiaires puisse aussi s'exprimer comme une k-catégorie quotient

$$\frac{\mathrm{D}^b(\mathrm{mod}A)}{\mathcal{I}}$$

pour un certain idéal $\mathcal{I}$

Bibliographie

[ABD+16] Ibrahim Assem, Juan Carlos Bustamante, Julie Dionne, Patrick Le Meur et David Smith : Representation theory of partial relation extensions. *arXiv preprint arXiv :1604.01269*, 2016.

[ABS08] Ibrahim Assem, Thomas Brüstle et Ralf Schiffler : Cluster-tilted algebras as trivial extensions. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 40(1):151–162, 2008.

[ABS09] Ibrahim Assem, Thomas Brüstle et Ralf Schiffler : On the galois coverings of a cluster-tilted algebra. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 213(7):1450–1463, 2009.

[AGST16] Ibrahim Assem, Maria Andrea Gatica, Ralf Schiffler et Rachel Taillefer : Hochschild cohomology of relation extension algebras. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 220(7):2471–2499, 2016.

[Ass97] Ibrahim Assem : *Algèbres et modules. Enseignement des Mathématiques. Les Presses de l'Université d'Ottawa.* Masson, 1997.

[ASS06] Ibrahim Assem, Andrzej Skowronski et Daniel Simson : *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras : Volume 1 : Techniques of Representation Theory*, volume 65. Cambridge University Press, 2006.

[BFP$^+$10] Michael BAROT, Elsa FERNÁNDEZ, María Inés PLATZECK, Nilda Isabel PRATTI et Sonia TREPODE : From iterated tilted algebras to cluster-tilted algebras. *Advances in Mathematics*, 223(4):1468–1494, 2010.

[BG82] Klaus BONGARTZ et Peter GABRIEL : Covering spaces in representation-theory. *Inventiones Mathematicae*, 65(3):331–378, 1982.

[BL05] Ragnar-Olaf BUCHWEITZ et Helmut LENZING : *Representations of algebras and related topics*, volume 45. American Mathematical Soc., 2005.

[BMR$^+$06a] Aslak Bakke BUAN, Robert MARSH, Markus REINEKE, Idun REITEN et Gordana TODOROV : Tilting theory and cluster combinatorics. *Advances in mathematics*, 204(2):572–618, 2006.

[BMR06b] Aslak Bakke BUAN, Robert MARSH et Idun REITEN : Cluster-tilted algebras of finite representation type. *Journal of Algebra*, 306(2):412–431, 2006.

[BMR07] Aslak Bakke BUAN, Robert MARSH et Idun REITEN : Cluster-tilted algebras. *Transactions of the American Mathematical Society*, 359(1):323–332, 2007.

[Bon83] Klaus BONGARTZ : Algebras and quadratic forms. *Journal of the London Mathematical Society*, 2(3):461–469, 1983.

[Fre64] Peter J FREYD : *Abelian categories*, volume 1964. Harper & Row New York, 1964.

[FZ02a] Sergey FOMIN et Andrei ZELEVINSKY : Cluster algebras i : foundations. *Journal of the American Mathematical Society*, 15(2):497–529, 2002.

[FZ02b] Sergey FOMIN et Andrei ZELEVINSKY : Cluster algebras I : Foundations. *Journal of the American Mathematical Society*, 15(2):497–529, 2002.

[Gab81] Pierre GABRIEL : The universal cover of a representation-finite algebra. *In Representations of algebras*, pages 68–105. Springer, 1981.

[KVdB11] Bernhard Keller et Michel Van den Bergh : Deformed Calabi–Yau completions. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 2011(654):125–180, 2011.

[LM06] Patrick Le Meur : *Revêtements galoisiens et groupe fondamental d'algèbres de dimension finie*. Thèse de doctorat, Université Montpellier II-Sciences et Techniques du Languedoc, 2006.

[Rie80] Christine Riedtmann : Darstellungsköcher, überlagerungen und zurück algebren. *Comment. Math. Helv*, 55:199–224, 1980.

[Sch14] Ralf Schiffler : *Quiver representations*. Springer, 2014.

[Tre17] Hipolito Treffinger : τ-tilting theory and τ-slices. *Journal of Algebra*, 481:362–392, 2017.