

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

UQTR



Université du Québec  
à Trois-Rivières

---

LES ENSEMBLES DE MANDELBROT TRICOMPLEXES  
GÉNÉRALISÉS AUX POLYNÔMES  $\eta^p + c$

---

PIERRE-OLIVIER PARISÉ

Mémoire présenté comme exigence partielle à l'obtention  
De la maîtrise en mathématiques et informatique appliquées

Trois-Rivières, Canada  
Juin, 2017

Université du Québec à Trois-Rivières

Service de la bibliothèque

Avertissement

L'auteur de ce mémoire ou de cette thèse a autorisé l'Université du Québec à Trois-Rivières à diffuser, à des fins non lucratives, une copie de son mémoire ou de sa thèse.

Cette diffusion n'entraîne pas une renonciation de la part de l'auteur à ses droits de propriété intellectuelle, incluant le droit d'auteur, sur ce mémoire ou cette thèse. Notamment, la reproduction ou la publication de la totalité ou d'une partie importante de ce mémoire ou de cette thèse requiert son autorisation.

CE MÉMOIRE A ÉTÉ ÉVALUÉ  
PAR UN JURY COMPOSÉ DE:

M. Dominic Rochon, directeur de maîtrise  
Département de mathématiques et informatique  
Université du Québec à Trois-Rivières

M. Sébastien Tremblay, membre du jury  
Département de mathématiques et informatique  
Université du Québec à Trois-Rivières

M. Thomas Ransford, membre du jury  
Département de mathématiques et de statistique  
Université Laval

# Les ensembles de Mandelbrot tricomplexes généralisés aux polynômes $\eta^p + c$

Pierre-Olivier Parisé

## SOMMAIRE

Dans ce mémoire, nous présentons une généralisation de l'ensemble de Mandelbrot dans le plan complexe, le plan hyperbolique et l'espace tricomplexe. Ces ensembles de Mandelbrot généralisés sont appelés *Multibrot* et ils sont générés par l'itération du polynôme  $z^p + c$  où  $p$  est un entier plus grand que 1.

Précisément, l'algèbre normée des nombres tricomplexes est présentée en vue de définir, en toute généralité, les ensembles de Mandelbrot. Suite à cela, nous étudions certaines coupes de ces ensembles. D'abord, nous nous concentrons sur une coupe bidimensionnelle pour obtenir les ensembles de Mandelbrot d'ordre  $p$  dans le plan complexe. Nous montrons, dans le cas particulier où  $p = 3$ , que l'intersection de cet ensemble de Mandelbrot avec l'axe réelle est exactement un intervalle. La méthode développée dans ce mémoire a ouvert la voie à une méthode plus générale afin de montrer que cette intersection est un intervalle pour toute puissance entière  $p \geq 2$ . Ensuite, une autre coupe bidimensionnelle est effectuée afin d'obtenir les ensembles de Mandelbrot dans le plan hyperbolique. Nous montrons que ces ensembles sont en fait des carrés. Enfin, nous terminons ce mémoire en présentant une famille de coupes tridimensionnelles de certains ensembles de Mandelbrot tricomplexes. Nous montrons qu'il y a quatre coupes tridimensionnelles, dans le cas où  $p = 3$ , au lieu de huit coupes dans le cas de l'ensemble de Mandelbrot tricomplexe classique.

# The Tricomplex Mandelbrot Sets Generalized to The Polynomials $\eta^p + c$

Pierre-Olivier Parisé

## ABSTRACT

In this memoir, we present a generalization of the Mandelbrot set in the complex plane, the hyperbolic plane and the tricomplex space. These Mandelbrot sets are called *Multibrots* and they are generated by iterating the polynomial  $z^p + c$  where  $p$  is an integer greater than 1.

More precisely, the normed algebra of the tricomplex numbers is presented with a view to defining, in generality, the Mandelbrot sets. Following that, we study particular slices of these sets. First, we focus on a bidimensional slice to obtain the Mandelbrot sets of order  $p$  in the complex plane. We prove, in the particular case  $p = 3$ , that the cross section of this Mandelbrot set with the real axis is exactly an interval. The technique used to prove the case  $p = 3$  opens the way to prove that in general, this intersection is really an interval. Afterwards, another bidimensional slice is cut to obtain the Mandelbrot sets in the hyperbolic plane. Furthermore, we show that these sets are, actually, squares. Lastly, we end this memoir by presenting a family of tridimensional slices of specific Mandelbrot sets. We show that, in the case  $p = 3$ , there are exactly four principal slices, instead of eight for the classical tricomplex Mandelbrot set.

## AVANT-PROPOS

Le bonheur est parfois caché dans l'inconnu.

---

Victor Hugo

Mon intérêt pour la mathématique remonte, à ma grande surprise, à bien longtemps. En pensant à ce que je voulais insérer dans cet avant-propos, je me suis rappelé comment j'avais tant de plaisir à apprendre mes tables de multiplication avec ma mère. En passant, je dois beaucoup à ma mère et je prends quelques mots pour la remercier d'avoir été et d'être la femme qu'elle est. Sans cela, je n'aurais jamais eu l'opportunité de me lever et de prendre mon Destin en main.

Arrivé au collège, j'ai compris que les mathématiques et moi étions faits pour être ensemble. C'est donc à ce moment de ma vie que l'édifice du futur mathématicien a commencé à se forger en moi. Ma première démonstration consistait à faire la preuve de la formule donnant l'aire d'un trapèze. C'est mon professeur de calcul différentiel et intégral du collège, M. Denis Tremblay, qui m'avait attribué cette petite mission pour le simple plaisir de faire des *maths*. Par ricochet, mon premier coup de foudre... Je prends la décision de m'inscrire au programme du double baccalauréat en enseignement des mathématiques au secondaire et mathématiques de l'Université du Québec à Trois-Rivières (UQTR). En lisant de plus en plus d'ouvrages d'Analyse dû au cours Calculs III de mon cégep à Sept-Îles, je fais face à une totale incompréhension des définitions avec des  $\delta$  et des  $\varepsilon$ ... et donc, un réel désir de comprendre ces concepts!!

Après une année passée dans le programme du double baccalauréat, force est de constater que mes cours de *maths* captivent toute mon attention. En toute franchise, la mathématique devient ma Déesse, celle avec qui je passe le plus clair de mon temps. Ma Chère, tu envahis mon esprit et je te dois la majorité de mes succès. Pour ainsi dire, je vois mon intérêt pour les cours d'enseignement se désagrèger. La question se pose alors : est-ce que je continue dans ce programme? L'incertitude s'empare soudainement de moi. Cependant, une rencontre avec le professeur Dominic Rochon (disons Dom pour les intimes) du Département de mathématiques et informatique de l'UQTR bouscule une bonne fois pour toutes mon parcours académique. Il me propose de collaborer avec lui à un projet de recherche à l'été suivant. C'est décidé, je change alors de programme. Je m'incrute dans le baccalauréat en mathématiques.

Quatre ans, c'est le temps écoulé depuis notre première rencontre. C'est aussi le nombre d'années que nous avons consacrées à la recherche ensemble. Je prends quelques mots de cette note, dont le nombre ne sera jamais suffisant, pour te remercier de ta disponibilité, de ta franchise, de ton support moral et financier et aussi des sujets mathématiques et philosophiques qui alimentent le Mathé-philosophe qui est en moi. Ta présence m'a fait grandir en tant que chercheur, mais aussi en tant que personne. Chaque exaltation, chaque problème, chaque solution sont gravés dans ma mémoire et dans la Mémoire de ce monde. Aussi, je ne peux pas oublier de remercier d'autres professeurs comme Sébastien Tremblay pour sa confiance et son influence sur ma passion des mathématiques, Alain Goupil pour le combinatoricien qu'il est, Michel Grundland pour m'avoir permis de suivre un cours de maîtrise lorsque j'étais au baccalauréat et Josiane Lajoie pour m'avoir montré les premiers rudiments de rigueur en mathématiques grâce à la géométrie. Merci d'être, toutes et tous, mathématicienne et mathématiciens!

Dom, tu m'as permis de faire deux étés de recherche en mathématiques qui ont forgé le contenu de ce mémoire. Tu m'as accompagné pendant mes deux années de maîtrise et même subventionné une partie de mon voyage pour une conférence internationale à Londres. Ces quatre années ont été majoritairement subventionnées par deux organismes : le CRSNG et le FRQNT. Je prends donc un petit espace de cet avant-propos pour les remercier de leur support financier précieux pendant mes études. Je dois aussi, au passage, accorder un moment de remerciement à la fondation de l'UQTR et de l'Université de Québec pour leur support financier octroyé sous forme de bourses afin de récompenser mes résultats scolaires.

Enfin, je remercie tout le monde de l'association de mathématiques et d'information de l'UQTR, qui me sont de près ou de loin, des frères. Merci d'écouter mes paroles de sage mathématicien, malgré votre incompréhension quand je m'élance trop haut dans l'abstraction ou bien lorsque je fais une blague obscure avec un concept de *maths*! Je voudrais, malgré cela et en faisant consciemment une discrimination, prendre le temps de spécifier quelques noms. Louis Hamel avec qui j'ai passé la majorité de mon dernier été à faire du vélo et à entretenir des discussions philosophiques. Guillaume Brouillette, fidèle danseur de Swing, envers qui je dois beaucoup pour son écoute de mes mathématiques ainsi que mes blagues à saveurs mathématiques et de sa franchise. Mathilde Loïselle D. puisque tu es la deuxième personne la plus importante dans ma vie. La première étant Moi-même... Samuel Lemay parce que tu

nourris le physicien qui sommeille en moi. Alexandre Ouellet pour ton implication et ta confiance. Mathilde Ayotte-Bournival, et sa famille pour leur convivialité et leur ouverture d'esprit. Alexandra Trudel pour la reconnaissance que tu as eue envers moi. Votre passage a marqué ma vie.

Pour terminer, la compréhension de la Vie n'aurait pu se faire avec autant d'appoints si les livres de Johann Soulas ne m'avaient pas été transmis. C'est mon père (et Moi-même bien sûr) qui m'a permis d'avoir cette autre vision, la Vision de la Vie. Il a en fait occupé une grande place dans ma vie. Je dédie donc ce mémoire à cet homme d'exception. Le Rien disposé sur le reste de cette page exprime tout ce que j'ai pour Toi... On se Comprend.

---

# Table des matières

Sommaire	iii
Abstract	iv
Avant-propos	v
Table des matières	viii
Table des figures	x
Liste des symboles	xi
Introduction	1
<b>1 Nombres tricomplexes</b>	<b>4</b>
1.1 Préliminaires sur les nombres bicomplexes . . . . .	4
1.2 Définitions élémentaires . . . . .	8
1.3 Représentation idempotente . . . . .	20
1.4 Éléments inversibles . . . . .	29
<b>2 Ensembles de Mandelbrot bidimensionnels</b>	<b>35</b>
2.1 Sous-ensembles bidimensionnels . . . . .	35
2.2 Éléments de base en systèmes dynamiques complexes . . . . .	38
2.3 L'ensemble de Mandelbrot . . . . .	43
2.4 Les ensembles multibrots . . . . .	46
2.5 Les ensembles hyperbrots . . . . .	61

<b>3 Ensembles de Mandelbrot tricomplexes</b>	<b>69</b>
3.1 Sous-espaces importants . . . . .	69
3.2 Polynômes tricomplexes . . . . .	71
3.3 Multibrots tricomplexes . . . . .	76
3.4 Coupes tridimensionnelles . . . . .	81
<b>Conclusion</b>	<b>113</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>116</b>
<b>A Racines d'un polynôme cubique</b>	<b>121</b>
A.1 Conjugaison du polynôme . . . . .	122
A.2 Racines du polynôme conjugué et systèmes équivalents . . . . .	122
A.3 Étude du signe du discriminant . . . . .	124
<b>B Nombres hyperboliques</b>	<b>129</b>
<b>C Représentation matricielle d'un nombre tricomplexe et Maple</b>	<b>132</b>
C.1 Représentation matricielle . . . . .	132
C.2 Feuille de calculs <i>Maple 16</i> . . . . .	134

---

## Table des figures

2.1	L'ensemble de Mandelbrot $\mathcal{M}^2$ . . . . .	43
2.2	Représentation graphique de $ c $ , $a$ et $a -  c $ . . . . .	47
2.3	Ensembles multibrots d'ordres $p = 3, 4, 5, 10$ . . . . .	50
2.4	Illustration de $a$ , $a -  c $ et $ c $ . . . . .	60
2.5	Certains Hyperbrot associés au polynôme $Q_{p,c}$ . . . . .	62
3.1	Quatre coupes 3D de l'ensemble de Mandelbrot $\mathcal{M}_3^2$ . . . . .	88
3.2	Quatre coupes 3D de l'ensemble de Mandelbrot $\mathcal{M}_3^2$ . . . . .	91
3.3	Quatre coupes 3D de l'ensemble de Mandelbrot $\mathcal{M}_3^3$ . . . . .	94
3.4	Quatre coupes 3D de l'ensemble de Mandelbrot $\mathcal{M}_3^3$ . . . . .	99
3.5	Illustration de la conjecture 3.7 pour un entier $p$ pair . . . . .	114

---

# Liste des symboles

## Sous-espaces

$\mathbb{M}(n)$	Ensemble des nombres multicomplexes d'ordre $n$
$\mathbb{M}(1)$	Ensemble des nombres complexes avec l'unité $\mathbf{i}_1$
$\mathbb{M}(2)$	Ensemble des nombres bicomplexes
$\mathbb{M}(3)$	Ensemble des nombres tricomplexes
$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels
$\mathbb{N}$	Ensemble des entiers naturels 1, 2, ... (excluant le 0)
$\mathbb{C}$	Ensemble des nombres complexes
$\mathbb{D}$	Ensemble des nombres hyperboliques
$\mathbb{C}(\mathbf{i}_k)$	Ensemble des nombres complexes générés par $\mathbf{i}_k$
$\mathbb{D}(\mathbf{j}_k)$	Ensemble des nombres hyperboliques générés par $\mathbf{j}_k$
$\mathbb{K}$	Corps commutatif, soit $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{M}(1)$
$\mathcal{NO}_2$	Ensemble des éléments non inversibles de $\mathbb{M}(2)$
$\mathcal{NO}_3$	Ensemble des éléments non inversibles de $\mathbb{M}(3)$
$\mathbb{M}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l)$	Sous-espace de $\mathbb{M}(3)$ généré par 1, $\mathbf{i}_k$ , $\mathbf{i}_l$ et $\mathbf{i}_k \mathbf{i}_l$
$\mathbb{M}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_m, \mathbf{i}_l)$	Sous-espace de $\mathbb{M}(3)$ généré par $\mathbf{i}_k$ , $\mathbf{i}_m$ , $\mathbf{i}_l$ et $\mathbf{i}_k \mathbf{i}_m \mathbf{i}_l$
$\mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_m, \mathbf{i}_l)$	Sous-espace de $\mathbb{M}(3)$ généré par $\mathbf{i}_k$ , $\mathbf{i}_m$ , $\mathbf{i}_l$

## Algèbre

$\gamma_1, \overline{\gamma_1}$	Éléments idempotents significatifs de $\mathbb{M}(2)$
$\gamma_3, \overline{\gamma_3}$	Éléments idempotents significatifs de $\mathbb{M}(3)$
$S_1$	Ensemble des éléments idempotents de $\mathbb{M}(2)$
$S_3$	Ensemble des éléments idempotents de $\mathbb{M}(3)$
$I(\gamma_1), I(\overline{\gamma_1})$	Idéaux générés par les éléments $\gamma_1$ et $\overline{\gamma_1}$ dans $\mathbb{M}(2)$
$I(\gamma_3), I(\overline{\gamma_3})$	Idéaux générés par les éléments $\gamma_3$ et $\overline{\gamma_3}$ dans $\mathbb{M}(3)$
$X_1 \times_{\gamma_1} X_2$	Produit $\mathbb{M}(2)$ -cartésien de deux ensembles $X_1, X_2$
$X_1 \times_{\gamma_3} X_2$	Produit $\mathbb{M}(3)$ -cartésien de deux ensembles $X_1, X_2$

## Topologie

$\ \cdot\ _2$	Norme euclidienne d'un élément de $\mathbb{M}(2)$
$\ \cdot\ _3$	Norme euclidienne d'un élément de $\mathbb{M}(3)$
$B_1(a, r)$	Boule de rayon $r$ centrée en $a$ dans $\mathbb{M}(1)$
$B_2(a, r)$	Boule de rayon $r$ centrée en $a$ dans $\mathbb{M}(2)$
$B_3(a, r)$	Boule de rayon $r$ centrée en $a$ dans $\mathbb{M}(3)$
$D_2(a, r_1, r_2)$	Disque ouvert bicomplexe de rayons $r_1, r_2$ centré en $a$
$D_3(a, r_1, r_2)$	Disque ouvert tricomplexe de rayons $r_1, r_2$ centré en $a$

## Systèmes dynamiques

$A_f(z_0)$	Bassin d'attraction d'un point fixe d'une fonction holomorphe $f$
$\mathcal{M}^p$	Ensemble de Mandelbrot d'ordre entier $p \geq 2$ du plan $\mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$ (Mandelbrot)
$\mathcal{H}^p$	Ensemble de Mandelbrot d'ordre entier $p \geq 2$ du plan $\mathbb{D}(\mathbf{j}_1)$ (Hyperbrot)
$\mathcal{M}_2^p$	Ensemble de Mandelbrot bicomplexe d'ordre entier $p \geq 2$ (Multibrot bicomplexe)

$\mathcal{M}_3^p$	Ensemble de Mandelbrot tricomplexe d'ordre entier $p \geq 2$ (Multibrot tricomplexe)
$\mathcal{T}^p(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_m, \mathbf{i}_l)$	Coupe tridimensionnelle de l'ensemble $\mathcal{M}_3^p$
$\mathcal{P}^3$	Ensemble $\mathcal{T}^3(1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2)$ nommée le Perplexbrique

## Symboles particuliers

$\Omega$	Ensemble ouvert et connexe (domaine) du plan complexe
$\subset$	Sous-ensemble d'un ensemble (égalité possible)
$\omega$	Racine cubique de l'unité différente de 1

---

# Introduction

A mathematician, like a painter or a poet is a maker of patterns. [...] The mathematician's patterns, like the painter's or the poet's must be beautiful [...] Beauty is the first test: there is no permanent place in the world for ugly mathematics.

---

G. H. Hardy

Depuis la création de l'informatique dans les années 1950, les mathématiques ont pris un nouveau tournant. Ce nouvel outil a permis de réaliser des calculs qui étaient autrefois impossibles à entreprendre. La géométrie fractale et la théorie des systèmes dynamiques complexes, entre autres, sont des domaines de la mathématique qui ont profité de l'éclosion de l'informatique. En effet, B. Mandelbrot illustre pour la première fois en 1980 l'ensemble qui porte son nom. Ceci a eu pour effet de motiver davantage l'étude de la théorie des systèmes dynamiques complexes développée par G. Julia [Jul18] et P. Fatou [Fat19] respectivement en 1918 et 1919.

En 1987, T. V. Papathomas et B. Juliesz publient un article intitulé *Animation with Fractals from Variations on the Mandelbrot Set* [PJ87]. Ils proposent une façon de généraliser l'ensemble de Mandelbrot en modifiant le degré du polynôme associé à l'ensemble de Mandelbrot classique : au lieu d'être un polynôme de degré deux, ces deux derniers auteurs ont considéré des polynômes d'un degré supérieur à deux. Une étude similaire est effectuée par U. G. Gujar et V. C. Bhavsar [GB91]. Ces deux articles portent essentiellement sur des expérimentations par ordinateur de ces nouveaux ensembles de Mandelbrot. Une étude plus théorique est effectuée par D. Schleicher [Sch04, LS96].

En 1991, P. Senn [Sen90] suggère une définition de l'ensemble de Mandelbrot

basée sur une autre structure de nombres : les nombres hyperboliques. Il découvre, à l'aide de simulations numériques, que les images générées à partir de cette définition ne sont plus des fractales. Il remarque que l'ensemble de Mandelbrot est un carré ! Il faut attendre l'année 1994 pour une démonstration de ce fait par W. Metzler [Met94].

Tout récemment, différents systèmes de nombres sont utilisés afin de repousser les limites de la dimension. Particulièrement, A. Norton [Nor82] a utilisé les quaternions afin de générer les ensembles de Julia classiques en trois dimensions. Puis, D. Rochon [Roc00, Roc03] a eu recours aux nombres bicomplexes afin de générer une version tridimensionnelle de l'ensemble de Mandelbrot et des ensembles de Julia remplis. Muni de la même structure de nombre, É. Martineau et D. Rochon [Mar04, MR05], ainsi que C. Matteau et D. Rochon [Mat11, MR15] ont adapté respectivement deux algorithmes forts utiles pour générer l'ensemble de Mandelbrot et de Julia en trois dimensions. Puis, V. Garant-Pelletier et D. Rochon [GP11, GPR08] ont eu recours aux nombres multicomplexes afin de généraliser aux dimensions supérieures l'ensemble de Mandelbrot et les ensembles de Julia. Leur étude s'est surtout centrée sur les nombres tricomplexes.

L'un des objectifs de ce mémoire est de combiner les nouveaux ensembles de Mandelbrot avec l'approche développée par V. Garant-Pelletier et D. Rochon. En effet, les derniers auteurs ont étendu l'ensemble de Mandelbrot classique défini, à partir de l'itération successive du polynôme  $Q_{2,c}(z) = z^2 + c$ , comme ceci

$$\mathcal{M} := \left\{ c \in \mathbb{C} : \left\{ Q_{2,c}^m(0) \right\}_{m=1}^{\infty} \text{ est bornée} \right\}$$

aux nombres multicomplexes. Leur étude s'est restreinte au cas des nombres tricomplexes afin de décrire une famille de coupes tridimensionnelles de l'ensemble de Mandelbrot. Au regard de cela, le travail présenté ici se base non plus sur l'ensemble de Mandelbrot classique, mais sur la généralisation suivante

$$\mathcal{M}^p := \left\{ c \in \mathbb{C} : \left\{ Q_{p,c}^m(0) \right\}_{m=1}^{\infty} \text{ est bornée} \right\}$$

où  $Q_{p,c}(z) = z^p + c$ . Ces ensembles sont appelés, dans la littérature [Sch04, McM94], *Multibrot*.

D'ailleurs, ce mémoire a aussi la prétention d'établir une méthode inédite afin de démontrer que l'intersection entre l'axe réel du plan  $\mathbb{C}$  et l'ensemble de Mandelbrot généré par le polynôme  $z^3 + c$  est exactement un intervalle. Cette dernière méthode a permis d'élucider le cas général et est l'objet des articles suivants [PR17, PRR17].

En outre, pour mener à bien cette étude, nous construisons pas à pas, l'algèbre des nombres tricomplexes au premier chapitre. Au chapitre 2, après un aperçu des propriétés de l'ensemble de Mandelbrot, nous présentons les Multibrot dans les plans complexe et hyperbolique. Nous y démontrons que l'intersection entre l'ensemble de Mandelbrot généré par le polynôme  $z^3 + c$  et l'axe réel est un intervalle et, par la suite, ceci nous conduit à démontrer que l'ensemble  $\mathcal{M}^3$  défini dans le plan hyperbolique est un carré. Enfin, au chapitre 3, nous introduisons les ensembles multibrots tricomplexes, c'est-à-dire les ensembles de Mandelbrot généralisés à la huitième dimension. Plus précisément, nous étudions leurs propriétés et caractérisons certaines coupes tridimensionnelles. Nous montrons d'ailleurs que l'une des coupes principales est un octaèdre régulier.

---

# Nombres tricomplexes

Avant de jeter l'ancre à l'eau et d'amorcer l'exploration du vaste territoire qui a été présenté, nous devons faire une analyse de l'horizon afin de bien entreprendre notre prochaine aventure. L'outil majeur utilisé dans ce document est une structure de nombres appelée *nombres tricomplexes*. Ce chapitre est donc dédié à une présentation de l'ensemble des nombres tricomplexes.

À la première section, un bref retour est fait sur les nombres bicomplexes. Par la suite, à la section suivante, l'algèbre normée des nombres tricomplexes est présentée. À la troisième section, la représentation idempotente d'un nombre tricomplexe est exposée. Enfin, la dernière section propose des idées afin de caractériser les éléments non inversibles de la structure algébrique des nombres tricomplexes.

## 1.1 Préliminaires sur les nombres bicomplexes

Quelques éléments de base sur les nombres bicomplexes sont essentiels pour la compréhension des notions introduites concernant l'ensemble des nombres tricomplexes.

L'ensemble des nombres bicomplexes est défini comme l'ensemble

$$\mathbb{M}(2) := \{z_1 + z_2 \mathbf{i}_2 : z_1, z_2 \in \mathbb{M}(1), \mathbf{i}_2^2 = -1\}.$$

Selon les références, l'ensemble des nombres bicomplexes est noté  $\mathbb{BC}$  [Mat11, MR15] ou  $\mathbb{T}$  [Roc97, Roc00, Roc03, RS04, MR05]. Le chiffre 2 entre parenthèses dans  $\mathbb{M}(2)$  fait référence à l'indice utilisé pour la nouvelle unité imaginaire introduite. L'ensemble  $\mathbb{M}(1)$  est l'ensemble des nombres de la forme  $x + y \mathbf{i}_1$  avec  $x, y \in \mathbb{R}$  et  $\mathbf{i}_1^2 = -1$ . Une définition précise de cet ensemble est donnée à la section 2.1 du chapitre 2. En

développant les deux composantes d'un nombre bicomplexe  $w = z_1 + z_2 \mathbf{i}_2$ , ceci fournit

$$w = x_1 + x_2 \mathbf{i}_1 + x_3 \mathbf{i}_2 + x_4 \mathbf{j}_1$$

où  $\mathbf{j}_1 := \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2 = \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_1$  et  $\mathbf{j}_1^2 = 1$ . L'unité  $\mathbf{j}_1$  est nommée *hyperbolique* puisque son carré donne 1, mais  $\mathbf{j}_1 \neq 1$ . Cette dernière unité permet aussi de définir un autre ensemble à l'intérieur des nombres bicomplexes : l'ensemble des nombres hyperboliques<sup>1</sup> défini comme

$$\mathbb{D}(\mathbf{j}_1) := \{x + y \mathbf{j}_1 : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Les opérations d'égalité =, d'addition + et de multiplication · de deux nombres bicomplexes  $w_1 = z_1 + z_2 \mathbf{i}_2$  et  $w_2 = z_3 + z_4 \mathbf{i}_2$  sont définies comme ceci :

$$\begin{aligned} w_1 = w_2 &\iff z_1 = z_3 \text{ et } z_2 = z_4, \\ w_1 + w_2 &= (z_1 + z_3) + (z_2 + z_4) \mathbf{i}_2, \\ w_1 \cdot w_2 &= (z_1 z_3 - z_2 z_4) + (z_1 z_4 + z_2 z_3) \mathbf{i}_2. \end{aligned}$$

Muni de ces opérations,  $(\mathbb{M}(2), +, \cdot)$  forme un anneau commutatif avec unité. Le zéro pour l'addition est le nombre  $\mathbf{0} := 0 + 0 \mathbf{i}_2$  et l'unité pour la multiplication est  $\mathbf{1} := 1 + 0 \mathbf{i}_2$ . L'ensemble des diviseurs de zéro est exactement l'ensemble [Pri91, Mat11, Roc00]

$$\mathcal{NO}_2 := \left\{ w = z_1 + z_2 \mathbf{i}_2 \in \mathbb{M}(2) : z_1^2 + z_2^2 = 0 \right\}.$$

Il est possible de définir plusieurs types de module sur l'ensemble des nombres bicomplexes. Celui qui est utilisé dans ce travail est la norme euclidienne définie comme

$$\|w\|_2 := \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^4 x_i^2}$$

pour tout  $w \in \mathbb{M}(2)$  et  $|\cdot|$  est le module d'un nombre complexe. Si on munit  $(\mathbb{M}(2), +)$  de l'une des multiplications scalaires suivantes

$$\begin{aligned} \lambda w &= \lambda z_1 + \lambda z_2 \mathbf{i}_2 \text{ où } \lambda \in \mathbb{M}(1), \\ \text{ou } \lambda w &= \lambda x_1 + \lambda x_2 \mathbf{i}_1 + \lambda x_3 \mathbf{i}_2 + \lambda x_4 \mathbf{j}_1 \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

1. Pour obtenir davantage de détails sur les nombres hyperboliques, le lecteur est référé à [RS04, Sob95, Mor17]. À l'annexe B, un bref aperçu est aussi fait sur les nombres hyperboliques.

alors la structure  $(\mathbb{M}(2), +, \cdot, \|\cdot\|_2)$  forme respectivement un espace de Banach sur le corps des nombres complexes  $(\mathbb{M}(1), +, \cdot)$  ou le corps des nombres réels  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  standards [Mar04, Pri91]. Dans [Pri91], il est mentionné que l'espace  $\mathbb{M}(2)$  muni de toutes les opérations précédentes forme une algèbre de Banach. Cependant, ce n'est pas exactement le cas puisque la meilleure borne possible pour la norme d'un produit de deux nombres complexes  $w$  et  $s$  est

$$\|ws\|_2 \leq \sqrt{2} \|w\|_2 \|s\|_2.$$

En effet, il suffit de considérer l'élément  $\frac{1+\mathbf{j}_1}{2}$  et, dans ce cas, l'inégalité ci-dessus devient une égalité. Donc, sous toutes réserves, il est mieux d'appeler  $(\mathbb{M}(2), +, \cdot, \|\cdot\|_2)$  une *pseudo*-algèbre de Banach<sup>2</sup>.

Un nombre bicomplexe  $w \in \mathbb{M}(2)$  s'exprime, de manière unique, sous la forme suivante, appelée la *représentation idempotente* :

$$w = (z_1 - z_2 \mathbf{i}_1) \gamma_1 + (z_1 + z_2 \mathbf{i}_1) \bar{\gamma}_1 \quad (1.1)$$

où  $\gamma_1 := \frac{1+\mathbf{j}_1}{2}$  et  $\bar{\gamma}_1 := \frac{1-\mathbf{j}_1}{2}$  avec  $\gamma_1^2 = \gamma_1$ ,  $\bar{\gamma}_1^2 = \bar{\gamma}_1$ ,  $\gamma_1 \bar{\gamma}_1 = 0$  ainsi que  $\gamma_1 + \bar{\gamma}_1 = 1$ . Cette représentation est très utile puisqu'elle permet de faire les opérations composantes à composantes. Le théorème suivant démontré dans [Pri91, Mat11] résume ce fait.

**Théorème 1.1.** Soit  $w = z_1 + z_2 \mathbf{i}_2$  et  $s = s_1 + s_2 \mathbf{i}_2$  deux nombres bicomplexes quelconques. Alors,

- a)  $w \pm s = [(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1) \pm (s_1 - s_2 \mathbf{i}_1)] \gamma_1 + [(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1) \pm (s_1 + s_2 \mathbf{i}_1)] \bar{\gamma}_1.$
- b)  $w \cdot s = [(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1)(s_1 - s_2 \mathbf{i}_1)] \gamma_1 + [(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1)(s_1 + s_2 \mathbf{i}_1)] \bar{\gamma}_1.$
- c)  $w^m = (z_1 - z_2 \mathbf{i}_1)^m + (z_1 + z_2 \mathbf{i}_1)^m, \forall m = 0, 1, 2, \dots$

$$\text{d) } \|w\|_2 = \sqrt{\frac{|z_1 - \mathbf{i}_1 z_2|^2 + |z_1 + \mathbf{i}_1 z_2|^2}{2}}$$

où  $\gamma_1 = \frac{1+\mathbf{j}_1}{2}$  et  $\bar{\gamma}_1 = \frac{1-\mathbf{j}_1}{2}$ .

Enfin, la représentation idempotente permet de définir un type de produit cartésien nommé  $\mathbb{M}(2)$ -cartésien.

2. En fait, tout espace de Banach  $(X, +, \cdot, \star, \|\cdot\|)$  vérifiant une inégalité de la forme  $\|x \star y\| \leq c \|x\| \|y\|$  pour une constante  $c > 0$  peut être transformée en une algèbre de Banach [Cha08].

**Définition 1.1.** Un sous-ensemble  $X \subset \mathbb{M}(2)$  est un ensemble  $\mathbb{M}(2)$ -cartésien déterminé par  $X_1, X_2 \subset \mathbb{M}(1)$  si

$$X = X_1 \times_{\gamma_1} X_2 := \{w \in \mathbb{M}(2) : w = u_1\gamma_1 + u_2\bar{\gamma}_1, u_1 \in X_1 \text{ et } u_2 \in X_2\}.$$

**Remarques 1.** Soit les deux ensembles suivants

$$A_1 := \{z_1 - z_2\mathbf{i}_1 : z_1, z_2 \in \mathbb{M}(1)\}$$

$$\text{et } A_2 := \{z_1 + z_2\mathbf{i}_1 : z_1, z_2 \in \mathbb{M}(1)\}.$$

D'après la représentation idempotente,  $A_1 \times_{\gamma_1} A_2 = \mathbb{M}(2)$ . De plus,  $A_1$  et  $A_2$  sont des idéaux de  $\mathbb{M}(2)$  et les fonctions  $\gamma_1 : \mathbb{M}(2) \rightarrow A_1, z_1 + z_2\mathbf{i}_2 \mapsto z_1 - z_2\mathbf{i}_1$  et  $\bar{\gamma}_1 : \mathbb{M}(2) \rightarrow A_2, z_1 + z_2\mathbf{i}_2 \mapsto z_1 + z_2\mathbf{i}_1$  sont des homomorphismes d'anneaux [Pri91]. Enfin, la fonction  $\Gamma_1 : X_1 \times X_2 \rightarrow X_1 \times_{\gamma_1} X_2, (u_1, u_2) \mapsto u_1\gamma_1 + u_2\bar{\gamma}_1$  est un homéomorphisme [Roc00]. Dans ce cas, si  $X_1$  et  $X_2$  sont des ensembles connexes, il s'en suit que  $X_1 \times_{\gamma_1} X_2$  l'est aussi. ▲

Ceci nous conduit à la définition suivante. Dans cette dernière définition, on note par  $B_1(a, r)$  la boule ouverte centrée en  $a \in \mathbb{M}(1)$  de rayon  $r > 0$ .

**Définition 1.2.** Soit  $w \in \mathbb{M}(2)$  et  $r, r_1, r_2 > 0$ .

i) La **boule ouverte** centrée en  $a$  est définie par

$$B_2(w, r) := \{\zeta \in \mathbb{M}(2) : \|\zeta - w\|_2 < r\}.$$

ii) Le **disque ouvert bicomplexe** centré en  $w$  est définie par

$$D_2(w, r_1, r_2) := B_1(\gamma_1(w), r_1) \times_{\gamma_1} B_1(\bar{\gamma}_1(w), r_2).$$

iii) Le **disque fermé bicomplexe** centré en  $w$  est définie par

$$\bar{D}_2(w, r_1, r_2) := \bar{B}_1(\gamma_1(w), r_1) \times_{\gamma_1} \bar{B}_1(\bar{\gamma}_1(w), r_2).$$

Lorsque  $r := r_1 = r_2 > 0$ , alors on simplifie la notation  $D_2(w, r_1, r_2)$  (respectivement  $\bar{D}_2(w, r_1, r_2)$ ) par  $D_2(w, r)$  (respectivement  $\bar{D}_2(w, r)$ ).

## 1.2 Définitions élémentaires

L'ensemble des nombres tricomplexes est défini de manière analogue à l'ensemble des nombres bicomplexes. Il s'agit d'un processus de « *complexification* » des nombres bicomplexes. Pour accomplir ce processus, l'unité imaginaire  $\mathbf{i}_3$  telle que  $\mathbf{i}_3^2 = -1$  est introduite.

**Définition 1.3.** L'ensemble des nombres tricomplexes  $\mathbb{M}(3)$  est donc défini comme

$$\mathbb{M}(3) := \{\zeta = w_1 + w_2\mathbf{i}_3 : w_1, w_2 \in \mathbb{M}(2)\}.$$

Si  $\zeta \in \mathbb{M}(3)$ , alors  $\zeta = w_1 + w_2\mathbf{i}_3$  où  $w_1$  et  $w_2$  sont des nombres bicomplexes. Chaque nombre bicomplexe peut s'exprimer en termes de nombres complexes de  $\mathbb{M}(1)$ , c'est-à-dire  $w_1 = z_1 + z_2\mathbf{i}_2$  et  $w_2 = z_3 + z_4\mathbf{i}_2$ . Dans ce cas, le nombre  $\zeta$  peut s'écrire à l'aide de quatre composantes complexes

$$\zeta = z_1 + z_2\mathbf{i}_2 + z_3\mathbf{i}_3 + z_4\mathbf{j}_3$$

où  $\mathbf{j}_3 := \mathbf{i}_2\mathbf{i}_3 = \mathbf{i}_3\mathbf{i}_2$  et  $\mathbf{j}_3^2 = 1$ . L'unité  $\mathbf{j}_3$  est appelé *unité hyperbolique*. On peut continuer ainsi en exprimant chaque nombre complexe  $z_i$  en termes de ses composantes réelles  $z_1 = x_1 + x_2\mathbf{i}_1$ ,  $z_2 = x_3 + x_4\mathbf{i}_1$ ,  $z_3 = x_5 + x_6\mathbf{i}_1$  et  $z_4 = x_7 + x_8\mathbf{i}_1$  afin d'obtenir l'expression d'un nombre tricomplexe en termes de huit composantes réelles

$$\zeta = x_1 + x_2\mathbf{i}_1 + x_3\mathbf{i}_2 + x_4\mathbf{j}_1 + x_5\mathbf{i}_3 + x_6\mathbf{j}_2 + x_7\mathbf{j}_3 + x_8\mathbf{i}_4$$

où  $\mathbf{j}_2 := \mathbf{i}_1\mathbf{i}_3 = \mathbf{i}_3\mathbf{i}_1$ ,  $\mathbf{i}_4 = \mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$  et  $\mathbf{j}_2^2 = 1$  tandis que  $\mathbf{i}_4^2 = -1$ . La table 1.1 illustre d'une manière plus complète les relations entre les unités imaginaires et hyperboliques.

Voilà, il y a trois manières de représenter l'ensemble  $\mathbb{M}(3)$  :

a) en termes de deux composantes bicomplexes

$$\mathbb{M}(3) = \{w_1 + w_2\mathbf{i}_3 : w_1, w_2 \in \mathbb{M}(2)\};$$

b) en termes de quatre composantes complexes

$$\mathbb{M}(3) = \{z_1 + z_2\mathbf{i}_2 + z_3\mathbf{i}_3 + z_4\mathbf{j}_3 : z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{M}(1)\};$$

$\cdot$	1	$\mathbf{i}_1$	$\mathbf{i}_2$	$\mathbf{i}_3$	$\mathbf{i}_4$	$\mathbf{j}_1$	$\mathbf{j}_2$	$\mathbf{j}_3$
1	1	$\mathbf{i}_1$	$\mathbf{i}_2$	$\mathbf{i}_3$	$\mathbf{i}_4$	$\mathbf{j}_1$	$\mathbf{j}_2$	$\mathbf{j}_3$
$\mathbf{i}_1$	$\mathbf{i}_1$	$-\mathbf{1}$	$\mathbf{j}_1$	$\mathbf{j}_2$	$-\mathbf{j}_3$	$-\mathbf{i}_2$	$-\mathbf{i}_3$	$\mathbf{i}_4$
$\mathbf{i}_2$	$\mathbf{i}_2$	$\mathbf{j}_1$	$-\mathbf{1}$	$\mathbf{j}_3$	$-\mathbf{j}_2$	$-\mathbf{i}_1$	$\mathbf{i}_4$	$-\mathbf{i}_3$
$\mathbf{i}_3$	$\mathbf{i}_3$	$\mathbf{j}_2$	$\mathbf{j}_3$	$-\mathbf{1}$	$-\mathbf{j}_1$	$\mathbf{i}_4$	$-\mathbf{i}_1$	$-\mathbf{i}_2$
$\mathbf{i}_4$	$\mathbf{i}_4$	$-\mathbf{j}_3$	$-\mathbf{j}_2$	$-\mathbf{j}_1$	$-\mathbf{1}$	$\mathbf{i}_3$	$\mathbf{i}_2$	$\mathbf{i}_1$
$\mathbf{j}_1$	$\mathbf{j}_1$	$-\mathbf{i}_2$	$-\mathbf{i}_1$	$\mathbf{i}_4$	$\mathbf{i}_3$	$\mathbf{1}$	$-\mathbf{j}_3$	$-\mathbf{j}_2$
$\mathbf{j}_2$	$\mathbf{j}_2$	$-\mathbf{i}_3$	$\mathbf{i}_4$	$-\mathbf{i}_1$	$\mathbf{i}_2$	$-\mathbf{j}_3$	$\mathbf{1}$	$-\mathbf{j}_1$
$\mathbf{j}_3$	$\mathbf{j}_3$	$\mathbf{i}_4$	$-\mathbf{i}_3$	$-\mathbf{i}_2$	$\mathbf{i}_1$	$-\mathbf{j}_2$	$-\mathbf{j}_1$	$\mathbf{1}$

TABLE 1.1 – Produits des unités imaginaires tricomplexes

c) en termes de huit composantes réelles

$$\mathbb{M}(3) = \{x_1 + x_2\mathbf{i}_1 + x_3\mathbf{i}_2 + x_4\mathbf{i}_3 + x_5\mathbf{i}_4 + x_6\mathbf{j}_1 + x_7\mathbf{j}_2 + x_8\mathbf{j}_3 : \\ x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, 8\}.$$

Ces dernières représentations permettent de mettre l'espace des nombres tricomplexes en correspondance biunivoque avec les ensembles  $\mathbb{M}(2) \times \mathbb{M}(2) := \mathbb{M}^2(2)$ ,  $\mathbb{M}(1) \times \mathbb{M}(1) \times \mathbb{M}(1) \times \mathbb{M}(1) := \mathbb{M}^4(1)$  et  $\mathbb{R}^8$ . En effet, ceci est fait à partir des applications suivantes

- i)  $(w_1, w_2) \in \mathbb{M}^2(2) \mapsto w_1 + w_2\mathbf{i}_3$  ;
- ii)  $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{M}^4(1) \mapsto z_1 + z_2\mathbf{i}_2 + z_3\mathbf{i}_3 + z_4\mathbf{j}_3$  ;
- iii)  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) \in \mathbb{R}^8 \\ \mapsto x_1 + x_2\mathbf{i}_1 + x_3\mathbf{i}_2 + x_4\mathbf{i}_3 + x_5\mathbf{i}_4 + x_6\mathbf{j}_1 + x_7\mathbf{j}_2 + x_8\mathbf{j}_3.$

Il est immédiat que ces dernières applications sont des bijections.

Dans ce qui va suivre, nous introduisons des opérations sur les nombres tricomplexes comme l'égalité, la multiplication par un scalaire, l'addition, la norme et la multiplication. Par conséquent, en vue des correspondances ci-haut, il est possible d'introduire une structure algébrique et d'espace normé sur les ensembles  $\mathbb{C}^4$  ou  $\mathbb{R}^8$ .

**Définition 1.4.** Soit  $\zeta = w_1 + w_2\mathbf{i}_3$  et  $\eta = s_1 + s_2\mathbf{i}_3$ .

i) L'égalité entre deux nombres tricomplexes est définie par

$$\zeta = \eta \iff w_1 = s_1 \text{ et } w_2 = s_2.$$

ii) L'addition de deux nombres tricomplexes est la fonction  $+$  :  $\mathbb{M}(3) \times \mathbb{M}(3) \rightarrow \mathbb{M}(3)$  définie comme

$$\zeta + \eta = (w_1 + s_1) + (w_2 + s_2)\mathbf{i}_3.$$

Si les nombres tricomplexes sont donnés en termes de leurs composantes complexes, alors

$$\zeta = \eta \iff a_i = b_i \text{ pour } i = 1, 2, 3, 4$$

où

$$\zeta = a_1 + a_2\mathbf{i}_2 + a_3\mathbf{i}_3 + a_4\mathbf{j}_3 \text{ et } \eta = b_1 + b_2\mathbf{i}_2 + b_3\mathbf{i}_3 + b_4\mathbf{j}_3.$$

De plus, si les nombres tricomplexes sont donnés en termes de leurs composantes réelles, alors

$$\zeta = \eta \iff x_i = y_i \text{ pour } i = 1, 2, \dots, 8$$

où

$$\begin{aligned} \zeta &= x_1 + x_2\mathbf{i}_1 + x_3\mathbf{i}_2 + x_4\mathbf{i}_3 + x_5\mathbf{i}_4 + x_6\mathbf{j}_1 + x_7\mathbf{j}_2 + x_8\mathbf{j}_3 \text{ et} \\ \eta &= y_1 + y_2\mathbf{i}_1 + y_3\mathbf{i}_2 + y_4\mathbf{i}_3 + y_5\mathbf{i}_4 + y_6\mathbf{j}_1 + y_7\mathbf{j}_2 + y_8\mathbf{j}_3. \end{aligned}$$

Puis, l'utilisation de la même notation que précédemment permet de voir l'addition comme une addition de composantes complexes à composantes complexes

$$\zeta + \eta = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)\mathbf{i}_2 + (a_3 + b_3)\mathbf{i}_3 + (a_4 + b_4)\mathbf{j}_3$$

et de composantes réelles à composantes réelles

$$\begin{aligned} \zeta + \eta &= (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)\mathbf{i}_1 + (x_3 + y_3)\mathbf{i}_2 + (x_4 + y_4)\mathbf{i}_3 \\ &\quad + (x_5 + y_5)\mathbf{i}_4 + (x_6 + y_6)\mathbf{j}_1 + (x_7 + y_7)\mathbf{j}_2 + (x_8 + y_8)\mathbf{j}_3. \end{aligned}$$

Le théorème suivant énonce que  $(\mathbb{M}(3), +)$  forme un groupe commutatif.

**Théorème 1.2.** L'ensemble des nombres tricomplexes  $\mathbb{M}(3)$  muni de l'opération  $+$  forme un groupe commutatif.

**Démonstration.**

Il suffit de vérifier les quatre propriétés d'un groupe : la fermeture, l'associativité, l'existence d'un élément neutre et l'existence d'un inverse additif. Les deux premières se déduisent immédiatement de la définition. Le neutre additif est  $0 := 0 + 0\mathbf{i}_3$  et à chaque nombre tricomplexe  $\zeta \in \mathbb{M}(3)$ , il lui est associé son inverse additif  $-\zeta := -w_1 + (-w_2)\mathbf{i}_3$  tel que  $\zeta + (-\zeta) = 0$ .

La commutativité se déduit immédiatement de la définition et de la commutativité de l'addition des nombres bicomplexes.  $\square$

**Remarques 2.** D'après l'identification de  $\mathbb{M}^4(1) \sim \mathbb{C}^4$  et  $\mathbb{M}(3)$ , l'affirmation suivante reste légitime  $(\mathbb{M}^4(1), +) \simeq (\mathbb{M}(3), +)$  où l'addition sur  $\mathbb{M}^4(1)$  se fait composantes à composantes. De même, d'après l'identification de  $\mathbb{R}^8$  à  $\mathbb{M}(3)$ , une caractérisation similaire est obtenue en ce sens  $(\mathbb{R}^8, +) \simeq (\mathbb{M}(3), +)$  où l'addition sur  $\mathbb{R}^8$  se fait composantes à composantes.  $\blacktriangle$

Les prochaines définitions visent à munir le groupe  $(\mathbb{M}(3), +)$  d'une structure d'espace vectoriel sur le corps des nombres complexes  $\mathbb{M}(1)$  et sur le corps des nombres réels  $\mathbb{R}$ .

**Définition 1.5.** La multiplication par un scalaire complexe est définie comme la fonction

$$\begin{aligned} \odot_1 : \mathbb{M}(1) \times \mathbb{M}(3) &\rightarrow \mathbb{M}(3) \\ (\lambda, z_1 + z_2\mathbf{i}_2 + z_3\mathbf{i}_3 + z_4\mathbf{j}_3) &\mapsto \lambda z_1 + \lambda z_2\mathbf{i}_2 + \lambda z_3\mathbf{i}_3 + \lambda z_4\mathbf{j}_3. \end{aligned}$$

La multiplication par un scalaire réel est définie comme la fonction

$$\begin{aligned} \odot_0 : \mathbb{R} \times \mathbb{M}(3) &\rightarrow \mathbb{M}(3) \\ (\mu, x_1 + x_2\mathbf{i}_1 + x_3\mathbf{i}_2 + x_4\mathbf{i}_3 + x_5\mathbf{i}_4 + x_6\mathbf{j}_1 + x_7\mathbf{j}_2 + x_8\mathbf{j}_3) &\mapsto \\ \mu x_1 + \mu x_2\mathbf{i}_1 + \mu x_3\mathbf{i}_2 + \mu x_4\mathbf{i}_3 + \mu x_5\mathbf{i}_4 + \mu x_6\mathbf{j}_1 + \mu x_7\mathbf{j}_2 + \mu x_8\mathbf{j}_3. \end{aligned}$$

Muni de ces multiplication scalaires, le groupe  $(\mathbb{M}(3), +)$  est respectivement un es-

pace vectoriel complexe ou réel.

**Théorème 1.3.** Le couple  $(\mathbb{M}(3), +)$  muni de la multiplication  $\odot_1$  forme un espace vectoriel complexe. De même, le couple  $(\mathbb{M}(3), +)$  muni de la multiplication  $\odot_0$  forme un espace vectoriel réel.

**Démonstration.**

Ceci est immédiat en utilisant la correspondance entre  $\mathbb{M}(3)$  et  $\mathbb{M}^4(1)$ , ainsi que  $\mathbb{M}(3)$  et  $\mathbb{R}^8$ . En effet,  $(\mathbb{M}^4(1), +, \odot_1)$  forme un espace vectoriel complexe et  $(\mathbb{R}^8, +, \odot_0)$  forme un espace vectoriel réel. □

La définition suivante introduit une application d'une variable tricomplexe à valeurs réelles.

**Définition 1.6.** L'application  $\|\cdot\|_3 : \mathbb{M}(3) \rightarrow [0, +\infty)$  est définie comme

$$\|\zeta\|_3 := \sqrt{\|w_1\|_2^2 + \|w_2\|_2^2}.$$

**Remarque 1.** En termes des composantes complexes du nombre  $\zeta \in \mathbb{M}(3)$ , l'application  $\|\cdot\|_3$  s'écrit

$$\|\zeta\|_3 = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2}.$$

En termes des composantes réelles du nombre  $\zeta \in \mathbb{M}(3)$ , l'application  $\|\cdot\|_3$  s'écrit

$$\|\zeta\|_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2}.$$

▲

Il s'avère que cette application est une norme sur  $\mathbb{M}(3)$ . Il s'agit en fait de la norme euclidienne de  $\mathbb{M}^4(1)$  ou de  $\mathbb{R}^8$ .

**Théorème 1.4.** L'application  $\|\cdot\|_3 : \mathbb{M}(3) \rightarrow [0, +\infty)$  est une norme sur  $(\mathbb{M}(3), +, \odot_1)$  et  $(\mathbb{M}(3), +, \odot_0)$ .

**Démonstration.**

La norme correspond à la norme euclidienne sur les espaces vectoriels  $(\mathbb{M}^4(1), +, \odot_1)$  et  $(\mathbb{R}^8, +, \odot_0)$ . Le théorème s'en déduit immédiatement en raison de la correspondance entre ces espaces et l'espace des nombres tricomplexes.  $\square$

Il est bien connu qu'une norme sur un espace vectoriel induit une métrique sur cet espace. Le corollaire suivant découle directement du théorème précédent.

**Corollaire 1.1.** L'application  $d : \mathbb{M}(3) \times \mathbb{M}(3) \rightarrow [0, +\infty)$  définie par  $d(\zeta_1, \zeta_2) := \|\zeta_1 - \zeta_2\|_3$  est une métrique sur  $(\mathbb{M}(3), +, \odot_1)$  et  $(\mathbb{M}(3), +, \odot_0)$ .

Les espaces  $(\mathbb{M}(3), +, \odot_1)$  et  $(\mathbb{M}(3), +, \odot_0)$  sont donc des espaces métriques lorsqu'ils sont munis de la métrique du corollaire précédent. Ainsi, il est possible d'introduire les concepts de suite, de suite bornée, de convergence d'une suite et de suite de Cauchy.

**Définition 1.7.** i) Une **suite**  $\{\zeta_n\}_{n=1}^\infty$  est une application  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{M}(3)$ ,  $n \mapsto f(n) := \zeta_n$ .

ii) Une suite  $\{\zeta_n\}_{n=1}^\infty$  est dite **bornée** s'il existe un nombre  $M > 0$  tel que  $\|\zeta_n\|_3 \leq M$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

iii) Une suite  $\{\zeta_n\}_{n=1}^\infty$  **converge** vers un élément  $\zeta \in \mathbb{M}(3)$  si  $\forall \varepsilon > 0$ , il existe un entier positif  $N(\varepsilon)$  tel que quelque soit  $n \in \mathbb{N}$ , si  $n \geq N(\varepsilon)$  alors

$$\|\zeta_n - \zeta\|_3 < \varepsilon.$$

iv) Une **suite de Cauchy** est une suite  $\{\zeta_n\}_{n=1}^\infty$  qui a la propriété suivante : quelque soit  $\varepsilon > 0$ , il existe un entier positif  $N(\varepsilon)$  tel que pour tout entier  $n, m$ , si  $n, m \geq N(\varepsilon)$ , alors

$$\|\zeta_n - \zeta_m\|_3 < \varepsilon.$$

**Remarques 3.** Pour signifier qu'une suite  $\{\zeta_n\}_{n=1}^\infty$  converge vers un élément  $\zeta \in \mathbb{M}(3)$ , il est d'usage d'utiliser la notation avec la limite :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n = \zeta$$

ou encore la notation suivante

$$\zeta_n \rightarrow \zeta \text{ lorsque } n \rightarrow \infty.$$

▲

Selon les trois représentations connues des nombres tricomplexes, il est possible d'exprimer une suite de nombres tricomplexes comme deux suites de nombres bi-complexes, quatre suites de nombres complexes ou huit suites de nombres réels. Le théorème suivant est aisément démontré et illustre la relation étroite entre la convergence d'une suite de nombres tricomplexes et la convergence composantes à composantes.

**Théorème 1.5.** Soit  $\{\zeta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres tricomplexes. Alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n = \zeta$  si, et seulement si,

- a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} w_{1n} = w_1$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} w_{2n} = w_2$  où  $\zeta = w_1 + w_2 \mathbf{i}_3$  ;
- b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_{in} = z_i$  pour tout  $i = 1, 2, 3$  et  $4$  où  $\zeta = z_1 + z_2 \mathbf{i}_2 + z_3 \mathbf{i}_3 + z_4 \mathbf{j}_1$ .
- c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{in} = x_i$  pour tout  $i = 1, 2, \dots, 8$  où

$$\zeta = x_1 + x_2 \mathbf{i}_1 + x_3 \mathbf{i}_2 + x_4 \mathbf{i}_3 + x_5 \mathbf{i}_4 + x_6 \mathbf{j}_1 + x_7 \mathbf{j}_2 + x_8 \mathbf{j}_3.$$

**Démonstration.**

Seulement le point a) est démontré. Les points b) et c) s'effectuent de la même façon et ils sont aussi une conséquence du fait que  $(\mathbb{M}^4(1), +, \odot_1)$  et  $(\mathbb{M}(3), +, \odot_1)$  sont isomorphes ainsi que  $(\mathbb{R}^8, +, \odot_0)$  et  $(\mathbb{M}(3), +, \odot_0)$ .

Afin de montrer le point a), il suffit de remarquer que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,

$$\|w_{1n} - w_1\|_2 \leq \sqrt{\|w_{1n} - w_1\|_2^2 + \|w_{2n} - w_2\|_2^2} = \|\zeta_n - \zeta\|_3$$

et

$$\|w_{2n} - w_2\|_2 \leq \sqrt{\|w_{1n} - w_1\|_2^2 + \|w_{2n} - w_2\|_2^2} = \|\zeta_n - \zeta\|_3.$$

Donc, si  $\zeta_n \rightarrow \zeta$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ ,  $w_{1n} \rightarrow w_1$  et  $w_{2n} \rightarrow w_2$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . L'implication inverse découle de la définition de la norme  $\|\cdot\|_3$ . En effet, si  $w_{1n} \rightarrow w_1$  et  $w_{2n} \rightarrow w_2$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ , alors il existe deux entiers  $N_1(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}), N_2(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}) \in \mathbb{N}$  tels que

$$\|w_{in} - w_i\|_2 < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \text{ pour } i = 1, 2.$$

Ainsi, en utilisant la définition de la norme et lorsque  $n \geq \max \{N_1, N_2\}$ ,

$$\begin{aligned} \|\zeta_n - \zeta\|_3 &= \|(w_{1n} - w_1) + (w_{2n} - w_2)\mathbf{i}_3\|_3 \\ &= \sqrt{\|w_{1n} - w_1\|_2^2 + \|w_{2n} - w_2\|_2^2} \\ &< \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2}} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc,  $\zeta_n \rightarrow \zeta$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . □

Dans un espace métrique, toute suite convergente est une suite de Cauchy. La réciproque n'est pas toujours vérifiée généralement, c'est-à-dire que toute suite de Cauchy converge vers un élément de l'espace métrique. Cependant, lorsque c'est le cas, l'espace métrique est dit *complet*. Dans le cas particulier d'un espace vectoriel normé, l'espace métrique complet est appelé un *espace de Banach*. Pour l'ensemble des nombres tricomplexes, l'analogie entre  $\mathbb{M}^4(1)$  et  $\mathbb{R}^8$  et le théorème 1.5 permet de déduire le corollaire suivant.

**Corollaire 1.2.** Le quadruplet  $(\mathbb{M}(3), +, \odot_1, \|\cdot\|_3)$  est un espace de Banach complexe. Aussi, le quadruplet  $(\mathbb{M}(3), +, \odot_0, \|\cdot\|_3)$  est un espace de Banach réel.

Cette section se termine par une définition d'une opération de multiplication sur l'espace des nombres tricomplexes.

**Définition 1.8.** La **multiplication** est l'application  $\cdot : \mathbb{M}(3) \times \mathbb{M}(3) \rightarrow \mathbb{M}(3)$  définie par

$$(\zeta, \eta) \mapsto (w_1s_1 - w_2s_2) + (w_1s_2 + w_2s_1)\mathbf{i}_3$$

où la multiplication entre  $w_i s_j$  est celle sur les nombres bicomplexes.

En illustrant les nombres tricomplexes selon les composantes complexes, soit

$$\zeta = z_1 + z_2\mathbf{i}_2 + z_3\mathbf{i}_3 + z_4\mathbf{j}_3 \text{ et } \eta = s_1 + s_2\mathbf{i}_2 + s_3\mathbf{i}_3 + s_4\mathbf{j}_3,$$

la multiplication prend la forme suivante

$$\zeta \cdot \eta = z_1s_1 - z_2s_2 - z_3s_3 + s_4s_4 + (z_2s_1 + z_1s_2 - z_4s_3 - z_3s_4)\mathbf{i}_2$$

$$+ (z_3s_1 - z_4s_2 + z_1s_3 - z_2s_4)\mathbf{i}_3 + (z_4s_1 + z_3s_2 + z_2s_3 + z_1s_4)\mathbf{j}_3.$$

De manière similaire, en décrivant les nombres tricomplexes selon leurs composantes réelles, la multiplication prend la forme ci-dessous

$$\begin{aligned} \zeta \cdot \eta = & x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 - x_4y_4 - x_5y_5 + x_6y_6 + x_7y_7 + x_8y_8 \\ & + (x_1y_2 + x_2y_1 - x_3y_6 - x_4y_7 + x_5y_8 - x_6y_3 - x_7y_4 + x_8y_5)\mathbf{i}_1 \\ & + (x_1y_3 - x_2y_6 + x_3y_1 - x_4y_8 + x_5y_7 - x_6y_2 + x_7y_5 - x_8y_4)\mathbf{i}_2 \\ & + (x_1y_4 - x_2y_7 - x_3y_8 + x_4y_1 + x_5y_6 + x_6y_5 - x_7y_2 - x_8y_3)\mathbf{i}_3 \\ & + (x_1y_5 + x_2y_8 + x_3y_7 + x_4y_6 + x_5y_1 + x_6y_4 + x_7y_3 + x_8y_2)\mathbf{i}_4 \\ & + (x_1y_6 + x_2y_3 + x_3y_2 - x_4y_5 - x_5y_4 + x_6y_1 - x_7y_8 - x_8y_7)\mathbf{j}_1 \\ & + (x_1y_7 + x_2y_4 - x_3y_5 + x_4y_2 - x_5y_3 - x_6y_8 + x_7y_1 - x_8y_6)\mathbf{j}_2 \\ & + (x_1y_8 - x_2y_5 + x_3y_4 + x_4y_3 - x_5y_2 - x_6y_7 - x_7y_6 + x_8y_1)\mathbf{j}_3. \end{aligned} \quad (1.2)$$

En effet, il suffit de multiplier les deux nombres en les considérant comme des polynômes et ensuite d'utiliser les règles de multiplication des unités imaginaires de la table 1.1 afin de regrouper tout ce qui est commun à une composante. Bref, muni de cette dernière opération de multiplication, le triplet  $(\mathbb{M}(3), +, \cdot)$  forme une structure particulière.

**Théorème 1.6.** Le triplet  $(\mathbb{M}(3), +, \cdot)$  forme un anneau commutatif avec unité et diviseurs de zéros.

**Démonstration.**

D'après le théorème 1.2,  $(\mathbb{M}(3), +)$  forme un groupe. Il reste à démontrer que la multiplication est associative, commutative, distributive à gauche sur l'addition et possède une unité.

Soit  $a = a_1 + a_2\mathbf{i}_3$ ,  $b = b_1 + b_2\mathbf{i}_3$  et  $c = c_1 + c_2\mathbf{i}_3$  trois nombres tricomplexes. L'associativité est la première propriété à vérifier. Un calcul immédiat fournit

$$\begin{aligned} (a \cdot b) \cdot c = & a_1b_1c_1 + a_2b_2c_1 - a_1b_2c_2 - a_2b_1c_2 \\ & + (a_1b_1c_2 - a_2b_2c_2 + a_1b_2c_1 + a_2b_1c_1)\mathbf{i}_3 = a \cdot (b \cdot c) \end{aligned}$$

en vertu des propriétés de la multiplication sur les nombres bicomplexes. La commutativité se déduit immédiatement de la commutativité de la multiplication sur les

nombres bicomplexes. Pour la propriété de distributivité à gauche, les propriétés de l'addition et de la multiplication sur les nombres bicomplexes sont sous-entendues dans le calcul suivant

$$\begin{aligned} a \cdot (b + c) &= a_1(b_1 + c_1) - a_2(b_2 + c_2) + [a_1(b_2 + c_2) + a_2(b_1 + c_1)] \mathbf{i}_3 \\ &= a_1b_1 - a_2b_2 + (a_1b_2 + a_2b_1)\mathbf{i}_3 + a_1c_1 - a_2c_2 + (a_1c_2 + a_2c_1)\mathbf{i}_3 \\ &= a \cdot b + a \cdot c. \end{aligned}$$

L'unité pour la multiplication est l'élément  $1 := 1 + 0\mathbf{i}_3$ .

Pour illustrer l'existence de diviseurs de zéro, il faut observer que  $\gamma_1 \cdot \overline{\gamma_1} = 0$  où  $\gamma_1 = \frac{1+\mathbf{j}_1}{2}$  et  $\overline{\gamma_1} = \frac{1-\mathbf{j}_1}{2}$ .  $\square$

**Remarque 2.** L'ensemble des éléments inversibles est noté  $\mathbb{M}^{-1}(3)$ . À la section 1.4, une caractérisation plus précise de ces éléments est donnée à partir de l'ensemble des éléments non inversibles  $\mathcal{NO}_3$ .  $\blacktriangle$

Le théorème suivant montre la relation entre la multiplication et la norme introduite précédemment sur les nombres tricomplexes.

**Théorème 1.7.** Soit  $\zeta = w_1 + w_2\mathbf{i}_3$  et  $\eta = s_1 + s_2\mathbf{i}_3$  des nombres tricomplexes.

Alors

- a)  $\|c\zeta\|_3 \leq \sqrt{2}\|c\|_2\|\zeta\|_3$  pour tout nombre  $c \in \mathbb{M}(2)$  ;
- b)  $\|c\zeta\|_3 = |c|\|\zeta\|_3$  pour tout nombre  $c \in \mathbb{M}(1)$  ;
- c)  $\|c\zeta\|_3 = |c|\|\zeta\|_3$  pour tout nombre  $c \in \mathbb{R}$  ;
- d)  $\|\zeta \cdot \eta\|_3 \leq 2\|\zeta\|_3\|\eta\|_3$ .

**Démonstration.**

Le point a) est montré. Les points b) et c) est une conséquence des propriétés de la norme sur les espaces  $(\mathbb{M}(3), +, \odot_1, \|\cdot\|_3)$  et  $(\mathbb{M}(3), +, \odot_0, \|\cdot\|_3)$ . Enfin, le point d) est démontré.

a) Soit  $c \in \mathbb{M}(2)$ . Alors,  $c = c + 0\mathbf{i}_3$  et ainsi

$$c\zeta = cw_1 + cw_2\mathbf{i}_3.$$

Dans ce cas, comme  $\|ws\|_2 \leq \sqrt{2}\|w\|_2\|s\|_2$  pour tout  $w, s \in \mathbb{M}(2)$ , il s'en suit que

$$\|c\zeta\|_3^2 = \|cw_1\|_2^2 + \|cw_2\|_2^2$$

$$\begin{aligned} &\leq 2 \left( \|c\|_2^2 \|w_1\|_2^2 + \|c\|_2^2 \|w_2\|_2^2 \right) \\ &= 2 \|c\|_2^2 \|\zeta\|_3^2. \end{aligned}$$

d) D'abord, la multiplication  $\zeta \cdot \eta$  s'exprime aussi comme ceci

$$\zeta \cdot \eta = w_1(s_1 + s_2 \mathbf{i}_3) + w_2 \mathbf{i}_3(s_1 + s_2 \mathbf{i}_3)$$

et ainsi, par les propriétés de la norme,

$$\|\zeta \cdot \eta\|_3 \leq \|w_1(s_1 + s_2 \mathbf{i}_3)\|_3 + \|w_2 \mathbf{i}_3(s_1 + s_2 \mathbf{i}_3)\|_3.$$

Il faut remarquer que  $\|\mathbf{i}_3 \eta\|_3 = \|\eta\|_3$ . Ainsi, d'après a), il est possible de déduire que

$$\|w_1(s_1 + s_2 \mathbf{i}_3)\|_3 + \|w_2 \mathbf{i}_3(s_1 + s_2 \mathbf{i}_3)\|_3 \leq \sqrt{2} (\|w_1\|_2 + \|w_2\|_2) \|\eta\|_3.$$

Rappelons pour les besoins l'*inégalité de Cauchy-Schwartz* : quelques soit  $a_1, a_2, \dots, a_n$  et  $b_1, b_2, \dots, b_n$  des nombres réels

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{1/2}.$$

En prenant  $n = 2$ ,  $a_1 = a_2 = 1$  ainsi que  $b_1 = \|w_1\|_2$  et  $b_2 = \|w_2\|_2$ , alors

$$\|w_1\|_2 + \|w_2\|_2 \leq \sqrt{2} \sqrt{\|w_1\|_2^2 + \|w_2\|_2^2}.$$

Donc, on déduit l'inégalité voulue :

$$\|\zeta \cdot \eta\|_3 \leq \sqrt{2} (\|w_1\|_2 + \|w_2\|_2) \|\eta\|_3 \leq 2 \|\zeta\|_3 \|\eta\|_3.$$

□

**Remarque 3.** La constante du point d) du théorème précédent est la meilleure possible. En effet, en considérant l'élément

$$\gamma := 1 + \mathbf{j}_1 - \mathbf{j}_2 + \mathbf{j}_3,$$

un calcul fournit

$$\gamma^2 = 4\gamma, \|\gamma\|_3 = 2 \text{ et } \|\gamma \cdot \gamma\|_3 = 2\|\gamma\|_3\|\gamma\|_3.$$

▲

Tout espace de Banach  $(X, +, \odot, \| \cdot \|)$  sur le corps  $\mathbb{K} := \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{M}(1)$  muni d'une opération supplémentaire  $\cdot$  (omit dans ce qui suit) qui respecte les conditions suivantes

- i) associativité :  $x(yz) = (xy)z \forall x, y, z \in X$  ;
- ii) distributivité à gauche :  $x(y + z) = xy + xz$  pour tout  $x, y, z \in X$  ;
- iii) distributivité à droite :  $(y + z)x = yx + zx$  pour tout  $x, y, z \in X$  ;
- iv) distributivité d'un scalaire :  $\lambda(xy) = x(\lambda y) = (\lambda x)y$  pour tout  $x, y \in X$  et tout  $\lambda \in \mathbb{K}$  ;
- v) sous-multiplicativité :  $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$  pour tout  $x, y \in X$

est appelé une *algèbre de Banach*. Lorsque l'algèbre de Banach en question possède un élément unité  $\mathbf{1}$  pour la multiplication et que  $\|\mathbf{1}\| = \mathbf{1}$ , alors elle est appelée *algèbre de Banach unitaire*. Lorsque la multiplication est commutative, alors la structure est appelée une *algèbre de Banach commutative*. Malheureusement, comme pour le cas des nombres bicomplexes, le théorème 1.7 ne permet pas de conclure que  $(\mathbb{M}(3), +, \odot_1, \cdot, \| \cdot \|_3)$  forme une algèbre de Banach sur le corps des complexes. Du moins, il est toujours possible de construire une norme  $\| \cdot \|'$  équivalente à la norme  $\| \cdot \|_3$  qui transforme l'espace des nombres tricomplexes en algèbre de Banach unitaire [Cha08]. Voici un résultat dans cette direction.

**Proposition 1.1.** Soit  $(X, +, \odot, \cdot, \| \cdot \|)$  un espace de Banach avec la propriété suivante : il existe un nombre positif  $c > 0$  tel que  $\|x \cdot y\| \leq c\|x\|\|y\|$  pour tout  $x, y \in X$ . Alors, il existe une norme  $\| \cdot \|' : X \rightarrow [0, +\infty)$  qui transforme l'espace de Banach en une algèbre de Banach.

**Démonstration.**

Supposons que la propriété de la proposition soit satisfaite, c'est-à-dire qu'il existe une constante  $c > 0$  telle que  $\|x \cdot y\| \leq c\|x\|\|y\|$  pour tout  $x, y \in X$ . Introduisons la fonction suivante

$$\| \cdot \|' : X \rightarrow [0, +\infty), x \mapsto \|x\|' := c\|x\|.$$

Toutes les propriétés d'une norme sont évidemment vérifiées et les normes  $\| \cdot \|', \| \cdot \|$  sont équivalentes dans le sens qu'il existe des constantes  $M_1, M_2 > 0$  telles que

$$M_1\|x\|' \leq \|x\| \leq M_2\|x\|'.$$

En fait,  $M_1 = M_2 = \frac{1}{c}$  puisque  $\|x\| = \frac{1}{c}\|x\|'$ . Ainsi,  $(X, +, \cdot, \star, \|\cdot\|')$  est un espace de Banach. Enfin, on trouve que

$$\|x \cdot y\|' = c\|x \cdot y\| \leq c^2\|x\|\|y\| = \|x\|'\|y\|'.$$

Ceci démontre que  $(X, +, \odot, \cdot, \|\cdot\|')$  est une algèbre de Banach.  $\square$

**Remarque 4.** Remarquons que  $\|\mathbf{1}\|' = c\|\mathbf{1}\| = c$ . Dans l'ouvrage de W. Rudin [Rud87, chap. 18], la définition d'une algèbre de Banach unitaire n'exige pas que  $\|\mathbf{1}\| = 1$  où  $\mathbf{1}$  est l'élément neutre pour la multiplication. En fait, on peut montrer que  $\|\mathbf{1}\| \geq 1$  dans une algèbre de Banach qui possède un élément neutre  $\mathbf{1}$  pour la multiplication. Donc, de ce point de vu, on peut affirmer que l'algèbre des nombres tricomplexes est une algèbre de Banach unitaire.  $\blacktriangle$

### 1.3 Représentation idempotente

À la section 1.1, une représentation particulière et pratique des nombres bicomplexes a été présentée. Il s'agit de la représentation idempotente :

$$w = (z_1 - z_2\mathbf{i}_1)\gamma_1 + (z_1 + z_2\mathbf{i}_1)\overline{\gamma}_1 \quad w \in \mathbb{M}(2).$$

Cette représentation se compose d'éléments singuliers : les éléments  $\gamma_1$  et  $\overline{\gamma}_1$ .

**Définition 1.9.** Un élément  $\zeta \in \mathbb{M}(3)$  est un élément **idempotent** si  $\zeta \cdot \zeta = \zeta$ .

Ainsi, les éléments  $\gamma_1$  et  $\overline{\gamma}_1$  sont des éléments idempotents pour les nombres bicomplexes (voir (1.1) de la section 1.1).

Les nombres tricomplexes ont une représentation similaire en termes d'éléments appelés *idempotents*. Avant de présenter cette représentation, certains sous-ensembles d'éléments sont introduits. Le premier ensemble consiste en deux éléments :

$$S_3 := \{\gamma_3, \overline{\gamma}_3\}$$

où  $\gamma_3 := \frac{1+\mathbf{j}_3}{2}$  et  $\overline{\gamma}_3 := \frac{1-\mathbf{j}_3}{2}$ . Le deuxième ensemble est constitué de tous les éléments de l'ensemble  $S_3$  multiplié par l'élément  $\gamma_1$  et de tous les éléments de l'ensemble  $S_3$  multiplié par  $\overline{\gamma}_1$  :

$$S_{1,3} := \gamma_1 S_3 \cup \overline{\gamma}_1 S_3 = \{\gamma_1 \cdot \gamma_3, \gamma_1 \cdot \overline{\gamma}_3, \overline{\gamma}_1 \cdot \gamma_3, \overline{\gamma}_1 \cdot \overline{\gamma}_3\}.$$

Ceux-ci permettent de repérer certains éléments idempotents qui sont importants dans l'ensemble des nombres tricomplexes.

**Proposition 1.2.** Les éléments  $\gamma_3, \bar{\gamma}_3 \in S_3$  satisfont les énoncés suivants :

- a) ce sont des éléments idempotents :  $\gamma_3 \cdot \gamma_3 = \gamma_3, \bar{\gamma}_3 \cdot \bar{\gamma}_3 = \bar{\gamma}_3$  ;
- b)  $\gamma_3 \cdot \bar{\gamma}_3 = 0$  ;
- c)  $\gamma_3 + \bar{\gamma}_3 = 1$ .

**Démonstration.**

La démonstration se base essentiellement sur les définitions de la multiplication.

- a) La vérification de la première propriété est vérifiée en effectuant un calcul direct. De la définition des éléments de  $S_3$ ,

$$\begin{aligned}\gamma_3 \cdot \gamma_3 &= \frac{1 + \mathbf{j}_2}{2} \cdot \frac{1 + \mathbf{j}_2}{2} \\ &= \frac{1 + 2\mathbf{j}_2 + \mathbf{j}_2^2}{4} \\ &= \frac{1 + \mathbf{j}_2}{2} = \gamma_3\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}_3 \cdot \bar{\gamma}_3 &= \frac{1 - \mathbf{j}_2}{2} \cdot \frac{1 - \mathbf{j}_2}{2} \\ &= \frac{1 - 2\mathbf{j}_2 + \mathbf{j}_2^2}{4} \\ &= \frac{1 - \mathbf{j}_2}{2} = \bar{\gamma}_3.\end{aligned}$$

- b) Par un calcul similaire, on obtient

$$\begin{aligned}\gamma_3 \cdot \bar{\gamma}_3 &= \frac{1 + \mathbf{j}_2}{2} \cdot \frac{1 - \mathbf{j}_2}{2} \\ &= \frac{1 - \mathbf{j}_2 + \mathbf{j}_2 - \mathbf{j}_2^2}{4} \\ &= 0.\end{aligned}$$

- c) Enfin, par la définition de l'addition, ceci fournit

$$\begin{aligned}\gamma_3 + \bar{\gamma}_3 &= \frac{1 + \mathbf{j}_2}{2} + \frac{1 - \mathbf{j}_2}{2} \\ &= \frac{2}{2} = 1.\end{aligned}$$

□

**Proposition 1.3.** Les éléments de  $S_{1,3}$  satisfont les énoncés suivants :

- a) ce sont des éléments idempotents :  $(\gamma_1 \cdot \gamma_3)^2 = \gamma_1 \cdot \gamma_3$ ,  $(\gamma_1 \cdot \bar{\gamma}_3)^2 = \gamma_1 \cdot \bar{\gamma}_3$ ,  
 $(\bar{\gamma}_1 \cdot \gamma_3)^2 = \bar{\gamma}_1 \cdot \gamma_3$  et  $(\bar{\gamma}_1 \cdot \bar{\gamma}_3)^2 = \bar{\gamma}_1 \cdot \bar{\gamma}_3$  ;
- b)  $\forall \gamma, \alpha \in S_{1,3}$  avec  $\gamma \neq \alpha$ ,  $\gamma \cdot \alpha = 0$  ;
- c)  $\gamma_1 \cdot \gamma_3 + \gamma_1 \cdot \bar{\gamma}_3 + \bar{\gamma}_1 \cdot \gamma_3 + \bar{\gamma}_1 \cdot \bar{\gamma}_3 = 1$ .

**Remarque 5.** Les éléments de  $S_{1,3}$  prennent les formes suivantes :

$$\begin{aligned} \gamma_1 \cdot \gamma_3 &= \frac{1 + \mathbf{j}_1 - \mathbf{j}_2 + \mathbf{j}_3}{4}, & \gamma_1 \cdot \bar{\gamma}_3 &= \frac{1 + \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2 - \mathbf{j}_3}{4} \\ \bar{\gamma}_1 \cdot \gamma_3 &= \frac{1 - \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2 + \mathbf{j}_3}{4}, & \bar{\gamma}_1 \cdot \bar{\gamma}_3 &= \frac{1 - \mathbf{j}_1 - \mathbf{j}_2 - \mathbf{j}_3}{4}. \end{aligned}$$

▲

**Démonstration.**

D'abord, comme la multiplication est commutative, on a que

$$\gamma_1 \gamma_3 \gamma_1 \gamma_3 = \gamma_1^2 \gamma_3^2 = \gamma_1 \gamma_3$$

puisque les éléments  $\gamma_1$  et  $\gamma_3$  sont idempotents. On procède de même pour les autres éléments de l'ensemble  $S_{1,3}$ . Ceci montre le point a).

Pour le point b), il suffit d'utiliser la commutativité de la multiplication et le fait que

$$\gamma_1 \bar{\gamma}_1 = \gamma_3 \bar{\gamma}_3 = 0.$$

Pour le point c), il s'agit d'un calcul direct. □

À partir des éléments de l'ensemble  $S_3$ , il est possible de fournir la représentation idempotente d'un nombre tricomplexe.

**Théorème 1.8.** Soit  $\zeta \in \mathbb{M}(3)$  un nombre tricomplexe tel que  $\zeta = w_1 + w_2 \mathbf{i}_3$ . Alors

$$\zeta = (w_1 - w_2 \mathbf{i}_2) \gamma_3 + (w_1 + w_2 \mathbf{i}_2) \bar{\gamma}_3.$$

**Démonstration.**

Il suffit de partir du membre de droite de l'égalité. On a

$$\begin{aligned} (w_1 - w_2\mathbf{i}_2)\gamma_3 + (w_1 + w_2\mathbf{i}_2)\overline{\gamma}_3 &= \frac{w_1 + w_1\mathbf{j}_3 - w_2\mathbf{i}_2 + w_2\mathbf{i}_3}{2} + \frac{w_1 - w_1\mathbf{j}_3 + w_2\mathbf{i}_2 + w_2\mathbf{i}_3}{2} \\ &= w_1 + w_2\mathbf{i}_3 = \zeta. \end{aligned}$$

□

La représentation idempotente est utile pour faciliter l'opération de multiplication. Il est aussi possible de calculer la norme d'un nombre tricomplexe à partir des composantes de sa représentation idempotente. Le théorème suivant résume les conséquences que la représentation idempotente a sur les opérations définies sur les nombres tricomplexes.

**Théorème 1.9.** Soit  $\zeta = w_1 + w_2\mathbf{i}_3$  et  $\eta = s_1 + s_2\mathbf{i}_3$  deux nombres tricomplexes quelconques. Alors,

- a)  $\zeta = 0$ , si et seulement si  $w_1 - w_2\mathbf{i}_2 = 0$  et  $w_1 + w_2\mathbf{i}_2 = 0$ .
- b)  $\zeta \pm \eta = [(w_1 - w_2\mathbf{i}_2) \pm (s_1 - s_2\mathbf{i}_2)]\gamma_3 + [(w_1 + w_2\mathbf{i}_2) \pm (s_1 + s_2\mathbf{i}_2)]\overline{\gamma}_3$ ;
- c)  $\zeta \cdot \eta = [(w_1 - w_2\mathbf{i}_2)(s_1 - s_2\mathbf{i}_2)]\gamma_3 + [(w_1 + w_2\mathbf{i}_2)(s_1 + s_2\mathbf{i}_2)]\overline{\gamma}_3$ ;
- d) Si  $\eta \notin \mathcal{NO}_3$ , alors

$$\eta^{-1} = \left( \frac{1}{s_1 - s_2\mathbf{i}_2} \right) \gamma_3 + \left( \frac{1}{s_1 + s_2\mathbf{i}_2} \right) \overline{\gamma}_3;$$

$$\text{e) } \|\zeta\|_3 = \sqrt{\frac{\|w_1 - w_2\mathbf{i}_2\|_2^2 + \|w_1 + w_2\mathbf{i}_2\|_2^2}{2}};$$

où  $\mathcal{NO}_3$  est l'ensemble des éléments non inversibles de  $\mathbb{M}(3)$ .

**Démonstration.**

Soit  $\zeta = w_1 + w_2\mathbf{i}_3$  et  $\eta = s_1 + s_2\mathbf{i}_3$ . Les points a) et b) sont évidents.

(c) La représentation idempotent du nombre  $\zeta \cdot \eta$  est

$$[(w_1s_1 - w_2s_2) - (w_1s_2 + w_2s_1)\mathbf{i}_2]\gamma_2 + [(w_1s_1 - w_2s_2) + (w_1s_2 + w_2s_1)\mathbf{i}_2]\overline{\gamma}_3.$$

On remarque que

$$(w_1s_1 - w_2s_2) - (w_1s_2 + w_2s_1)\mathbf{i}_2 = w_1(s_1 - s_2\mathbf{i}_2) - w_2\mathbf{i}_2(s_1 - s_2\mathbf{i}_2)$$

$$= (w_1 - w_2 \mathbf{i}_2)(s_1 - s_2 \mathbf{i}_2).$$

De même, on remarque que

$$(w_1 s_1 - w_2 s_2) + (w_1 s_2 + w_2 s_1) \mathbf{i}_2 = (w_1 + w_2 \mathbf{i}_2)(s_1 + s_2 \mathbf{i}_2).$$

Par conséquent, on obtient bien

$$\zeta \cdot \eta = [(w_1 - w_2 \mathbf{i}_2)(s_1 - s_2 \mathbf{i}_2)] \gamma_3 + [(w_1 + w_2 \mathbf{i}_2)(s_1 + s_2 \mathbf{i}_2)] \overline{\gamma}_3.$$

- (d) Supposons que  $\eta \notin \mathcal{NO}_3$ . Dans ce cas,  $s_1 - s_2 \mathbf{i}_2 \notin \mathcal{NO}_2$  et  $s_1 + s_2 \mathbf{i}_2 \notin \mathcal{NO}_2$  (voir [Pri91, cor. 46.10, p.329]) et  $\eta \eta^{-1} = 1 = 1\gamma_3 + 1\overline{\gamma}_3$ . Notons par  $h_1$  la composante idempotente selon  $\gamma_3$  et  $h_2$  la composante idempotente selon  $\overline{\gamma}_3$  du nombre  $\eta^{-1}$ . Alors, nous obtenons, d'après les points a), b) et c), que

$$(s_1 - s_2 \mathbf{i}_2)h_1 = 1 \text{ et } (s_1 + s_2 \mathbf{i}_2)h_2 = 1.$$

Donc, comme  $s_1 - s_2 \mathbf{i}_2$  et  $s_1 + s_2 \mathbf{i}_2$  sont des nombres bicomplexes inversibles, on a que  $h_1 = (s_1 - s_2 \mathbf{i}_2)^{-1}$  et que  $h_2 = (s_1 + s_2 \mathbf{i}_2)^{-1}$ .

- (e) D'abord, écrivons chaque composante de  $\zeta$  sous forme complexe :

$$w_1 = z_1 + z_2 \mathbf{i}_2 \text{ et } w_2 = z_3 + z_4 \mathbf{i}_2.$$

Alors, chaque composante idempotente du nombre  $\zeta$  s'écrivent de la manière suivante

$$\begin{aligned} w_1 - w_2 \mathbf{i}_2 &= (z_1 + z_4) + (z_2 - z_3) \mathbf{i}_2 \\ w_1 + w_2 \mathbf{i}_2 &= (z_1 - z_4) + (z_2 + z_3) \mathbf{i}_2. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\|w_1 - w_2 \mathbf{i}_2\|_2^2 = |z_1 + z_4|^2 + |z_2 - z_3|^2 \text{ et } \|w_1 + w_2 \mathbf{i}_2\|_2^2 = |z_1 - z_4|^2 + |z_2 + z_3|^2.$$

Par conséquent, d'après les propriétés du module d'un nombre complexe, en particulier  $|z|^2 = z\overline{z}$  où  $\overline{z} = x - y\mathbf{i}_1$ , on obtient

$$\begin{aligned} \|w_1 - w_2 \mathbf{i}_2\|_2^2 + \|w_1 + w_2 \mathbf{i}_2\|_2^2 &= |z_1 + z_4|^2 + |z_2 - z_3|^2 + |z_1 - z_4|^2 + |z_2 + z_3|^2 \\ &= (z_1 + z_4)(\overline{z_1} + \overline{z_4}) + (z_2 - z_3)(\overline{z_2} - \overline{z_3}) + \\ &\quad (z_1 - z_4)(\overline{z_1} - \overline{z_4}) + (z_2 + z_3)(\overline{z_2} + \overline{z_3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2) \\
 &= 2\|\zeta\|_3^2.
 \end{aligned}$$

Par conséquent, on aboutit à la formule de l'énoncé :

$$\|\eta\|_3 = \sqrt{\frac{\|w_1 - w_2\mathbf{i}_2\|_2^2 + \|w_1 + w_2\mathbf{i}_2\|_2^2}{2}}.$$

□

À la section 1.2, quelques notions sur les suites de nombres tricomplexes ont été introduites. Le point (d) du théorème 1.9 montre que la norme  $\|\cdot\|_3$  d'un nombre tricomplexe peut s'exprimer comme la norme  $\|\cdot\|_2$  de ses composantes bicomplexes. Ainsi, un corollaire sur certaines propriétés d'une suite de nombres tricomplexes se déduit du dernier théorème.

**Corollaire 1.3.** Soit  $\{\zeta_n\}_{n=1}^\infty$  une suite de nombres tricomplexes telle que  $\zeta_n = w_{1n} + w_{2n}\mathbf{i}_3$  pour chaque  $n$  et soit  $\zeta = w_1 + w_2\mathbf{i}_3 \in \mathbb{M}(3)$ . Alors

- a) La suite  $\{\zeta_n\}_{n=1}^\infty$  est bornée si et seulement si les suites  $\{w_{1n} - w_{2n}\mathbf{i}_2\}_{n=1}^\infty$  et  $\{w_{1n} + w_{2n}\mathbf{i}_2\}_{n=1}^\infty$  sont bornées.
- b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n = \zeta$  si et seulement si  $\lim_{n \rightarrow \infty} (w_{1n} - w_{2n}\mathbf{i}_2) = w_1 - w_2\mathbf{i}_2$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} (w_{1n} + w_{2n}\mathbf{i}_2) = w_1 + w_2\mathbf{i}_2$ .

**Démonstration.**

(a) Si  $\{\zeta_n\}_{n=1}^\infty$  est bornée, alors il existe un nombre  $M > 0$  tel que

$$\|\zeta_n\|_3 \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Par le théorème 1.9,

$$\|w_{1n} \pm w_{2n}\mathbf{i}_2\|_2 \leq \sqrt{2}\|\zeta_n\|_3 \leq \sqrt{2}M$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Donc, les suites  $\{w_{1n} - w_{2n}\mathbf{i}_2\}_{n=1}^\infty$  et  $\{w_{1n} + w_{2n}\mathbf{i}_2\}_{n=1}^\infty$  sont bornées.

Réciproquement, si les suites  $\{w_{1n} - w_{2n}\mathbf{i}_2\}_{n=1}^\infty$  et  $\{w_{1n} + w_{2n}\mathbf{i}_2\}_{n=1}^\infty$  sont bornées, alors il existe deux constantes  $M_1, M_2 > 0$  telles que

$$\|w_{1n} - w_{2n}\mathbf{i}_2\|_2 \leq M_1 \text{ et } \|w_{1n} + w_{2n}\mathbf{i}_2\|_2 \leq M_2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Soit  $M := \max \{M_1, M_2\}$ . Alors, par le théorème 1.9, il s'en suit que

$$\|\zeta_n\|_3 \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Par conséquent, la suite  $\{\zeta_n\}_{n=1}^\infty$  est bornée.

(b) Soit  $\varepsilon > 0$ . Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n = \zeta$ , alors il existe un entier  $N(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}) \in \mathbb{N}$  tel que  $\|\zeta_n - \zeta\|_3 < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ . Par le théorème 1.8, les nombres  $\zeta_n$  et  $\zeta$  se représentent comme

$$\begin{aligned} \zeta_n &= (w_{1n} - w_{2n}\mathbf{i}_2) \gamma_3 + (w_{1n} + w_{2n}\mathbf{i}_2) \bar{\gamma}_3 \quad \text{et} \\ \zeta &= (w_1 - w_2\mathbf{i}_2) \gamma_3 + (w_1 + w_2\mathbf{i}_2) \bar{\gamma}_3. \end{aligned}$$

Par le théorème 1.9, on en déduit que

$$\zeta_n - \zeta = ((w_{1n} - w_{2n}\mathbf{i}_2) - (w_1 - w_2\mathbf{i}_2)) \gamma_3 + ((w_{1n} + w_{2n}\mathbf{i}_2) - (w_1 + w_2\mathbf{i}_2)) \bar{\gamma}_3.$$

Ainsi, une autre application du théorème 1.9 fournit

$$\|\zeta_n - \zeta\|_3 = \sqrt{\frac{\|(w_{1n} - w_{2n}\mathbf{i}_2) - (w_1 - w_2\mathbf{i}_2)\|_2^2 + \|(w_{1n} + w_{2n}\mathbf{i}_2) - (w_1 + w_2\mathbf{i}_2)\|_2^2}{2}}$$

et donc

$$\begin{aligned} \|(w_{1n} - w_{2n}\mathbf{i}_2) - (w_1 - w_2\mathbf{i}_2)\|_2 &\leq \sqrt{2} \|\zeta_n - \zeta\|_3 < \varepsilon, \\ \|(w_{1n} + w_{2n}\mathbf{i}_2) - (w_1 + w_2\mathbf{i}_2)\|_2 &\leq \sqrt{2} \|\zeta_n - \zeta\|_3 < \varepsilon \end{aligned}$$

pour tout  $n \geq N_\varepsilon$ . Par conséquent,  $\lim_{n \rightarrow \infty} w_{1n} - w_{2n}\mathbf{i}_2 = w_1 - w_2\mathbf{i}_2$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} w_{1n} + w_{2n}\mathbf{i}_2 = w_1 + w_2\mathbf{i}_2$ .

Réciproquement, si  $\lim_{n \rightarrow \infty} w_{1n} - w_{2n}\mathbf{i}_2 = w_1 - w_2\mathbf{i}_2$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} w_{1n} + w_{2n}\mathbf{i}_2 = w_1 + w_2\mathbf{i}_2$ , alors il existe deux entiers naturels  $N_1(\varepsilon)$  et  $N_2(\varepsilon)$  tels que

$$\|(w_{1n} - w_{2n}\mathbf{i}_2) - (w_1 - w_2\mathbf{i}_2)\|_2 < \varepsilon$$

pour tout  $n \geq N_1$  et

$$\|(w_{1m} + w_{2m}\mathbf{i}_2) - (w_1 + w_2\mathbf{i}_2)\|_2 < \varepsilon$$

pour tout entier  $m \geq N_2$ . Soit  $N := \max \{N_1, N_2\}$ . Alors, pour tout entier  $n \geq N$ , le théorème 1.9 fournit

$$\|\zeta_n - \zeta\|_3 < \varepsilon.$$

Donc,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n = \zeta$ . □

Il est possible, à partir des éléments de l'ensemble  $S_{1,3}$ , d'obtenir une deuxième représentation d'un nombre tricomplexe.

**Théorème 1.10.** Soit  $\zeta \in \mathbb{M}(3)$  tel que  $\zeta = z_1 + z_2\mathbf{i}_2 + z_3\mathbf{i}_3 + z_4\mathbf{j}_3$  où chaque  $z_i$  est un nombre complexe. Alors,

$$\zeta = [(z_1 + z_4) - (z_2 - z_3)\mathbf{i}_1] \gamma_1 \gamma_3 + [(z_1 + z_4) + (z_2 - z_3)\mathbf{i}_1] \overline{\gamma_1} \gamma_3 \\ + [(z_1 - z_4) - (z_2 + z_3)\mathbf{i}_1] \gamma_1 \overline{\gamma_3} + [(z_1 - z_4) + (z_2 + z_3)\mathbf{i}_1] \overline{\gamma_1} \overline{\gamma_3}.$$

**Démonstration.**

Le nombre  $\zeta$  peut se réécrire

$$\zeta = (z_1 + z_2\mathbf{i}_2) + (z_3 + z_4\mathbf{i}_2)\mathbf{i}_3 = w_1 + w_2\mathbf{i}_3$$

où  $w_1, w_2 \in \mathbb{M}(2)$ . D'après le théorème 1.8, le nombre  $\zeta$  peut-être représenté sur les éléments  $\gamma_3$  et  $\overline{\gamma_3}$  comme ceci

$$\zeta = (w_1 - w_2\mathbf{i}_2) \gamma_3 + (w_1 + w_2\mathbf{i}_2) \overline{\gamma_3}.$$

Cependant, les composantes idempotentes sont des nombres bicomplexes et ces dernières se représentent sur la base idempotente  $\gamma_1$  et  $\overline{\gamma_1}$ . On a

$$w_1 - w_2\mathbf{i}_2 = (z_1 + z_4) + (z_2 - z_3)\mathbf{i}_2$$

et

$$w_1 + w_2\mathbf{i}_2 = (z_1 - z_4) + (z_2 + z_3)\mathbf{i}_2.$$

Ainsi,

$$w_1 - w_2\mathbf{i}_2 = [(z_1 + z_4) - (z_2 - z_3)\mathbf{i}_1] \gamma_1 + [(z_1 + z_4) + (z_2 - z_3)\mathbf{i}_1] \overline{\gamma_1} \quad (1.3)$$

et

$$w_1 + w_2\mathbf{i}_2 = [(z_1 - z_4) - (z_2 + z_3)\mathbf{i}_1] \gamma_1 + [(z_1 - z_4) + (z_2 + z_3)\mathbf{i}_1] \overline{\gamma_1}. \quad (1.4)$$

En insérant ces dernières expressions dans la représentation idempotente sur la base  $\gamma_3$  et  $\overline{\gamma_3}$  de  $\zeta$  et d'après la proposition 1.3, on trouve que

$$\zeta = ((z_1 + z_4) - (z_2 - z_3)\mathbf{i}_1) \gamma_1 \gamma_3 + ((z_1 + z_4) + (z_2 - z_3)\mathbf{i}_1) \overline{\gamma_1} \gamma_3 \\ + ((z_1 - z_4) - (z_2 + z_3)\mathbf{i}_1) \gamma_1 \overline{\gamma_3} + ((z_1 - z_4) + (z_2 + z_3)\mathbf{i}_1) \overline{\gamma_1} \overline{\gamma_3},$$

ce qui est la représentation désirée.  $\square$

Il est possible de démontrer de façon similaire que cette représentation des nombres tricomplexes permet de simplifier les calculs pour la multiplication et le calcul de la norme. L'addition se fait toujours composantes à composantes. Le prochain théorème montre comment cette représentation permet de simplifier l'opération de multiplication. La preuve est omise puisqu'elle est similaire à la preuve des points (a) et (c) du théorème 1.9.

**Théorème 1.11.** Soit  $\zeta \in \mathbb{M}(3)$  tel que  $\zeta = a_1\gamma_1\gamma_3 + a_2\overline{\gamma_1}\gamma_3 + a_3\gamma_1\overline{\gamma_3} + a_4\overline{\gamma_1}\overline{\gamma_3}$  et  $\eta = b_1\gamma_1\gamma_3 + b_2\overline{\gamma_1}\gamma_3 + b_3\gamma_1\overline{\gamma_3} + b_4\overline{\gamma_1}\overline{\gamma_3}$  où chaque  $a_i$  et  $b_i$  sont des nombres complexes. Alors,

- a)  $\zeta = 0$ , si et seulement si,  $a_i = 0$  pour tout  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ .
- b) la multiplication se fait composantes par composantes :

$$\zeta \cdot \eta = [a_1 \cdot b_1] \gamma_1 \gamma_3 + [a_2 \cdot b_2] \overline{\gamma_1} \gamma_3 + [a_3 \cdot b_3] \gamma_1 \overline{\gamma_3} + [a_4 \cdot b_4] \overline{\gamma_1} \overline{\gamma_3}.$$

Le prochain théorème permet de voir comment la norme d'un nombre tricomplexe se calcule à partir des composantes de la représentation sur les éléments de  $S_{1,3}$ .

**Théorème 1.12.** Soit  $\zeta$  un nombre tricomplexe sous la forme

$$\zeta = a_1\gamma_1\gamma_3 + a_2\overline{\gamma_1}\gamma_3 + a_3\gamma_1\overline{\gamma_3} + a_4\overline{\gamma_1}\overline{\gamma_3}.$$

Alors

$$\|\zeta\|_3 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^4 |a_i|^2}{4}}.$$

**Démonstration.**

Soit  $\zeta$  un nombre tricomplexe de la forme  $\zeta = w_1 + w_2\mathbf{i}_3$  où  $w_1, w_2 \in \mathbb{M}(2)$ . Alors, d'après les théorèmes 1.8 et 1.9,

$$\zeta = (w_1 - w_2\mathbf{i}_2)\gamma_3 + (w_1 + w_2\mathbf{i}_2)\overline{\gamma_3}$$

et

$$\|\zeta\|_3 = \sqrt{\frac{\|w_1 - w_2\mathbf{i}_2\|_2^2 + \|w_1 + w_2\mathbf{i}_2\|_2^2}{2}}.$$

Or, les nombres  $w_1 - w_2 \mathbf{i}_2$  et  $w_1 + w_2 \mathbf{i}_2$  sont des nombres bicomplexes et donc

$$w_1 - w_2 \mathbf{i}_2 = a_1 \gamma_1 + a_2 \bar{\gamma}_1 \text{ et } w_1 + w_2 \mathbf{i}_2 = a_3 \gamma_1 + a_4 \bar{\gamma}_1.$$

Ainsi, d'après le théorème 1.1 de la section 1.1,

$$\|w_1 - w_2 \mathbf{i}_2\|_2^2 = \frac{|a_1|^2 + |a_2|^2}{2} \text{ et } \|w_1 + w_2 \mathbf{i}_2\|_2^2 = \frac{|a_3|^2 + |a_4|^2}{2}.$$

Par conséquent,

$$\|\zeta\|_3 = \sqrt{\frac{\frac{|a_1|^2 + |a_2|^2}{2} + \frac{|a_3|^2 + |a_4|^2}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^4 |a_i|^2}{4}}.$$

□

Enfin, il est possible de déduire certaines propriétés d'une suite à partir de la représentation sur les éléments de l'ensemble  $S_{1,3}$ .

**Corollaire 1.4.** Soit  $\{\zeta_n\}_{n=1}^\infty$  une suite de nombres complexes de la forme  $\zeta_n = a_{1n} \gamma_1 \gamma_3 + a_{2n} \bar{\gamma}_1 \gamma_3 + a_{3n} \gamma_1 \bar{\gamma}_3 + a_{4n} \bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_3$  et soit  $\zeta \in \mathbb{M}(3)$  de la forme  $\zeta = a_1 \gamma_1 \gamma_3 + a_2 \bar{\gamma}_1 \gamma_3 + a_3 \gamma_1 \bar{\gamma}_3 + a_4 \bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_3$ . Alors

- a) La suite  $\{\zeta_n\}_{n=1}^\infty$  est bornée, si et seulement si, la suite  $\{a_{in}\}_{n=1}^\infty$  est bornée pour chaque  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ .
- b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n = \zeta$ , si et seulement si,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{in} = a_i$  pour chaque  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ .

La preuve est omise puisqu'elle est similaire à celle du corollaire 1.3.

## 1.4 Éléments inversibles

Les théorèmes 1.8 et 1.10 permettent de représenter un nombre tricomplexe en termes de deux composantes bicomplexes et quatre composantes complexes telles que l'opération de multiplication est facilitée. Ces représentations permettent aussi de caractériser l'ensemble des éléments non inversibles

$$\mathcal{NO}_3 = \{\zeta \in \mathbb{M}(3) : \text{il n'existe aucun } \eta \in \mathbb{M}(3) \text{ tel que } \zeta \cdot \eta = 1\}.$$

Le théorème suivant donne une première façon de repérer si un nombre tricomplexe est non inversible à l'aide de la représentation idempotente sur les éléments de l'ensemble  $S_3$ .

**Théorème 1.13.** Soit  $\zeta = w_1 + w_2\mathbf{i}_3$  un nombre tricomplexe. Alors,  $\zeta$  n'est pas inversible si et seulement si  $w_1 - w_2\mathbf{i}_2$  n'est pas inversible ou  $w_1 + w_2\mathbf{i}_2$  n'est pas inversible dans  $\mathbb{M}(2)$ .

**Démonstration.**

Montrons plutôt que  $\zeta \in \mathbb{M}(3)^{-1}$  si et seulement si  $w_1 - w_2\mathbf{i}_2, w_1 + w_2\mathbf{i}_2 \in \mathbb{M}(2)^{-1}$ . On a  $\zeta$  est inversible si et seulement s'il existe un nombre  $\eta = s_1 + s_2\mathbf{i}_3$  tel que  $\zeta\eta = 1$ . Ceci est équivalent à dire que le système

$$\begin{aligned}(w_1 - w_2\mathbf{i}_2)(s_1 - s_2\mathbf{i}_2) &= 1 \\ (w_1 + w_2\mathbf{i}_2)(s_1 + s_2\mathbf{i}_2) &= 1\end{aligned}$$

a une solution unique. Ce système a une solution unique si et seulement si  $w_1 - w_2\mathbf{i}_2, w_1 + w_2\mathbf{i}_2 \in \mathbb{M}(2)^{-1}$ .  $\square$

Que se passe-t-il lorsqu'un nombre tricomplexe est multiplié par l'un des éléments idempotents de l'ensemble  $S_3$ ? Pour y répondre, soit  $\zeta = (w_1 - w_2\mathbf{i}_2)\gamma_3 + (w_1 + w_2\mathbf{i}_2)\overline{\gamma}_3$  un nombre tricomplexe sous sa représentation idempotente. Par conséquent, en multipliant le nombre tricomplexe  $\zeta$  par l'élément idempotent  $\gamma_3$ , le résultat suivant est obtenu

$$\zeta \cdot \gamma_3 = (w_1 - w_2\mathbf{i}_2)\gamma_3$$

en vertu des propriétés des éléments de l'ensemble  $S_3$ . De même, la multiplication du nombre  $\zeta$  par l'élément idempotent  $\overline{\gamma}_3$  fournit

$$\zeta \cdot \overline{\gamma}_3 = (w_1 + w_2\mathbf{i}_2)\overline{\gamma}_3.$$

En vertu de ces calculs, l'introduction des deux sous-ensembles suivants est légitime.

**Définition 1.10.** Les sous-ensembles déterminés uniquement par les composantes idempotentes de l'ensemble  $S_3$  sont définis comme

$$\begin{aligned}I(\gamma_3) &:= \{(w_1 - w_2\mathbf{i}_2)\gamma_3 : w_1, w_2 \in \mathbb{M}(2)\}, \\ I(\overline{\gamma}_3) &:= \{(w_1 + w_2\mathbf{i}_2)\overline{\gamma}_3 : w_1, w_2 \in \mathbb{M}(2)\}.\end{aligned}$$

**Remarque 6.** Il faut remarquer que la multiplication d'un élément  $\eta \in I(\gamma_3)$  avec un élément  $\zeta \in I(\overline{\gamma_3})$  est nul. En effet,  $\eta = (s_1 - s_2 \mathbf{i}_2) \gamma_3$  et  $\zeta = (w_1 + w_2 \mathbf{i}_2) \overline{\gamma_3}$  de sorte que

$$\eta \cdot \zeta = [(s_1 - s_2 \mathbf{i}_2) \cdot 0] \gamma_3 + [0 \cdot (w_1 + w_2 \mathbf{i}_2)] \overline{\gamma_3} = 0.$$

Ainsi, tous les éléments des ensembles  $I(\gamma_3)$  et  $I(\overline{\gamma_3})$  sont des diviseurs de zéro. ▲

Ces ensembles sont particuliers. Afin de bien comprendre leur nature, la définition d'idéal est introduit [DF99].

**Définition 1.11.** Soit  $(A, +, \cdot)$  un anneau commutatif et  $\emptyset \neq I \subset A$ . Alors,  $(I, +, \cdot)$  est un idéal si

- i)  $\forall i, j \in I, i - j \in I$ .
- ii)  $\forall i \in I$  et  $a \in A, a \cdot i \in I$ .

De plus, un idéal est propre s'il est différent de l'idéal trivial  $(A, +, \cdot)$ .

Les calculs faits précédemment conduisent à la proposition suivante.

**Proposition 1.4.** Les sous-ensembles  $I(\gamma_3)$  et  $I(\overline{\gamma_3})$  sont des idéaux de l'anneau des nombres tricomplexes  $(\mathbb{M}(3), +, \cdot)$ . De plus,  $I(\gamma_3) \cap I(\overline{\gamma_3}) = \{0\}$  ainsi que  $I(\gamma_3)$  et  $I(\overline{\gamma_3})$  sont des idéaux propres de  $(\mathbb{M}(3), +, \cdot)$ .

**Démonstration.**

Il est assez simple de montrer que si deux éléments appartiennent à  $I(\gamma_3)$ , respectivement à  $I(\overline{\gamma_3})$ , alors leur différence demeure dans l'idéal respectif. Les calculs précédents permettent de vérifier la deuxième propriété. Donc,  $I(\gamma_3)$  et  $I(\overline{\gamma_3})$  sont deux idéaux de l'anneau  $(\mathbb{M}(3), +, \cdot)$ .

Soit  $\eta \in I(\gamma_3) \cap I(\overline{\gamma_3})$ . Alors

$$\eta = (w_1 - w_2 \mathbf{i}_2) \gamma_3 \text{ et } \eta = (s_1 + s_2 \mathbf{i}_2) \overline{\gamma_3}$$

où  $w_1, w_2, s_1, s_2 \in \mathbb{M}(2)$ . Donc, par le point (a) du théorème 1.9, il vient que

$$0 = \eta - \eta = (w_1 - w_2 \mathbf{i}_2) \gamma_3 - (s_1 + s_2 \mathbf{i}_2) \overline{\gamma_3}$$

si et seulement si,

$$w_1 - w_2 \mathbf{i}_2 = 0 \text{ et } s_1 + s_2 \mathbf{i}_2 = 0$$

et donc  $\eta = 0$ . Évidemment, comme  $0 = 0\gamma_3 = 0\overline{\gamma}_3$ , alors  $0 \in I(\gamma_3) \cap I(\overline{\gamma}_3)$ . Bref, on obtient la caractérisation voulue. De plus, ces idéaux sont propres puisque  $1 = 1\gamma_3 + 1\overline{\gamma}_3$  n'est ni dans  $I(\gamma_3)$ , ni dans  $I(\overline{\gamma}_3)$ .  $\square$

**Remarque 7.** D'après un résultat standard sur les idéaux propres et les anneaux unitaires, il suit que les éléments de  $I(\gamma_3)$  et  $I(\overline{\gamma}_3)$  n'ont pas d'inverses [DF99].  $\blacktriangle$

La représentation idempotente d'un nombre tricomplexe à partir des éléments de l'ensemble  $S_3$  n'est pas le seul moyen de repérer si un nombre tricomplexe est inversible ou non. En effet, il y a la représentation idempotente à partir des éléments de l'ensemble  $S_{1,3}$ . Le théorème suivant donne des conditions suffisantes et nécessaires pour qu'un nombre tricomplexe soit non inversible.

**Théorème 1.14.** Soit un nombre  $\zeta \in \mathbb{M}(3)$  représenté sous la forme

$$\zeta = a_1\gamma_1\gamma_3 + a_2\overline{\gamma}_1\gamma_3 + a_3\gamma_1\overline{\gamma}_3 + a_4\overline{\gamma}_1\overline{\gamma}_3. \quad (1.5)$$

Alors  $\zeta$  est non inversible si et seulement si une des composantes de la représentation (1.5) est nulle.

**Démonstration.**

La preuve est similaire au théorème 1.13.  $\square$

Les sous-ensembles  $I(\gamma_3)$  et  $I(\overline{\gamma}_3)$  ne sont donc pas les seuls idéaux de l'anneau des nombres tricomplexes. En effet, il est possible de représenter un nombre tricomplexe  $\zeta$  en termes de quatre composantes sur les éléments idempotents de l'ensemble  $S_{1,3}$  comme dans le théorème 1.14. Ainsi, en multipliant le nombre  $\zeta$  par l'élément  $\gamma_1\gamma_3$ , il vient que

$$\zeta \cdot \gamma_1\gamma_3 = a_1\gamma_1\gamma_3$$

en vertu des propriétés des éléments de l'ensemble  $S_{1,3}$ . Il est possible de répéter ce calcul pour tous les autres éléments de  $S_{1,3}$  et tout nombre de la forme  $\zeta\gamma$  pour un élément  $\gamma \in S_{1,3}$ . Par conséquent, il est à nouveau légitime d'introduire quatre nouveaux sous-ensembles des nombres tricomplexes.

**Définition 1.12.** Les sous-ensembles déterminés uniquement par les éléments idempotents de  $S_{1,3}$  sont définis comme

$$I(\gamma_1\gamma_3) := \{z\gamma_1\gamma_3 : z \in \mathbb{M}(1)\}, I(\overline{\gamma_1}\gamma_3) := \{z\overline{\gamma_1}\gamma_3 : z \in \mathbb{M}(1)\}, \\ I(\gamma_1\overline{\gamma_3}) := \{z\gamma_1\overline{\gamma_3} : z \in \mathbb{M}(1)\}, I(\overline{\gamma_1}\overline{\gamma_3}) := \{z\overline{\gamma_1}\overline{\gamma_3} : z \in \mathbb{M}(1)\}.$$

Il est possible de démontrer de manière similaire que les sous-ensembles de la définition 1.12 sont des idéaux de l'ensemble des nombres tricomplexes.

**Proposition 1.5.** Les sous-ensembles  $I(\gamma)$  sont des idéaux propres pour tout  $\gamma \in S_{1,3}$ .

De plus, ces idéaux ont les propriétés suivantes.

**Théorème 1.15.** Les idéaux de la définition 1.12 ont les propriétés suivantes :

a) Le seul élément commun à tous ces idéaux est 0, *i.e.*

$$I(\gamma_1\gamma_3) \cap I(\overline{\gamma_1}\gamma_3) \cap I(\gamma_1\overline{\gamma_3}) \cap I(\overline{\gamma_1}\overline{\gamma_3}) = \{0\}.$$

b)  $I(\gamma_3) = I(\gamma_1\gamma_3) \cup I(\overline{\gamma_1}\gamma_3)$  et  $I(\overline{\gamma_3}) = I(\gamma_1\overline{\gamma_3}) \cup I(\overline{\gamma_1}\overline{\gamma_3})$ .

La caractérisation des éléments inversibles de l'anneau des nombres tricomplexes a nécessité l'introduction de plusieurs ensembles. Ces derniers ensembles se sont avérés des idéaux propres.

Une autre approche qui est présentée dans le livre de Price [Pri91] utilise la représentation matricielle d'un nombre tricomplexe. Il est enfin possible, à l'aide de cette représentation, d'exprimer une équivalence entre la valeur du déterminant de la représentation matricielle d'un nombre tricomplexe et l'inversibilité de ce nombre tricomplexe. L'exploration plus approfondit des éléments inversibles est un aspect intéressant de la théorie des nombres tricomplexes. Elle est présentée dans l'ouvrage de G. B. Price [Pri91, chap. 5].

En fait, il est possible de tenter de généraliser les résultats présentés dans cette section aux nombres multicomplexes  $\mathbb{M}(n)$  et de comparer avec l'approche utilisée

par G. B. Price dans son livre. D'ailleurs, G. B. Price a émis des conjectures sur la caractérisation des inverses des nombres tricomplexes en spéculant que :

« The proofs of these theorems show that elementary methods are sufficient to prove the conjecture [...] for small values of  $n$ , but they also emphasize the inadequacy of those methods for large  $n$  ([Pri91, p.340]). »

La méthode introduite ici peut être une façon de lever le problème de la caractérisation des éléments non inversibles.

---

# Ensembles de Mandelbrot bidimensionnels

Dans ce chapitre, nous explorons les ensembles de Mandelbrot généralisés aux polynômes à valeurs complexes et à valeurs hyperboliques de la forme  $z^p + c$  où  $p \geq 2$  est un entier. Ce premier pas est essentiel avant d'aborder la généralisation des ensembles de Mandelbrot aux nombres tricomplexes.

Plus précisément, la section 2.1 évoque quelques définitions de sous-ensembles de dimension deux inclus dans l'espace des nombres tricomplexes  $\mathbb{M}(3)$ . Après avoir passé en revue les éléments de base des systèmes dynamiques complexes de la section 2.2, une étude des ensembles de Mandelbrot du polynôme  $z^p + c$ , appelés aussi *Multibrot*, est faite aux sections 2.3 et 2.4. Tout particulièrement, à la section 2.4, on démontre que l'intersection entre l'axe réel et le Multibrot généré par  $z^3 + c$  est exactement l'intervalle  $\left[-\frac{2}{3\sqrt{3}}, \frac{2}{3\sqrt{3}}\right]$ . Enfin, la dernière section est dédiée à l'exploration des ensembles de Mandelbrot hyperboliques appelés *Hyperbrot*. On démontre en particulier que l'ensemble hyperbrot généré par le polynôme à valeurs hyperboliques  $z^3 + c$  est un carré.

## 2.1 Sous-ensembles bidimensionnels

À la section 1.2, la représentation d'un nombre tricomplexe à l'aide de huit composantes réelles y est présentée. Des restrictions à certaines composantes de cette forme d'un nombre tricomplexe permet de remarquer qu'il existe des sous-ensembles importants comme l'ensemble des nombres complexes.

Les premiers sous-ensembles qu'il est immédiat de remarquer sont ceux dont les éléments sont composés d'une partie réelle et d'une partie imaginaire.

**Définition 2.1.** Soit  $\mathbf{i}_k \in \{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \mathbf{i}_4\}$ . L'ensemble  $\mathbb{C}(\mathbf{i}_k)$  est défini comme

$$\mathbb{C}(\mathbf{i}_k) := \{a + b\mathbf{i}_k : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

**Remarque 8.** Il est à remarquer que l'ensemble  $\mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$  est l'ensemble  $\mathbb{M}(1)$  des nombres complexes de la forme  $a + b\mathbf{i}_1$  introduit au chapitre 1. ▲

Il est immédiat que les structures  $(\mathbb{C}, +, \bullet)$  où l'addition  $+$  et la multiplication  $\bullet$  sont les opérations standards d'addition et de multiplication sur les nombres complexes, ainsi que  $(\mathbb{C}(\mathbf{i}_k), +, \cdot)$  où l'addition et la multiplication sont celles sur les nombres tricomplexes sont isomorphes.

**Proposition 2.1.** Soit  $\mathbf{i}_k \in \{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \mathbf{i}_4\}$ . La structure  $(\mathbb{C}, +, \bullet)$  est isomorphe à la structure  $(\mathbb{C}(\mathbf{i}_k), +, \cdot)$ .

**Démonstration.**

Il suffit de définir la fonction  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}(\mathbf{i}_k)$  par

$$f(z) = a + b\mathbf{i}_k \text{ pour tout } z = a + b\mathbf{i}.$$

Évidemment, c'est une bijection. L'addition est assurément conservée. Pour la multiplication, on doit remarquer que pour tout  $z, w \in \mathbb{C}$  avec  $z = a_1 + b_1\mathbf{i}$  et  $w = a_2 + b_2\mathbf{i}$ ,

$$\begin{aligned} f(z) \cdot f(w) &= (a_1 + b_1\mathbf{i}_k) \cdot (a_2 + b_2\mathbf{i}_k) \\ &= a_1a_2 - b_1b_2 + (a_1b_2 + a_2b_1)\mathbf{i}_k. \end{aligned}$$

Cependant,

$$z \bullet w = a_1a_2 - b_1b_2 + (a_1b_2 + a_2b_1)\mathbf{i}$$

et donc

$$f(z) \cdot f(w) = f(z \bullet w).$$

Donc, la fonction  $f$  est un isomorphisme entre  $(\mathbb{C}, +, \bullet)$  et  $(\mathbb{C}(\mathbf{i}_k), +, \cdot)$ . □

La représentation en huit composantes réelles permet de remarquer qu'il existe aussi une autre structure bidimensionnelle parmi les nombres tricomplexes. Il s'agit des nombres hyperboliques. Pour en apprendre davantage sur l'ensemble  $\mathbb{D}$  des nombres hyperboliques, il est possible de consulter les ouvrages [RS04, Sob95] ou encore l'annexe B. À la base, un nombre hyperbolique  $z \in \mathbb{D}$  est défini comme

$$z = a + bj \text{ où } j^2 = 1 \text{ et } a, b \in \mathbb{R}.$$

L'addition et la multiplication sont définies respectivement par

$$\begin{aligned} + : \mathbb{D} \times \mathbb{D} &\rightarrow \mathbb{D}, (a + bj, c + dj) \mapsto (a + c) + (b + d)j \\ \bullet : \mathbb{D} \times \mathbb{D} &\rightarrow \mathbb{D}, (a + bj, c + dj) \mapsto (ac + bd) + (ad + bc)j. \end{aligned}$$

La structure  $(\mathbb{D}, +, \bullet)$  forme un anneau unitaire commutatif avec diviseurs de zéros. L'élément neutre pour l'addition est  $0 := 0 + 0j$  et l'unité pour la multiplication est  $1 := 1 + 0j$ . À partir de la définition des nombres hyperboliques, il est possible de remarquer qu'il semble y avoir des similarités dans l'ensemble des nombres tricomplexes. En effet, il suffit de restreindre la représentation d'un nombre tricomplexe à une composante réelle et une des composantes hyperboliques  $j_k$ .

**Définition 2.2.** Soit  $j_k \in \{j_1, j_2, j_3\}$ . L'ensemble  $\mathbb{D}(j_k)$  est définie comme

$$\mathbb{D}(j_k) := \{a + bj_k : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Il est clair que la structure  $(\mathbb{D}, +, \bullet)$  est isomorphe à la structure  $(\mathbb{D}(j_k), +, \cdot)$ .

**Proposition 2.2.** La structure des nombres hyperboliques  $(\mathbb{D}, +, \bullet)$  est isomorphe à la structure  $(\mathbb{D}(j_k), +, \cdot)$ .

Cette proposition se démontre de manière similaire à la proposition 2.1.

En outre, il faut remarquer que les structures  $(\mathbb{C}(i_k), +, \cdot)$  sont isomorphes entre elles. Il en est de même pour les structures  $(\mathbb{D}(j_k), +, \cdot)$  : elles sont isomorphes entre elles.

Avant d'aborder les ensembles de Mandelbrot dans le plan complexe, quelques éléments de base en systèmes dynamiques complexes sont établis.

## 2.2 Éléments de base en systèmes dynamiques complexes

Les résultats qui suivent portent sur une fonction  $f : \Omega \subset \mathbb{C}(\mathbf{i}_1) \rightarrow \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$  holomorphe sur le domaine<sup>1</sup>  $\Omega$ , ainsi que sur les itérées  $f^n$  de cette fonction définie par

$$f^n(z) = (f \circ f^{n-1})(z) \text{ et } f^0 = id.$$

où  $id.$  est l'application identité  $z \mapsto z$ . La boule ouverte de centre  $z_0$  et de rayon  $r > 0$  est définie par

$$B_1(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1) : |z - z_0| < r\}$$

et la boule fermée de centre  $z_0$  et de rayon  $r > 0$  est définie par

$$\overline{B}_1(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1) : |z - z_0| \leq r\}.$$

D'ailleurs, le contenu de cette section s'appuie essentiellement sur les ouvrages [CG93, Gam01, GP11, Fal14, Bea91, McM94].

On peut désormais définir ce qu'est un point fixe d'une fonction. On dit qu'un point  $z_0 \in A$  est un *point fixe* de la fonction  $f$  si  $f(z_0) = z_0$ . Il est possible de caractériser les points fixes.

**Définition 2.3 (Classification des points fixes).** Soit  $z_0$  un point fixe de l'application  $f : A \subset \mathbb{C}(\mathbf{i}_1) \rightarrow \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$ . Posons  $\lambda := f'(z_0)$  si cette dérivée existe. Alors,  $z_0$  est dit

- i) **Attractif** lorsque  $0 \leq |\lambda| < 1$ . Si  $\lambda = 0$ , il est dit **superattractif**.
- ii) **Répulsif** lorsque  $|\lambda| > 1$ .
- iii) **Neutre** lorsque  $|\lambda| = 1$ .

Soit un point fixe attractif  $z_0$  de la fonction  $f$  et un paramètre  $\rho > 0$  tel que  $|\lambda| < \rho < 1$ . On trouve alors que

$$|f(z) - z_0| \leq \rho |z - z_0|$$

1. Un domaine du plan complexe est un ensemble ouvert et connexe.

dans un certain voisinage de  $z_0$ .

En effet, comme  $f$  est dérivable en  $z_0$ , alors pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un certain  $\delta_\varepsilon > 0$  tel que si  $z \in \Omega$  et  $0 < |z - z_0| < \delta_\varepsilon$ , alors

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon .$$

Or,  $z_0$  est un point fixe, d'où

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| = \left| \frac{f(z) - z_0}{z - z_0} - f'(z_0) \right| .$$

Ainsi, en utilisant les propriétés du module complexe, on obtient que

$$\left| \frac{f(z) - z_0}{z - z_0} \right| - |f'(z_0)| < \varepsilon$$

et donc que

$$\left| \frac{f(z) - z_0}{z - z_0} \right| < \varepsilon + |f'(z_0)|$$

lorsque  $z \in \Omega \cap B_1(z_0, \delta_\varepsilon)$ . Mais,  $z_0$  est un point fixe attractif. Par conséquent  $f'(z_0) = \lambda$  est tel que  $0 \leq |\lambda| < 1$ . En posant  $\varepsilon_0 = \rho - |\lambda| > 0$ , on trouve donc que

$$|f(z) - z_0| \leq \rho |z - z_0|$$

lorsque  $z \in \Omega \cap B_1(z_0, \delta_{\varepsilon_0})$ .

Une conséquence de ce dernier résultat est que, dans un certain voisinage de  $z_0$ , la suite des itérées converge vers le point fixe  $z_0$ . En effet, pour voir cela, on procède par induction sur  $n$ . Le but est de montrer que

$$|f^n(z) - z_0| \leq \rho^n |z - z_0| \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{2.1}$$

dans un certain voisinage de  $z_0$ . D'abord, d'après le résultat précédent, on sait que c'est vrai pour  $n = 1$ . Supposons maintenant que (2.1) soit vraie pour un entier  $k \in \mathbb{N}$  et montrons que c'est aussi le cas pour  $k + 1 \in \mathbb{N}$ , *i.e.*

$$\left| f^{k+1}(z) - z_0 \right| \leq \rho^{k+1} |z - z_0|$$

dans un certain voisinage de  $z_0$ . On a, par la définition de la composition, que

$$\left| f^{k+1}(z) - z_0 \right| = \left| f^k(f(z)) - z_0 \right| .$$

Or, on sait que  $|f(z) - z_0| \leq \rho |z - z_0|$ , avec  $0 < \rho < 1$ . Ainsi,  $f(z)$  se retrouve dans le voisinage de  $z_0$ , on peut utiliser l'hypothèse d'induction et on trouve que

$$|f^k(f(z)) - z_0| \leq \rho^k |f(z) - z_0|.$$

Donc,  $|f^k(f(z)) - z_0| \leq \rho^k (\rho |z - z_0|)$  puisque  $|f(z) - z_0| \leq \rho |z - z_0|$ . Par conséquent,

$$|f^{k+1}(z) - z_0| \leq \rho^{k+1} |z - z_0|$$

lorsque  $z$  est dans le voisinage de  $z_0$ , d'où la proposition est vraie pour  $k + 1$ .

Bref, par le principe d'induction mathématique, on a belle et bien, pour tout entier naturel  $n$ , que

$$|f^n(z) - z_0| \leq \rho^n |z - z_0|$$

lorsque  $z$  est dans un voisinage du point  $z_0$  et  $|\lambda| < \rho < 1$ . Ainsi, ceci nous amène au concept de bassin d'attraction.

**Définition 2.4.** Le bassin d'attraction en un point fixe attractif  $z_0$  d'une fonction holomorphe  $f$  est l'ensemble des points  $z \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$ , tels que  $f^n(z) \rightarrow z_0$ . Cet ensemble sera noté  $A_f(z_0)$  ou  $A(z_0)$ .

On peut aussi définir le concept de *bassin d'attraction à l'infini* souvent noté  $A(\infty)$ . Celui-ci est défini comme l'ensemble des points  $z$  dont la suite des itérées de la fonction  $f$  diverge à l'infini. Symboliquement,

$$A(\infty) = \{z \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1) : f^n(z) \rightarrow \infty\}.$$

Ce dernier concept est le principal utilisé dans les sections qui vont suivre puisque c'est celui-ci qui nous permet de définir l'ensemble de Mandelbrot.

Avant d'aborder la prochaine section, nous énonçons un résultat important sur les polynômes à valeurs complexes. Ce résultat sert à démontrer les caractéristiques remarquables de l'ensemble de Mandelbrot et de ses proches, les ensembles multibrot. Il faut un lemme afin de démontrer ce résultat.

**Lemme 2.1.** Soit  $f(z) = a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_0$  avec  $a_m \neq 0$  et  $m \geq 1$ .

Alors

$$|f(z)| > \frac{1}{2} |a_m| |z|^m \quad (2.2)$$

lorsque  $|z|$  est suffisamment grand.

**Démonstration.**

Si  $|z| \neq 0$ , on a

$$|f(z)| = |z|^m \left| a_m + \frac{a_{m-1}}{z} + \frac{a_{m-2}}{z^2} + \dots + \frac{a_0}{z^m} \right|.$$

Posons  $|z| = r$  alors  $\frac{1}{|z|} \rightarrow 0$  lorsque  $r \rightarrow \infty$ . Ainsi, puisque  $a_m \neq 0$ ,

$$\left| \frac{a_{m-1}}{z} + \frac{a_{m-2}}{z^2} + \dots + \frac{a_0}{z^m} \right| < \frac{1}{2} |a_m| \quad (2.3)$$

lorsque  $|z|$  est suffisamment grand.

De plus, on a

$$\begin{aligned} \left| a_m + \frac{a_{m-1}}{z} + \frac{a_{m-2}}{z^2} + \dots + \frac{a_0}{z^m} \right| &> |a_m| - \left| \frac{a_{m-1}}{z} + \frac{a_{m-2}}{z^2} + \dots + \frac{a_0}{z^m} \right| \\ &> |a_m| - \frac{1}{2} |a_m| \quad \text{par (2.3)}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\left| a_m + \frac{a_{m-1}}{z} + \frac{a_{m-2}}{z^2} + \dots + \frac{a_0}{z^m} \right| > \frac{1}{2} |a_m|. \quad (2.4)$$

Ainsi, en multipliant chaque membre de l'inégalité (2.4) par  $|z|^m$ , on trouve que

$$|z|^m \left| a_m + \frac{a_{m-1}}{z} + \frac{a_{m-2}}{z^2} + \dots + \frac{a_0}{z^m} \right| > |z|^m \left( \frac{1}{2} |a_m| \right).$$

Donc,

$$|f(z)| > \frac{1}{2} |z|^m |a_m|$$

lorsque  $|z|$  est suffisamment grand.  $\square$

Ceci nous amène donc au résultat attendu (voir [Fall14, p. 237, chap.13], par exemple).

**Théorème 2.1.** Soit un polynôme  $f(z) = a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_0$  avec  $a_m \neq 0$ ,  $m \geq 2$ . Alors, il existe un nombre  $r > 0$  tel que si  $|z| \geq r$ , alors  $|f(z)| \geq 2|z|$ . Particulièrement, si  $|f^k(z)| \geq r$  pour un certain  $k \geq 0$ , alors  $f^n(z) \rightarrow \infty$  lorsque  $n$  tend vers l'infini. Par conséquent, la suite des itérées  $f^n(z)$  est soit bornée, soit divergente à l'infini.

**Démonstration.**

Tout d'abord, nous allons montrer qu'un nombre  $r$  existe tel que si  $|z| \geq r$ , alors  $|f(z)| \geq 2|z|$ . Supposons que  $z \neq 0$ . Alors, puisque  $m \geq 2$ , on a que

$$\frac{2}{|z|^{m-1}} \rightarrow 0$$

lorsque  $|z| \rightarrow \infty$ . Ainsi, comme  $a_m \neq 0$ ,

$$\frac{2}{|z|^{m-1}} < \frac{|a_m|}{2}$$

lorsque  $|z|$  est suffisamment grand. Et donc,

$$2|z| \leq \frac{1}{2} |a_m| |z|^m \tag{2.5}$$

si  $|z|$  est assez grand. Posons  $r$  suffisamment grand tel que si  $|z| \geq r$ , les équations (2.2) et (2.5) sont vérifiées. Par conséquent, d'après le lemme 2.1,

$$|f(z)| \geq \frac{1}{2} |a_m| |z|^m \geq 2|z| \tag{2.6}$$

lorsque  $|z| \geq r$ .

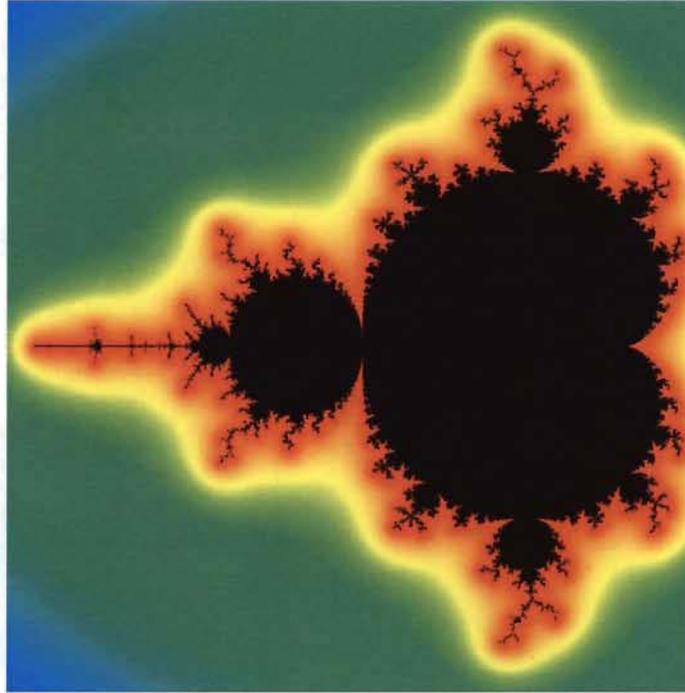
Donc, on a le premier résultat du théorème. Par induction, si  $|z| \geq r$  il vient que

$$|f^n(z)| \geq 2^n |z| \tag{2.7}$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Ensuite, on doit montrer que si  $|f^k(z)| \geq r$  pour un certain  $k \geq 0$ , alors  $f^n(z) \rightarrow \infty$  quand  $n$  tend vers l'infini. Supposons  $|f^k(z)| \geq r$  pour un certain  $k \geq 0$ . Alors, d'après (2.7), on a  $|f^{n+k}(z)| \geq 2^n |f^k(z)|$  et conséquemment  $|f^{n+k}(z)| \geq 2^n r$ . Ainsi,  $f^n(z) \rightarrow \infty$ , lorsque  $n \rightarrow \infty$  et si  $|f^k(z)| \geq r$  pour un certain entier  $k \in \mathbb{N}$ . On a donc que  $\{f^n(z)\}$  est soit bornée, soit divergente. □

Ceci étant établi, il est maintenant possible d'introduire les ensembles de Mandelbrot dans le plan complexe et le plan hyperbolique, les premiers étant parfois nommés dans la littérature *Multibrot*.

FIGURE 2.1 – L'ensemble de Mandelbrot  $M^2$ 

## 2.3 L'ensemble de Mandelbrot

Dans cette section, notre intérêt est porté sur les systèmes dynamiques complexes générés par des polynômes complexes de degré deux. Soit  $R(z) = az^2 + 2bz + d$ , où  $a, b, d \in \mathbb{R}$  et  $a \neq 0$ , une fonction quadratique et considérons la transformation de Möbius suivante :  $M(z) = az + b$ . On remarque que  $(M \circ R \circ M^{-1})(z) = z^2 + c$ , avec  $c = ad + b - b^2$ . Par conséquent, on dit que les fonctions  $Q_{2,c}(z) = z^2 + c$  et  $R(z)$  sont analytiquement conjuguées, *i.e.* les applications  $Q_{2,c}$  et  $R$  génèrent des systèmes dynamiques équivalents. Nous pouvons donc nous limiter aux fonctions quadratiques de la forme  $Q_{2,c}(z) = z^2 + c$  dans l'étude des systèmes dynamiques complexes générés par des polynômes de degré deux.

Maintenant, considérons la fonction quadratique  $Q_{2,c}(z) = z^2 + c$ . On s'intéresse aux paramètres  $c$  telle que la suite des itérées  $\{Q_{2,c}^m(0)\}_{m=1}^{\infty}$  reste bornée. L'ensemble de tels paramètres  $c$  est l'ensemble de Mandelbrot.

**Définition 2.5 (Ensemble de Mandelbrot).** L'ensemble de Mandelbrot, noté  $\mathcal{M}^2$ , est l'ensemble des points  $c$  tel que la suite des itérées de  $Q_{2,c}$  évalué initialement en  $z = 0$  est bornée, *i.e.*

$$\mathcal{M}^2 = \left\{ c \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1) : \{Q_{2,c}^m(0)\}_{m=1}^\infty \text{ est bornée} \right\}.$$

La figure 2.1 représente l'ensemble de Mandelbrot. On peut remarquer que l'ensemble de Mandelbrot est symétrique par rapport à l'axe réel. En fait, c'est le cas puisque  $\overline{Q_{p,c}^m(0)} = Q_{p,\bar{c}}^m(0)$  et donc que  $|Q_{p,\bar{c}}^m(0)| = |Q_{p,c}^m(0)|$ . Ainsi, on a que  $c \in \mathcal{M}^2$  si et seulement si  $\bar{c} \in \mathcal{M}^2$ .

L'ensemble de Mandelbrot possède plusieurs propriétés. Les preuves se trouvent dans les références suivantes [CG93, Gam01, Fall14, Bea91].

**Théorème 2.2.** Soit  $\mathcal{M}^2$  l'ensemble de Mandelbrot. Alors,

- (a)  $\mathcal{M}^2 \subset \overline{B_1}(0, 2)$ ;
- (b)  $c \in \mathcal{M}^2$  si et seulement si  $|Q_{2,c}^m(0)| \leq 2$  pour tout entier  $m \geq 1$ ;
- (c)  $\mathcal{M}^2$  est fermé;
- (d)  $\mathcal{M}^2$  est un ensemble connexe;
- (e)  $\mathcal{M}^2$  est un ensemble simplement connexe;
- (f)  $\mathcal{M}^2 \cap \mathbb{R} = \left[-2, \frac{1}{4}\right]$ .

La propriété (a) et (c) implique que l'ensemble  $\mathcal{M}^2$  est un compact de  $\mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$ . La propriété (b) est à la base d'un algorithme simple pour visualiser l'ensemble de Mandelbrot. En effet, il est possible d'itérer le polynôme  $Q_{2,c}$  jusqu'à un certain nombre  $N$  d'itérations. À chaque itération, on vérifie si le module de l'itérée est inférieur à 2. Si c'est le cas, on continue l'itération, sinon on arrête l'algorithme et on colore le pixel de l'image selon l'itération atteinte. Ceci permet de savoir approximativement si un nombre  $c$  appartient ou non à l'ensemble de Mandelbrot en un temps fini. Puis, la propriété (d) est un résultat célèbre en théorie des systèmes dynamiques qui a été démontré par A. Douady et J.H. Hubbard [DH82].

Nous allons porter davantage notre attention sur la propriété (f). En effet, les prochaines sections de ce chapitre tenteront d'étendre ce résultat aux ensembles de

Mandelbrot du polynôme  $Q_{p,c}$ . Plus précisément, nous allons reprendre la preuve de la propriété (f) et ajouter des éléments complémentaires.

Tout d'abord, nous allons démontrer deux lemmes utiles à la preuve de la propriété (f) du théorème 2.2.

**Lemme 2.2.** Soit  $c > 0$ , où  $c$  est un nombre réel fixé. Alors, la suite des itérées  $\{Q_{2,c}^m(0)\}$  est strictement croissante.

**Démonstration.**

Soit  $c > 0$  fixé. Il est clair que  $Q_{2,c}$  est une fonction croissante sur l'intervalle  $[0, \infty)$  et que  $Q_{2,c}^m(0) > 0$  pour tout entier  $m \geq 1$ . On remarque que  $Q_{2,c}^2(0) = c^2 + c > c = Q_{2,c}(0)$  puisque  $c^2 > 0$ . Maintenant, si pour un certain entier  $m \geq 2$ ,  $Q_{2,c}^m(0) > Q_{2,c}^{m-1}(0)$ , alors comme  $Q_{2,c}$  est croissante sur  $[0, +\infty)$

$$Q_{2,c}^{m+1}(0) = Q_{2,c}(Q_{2,c}^m(0)) > Q_{2,c}(Q_{2,c}^{m-1}(0)) = Q_{2,c}^m(0).$$

Ainsi, on a montré par induction que la suite  $\{Q_{2,c}^m(0)\}_{m=1}^{\infty}$  est strictement croissante. □

**Lemme 2.3.** Soit  $c \in [-2, 1/4]$  et  $a = \frac{1 + \sqrt{1 - 4c}}{2}$ . Alors,  $|c| \leq a$ .

**Démonstration.**

Comme  $a$  est une racine du polynôme  $x^2 - x + c$ , on a que  $a^2 - a + c = 0$ .

D'autre part, on a que  $c = a - a^2 \leq a$ . D'autre part, comme  $c \in [-2, 1/4]$ , on trouve que  $a \in [0, 2]$ . Par conséquent,  $c = -a + a(a - 2) \geq -a$ . Donc,  $|c| \leq a$ . □

Maintenant, nous sommes en mesure de démontrer la propriété (f) du théorème 2.2.

**Démonstration** (Propriété (f) du théorème 2.2).

Posons  $R_{2,c}(x) = Q_{2,c}(x) - x = x^2 - x + c$  avec  $c \in \mathbb{R}$ . De cette façon, à l'aide de la formule quadratique  $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ,  $R_{2,c}(x)$  ne possède aucune racine réelle quand  $c > 1/4$ , possède une racine réelle double en  $x = 1/2$  quand  $c = 1/4$  et 2 racines réelles en  $x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4c}}{2}$  quand  $c < 1/4$ .

D'abord, posons  $c < -2$ , alors  $|c| > 2$  et donc d'après la propriété (a) du théorème 2.2,  $c \notin \mathcal{M}^2$ . Maintenant, posons  $c > 1/4$ , alors d'après le lemme 2.2, la suite des itérées  $\{Q_{2,c}^m(0)\}$  est strictement croissante. Supposons que cette suite est bornée. Alors, comme toute suite monotone bornée est convergente, elle converge vers  $z_0 \in \mathbb{R}$ . Autrement dit,  $\lim_{m \rightarrow \infty} Q_{2,c}^m(0) = z_0$ . Par conséquent,  $Q_{2,c}(z_0) = Q_{2,c}(\lim_{m \rightarrow \infty} Q_{2,c}^m(0))$  et l'extraction de la limite est possible puisque  $Q_{2,c}$  est continue. On obtient que

$$Q_{2,c} \left( \lim_{m \rightarrow \infty} Q_{2,c}^m(0) \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} Q_{2,c}(Q_{2,c}^m(0)) = \lim_{m \rightarrow \infty} Q_{2,c}^{m+1}(0) = z_0$$

et donc que  $Q_{2,c}(z_0) = z_0$ , ce qui est impossible puisque  $R_{2,c}(x)$  n'a pas de racine réelle pour  $c > 1/4$ . Ainsi,  $\{Q_{2,c}(0)\}$  n'est pas une suite bornée d'où  $c \notin \mathcal{M}^2$ .

Enfin, considérons  $c \in [-2, 1/4]$  et posons  $a := \frac{1+\sqrt{1-4c}}{2}$ , la racine positive de  $R_{2,c}(x)$ . Maintenant, d'après le lemme 2.3, on a que  $|Q_{2,c}(0)| = |c| \leq a$ . Supposons que c'est le cas pour  $m = k$ . Alors,  $Q_{2,c}^{k+1}(0) = (Q_{2,c}^k(0))^2 + c \leq a^2 + c = a$ , d'où

$$Q_{2,c}^{k+1}(0) \leq a. \quad (2.8)$$

De plus,  $Q_{2,c}^{k+1}(0) = (Q_{2,c}^k(0))^2 + c \geq c$ , puisque  $(Q_{2,c}^k(0))^2 \geq 0$ . Comme  $|c| \leq a$ ,  $c \geq -a$ , et donc

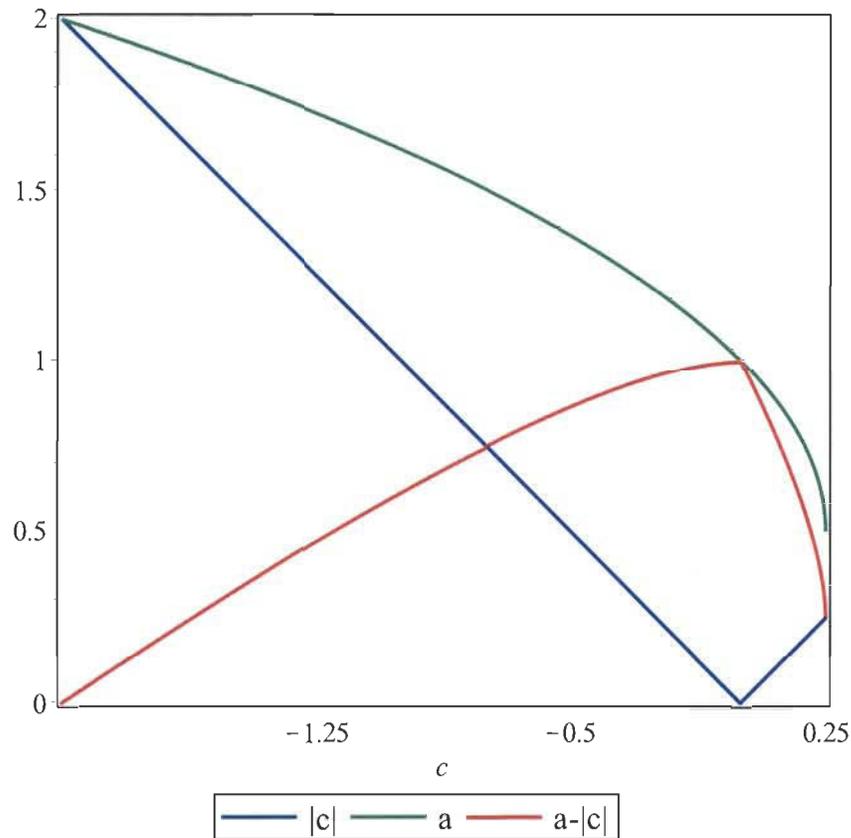
$$Q_{2,c}^{k+1}(0) \geq -a. \quad (2.9)$$

Des équations (2.8) et (2.9), on trouve que  $|Q_{2,c}^{k+1}(0)| \leq a$ . Ainsi, on a montré par induction que  $|Q_{2,c}^m(0)| \leq a \forall m \in \mathbb{N}$ . Ainsi, la suite  $\{Q_{2,c}^m(0)\}_{m=1}^{\infty}$  est bornée et de la définition de l'ensemble de Mandelbrot,  $c \in \mathcal{M}^2$ . On conclut que l'intervalle  $[-2, 1/4]$  est inclus dans  $\mathcal{M}^2$ .  $\square$

Nous sommes maintenant intéressés à généraliser l'ensemble de Mandelbrot d'une première façon. Cette généralisation consiste à définir de nouveaux ensembles à partir du polynôme  $z^p + c$ . De manière plus détaillée, ces nouveaux ensembles contiennent des points  $c \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$  tels que la suite des itérées du polynôme  $z^p + c$  évaluées en  $z = 0$  restent bornées. Nous les nommons Multibrot.

## 2.4 Les ensembles multibrots

Nous abordons, dans cette section, les ensembles de Mandelbrot associés à la famille de polynômes de la forme  $Q_{p,c}(z) := z^p + c$ . Ces ensembles, appelés *Multibrot*, ont des propriétés analogues à celles de l'ensemble de Mandelbrot. Les premières

FIGURE 2.2 – Représentation graphique de  $|c|$ ,  $a$  et  $a - |c|$ 

expériences numériques sont apparues dans [GB91, PJ87]. Une étude plus théorique a été réalisé par D. Schleicher [Sch04].

D'abord, mentionnons un fait important concernant la familles de polynômes  $\mathfrak{Q}_p := \{Q_{p,c} : c \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)\}$ . Cette famille caractérisent complètement les polynômes  $P : \mathbb{C}(\mathbf{i}_1) \rightarrow \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$  de degré  $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$  qui ne possèdent qu'un seul point critique. Plus précisément, tout polynôme  $P$  de degré entier  $p \geq 2$  ne possédant qu'un seul point critique peut être ramené à un polynôme de la forme  $Q_{p,c}$  de la famille  $\mathfrak{Q}_p$  par une transformation linéaire. J. Milnor a suggéré de les appeler *polynômes unicritiques* [Mil14].

En effet, soit  $P(z) = \sum_{m=0}^p a_m z^m$  un polynôme de degré  $p \geq 2$  qui ne possède qu'un seul point critique. Nous avons le théorème suivant.

**Théorème 2.3.** Soit  $z_0$  le point critique de  $P$ . Alors,  $P$  prend la forme

$$P(z) = \frac{b}{p}(z - z_0)^p - \frac{(-z_0)^p b}{p} + a_0$$

pour un certain  $b \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$ .

**Démonstration.**

Comme le polynôme dérivée  $P'$  a un seul zéro  $z_0 \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$ , alors  $P'(z) = \sum_{m=0}^{p-1} (m+1)a_{m+1}z^m$  s'écrit comme

$$P'(z) = b(z - z_0)^{p-1}$$

pour un certain nombre complexe  $b$ . Ainsi, en développant selon l'identité du binôme de Newton, on a

$$P'(z) = b \left( \sum_{m=0}^{p-1} \binom{p-1}{m} z^m (-z_0)^{p-1-m} \right)$$

où  $\binom{p}{i}$  est un coefficient binomial défini par  $\binom{p}{i} = \frac{p!}{(p-i)!i!}$ . Donc on a l'identité suivante

$$b \left( \sum_{m=0}^{p-1} \binom{p-1}{m} z^m (-z_0)^{p-1-m} \right) = \sum_{m=0}^{p-1} (m+1)a_{m+1}z^m.$$

Par conséquent, on obtient les conditions suivantes sur les coefficients  $a_1, a_2, \dots, a_p$

$$na_n = \binom{p-1}{n-1} b (-z_0)^{p-n}$$

pour  $n = 1, 2, \dots, p$ . Donc, la forme du polynôme  $P$  est

$$P(z) = \sum_{n=1}^p \frac{\binom{p-1}{n-1}}{n} b (-z_0)^{p-n} z^n + a_0.$$

Remarquons que,  $\frac{p}{n} \binom{p-1}{n-1} = \binom{p}{n}$  et donc

$$\begin{aligned} P(z) &= \frac{b}{p} \sum_{n=1}^p \binom{p}{n} z^n (-z_0)^{p-n} + a_0 \\ &= \frac{b}{p} \sum_{n=0}^p \binom{p}{n} z^n (-z_0)^{p-n} - \frac{(-z_0)^p b}{p} + a_0 \\ &= \frac{b}{p} (z - z_0)^p - \frac{(-z_0)^p b}{p} + a_0. \end{aligned}$$

□

Posons le changement de coordonnées suivant  $w := \sqrt[p]{\frac{b}{p}}(z - z_0)$  où  $\sqrt[p]{b/p}$  est l'une des racines de  $b/p$ . Il est clair que  $w$  est une transformation de Möbius. De plus, on obtient que  $z = \sqrt[p]{\frac{p}{b}}w + z_0$  et donc

$$P(z) = P\left(\sqrt[p]{\frac{p}{b}}w + z_0\right) = w^p + \frac{(-z_0)^pb}{p} + a_0 := f(w).$$

En posant  $c := \frac{(-z_0)^pb}{p} + a_0$ , on identifie le polynôme  $f$  (et donc  $P$ ) au polynôme  $Q_{p,c}$  de la famille  $\mathfrak{Q}_p$ .

Sous ces conditions, supposons un polynôme de la forme  $Q_{p,c}(z) = z^p + c$ , où  $p$  est un entier et  $p \geq 2$ .

**Définition 2.6.** On définit l'ensemble de Mandelbrot d'ordre  $p$  (nommé aussi Multibrot) comme l'ensemble des nombres complexes  $c$  tel que la suite des itérées de la fonction  $Q_{p,c}$  évaluée initialement en  $z = 0$  reste bornée, *i.e.*

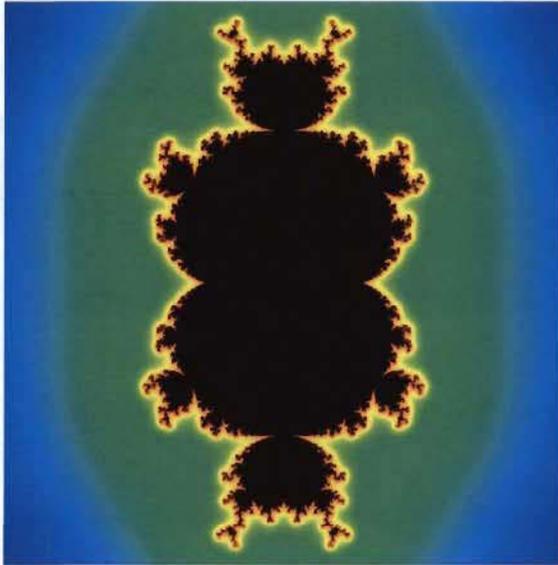
$$\mathcal{M}^p := \left\{ c \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1) : \left\{ Q_{p,c}^m(0) \right\}_{m=1}^{\infty} \text{ est bornée} \right\}.$$

Les figures 2.3(a), 2.3(b), 2.3(c) et 2.3(d) illustrent ces ensembles pour  $p = 3, 4, 5$  et 10. Ces images sont obtenues à l'aide du critère du théorème 2.5 combiné avec une autre méthode appelée « Estimation de la distance (DEM) » [Mar04, MR05].

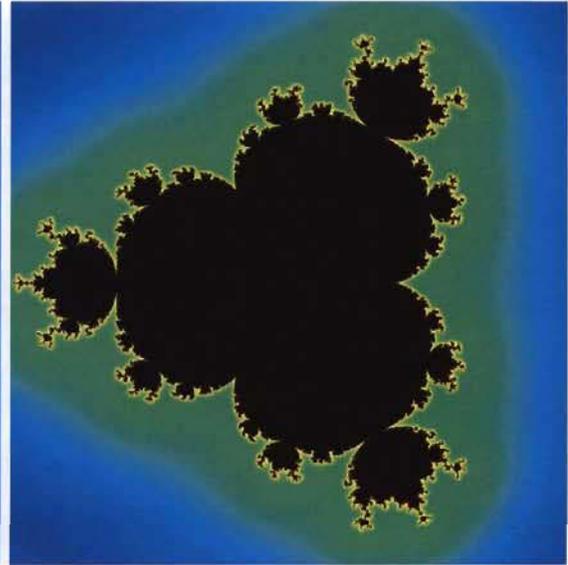
Comme déjà mentionné dans l'introduction de ce chapitre, les Multibrot ont plusieurs propriétés analogues à l'ensemble de Mandelbrot. Nous allons en étudier une partie.

Une première propriété est analogue à la propriété (a) du théorème 2.2 pour l'ensemble de Mandelbrot. En fait, dans [RR08], ils ont démontré que chaque Multibrot  $\mathcal{M}^p$  pour une puissance  $p$  paire est contenu dans le disque de rayon  $2^{1/(p-1)}$ . Aussi, les auteurs de [LZa01, RR08] ont démontré cette inclusion pour toute puissance entière  $p \geq 2$ . Nous présentons une autre manière d'atteindre ce résultat. Pour en arriver à cette autre preuve, il faut avant tout démontrer le lemme suivant.

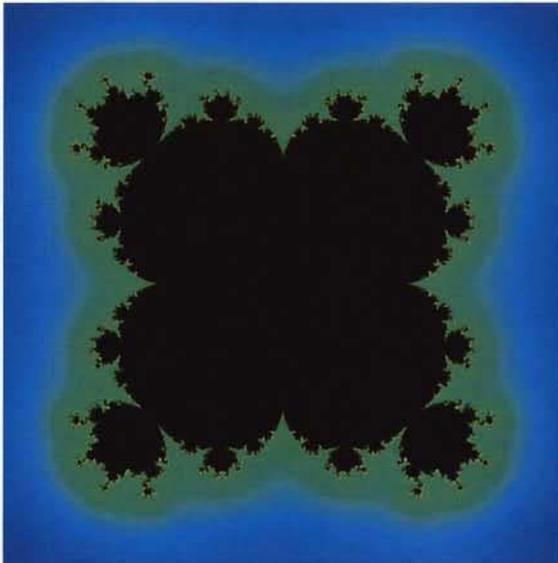
**Lemme 2.4.** Soit la fonction  $Q_{p,c}(z) = z^p + c$  avec  $p \geq 2$  et  $|c|^{p-1} > 2$ , alors  $|Q_{p,c}^m(0)| \geq |c|(|c|^{p-1} - 1)^{m-1}$  pour tout entier  $m \geq 1$ .



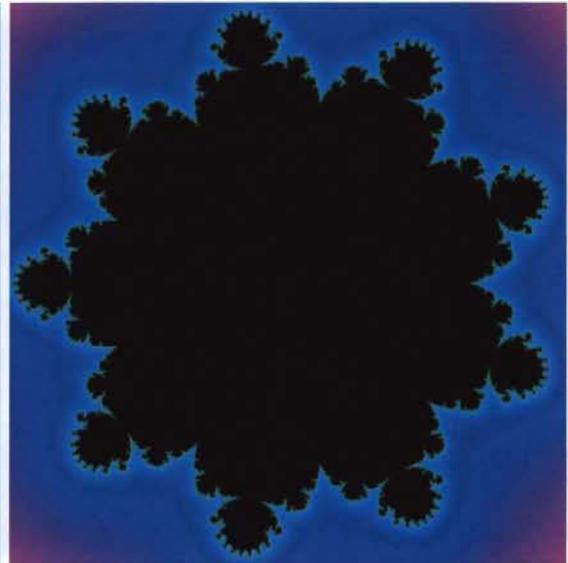
(a) Le Multibrot  $\mathcal{M}^3$



(b) Le Multibrot  $\mathcal{M}^4$



(c) Le Multibrot  $\mathcal{M}^5$



(d) Le Multibrot  $\mathcal{M}^{10}$

FIGURE 2.3 – Ensembles multibrots d'ordres  $p = 3, 4, 5, 10$

**Démonstration.**

La preuve se fait par induction sur  $m$ . Considérons  $m = 1$ . On a

$$|Q_{p,c}(0)| = |c| = |c| (|c|^{p-1} - 1)^{1-1}$$

et donc l'énoncé est vrai pour  $m = 1$ . Supposons que l'énoncé soit vrai pour un  $k \in \mathbb{N}$ , *i.e*

$$|Q_{p,c}^k(0)| \geq |c| (|c|^{p-1} - 1)^{k-1}.$$

On a, d'après la définition de la fonction  $Q_{p,c}$ ,

$$\begin{aligned} |Q_{p,c}^{k+1}(0)| &= |Q_{p,c}(Q_{p,c}^k(0))| \\ &= |(Q_{p,c}^k(0))^p + c|. \end{aligned}$$

On obtient, en séparant le module,  $|(Q_{p,c}^k(0))^p + c| \geq |Q_{p,c}^k(0)|^p - |c|$ . En utilisant l'hypothèse d'induction, on trouve  $|(Q_{p,c}^k(0))^p + c| \geq (|c| (|c|^{p-1} - 1)^{k-1})^p - |c|$ . De plus, comme  $|c|^{p-1} > 2$ , on a que  $|c|^{p-1} - 1 > 1$ , d'où  $(|c|^{p-1} - 1)^{k-1} \geq 1$  pour  $k \geq 1$ . Donc, on remarque que

$$\begin{aligned} (|c| (|c|^{p-1} - 1)^{k-1})^p - |c| &\geq |c|^p (|c|^{p-1} - 1)^{k-1} - |c| \\ &\geq |c|^p (|c|^{p-1} - 1)^{k-1} - |c| (|c|^{p-1} - 1)^{k-1} \\ &= |c| (|c|^{p-1} - 1)^{k-1} (|c|^{p-1} - 1) = |c| (|c|^{p-1} - 1)^k. \end{aligned}$$

Ainsi, l'énoncé est vrai pour  $m = k + 1$  et par le principe d'induction mathématique, elle est vraie pour tout  $m \in \mathbb{N}$ .  $\square$

**Remarque 9.** Pour le cas particulier où  $p = 2$ , le résultat est valide et prend sa forme originale [GP11].  $\blacktriangle$

En utilisant ce lemme, nous pouvons démontrer que les ensembles générés par la famille de fonctions polynomiales  $Q_{p,c}(z) = z^p + c$  sont contenus dans le disque de rayon  $2^{1/(p-1)}$ .

**Théorème 2.4.** Pour tout nombre complexe  $c$  appartenant à  $\mathcal{M}^p$ , on a  $|c| \leq 2^{1/(p-1)}$ .

**Démonstration.**

Supposons que  $|c| > 2^{1/(p-1)}$ , ce qui est équivalent à  $|c|^{p-1} > 2$ . Alors, le lemme 2.4

nous assure que  $|Q_{p,c}^m(0)| \geq |c|(|c|^{p-1} - 1)^{m-1}$ , pour  $m \geq 1$ . Ainsi, on trouve que  $Q_{p,c}^m(0) \rightarrow \infty$  quand  $m \rightarrow \infty$  puisque  $|c|^{p-1} - 1 > 1$ . Donc, d'après la définition de  $\mathcal{M}^p$ ,  $c \notin \mathcal{M}^p$ . Par conséquent, par la contrapositive, quand  $c \in \mathcal{M}^p$ , alors  $|c| \leq 2^{1/(p-1)}$ .  $\square$

**Remarque 10.** Pour le cas particulier où  $p = 2$ , si un nombre complexe  $c$  appartient à l'ensemble de Mandelbrot, alors son module est inférieur à 2. On retrouve bien la propriété (a) du théorème 2.2.  $\blacktriangle$

Comme nous l'avons énoncé pour le cas de l'ensemble de Mandelbrot, la propriété (b) du théorème 2.2 fournit un critère simple afin de déterminer si un point  $c$  appartient ou non à  $\mathcal{M}^2$ . Ce même critère peut-être utilisé afin de générer les figures 2.3(a), 2.3(b), 2.3(c) et 2.3(d). Pour démontrer cette caractérisation des points dans un ensemble  $\mathcal{M}^p$ , nous devons établir le lemme suivant.

**Lemme 2.5.** Soit  $|c| \leq 2^{1/(p-1)}$ . Posons  $|Q_{p,c}^m(0)| = 2^{1/(p-1)} + \delta > 2^{1/(p-1)}$ , où  $m \geq 1$ . Alors, on a l'inégalité suivante :  $|Q_{p,c}^{m+n}(0)| \geq 2^{1/(p-1)} + (2p)^n \delta$ , pour tout  $n \geq 1$ .

**Démonstration.**

Ce lemme est aussi démontré par induction sur  $n$ . Pour  $n = 1$ , on a  $|Q_{p,c}^{m+1}(0)| = |Q_{p,c}(Q_{p,c}^m(0))|$  et, par définition de  $Q_{p,c}$ , on trouve  $|(Q_{p,c}^m(0))^p + c|$ . Ainsi, en séparant le module et en utilisant le fait que  $|Q_{p,c}^m(0)| = 2^{1/(p-1)} + \delta > 2^{1/(p-1)}$  et  $|c| \leq 2^{1/(p-1)}$ , on a

$$\begin{aligned} |(Q_{p,c}^m(0))^p + c| &\geq (2^{1/(p-1)} + \delta)^p - |c| \\ &= \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} (2^{1/(p-1)})^{p-i} (\delta)^i - |c| \\ &\geq \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} (2^{1/(p-1)})^{p-i} (\delta)^i - 2^{1/(p-1)}. \end{aligned}$$

Comme  $2^{1/(p-1)} > 1$  et  $\delta > 0$ , alors tous les termes de différentes puissances de  $(2^{1/(p-1)} + \delta)^p$  sont positifs et donc

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} (2^{1/(p-1)})^{p-i} (\delta)^i - 2^{1/(p-1)} &\geq 2^{p/(p-1)} + \binom{p}{1} 2\delta - 2^{1/(p-1)} \\ &\geq 2^{1/(p-1)}(2^p - 1) + 2p\delta \end{aligned}$$

$$\geq 2^{1/(p-1)} + 2p\delta.$$

Donc,  $|Q_{p,c}^{m+1}(0)| \geq 2^{1/(p-1)} + 2p\delta$  et la proposition est vraie pour  $n = 1$ .

Supposons qu'elle soit vraie pour un certain  $k \in \mathbb{N}$ , i.e.  $|Q_{p,c}^{m+k}(0)| \geq 2^{1/(p-1)} + (2p)^k \delta$ .

Vérifions si c'est le cas pour  $k + 1 \in \mathbb{N}$ . Quand  $n = k + 1$ , on trouve

$$\begin{aligned} |Q_{p,c}^{m+k+1}(0)| &= |Q_{p,c}(Q_{p,c}^{m+k}(0))| \\ &= |(Q_{p,c}^{m+k}(0))^p + c| \\ &\geq |Q_{p,c}^{m+k}(0)|^p - |c|. \end{aligned}$$

Alors, de l'hypothèse d'induction et du fait que  $|c| \leq 2^{1/(p-1)}$ , on a

$$\begin{aligned} |Q_{p,c}^{m+k}(0)|^p - |c| &\geq \left(2^{1/(p-1)} + (2p)^k \delta\right)^p - |c| \\ &\geq 2^{p/(p-1)} + \binom{p}{1} 2(2p)^k \delta - 2^{1/(p-1)} \\ &\geq 2^{1/(p-1)} + (2p)^{k+1} \delta. \end{aligned}$$

Donc, la proposition est vraie pour  $n = k + 1 \in \mathbb{N}$ . Comme elle est vraie pour  $n = 1$ ,  $k$  et  $k + 1$ , alors elle vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

**Remarque 11.** Pour le cas particulier où  $p = 2$ , on retrouve le résultat classique pour le polynome  $Q_{2,c}(z)$  [GP11].  $\blacktriangle$

**Théorème 2.5.** Un nombre complexe  $c$  appartient à un ensemble de Mandelbrot généralisé  $\mathcal{M}^p$  si et seulement si  $|Q_{p,c}^m(0)| \leq 2^{1/(p-1)} \forall m \in \mathbb{N}$ .

### Démonstration.

La preuve est articulée en deux temps.

i) Soit  $c \in \mathcal{M}^p$ . Supposons que  $|Q_{p,c}^k(0)| > 2^{1/(p-1)}$  pour un certain  $k \geq 1$ . Alors, il existe un  $\delta > 0$  tel que  $|Q_{p,c}^k(0)| = 2^{1/(p-1)} + \delta$ . Ainsi, d'après le lemme 2.5,  $|Q_{p,c}^{k+n}(0)| \geq 2^{1/(p-1)} + (2p)^n \delta$  pour tout  $n \geq 1$ . Donc, d'après le théorème 2.1,  $|Q_{p,c}^m(0)| \rightarrow \infty$  lorsque  $m \rightarrow \infty$  et donc  $c \notin \mathcal{M}^p$ . Ce qui est une contradiction. Alors, on trouve que  $|Q_{p,c}^m(0)| \leq 2^{1/(p-1)} \forall m \geq 1$ .

ii) Soit  $|Q_{p,c}^m(0)| \leq 2^{1/(p-1)} \forall m \geq 1$ . Alors,  $c \in \mathcal{M}^p$ , par définition.  $\square$

**Remarque 12.** Pour le cas particulier où  $p = 2$ ,  $c \in \mathcal{M}^2$  si et seulement si le module des itérées de  $Q_{2,c}^m(0)$  est inférieur ou égal à 2 pour tout entier  $m \geq 1$ . Ceci correspond exactement au critère (b) du théorème 2.2. ▲

Maintenant, la prochaine propriété indique que l'ensemble  $\mathcal{M}^p$  est fermé,  $\forall p \geq 2$ .

**Théorème 2.6.** Soit  $p \geq 2$  un entier. Alors  $\mathcal{M}^p$  est un ensemble fermé.

**Démonstration.**

Soit  $p \geq 2$  un entier. Pour démontrer qu'un ensemble est fermé, il faut démontrer que pour toute suite  $\{z_n\}$  d'éléments de  $\mathcal{M}^p$  convergeant vers  $z_0$ , alors  $z_0 \in \mathcal{M}^p$ . Soit une suite  $\{z_n\}$  d'éléments de  $\mathcal{M}^p$  quelconque qui converge vers  $z_0 \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$ . Comme  $z_n$  est élément de  $\mathcal{M}^p$ , alors d'après le théorème 2.5,  $|Q_{p,z_n}^m(0)| \leq 2^{1/(p-1)}$  pour tout entier  $m \geq 1$ . En prenant la limite lorsque  $n \rightarrow \infty$  de chaque côté de l'inégalité et comme la fonction module est continue, on trouve que

$$\left| \lim_{n \rightarrow \infty} Q_{p,z_n}^m(0) \right| \leq 2^{1/(p-1)} \forall m \in \mathbb{N}.$$

Cette limite existe puisque  $Q_{p,z_n}^m(0)$  est un polynôme de degré  $p^{m-1}$  en  $z_n$  et ainsi une fonction continue pour tout  $m$ . Comme  $z_n \rightarrow z_0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ , ceci implique que

$$|Q_{p,z_0}^m(0)| \leq 2^{1/(p-1)} \forall m \in \mathbb{N}.$$

Donc, en vertu du théorème 2.5,  $z_0 \in \mathcal{M}^p$ . □

**Remarque 13.** Pour le cas particulier où  $p = 2$ , on trouve la propriété (c) du théorème 2.2. On remarque que dans la preuve, le théorème 2.5 s'avère crucial puisqu'il fournit une borne uniforme sur la suite des itérées  $\{Q_{p,c}^m(0)\}_{m=1}^\infty$  lorsque  $c \in \mathcal{M}^p$ . ▲

Comme on peut le remarquer sur la figure 2.3(d), le Multibrot d'ordre 10 semble bénéficier de beaucoup de symétries. En fait, le théorème suivant caractérise les symétries des Multibrot en général (voir aussi [LS96]).

**Théorème 2.7.** Soit  $p \geq 2$  un entier fixé. Sous ces hypothèses,  $c \in \mathcal{M}^p$  si et seulement si  $ce^{i1 \frac{2k\pi}{p-1}} \in \mathcal{M}^p \forall k \in \mathbb{Z}$ .

**Démonstration.**

Posons  $c' := ce^{i_1 \frac{2k\pi}{p-1}}$  avec  $c \in \mathbb{C}(i_1)$  et  $k \in \mathbb{Z}$ . Remarquons que

$$Q_{p,c'}^1(0) = e^{i_1 \frac{2k\pi}{p-1}} Q_{p,c}^1(0).$$

Puis, si on suppose que  $Q_{p,c'}^m(0) = e^{i_1 \frac{2k\pi}{p-1}} Q_{p,c}^m(0)$  pour un entier  $m \geq 1$ , alors

$$\begin{aligned} Q_{p,c'}^{m+1}(0) &= Q_{p,c'}^m(0)^p + c' \\ &= \left( e^{i_1 \frac{2k\pi}{p-1}} Q_{p,c}^m(0) \right)^p + ce^{i_1 \frac{2k\pi}{p-1}} \\ &= e^{i_1 \frac{2k\pi}{p-1}} Q_{p,c}^{m+1}(0). \end{aligned}$$

Ainsi, d'après le principe d'induction mathématique,  $Q_{p,c'}^m(0) = e^{i_1 \frac{2k\pi}{p-1}} Q_{p,c}^m(0) \forall m \in \mathbb{N}$ .

Ainsi, la suite  $\{Q_{p,c'}^m(0)\}$  est bornée si et seulement si la suite  $\{Q_{p,c}^m(0)\}$  est bornée. Autrement dit,  $c \in \mathcal{M}^p$  si et seulement si  $ce^{i_1 \frac{2k\pi}{p-1}} \in \mathcal{M}^p$ .  $\square$

**Théorème 2.8.** Soit un entier  $p \geq 2$  fixé. Alors,  $c \in \mathcal{M}^p$  si et seulement si  $\bar{c} \in \mathcal{M}^p$ .

**Démonstration.**

Comme  $Q_{p,c}^m(0)$  est un polynôme à coefficients réels selon l'indéterminé  $c$ , alors d'après les propriétés du conjugué complexe, on a que  $Q_{p,\bar{c}}^m(0) = \overline{Q_{p,c}^m(0)}$  pour tout entier  $m \geq 1$ . Alors, la suite des itérées  $\{Q_{p,\bar{c}}^m(0)\}$  est bornée si et seulement si  $\{Q_{p,c}^m(0)\}$  est bornée. Autrement dit,  $c \in \mathcal{M}^p$  si et seulement si  $\bar{c} \in \mathcal{M}^p$ .  $\square$

**Remarque 14.** Avec le théorème précédent, on conclut que le groupe diédral [DF99]  $D_{p-1}$  est associé au Multibrot  $\mathcal{M}^p$ . Autrement dit, toutes les symétries d'un polygone régulier à  $p-1$  côté appliquées à un Multibrot d'ordre  $p \geq 2$  laissent invariants ce dernier.  $\blacktriangle$

Nous allons conclure cette section en démontrant quelques propriétés sur la fonction  $Q_{p,c}$ . La première propriété indique que la suite  $\{Q_{p,c}^m(0)\}_{m=1}^{\infty}$  est strictement croissante lorsque  $c > 0$ .

**Lemme 2.6.** Soit  $c > 0$ , où  $c$  est un nombre réel fixé. Alors, la suite des itérées  $\{Q_{p,c}^m(0)\}$  est strictement croissante. De plus, si la suite des itérées est bornée, alors elle converge vers  $c_0 > 0$ .

**Démonstration.**

Soit  $c > 0$  fixé. Procédons par induction. Pour  $m = 1$ , on doit montrer que  $Q_{p,c}^2(0) > Q_{p,c}(0)$ . Or, par définition de  $Q_{p,c}$ , on a

$$Q_{p,c}^2(0) = Q_{p,c}(Q_{p,c}(0)) = Q_{p,c}(c) = c^p + c = c(c^{p-1} + 1) > c = Q_{p,c}(0)$$

puisque  $c^{p-1} + 1 > 1$  et donc la proposition est vraie pour  $m = 1$ . Supposons maintenant qu'elle soit vraie pour un certain  $m = k$ , *i.e.*  $Q_{p,c}^{k+1}(0) > Q_{p,c}^k(0)$ . On veut montrer que c'est aussi le cas pour  $m = k + 1$ . Dans ce cas, on a que

$$Q_{p,c}^{k+2}(0) = Q_{p,c}(Q_{p,c}^{k+1}(0)) = (Q_{p,c}^{k+1}(0))^p + c$$

par définition de  $Q_{p,c}$ . Or,

$$(Q_{p,c}^{k+1}(0))^p + c > (Q_{p,c}^k(0))^p + c$$

par l'hypothèse d'induction. Ainsi, en utilisant de nouveau la définition de  $Q_{p,c}$ , on trouve que

$$Q_{p,c}^{k+2}(0) > (Q_{p,c}^k(0))^p + c = Q_{p,c}^{k+1}(0)$$

et donc que la proposition est vraie pour  $m = k + 1$ . Bref, par le principe d'induction mathématique, la proposition est vraie pour tout entier  $m \geq 1$ .

Pour la deuxième partie, supposons que la suite des itérées  $\{Q_{p,c}^m(0)\}$  soit bornée où  $c > 0$ . De la première partie du lemme,  $\{Q_{p,c}^m(0)\}$  est strictement croissante et comme toute suite monotone bornée est convergente, alors elle converge vers  $c_0 \in \mathbb{R}$ . De plus, comme la suite  $\{Q_{p,c}^m(0)\}$  est strictement croissante et comme  $Q_{p,c}^1(0) = c$ , on a que  $Q_{p,c}^m(0) > c$ , pour tout entier  $m \geq 2$ . Ainsi,  $c_0 \geq c > 0$ .  $\square$

La deuxième propriété énonce que pour des puissances entières  $p$  impaires, la suite  $\{Q_{p,c}^m(0)\}_{m=1}^{\infty}$  est strictement décroissante lorsque  $c < 0$ .

**Lemme 2.7.** Soit  $c < 0$ , où  $c$  est un nombre réel fixé. Alors, la suite des itérées  $\{Q_{p,c}^m(0)\}$  est strictement décroissante pour un entier impair  $p \geq 2$ . De plus, si la suite des itérées est bornée, alors elle converge vers  $c_0 < 0$ .

**Démonstration.**

Supposons  $p$  impair et positif, *i.e.* que  $p$  peut s'écrire comme  $p = 2q + 1$ , avec  $q \in \mathbb{N}$ . Montrons par induction que la suite  $\{Q_{p,c}^m(0)\}_{m=1}^{\infty}$  est strictement décroissante. Pour  $m = 1$ , on a

$$Q_{p,c}(0) = c > c^{2q}c + c = c^p + c = Q_{p,c}^2(0),$$

car  $c^{2q} > 0$  et donc que  $c^{2q+1} = c^p < 0$ . Supposons que  $Q_{p,c}^k(0) > Q_{p,c}^{k+1}(0)$  pour un certain  $m = k \in \mathbb{N}$ . Ainsi, on a

$$\begin{aligned} Q_{p,c}^{k+2}(0) &= (Q_{p,c}^{k+1}(0))^p + c \\ &< (Q_{p,c}^k(0))^p + c \\ &= Q_{p,c}^{k+1}(0) \end{aligned}$$

et donc que la proposition est vraie pour  $m = k + 1$ . Par conséquent, on a montré par induction que lorsque  $p$  est impair, alors la suite des itérées  $\{Q_{p,c}^m(0)\}_{m=1}^{\infty}$  est strictement décroissante.

La deuxième partie se fait de façon semblable à celle du lemme 2.6.  $\square$

Donc, nous avons vu que la plupart des propriétés attribuées à l'ensemble de Mandelbrot restent valides pour les ensembles multibrots, mais elles se présentent sous différentes formes. Dans la prochaine section, nous explorons l'intersection entre l'axe réel et le Multibrot d'ordre trois  $\mathcal{M}^3$ . La marche à suivre est analogue à celle empruntée pour démontrer la propriété (e) du théorème 2.2. Cependant, elle nous sert de guide pour en déduire le résultat général.

**Cas particulier :  $p = 3$** 

Dans cette sous-section, on nomme *Mandelbrique*, le Multibrot  $\mathcal{M}^3$ . Le but de cette sous-section est de caractériser l'ensemble  $\mathcal{M}^3 \cap \mathbb{R}$ . Le lemme suivant sera utile pour caractériser  $\mathcal{M}^3 \cap \mathbb{R}$ . Ce dernier est une conséquence du théorème 2.7.

**Corollaire 2.1.** Supposons que  $c \in \mathcal{M}^3$ . Alors  $-c \in \mathcal{M}^3$ .

**Démonstration.**

Posons  $k = 1$  dans le théorème 2.7. Alors,  $-c \in \mathcal{M}^3$ .  $\square$

Nous démontrons maintenant le théorème principal.

**Théorème 2.9.** Le Mandelbrique rencontre l'axe réel sur  $\left[-\frac{2}{3\sqrt{3}}, \frac{2}{3\sqrt{3}}\right]$ .

**Démonstration.**

Soit le polynôme  $R_{3,c}(x) = Q_{3,c}(x) - x = x^3 - x + c$  où  $c \in \mathbb{R}$  et posons  $D = -4 + 27c^2$ . Selon le corollaire 2.1, on peut supposer que  $c \geq 0$ .

Nous allons d'abord démontrer que tout nombre  $c > \frac{2}{3\sqrt{3}}$  n'appartient pas au Mandelbrique. Si  $c > \frac{2}{3\sqrt{3}}$ , alors  $D > 0$ . Par conséquent, selon le théorème A.1 de l'annexe A,  $R_{3,c}$  possède une seule et unique racine réelle, disons  $x_0$ . Cette racine est donnée par l'expression suivante (voir le corollaire A.1 de l'annexe A) :

$$x_0 = \sqrt[3]{-\frac{c}{2} + \frac{\sqrt{c^2 - 4/27}}{2}} + \sqrt[3]{-\frac{c}{2} - \frac{\sqrt{c^2 - 4/27}}{2}}. \quad (2.10)$$

Supposons le contraire de ce que nous voulons montrer, soit que le nombre  $c$  est dans le Mandelbrique (la suite des itérées est bornée). Alors, d'après le lemme 2.6, la suite des itérées  $\{Q_{3,c}^m(0)\}_{m=1}^{\infty}$  est strictement croissante et elle converge vers  $c_0 > 0$ , i.e.  $\lim_{m \rightarrow \infty} Q_{3,c}^m(0) = c_0$ . Comme  $Q_{3,c}^m(0)$  est un polynôme de degré  $3^{m-1}$  (pour tout entier positif  $m$ ) et donc une fonction continue, on a que

$$c_0 = \lim_{m \rightarrow \infty} Q_{3,c}^{m+1}(0) = Q_{3,c} \left( \lim_{m \rightarrow \infty} Q_{3,c}^m(0) \right) = Q_{3,c}(c_0)$$

et conséquemment,  $c_0$  est racine du polynôme  $R_{3,c}(x)$ . Donc, par unicité,  $x_0 = c_0$ . Cependant, on a que  $\frac{c}{2} > -\frac{c}{2}$ . Ainsi, en ajoutant  $\frac{\sqrt{c^2 - 4/27}}{2}$  et en prenant la racine cubique, on obtient l'inégalité équivalente suivante :

$$0 > \sqrt[3]{-\frac{c}{2} + \frac{\sqrt{c^2 - 4/27}}{2}} + \sqrt[3]{-\frac{c}{2} - \frac{\sqrt{c^2 - 4/27}}{2}}.$$

Dans ce cas, d'après (2.10),  $x_0 < 0$ . Ceci est une contradiction puisque  $x_0 = c_0 > 0$ .

Enfin, supposons  $c \in \left[0, \frac{2}{3\sqrt{3}}\right]$ . Évidemment, si  $c = 0$ ,  $c \in \mathcal{M}^3$ . Soit  $c \in \left(0, \frac{2}{3\sqrt{3}}\right]$ . Dans ce cas,  $D \leq 0$  et d'après le théorème A.1 de l'annexe A,  $R_{3,c}(x)$  possède trois racines réelles. L'une d'entre elles est donnée par (voir les corollaires A.2 et A.3 de l'annexe A)

$$a = \sqrt[3]{-\frac{c}{2} + \mathbf{i}_1 \frac{\sqrt{4 - 27c^2}}{2\sqrt{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{c}{2} - \mathbf{i}_1 \frac{\sqrt{4 - 27c^2}}{2\sqrt{27}}} \quad (2.11)$$

qui peut aussi s'exprimer par

$$a = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{\theta}{3}\right) \quad (2.12)$$

lorsque  $c \in \left(0, \frac{2}{3\sqrt{3}}\right]$  et où  $\theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{4-27c^2}}{-3c\sqrt{3}}\right) + \pi$  qui est bien défini puisque  $-D = 4 - 27c^2 \geq 0$ . Montrons par induction que  $|Q_{3,c}^m(0)| \leq a$  pour tout  $m \in \mathbb{N}$ . Pour  $m = 1$ , on a que  $|Q_{3,c}(0)| = |c| \leq a$  puisque  $|c| \leq \frac{2}{3\sqrt{3}} < \frac{1}{\sqrt{3}} \leq a$  (on peut s'en convaincre avec la figure 2.4). En fait, on remarque que  $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$  de sorte que  $\frac{1}{2} \leq \cos(\theta/3) < \frac{\sqrt{3}}{2}$ , d'où  $\frac{1}{\sqrt{3}} \leq a < 1$ . Supposons maintenant que  $|Q_{3,c}^k(0)| \leq a$  pour un certain  $k \in \mathbb{N}$ . Alors

$$|Q_{3,c}^{k+1}(0)| = |(Q_{3,c}^k(0))^3 + c| \leq |Q_{3,c}^k(0)|^3 + |c| < |a|^3 + |c| = a^3 + c = a,$$

car  $a$  est racine de  $R_{3,c}(x) = x^3 - x + c$ . Donc, la proposition est vraie pour  $k + 1$  lorsqu'elle est vraie pour  $k$  et par induction on a montré que  $|Q_{3,c}^m(0)| \leq a$  pour tout  $m \in \mathbb{N}$ . Ainsi, comme  $a < \sqrt{2}$ , d'après la propriété (b) du théorème 2.2,  $c \in \mathcal{M}^3$ .

Bref, l'ensemble  $\mathcal{M}^3$  rencontre l'axe réel sur l'intervalle  $\left[0, \frac{2}{3\sqrt{3}}\right]$ .  $\square$

**Remarque 15.** D'abord, la racine de  $R_{3,c}(x)$  utilisée dans la troisième partie de la preuve provient du corollaire A.2 de l'annexe A. De plus, la nouvelle forme de la racine de  $R_{3,c}(x)$  est obtenue en déterminant les racines du trinôme  $T(x) = t^2 + ct + 1/27$  et en les exprimant sous forme polaire lorsque  $c \neq 0$ . En effet, on a que ces racines sont

$$t_1 = -\frac{c}{2} + \mathbf{i}_1 \frac{\sqrt{4-27c^2}}{2\sqrt{27}}$$

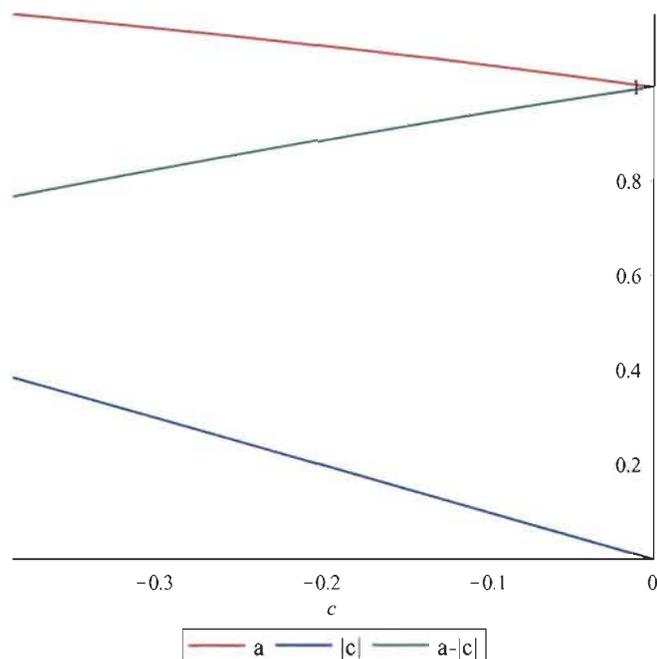
$$\bar{t}_1 = -\frac{c}{2} - \mathbf{i}_1 \frac{\sqrt{4-27c^2}}{2\sqrt{27}}$$

de sorte que  $|t_1| = |\bar{t}_1| = \frac{1}{3\sqrt{3}}$  et  $\theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{4-27c^2}}{-3c\sqrt{3}}\right) + \pi$ . Ceci nous permet d'écrire les racines sous leur forme polaire

$$t_1 = \frac{1}{3\sqrt{3}} (\cos(\theta) + \mathbf{i}_1 \sin(\theta)) \quad (2.13)$$

$$\bar{t}_1 = \frac{1}{3\sqrt{3}} (\cos(\theta) - \mathbf{i}_1 \sin(\theta)). \quad (2.14)$$

Puis, d'après le lemme A.1 de l'annexe A, une des racines réelles de  $R_{3,c}(x)$  est donnée par  $\sqrt[3]{t} + \sqrt[3]{\bar{t}}$ . En utilisant la formule de De Moivre (pour  $k = 0$ ) et les expressions

FIGURE 2.4 – Illustration de  $a$ ,  $a - |c|$  et  $|c|$ 

données dans (2.13) et (2.14), on obtient la nouvelle forme de la racine donnée dans la preuve du théorème précédent, soit

$$a = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{\theta}{3}\right).$$

▲

Donc, nous savons maintenant que le Mandelbrot rencontre l'axe réel sur l'intervalle donné dans le théorème 2.9. Les résultats de cette sous-section sont répertoriés dans [PR15] un article publié dans la revue *Non Linear Dynamics*.

Cependant, comme le lecteur l'a peut-être constaté, la méthode utilisée dans la preuve du théorème 2.9 se complexifie rapidement avec la croissance du degré du polynôme  $Q_{p,c}$ . En effet, les preuves de la propriété (e) du théorème 2.2 et du théorème 2.9 se basent sur une analyse minutieuse de la nature (complexes ou réelles) des racines du polynôme  $R_{p,c}(x) = x^p - x + c$  et, avec l'impossibilité de trouver des expressions explicites pour les racines d'un polynôme de degré supérieur à 4 (dû à la théorie de Galois [DF99] et la preuve d'Abel), les preuves pour  $p \geq 5$  deviennent impossibles... Du moins, pour les polynômes  $Q_{p,c}$  dont les racines ne peuvent être exprimées à l'aide des quatre opérations élémentaires (+, −, ÷ et ×) et de l'extraction

de racines. Une autre approche possible est d’explorer l’emplacement des racines réelles du polynôme  $R_{p,c}$  via des théorèmes en analyse en une variable réelle. Cette approche est présentée dans l’article [PR17]. Une autre approche est aussi présentée dans [PRR17].

Nous allons maintenant changer de registre et aborder les ensembles de Mandelbrot sur l’espace des nombres hyperboliques. Le lecteur peut consulter l’annexe B pour en connaître davantage sur les nombres hyperboliques ou encore consulter le mémoire de H. Moreau [Mor17].

## 2.5 Les ensembles hyperbrots

Nous avons vu à la section 2.1 un sous-ensemble des nombres tricomplexes isomorphes aux nombres hyperboliques, soit l’ensemble  $\mathbb{D}(\mathbf{j}_1)$ . Nous allons maintenant définir les ensembles de Mandelbrot d’un point de vue de la dynamique hyperbolique en itérant un polynôme de la forme  $Q_{p,c}(z) = z^p + c$  où  $z, c \in \mathbb{D}(\mathbf{j}_1)$  et  $p \geq 2$ .

**Définition 2.7.** Soit  $Q_{p,c}(z) = z^p + c$  avec  $z, c \in \mathbb{D}(\mathbf{j}_1)$  et  $p \geq 2$  un entier. Les ensembles de Mandelbrot hyperbolique, noté  $\mathcal{H}^p$ , sont définis comme

$$\mathcal{H}^p := \left\{ c \in \mathbb{D}(\mathbf{j}_1) : \left\{ Q_{p,c}^m(0) \right\}_{m=1}^{\infty} \text{ est bornée} \right\}. \quad (2.15)$$

Nous désignerons, dans ce qui suit, les ensembles de Mandelbrot hyperbolique par *Hyperbrot*. Les figures 2.5(a), 2.5(b), 2.5(c) et 2.5(d) représentent respectivement les Hyperbrots  $\mathcal{H}^2$ ,  $\mathcal{H}^3$ ,  $\mathcal{H}^4$  et  $\mathcal{H}^9$ .

Les mêmes critères (la propriété (b) du théorème 2.2) utilisés pour visualiser les ensembles de Mandelbrot sont empruntés pour générer les Hyperbrot. Ces images ont toutes la même résolution ( $750 \times 750$  pixels). Nous pouvons remarquer que les figures semblent représenter des carrés. C’est assez surprenant. C’est en fait ce que P. Senn a remarqué dans son article de 1990 [Sen90] pour le cas  $p = 2$ . C’est en 1994 que ce fait est démontré par W. Metzler [Met94]. Les deux prochaines sous-sections mettent en lumière ce fait pour le cas où  $p = 2$  et  $p = 3$ . Pour arriver au cas du Mandelbrot d’ordre trois  $\mathcal{H}^3$ , nous allons explorer maintenant la démarche employée par Metzler pour démontrer que l’ensemble  $\mathcal{H}^2$  est un carré!

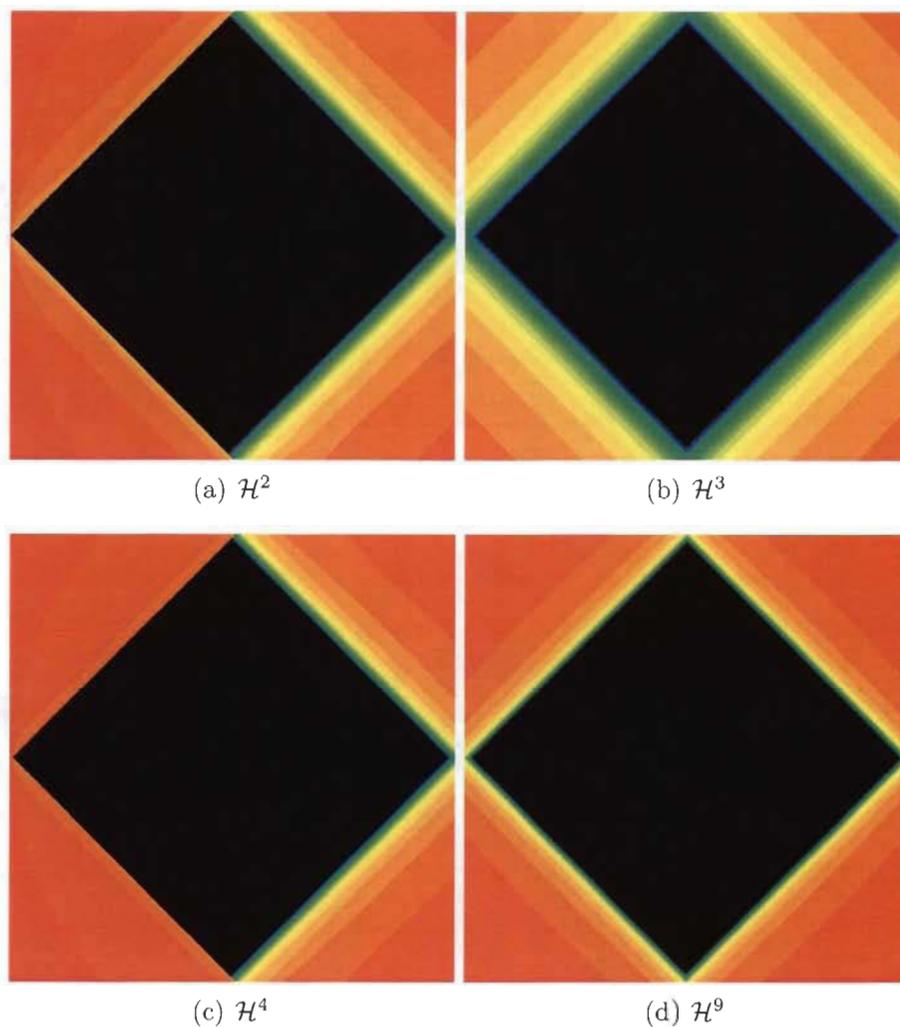


FIGURE 2.5 – Certains Hyperbrot associés au polynôme  $Q_{p,c}$

## Ensemble de Mandelbrot hyperbolique

Dans le but de démontrer le résultat suivant :

**Théorème 2.10.** L'ensemble de Mandelbrot hyperbolique peut s'écrire comme

$$\mathcal{H}^2 := \left\{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 : \left| a + \frac{7}{8} \right| + |b| \leq \frac{9}{8} \right\}. \quad (2.16)$$

Il s'agit d'un carré de côté  $\sqrt{2} \frac{9}{8}$  et de diagonale  $2\frac{1}{4}$ .

W. Metzler a d'abord introduit deux opérations de multiplication  $\diamond$  et  $*$  sur  $\mathbb{R}^2$ . La première opération  $\diamond$  est explicitée dans la définition suivante.

**Définition 2.8.** Soit  $(u, v)^\top, (x, y)^\top \in \mathbb{R}^2$ . Alors, l'opération de multiplication  $\diamond$  est définie comme suit

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \diamond \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} ux + vy \\ vx + uy \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

**Remarque 16.** Il faut remarquer que

1.  $(\mathbb{R}^2, +, \diamond)$  forme une structure d'anneau commutatif avec unité [Met94].
2. On remarque que l'opération  $\diamond$  est analogue à la multiplication de deux nombres hyperboliques  $z_1 = u + v\mathbf{j}$  et  $z_2 = x + y\mathbf{j}$  (voir la définition B.2 de l'annexe B).

▲

La deuxième opération est introduite dans la définition ci-dessous.

**Définition 2.9.** Soit  $(u, v)^\top, (x, y)^\top \in \mathbb{R}^2$ . Alors, l'opération de multiplication  $*$  est définie comme suit

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} ux \\ vy \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

**Remarque 17.** Remarquons que

1.  $(\mathbb{R}^2, +, *)$  forme une structure d'anneau commutatif avec unité [Met94].
2. On remarque que l'opération  $*$  est la multiplication de composantes à composantes des deux vecteurs. Elle correspond à la multiplication de deux nombres hyperboliques sous leur représentation idempotente (voir [Mor17]).

▲

Puis, Metzler introduit un isomorphisme  $T$  entre  $(\mathbb{R}^2, +, \diamond)$  et  $(\mathbb{R}^2, +, *)$ . En fait, la fonction  $T$  est une matrice :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

de sorte que  $\forall (u, v)^\top, (x, y)^\top \in \mathbb{R}^2$ ,

$$T \left[ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \diamond \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right] = T \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} * T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

et que  $T$  soit une bijection. Nous allons le démontrer.

**Lemme 2.8.** La matrice  $T$  de (2.19) est un isomorphisme linéaire entre  $(\mathbb{R}^2, +, \diamond)$  et  $(\mathbb{R}^2, +, *)$

**Démonstration.**

Il faut montrer que i)  $T$  est un homomorphisme et ii)  $T$  est bijectif.

- i) Soit  $(x, y)^\top, (u, v)^\top \in \mathbb{R}^2$ . L'addition se vérifie facilement. Vérifions si la multiplication est conservée. On a que

$$\begin{aligned} T \left[ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \diamond \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right] &= T \begin{pmatrix} ux + vy \\ uy + vx \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ux + vy - uy - vx \\ xu + yu + xv + yu \end{pmatrix} \end{aligned}$$

par définition de  $\diamond$  et de  $T$ . Puis,

$$\begin{aligned} T \left[ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \diamond \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right] &= \begin{pmatrix} (u-v)(x-y) \\ (u+v)(x+y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u-v \\ u+v \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix} \\ &= T \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} * T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

par la définition de  $*$  et de  $T$ . Ainsi,  $T$  est bien un homomorphisme.

- ii) Maintenant, montrons que  $T$  est bijectif.  $T$  est injectif puisque  $\ker T = \{0\}$ . En effet, la seule solution au système  $T(x, y)^\top = (0, 0)^\top$  est le vecteur  $(0, 0)^\top$ . Ensuite, d'après le théorème noyau-image [DF99], on a que  $\text{Im } T = \mathbb{R}^2$ . Donc,  $T$  est bijectif et on a le résultat voulu.

□

**Remarque 18.** Ainsi, d'après ce résultat, l'inverse  $T^{-1}$  existe et les deux structures algébriques sont les mêmes du point de vue abstrait. ▲

En définissant le polynôme

$$\mathbf{H}_{2,(a,b)} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \diamond \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad (2.21)$$

W. Metzler réduit l'étude de la dynamique de  $\mathbf{H}_{2,(a,b)}$  à celle des deux polynômes  $Q_{2,a-b}(x-y)$  et  $Q_{2,a+b}(x+y)$ . Autrement exprimé, il démontre que  $\forall m \in \mathbb{N}$  et  $\forall (x, y)^\top \in \mathbb{R}^2$ ,

$$T\mathbf{H}_{2,(a,b)}^m \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{2,a-b}^m(x-y) \\ Q_{2,a+b}^m(x+y) \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

Enfin, il utilise l'intervalle  $[-2, \frac{1}{4}] = \mathcal{M}^2 \cap \mathbb{R}$  et le résultat donné à l'équation (2.22) afin de prouver le résultat voulu du théorème 2.10.

Donc, nous allons utiliser la même tactique pour démontrer que l'ensemble hyperbrot  $\mathcal{H}^3$ , nommé Hyperbrique, est l'ensemble des nombres  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  satisfaisant l'inégalité

$$|a| + |b| \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}. \quad (2.23)$$

## Mandelbrique hyperbolique

En accord avec la définition 2.7, l'Hyperbrique est défini comme l'ensemble des nombres  $c \in \mathbb{D}(\mathbf{j}_1)$  tel que la suite des itérées  $\{Q_{3,c}^n(0)\}_{m=1}^\infty$  soit bornée. On définit  $\mathbf{H}_{3,c}$  par

$$\mathbf{H}_{3,c} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \diamond \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \diamond \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

où  $\diamond$  est l'opération de la définition 2.8 et  $(a, b)^\top \in \mathbb{R}^2$ .

**Lemme 2.9.** Pour tout entier positif  $m$ , on a que

$$T\mathbf{H}_{3,c}^m \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{3,a-b}^m(x-y) \\ Q_{3,a+b}^m(x+y) \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

où  $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $Q_{3,d}(u) = u^3 + d$  avec  $u, d \in \mathbb{R}$ .

### Démonstration.

Soit  $c = (a, b)^\top$  où  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $(x, y)^\top$  avec  $x, y \in \mathbb{R}$ . On effectue la preuve par induction sur  $m$ . Pour  $m = 1$ , on a que

$$T\mathbf{H}_{3,c}^1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \left[ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \diamond \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \diamond \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right]$$

$$= T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} * T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} * T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + T \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

puisque  $T$  est un isomorphisme. Par définition de  $T$  et de  $*$ , il s'ensuit que

$$\begin{aligned} T\mathbf{H}_{3,c}^1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a-b \\ a+b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (x-y)^3 \\ (x+y)^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a-b \\ a+b \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, par définition de  $Q_{3,d}$ , on trouve que

$$T\mathbf{H}_{3,c}^1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{3,a-b}^1(x-y) \\ Q_{3,a+b}^1(x+y) \end{pmatrix}.$$

Maintenant, supposons que, pour un certain  $m = k$ ,

$$T\mathbf{H}_{3,c}^k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{3,a-b}^k(x-y) \\ Q_{3,a+b}^k(x+y) \end{pmatrix}. \quad (2.26)$$

Alors,

$$\begin{aligned} T\mathbf{H}_{3,c}^{k+1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= T\mathbf{H}_{3,c} \left( \mathbf{H}_{3,c}^k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \\ &= T \left[ \mathbf{H}_{3,c}^k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \diamond \mathbf{H}_{3,c}^k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \diamond \mathbf{H}_{3,c}^k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right] \\ &= T\mathbf{H}_{3,c}^k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} * T\mathbf{H}_{3,c}^k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} * T\mathbf{H}_{3,c}^k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + T \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

puisque  $T$  est un isomorphisme. Puis, par l'hypothèse d'induction (2.26), on trouve que

$$\begin{aligned} T\mathbf{H}_{3,c}^{k+1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} Q_{3,a-b}^k(x-y) \\ Q_{3,a+b}^k(x+y) \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} Q_{3,a-b}^k(x-y) \\ Q_{3,a+b}^k(x+y) \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} Q_{3,a-b}^k(x-y) \\ Q_{3,a+b}^k(x+y) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a-b \\ a+b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \left( Q_{3,a-b}^k(x-y) \right)^3 \\ \left( Q_{3,a+b}^k(x+y) \right)^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a-b \\ a+b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Q_{3,a-b}^{k+1}(x-y) \\ Q_{3,a+b}^{k+1}(x+y) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et donc, par le principe d'induction mathématique, la proposition est vraie  $\forall m \in \mathbb{N}$ .  $\square$

**Remarque 19.** Ce résultat permet d'étendre l'étude de la dynamique du polynôme  $\mathbf{H}_{3,c}$  à la dynamique de deux polynômes réels  $Q_{3,a-b}$  et  $Q_{3,a+b}$  puisque  $T$  est un isomorphisme (voir le lemme 2.8) entre les deux structures algébriques  $(\mathbb{R}^2, +, \diamond)$  et  $(\mathbb{R}^2, +, *)$ .  $\blacktriangle$

Le lemme 2.9 nous permet de démontrer le théorème suivant :

**Théorème 2.11.**  $\mathcal{H}^3 = \left\{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 : |a| + |b| \leq \frac{2}{3\sqrt{3}} \right\}$ .

**Démonstration.**

D'après la remarque 19 et le lemme 2.9, on a que  $\left\{ \mathbf{H}_{3,(a,b)}^m(0) \right\}_{m=1}^{\infty}$  est bornée ssi  $\left\{ Q_{3,a-b}^m(0) \right\}_{m=1}^{\infty}$  et  $\left\{ Q_{3,a+b}^m(0) \right\}_{m=1}^{\infty}$  sont bornées. Cependant, ces deux dernières suites sont réelles et d'après le théorème 2.9, on doit avoir que

$$|a - b| \leq \frac{2}{3\sqrt{3}} \text{ et } |a + b| \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}. \quad (2.27)$$

Nous allons maintenant démontrer que les inégalités (2.27) sont nécessaires et suffisantes à l'inégalité de l'énoncé. Si l'inégalité de l'énoncé est vérifiée, alors, par les propriétés de la valeur absolue, les inégalités (2.27) sont aussi vérifiées. Supposons que les inégalités (2.27) soient vérifiées. Alors, quatre cas sont à considérer :

- i) si  $a \geq 0$  et  $b \geq 0$ , alors  $|a| + |b| = a + b \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}$  ;
- ii) si  $a \geq 0$  et  $b < 0$ , alors  $|a| + |b| = a - b \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}$  ;
- iii) si  $a < 0$  et  $b \geq 0$ , alors  $|a| + |b| = -a + b = -(a - b) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}$  ;
- iv) si  $a < 0$  et  $b < 0$ , alors  $|a| + |b| = -a - b = -(a + b) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}$ .

□

C'est ainsi que l'ensemble  $\mathcal{H}^3$  est un carré centré à l'origine.

## Cas général

Remarquons que dans le cas où  $p = 2$ , le carré est centré en  $t_p = -\frac{7}{8}$  pour  $p = 2$ . Tandis que dans le cas où  $p = 3$ , l'ensemble est centré à l'origine. Ce phénomène

provient du théorème 3.12 (voir conclusion) énonçant la caractérisation complète des intersections réelles des ensembles multibrots. Il faut remarquer que l'intervalle donné dans ce théorème lorsque  $p$  est un entier pair n'est pas symétrique. Par conséquent, ceci explique le décalage du carré lorsque  $p = 2$ . En fait, on peut démontrer, avec la même technique utilisée ci-haut qu'en général, les ensembles  $\mathcal{H}^p$  sont des carrés lorsque  $p \geq 2$ .

**Théorème 2.12.** Soit  $p \geq 2$  un entier. Alors,

a) si  $p$  est pair,

$$\mathcal{H}^p = \left\{ (a, b)^\top \in \mathbb{R}^2 : |a - t_p| + |b| \leq l_p \right\}$$

$$\text{où } t_p := \frac{-p[(2p)^{1/(p-1)} - 1] - 1}{2p^{p/(p-1)}} \text{ et } l_p := \frac{p[(2p)^{1/(p-1)} + 1] - 1}{p^{p/(p-1)}}.$$

b) Si  $p$  est impair,

$$\mathcal{H}^p = \left\{ (a, b)^\top \in \mathbb{R}^2 : |a| + |b| \leq \frac{p-1}{p^{p/(p-1)}} \right\}.$$

**Démonstration.**

La preuve de ce théorème se trouve dans les articles [PR17] et [PRR17]. □

Dans le prochain chapitre, nous verrons comment définir les ensembles multibrots dans l'espace des nombres tricomplexes. Les résultats de cette section s'avéreront très utiles dans certains contextes, comme la caractérisation d'une certaine coupe tridimensionnelle de l'ensemble de Mandelbrot tricomplexe.

## Ensembles de Mandelbrot tricomplexes

Dans ce chapitre, nous généralisons les Multibrots à l'espace des nombres tricomplexes. Pour y arriver, nous introduisons, à la première section, certains sous-espaces importants qui serviront à la classification des coupes tridimensionnelles de l'ensemble de Mandelbrot. À la deuxième section, nous présentons quelques propriétés des polynômes à valeurs tricomplexes en lien avec la représentation idempotente d'un nombre tricomplexe. Puis, les Multibrots tricomplexes sont présentés à la troisième section. Nous démontrons certaines de leurs propriétés en général. Enfin, à la dernière section, nous étudions les coupes tridimensionnelles de l'ensemble  $\mathcal{M}_3^3$ . Nous montrons que ce Multibrot d'ordre 3 a exactement quatre classes de coupes tridimensionnelles dont l'une est un octaèdre régulier. Ce dernier cas permet d'établir une conjecture sur le nombre de coupes tridimensionnelles distinctes selon la puissances du polynôme  $Q_{p,c}$ .

### 3.1 Sous-espaces importants

Nous avons vu au chapitre 1 que tout nombre tricomplexe admet une représentation idempotente. Cette représentation idempotente permet de définir deux types de produit cartésien.

**Définition 3.1** ( $\mathbb{M}(3)$ -cartésien). Le **produit  $\mathbb{M}(3)$ -cartésien** de deux sous-ensembles  $X_1, X_2 \subset \mathbb{M}(2)$ , noté  $X_1 \times_{\gamma_3} X_2$ , est défini par

$$X_1 \times_{\gamma_3} X_2 := \{h_1\gamma_3 + h_2\overline{\gamma_3} : h_1 \in X_1, h_2 \in X_2\}.$$

**Proposition 3.1.** L'application  $\Gamma_3 : X_1 \times X_2 \rightarrow X_1 \times_{\gamma_3} X_2$ ,  $(h_1, h_2) \mapsto h_1\gamma_3 + h_2\overline{\gamma_3}$  est un homéomorphisme entre  $(X_1 \times X_2, \|\cdot\|_3)$  et  $(X_1 \times_{\gamma_3} X_2, \|\cdot\|_3)$ .

**Démonstration.**

Ceci provient du fait que  $\|(h_1, h_2)\|_3 = \sqrt{\frac{\|h_1\|_2^2 + \|h_2\|_2^2}{2}} = \|h_1\gamma_3 + h_2\overline{\gamma_3}\|_3$ .  $\square$

**Remarque 20.** Ainsi,  $X_1 \times_{\gamma_3} X_2$  a une certaine propriété topologique (ensemble fermé, ouvert, borné, compact, etc.) si et seulement si  $X_1$  et  $X_2$  ont la même propriété.

Par le fait même, on note par  $\gamma_3 : X_1 \times_{\gamma_3} X_2 \rightarrow X_1$  et  $\overline{\gamma_3} : X_1 \times_{\gamma_3} X_2 \rightarrow X_2$  les projections sur  $X_1$  et  $X_2$  respectivement.  $\blacktriangle$

Cette définition nous en amène d'autres. En effet, le produit  $\mathbb{M}(3)$ -cartésien permet de construire différents types de disque.

**Définition 3.2.** Soit  $\eta \in \mathbb{M}(3)$  et  $r, r_1, r_2 > 0$ .

i) La **boule ouverte** centrée en  $\eta$  est définie par

$$B_3(\eta, r) := \{\zeta \in \mathbb{M}(3) : \|\zeta - \eta\|_3 < r\}.$$

ii) Le **disque ouvert tricomplexe** de rayons  $r_1, r_2$  centré en  $\eta$  est défini par

$$D_3(\eta, r_1, r_2) := B_2(\gamma_3(\eta), r_1) \times_{\gamma_3} B_2(\overline{\gamma_3}(\eta), r_2).$$

iii) Le **disque fermé tricomplexe** de rayons  $r_1, r_2$  centré en  $\eta$  est défini par

$$\overline{D}_3(\eta, r_1, r_2) := \overline{B}_2(\gamma_3(\eta), r_1) \times_{\gamma_3} \overline{B}_2(\overline{\gamma_3}(\eta), r_2).$$

**Remarque 21.** Lorsque  $r := r_1 = r_2 > 0$ , alors on simplifie la notation  $D_3(\eta, r_1, r_2)$  (respectivement  $\overline{D}_3(\eta, r_1, r_2)$ ) par  $D_3(\eta, r)$  (respectivement  $\overline{D}_3(\eta, r)$ ).  $\blacktriangle$

Plus loin dans ce chapitre, nous allons explorer les coupes tridimensionnelles de l'ensemble de Mandelbrot d'ordre  $p = 3$ . Pour faire l'étude de ces coupes, nous définissons les sous-espaces vectoriels suivants.

**Définition 3.3.** Soit  $\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l \in \{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \mathbf{i}_4, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3\}$  avec  $\mathbf{i}_k \neq \mathbf{i}_l$ . On définit le premier type de sous-espace

$$\mathbb{M}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l) := \{x_1 + x_2\mathbf{i}_k + x_3\mathbf{i}_l + x_4\mathbf{i}_k\mathbf{i}_l : x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}.$$

**Remarque 22.** Dans [GP11], il est montré que  $(\mathbb{M}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l), +, \cdot) \simeq (\mathbb{M}(2), +, \cdot)$  où  $\mathbf{i}_k \in \{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \mathbf{i}_4\}$  et  $\mathbf{i}_l \in \{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \mathbf{i}_4, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3\}$  avec  $\mathbf{i}_k \neq \mathbf{i}_l$ . Aussi, on remarque que

$$\mathbb{M}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2) = \{x_1 + x_2\mathbf{j}_1 + x_3\mathbf{j}_2 - x_4\mathbf{j}_3 : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, 4\}$$

puisque  $\mathbf{j}_1\mathbf{j}_2 = -\mathbf{j}_3$ . Ainsi, on trouve que  $\mathbb{M}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2) = \mathbb{M}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_3) = \mathbb{M}(\mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)$ . Ces derniers ensembles seront nommés les ensembles biduplexes que l'on note  $\mathbb{D}(2)$ . ▲

En fait,  $\mathbb{M}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l)$  correspond à l'espace vectoriel engendré par les unités 1,  $\mathbf{i}_k$ ,  $\mathbf{i}_l$  et  $\mathbf{i}_k\mathbf{i}_l$ . Autrement dit, on a

$$\mathbb{M}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l) = \text{span}_{\mathbb{R}} \{1, \mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_k\mathbf{i}_l\}$$

où  $\text{span}_{\mathbb{R}}$  représente toutes les combinaisons linéaires à coefficients réels.

**Définition 3.4.** Soit  $\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m \in \{1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \mathbf{i}_4, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3\}$  avec  $\mathbf{i}_k \neq \mathbf{i}_l$ ,  $\mathbf{i}_k \neq \mathbf{i}_m$  et  $\mathbf{i}_l \neq \mathbf{i}_m$ . On définit le deuxième type de sous-espace

$$\mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_m, \mathbf{i}_l) := \{x_1\mathbf{i}_k + x_2\mathbf{i}_m + x_3\mathbf{i}_l : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}.$$

**Remarque 23.** L'ensemble  $\mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_m, \mathbf{i}_l)$  est en fait le sous-espace vectoriel engendré par les unités  $\mathbf{i}_k$ ,  $\mathbf{i}_m$  et  $\mathbf{i}_l$ . Autrement dit, on peut l'écrire comme ceci

$$\mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_m, \mathbf{i}_l) = \text{span}_{\mathbb{R}} \{\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_m, \mathbf{i}_l\}.$$

▲

## 3.2 Polynômes tricomplexes

Nous rappelons d'abord quelques propriétés des polynômes à valeurs bicomplexes. Le lecteur peut consulter les ouvrages suivants [Pri91] et [LESSV15].

Une fonction  $P : \mathbb{M}(2) \rightarrow \mathbb{M}(2)$  est un **polynôme bicomplexe** si elle est de la forme

$$P(w) = \sum_{i=0}^r c_i w^i$$

où  $c_0, c_1, \dots, c_r \in \mathbb{M}(2)$  et  $c_r \in \mathbb{M}(2)^{-1}$ . Le degré d'un polynôme bicomplexe  $P$  correspond à la plus grande puissance de la variable indépendante dont le coefficient rattaché est inversible. Cette caractéristique est notée  $\text{Deg}(P)$ . Ainsi, pour le polynôme  $P(w) = \sum_{i=0}^r c_i w^i$  où  $c_r \in \mathbb{M}(2)^{-1}$ , on obtient que  $\text{Deg}(P) = r$ .

En vertu de la représentation idempotente d'un nombre bicomplexe, il est possible d'exprimer les nombres  $w$  et  $c_i$  comme

$$w = (z_1 - z_2 \mathbf{i}_1) \gamma_1 + (z_1 + z_2 \mathbf{i}_1) \overline{\gamma}_1 \text{ et } c_i = (c_{i1} - c_{i2} \mathbf{i}_1) \gamma_1 + (c_{i1} + c_{i2} \mathbf{i}_1) \overline{\gamma}_1$$

où  $w := z_1 + z_2 \mathbf{i}_2$  et  $c_i := c_{i1} + c_{i2} \mathbf{i}_2 \forall i \in \{0, 1, 2, \dots, r\}$ . Par conséquent, en utilisant les propriétés des éléments idempotents, on obtient qu'un polynôme bicomplexe se décompose de la façon suivante :

$$\begin{aligned} P(w) &= \left[ \sum_{i=0}^r (c_{i1} - c_{i2} \mathbf{i}_1) (z_1 - z_2 \mathbf{i}_1)^i \right] \gamma_1 + \left[ \sum_{i=0}^r (c_{i1} + c_{i2} \mathbf{i}_1) (z_1 + z_2 \mathbf{i}_1)^i \right] \overline{\gamma}_1 \\ &:= P_1(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1) \gamma_1 + P_2(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1) \overline{\gamma}_1. \end{aligned} \quad (3.1)$$

La représentation idempotente (3.1) permet de caractériser les zéros des polynômes à valeurs bicomplexes. Nous ne nous attardons pas sur ce sujet, mais le lecteur peut consulter l'article de A. Pogoruy et R. M. Rogriguez-Dagnino [PRD06] pour en apprendre davantage sur cela. À titre indicatif, un polynôme bicomplexe  $P$  de degré  $r \geq 1$  a exactement  $r^2$  racines.

Nous sommes plutôt intéressés à étudier le lien entre les itérées du polynôme  $P$  et sa représentation idempotente.

**Proposition 3.2.** Soit  $P$  un polynôme bicomplexe. Avec les notations introduites ci-haut, on a que  $\forall m \in \mathbb{N}$ ,

$$P^m(w) = P_1^m(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1) \gamma_1 + P_2^m(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1) \overline{\gamma}_1$$

où  $P_i : \mathbb{M}(1) \rightarrow \mathbb{M}(1)$  sont des polynômes en une variable complexe pour chaque  $i \in \{1, 2\}$ .

**Démonstration.**

La preuve se fait par induction sur  $m \in \mathbb{N}$ . Le cas  $m = 1$  provient de l'expression (3.1). Supposons que l'hypothèse d'induction est vraie pour  $m = k \in \mathbb{N}$ . Alors, on sait que

$$P^k(w) = P_1^k(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1) \gamma_1 + P_2^k(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1) \overline{\gamma_1}.$$

Par conséquent, en utilisant le cas  $m = 1$ , on a que

$$\begin{aligned} P^{k+1}(w) &= P(P^k(w)) = P_1 \left( P_1^k(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1) \right) \gamma_1 + P_2 \left( P_2^k(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1) \right) \overline{\gamma_1} \\ &= P_1^{k+1}(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1) \gamma_1 + P_2^{k+1}(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1) \overline{\gamma_1}. \end{aligned}$$

Donc, l'énoncé est vérifié pour  $m = k+1$  et par le principe d'induction mathématique, ceci est vrai pour tout entier  $m \geq 1$ .  $\square$

**Corollaire 3.1.** Soit  $P$  un polynôme bicomplexe. La suite  $\{P^m(w)\}_{m=1}^\infty$  est bornée si et seulement si les suites  $\{P_1^m(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1)\}_{m=1}^\infty$  et  $\{P_2^m(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1)\}_{m=1}^\infty$  sont bornées.

**Démonstration.**

D'après le théorème précédent,  $\forall m \geq 1$ ,

$$P^m(w) = P_1^m(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1) \gamma_1 + P_2^m(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1) \overline{\gamma_1}$$

où  $w = z_1 + z_2 \mathbf{i}_2 \in \mathbb{M}(2)$ . Aussi, d'après la propriété d) du théorème 1.1 du chapitre 1, on obtient que

$$\|P^m(w)\|_2 = \sqrt{\frac{|P_1^m(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1)|^2 + |P_2^m(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1)|^2}{2}}.$$

Ainsi, la suite  $\{P^m(w)\}_{m=1}^\infty$  est bornée si et seulement si les suites  $\{P_1^m(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1)\}_{m=1}^\infty$  et  $\{P_2^m(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1)\}_{m=1}^\infty$  sont bornées.  $\square$

Si on applique cette proposition au polynôme bicomplexe  $Q_{p,c}(w) = w^p + c$  avec  $c = c_1 + c_2 \mathbf{i}_2 \in \mathbb{M}(2)$ , on obtient que cette dernière fonction s'exprime de la façon suivante :

$$Q_{p,c}(w) = Q_{p,c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1) \gamma_1 + Q_{p,c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1) \overline{\gamma_1}$$

et ses itérées

$$Q_{p,c}^m(w) = Q_{p,c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}^m(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1) \gamma_1 + Q_{p,c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}^m(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1) \overline{\gamma_1}.$$

Nous présentons maintenant les polynômes à valeurs tricomplexes.

**Définition 3.5.** Une fonction  $P : \mathbb{M}(3) \rightarrow \mathbb{M}(3)$  est un **polynôme tricomplexe** s'il est de la forme

$$P(\eta) = \sum_{i=0}^r c_i \eta^i$$

où  $c_i \in \mathbb{M}(3) \forall i \in \{0, 1, \dots, r\}$  et  $c_r \in \mathbb{M}(3)^{-1}$ .

Tout comme dans le cas bicomplexe, le degré d'un polynôme tricomplexe  $P$  est la plus grande puissance de la variable indépendante pour laquelle son coefficient est inversible. Cette caractéristique est notée  $\text{Deg}(P)$ . Ainsi, pour le polynôme tricomplexe  $P(\eta) = \sum_{i=0}^r c_i \eta^i$  avec  $c_r \in \mathbb{M}(3)^{-1}$ , on a que  $\text{Deg}(P) = r$ .

D'après la représentation idempotente d'un nombre tricomplexe selon les éléments  $\gamma_3$  et  $\overline{\gamma_3}$ , on obtient que

$$P(\eta) = P_1(w_1 - w_2 \mathbf{i}_1) \gamma_3 + P_2(w_1 + w_2 \mathbf{i}_1) \overline{\gamma_3}$$

où  $\eta = w_1 + w_2 \mathbf{i}_3$ ,  $c_i = c_{i1} + c_{i2} \mathbf{i}_3$ ,

$$P_1(w_1 - w_2 \mathbf{i}_2) = \sum_{i=0}^r (c_{i1} - c_{i2} \mathbf{i}_2) (w_1 - w_2 \mathbf{i}_2)^i$$

et

$$P_2(w_1 + w_2 \mathbf{i}_2) = \sum_{i=0}^r (c_{i1} + c_{i2} \mathbf{i}_2) (w_1 + w_2 \mathbf{i}_2)^i.$$

Puis, au chapitre 1, nous avons aussi vu qu'il y a une deuxième représentation idempotente d'un nombre tricomplexe sur les éléments  $\gamma_1 \gamma_3$ ,  $\overline{\gamma_1} \gamma_3$ ,  $\gamma_1 \overline{\gamma_3}$  et  $\overline{\gamma_1} \overline{\gamma_3}$ . Ainsi, il est aussi possible d'exprimer un polynôme tricomplexe  $P$  de la manière suivante

$$P(\eta) = Q_1(a_1) \gamma_1 \gamma_3 + Q_2(a_2) \overline{\gamma_1} \gamma_3 + Q_3(a_3) \gamma_1 \overline{\gamma_3} + Q_4(a_4) \overline{\gamma_1} \overline{\gamma_3}$$

où  $Q_1(a_1) = \sum_{i=0}^r b_{i1} a_1^i$ ,  $Q_2(a_2) = \sum_{i=0}^r b_{i2} a_2^i$ ,  $Q_3(a_3) = \sum_{i=0}^r b_{i3} a_3^i$ ,  $Q_4(a_4) = \sum_{i=0}^r b_{i4} a_4^i$ ,

$$w = a_1 \gamma_1 \gamma_3 + a_2 \overline{\gamma_1} \gamma_3 + a_3 \gamma_1 \overline{\gamma_3} + a_4 \overline{\gamma_1} \overline{\gamma_3}$$

et

$$c_i = b_{i1}\gamma_1\gamma_3 + b_{i2}\overline{\gamma_1}\gamma_3 + b_{i3}\overline{\gamma_1}\overline{\gamma_3} + b_{i4}\overline{\gamma_1}\overline{\gamma_3}.$$

Nous nous intéressons maintenant au lien entre les itérées d'un polynôme tricomplexe  $P$  et ses représentations idempotentes.

**Proposition 3.3.** Soit  $P$  un polynôme tricomplexe. Avec les notations introduites ci-haut, on a que  $\forall m \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} P^m(\eta) &= P_1^m(w_1 - w_2\mathbf{i}_2)\gamma_3 + P_2^m(w_1 + w_2\mathbf{i}_2)\overline{\gamma_3} \\ &= Q_1^m(a_1)\gamma_1\gamma_3 + Q_2^m(a_2)\gamma_1\overline{\gamma_3} + Q_3^m(a_3)\overline{\gamma_1}\gamma_3 + Q_4^m(a_4)\overline{\gamma_1}\overline{\gamma_3}, \end{aligned}$$

où  $P_i : \mathbb{M}(2) \rightarrow \mathbb{M}(2)$  sont des polynômes bicomplexes en une variable bicomplexe  $\forall i \in \{1, 2\}$  et  $Q_j : \mathbb{M}(1) \rightarrow \mathbb{M}(1)$  sont des polynômes complexes en une variable complexe  $\forall j \in \{1, 2, 3, 4\}$ .

**Démonstration.**

La démonstration est similaire au théorème 3.2. □

**Corollaire 3.2.** Soit  $P$  un polynôme tricomplexe. La suite  $\{P^m(\eta)\}_{m=1}^\infty$  est bornée si et seulement si les suites  $\{P_1^m(w_1 - w_2\mathbf{i}_2)\}_{m=1}^\infty$  et  $\{P_2^m(w_1 + w_2\mathbf{i}_2)\}_{m=1}^\infty$  sont bornées si et seulement si la suite  $\{Q_i^m(a_i)\}_{m=1}^\infty$  est bornée pour chaque  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ .

Considérons le polynôme tricomplexe  $Q_{p,c}(\eta) = \eta^p + c$  où  $c = c_1 + c_2\mathbf{i}_3 \in \mathbb{M}(3)$ . Alors, d'après la proposition précédente, le polynôme  $Q_{p,c}$  s'exprime comme

$$Q_{p,c}(\eta) = Q_{p,c_1-c_2\mathbf{i}_2}(w_1 - w_2\mathbf{i}_2)\gamma_3 + Q_{p,c_1+c_2\mathbf{i}_2}(w_1 + w_2\mathbf{i}_2)\overline{\gamma_3}$$

et ses itérées s'expriment comme

$$Q_{p,c}^m(\eta) = Q_{p,c_1-c_2\mathbf{i}_2}^m(w_1 - w_2\mathbf{i}_2)\gamma_3 + Q_{p,c_1+c_2\mathbf{i}_2}^m(w_1 + w_2\mathbf{i}_2)\overline{\gamma_3}.$$

Avant d'introduire les ensembles multibrots tricomplexes, nous allons appliquer la correspondance entre  $\mathbb{M}(3)$  et  $\mathbb{C}^4$  au polynôme tricomplexe  $Q_{p,c}$ . Ceci permet de faire ressortir le caractère non linéaire de cette application.

Prenons comme exemple de calculs la puissance  $p = 3$ . Dans ce cas, posons  $\eta = z_1 + z_2\mathbf{i}_2 + z_3\mathbf{i}_3 + z_4\mathbf{j}_3$  et  $c = c_1 + c_2\mathbf{i}_2 + c_3\mathbf{i}_3 + c_4\mathbf{j}_3$ . Alors, en utilisant l'identité du binôme de Newton en plusieurs variables [DF99] et en regroupant les termes selon les unités, on obtient que

$$\begin{aligned} Q_{3,c}(\eta) &= (z_1 + z_2\mathbf{i}_2 + z_3\mathbf{i}_3 + z_4\mathbf{j}_3)^3 + (c_1 + c_2\mathbf{i}_2 + c_3\mathbf{i}_3 + c_4\mathbf{j}_3) \\ &= (z_1^3 - 3z_1z_2^2 - 3z_1z_3^2 + 3z_1z_4^2 + 6z_2z_3z_4 + c_1) \\ &\quad + (3z_1^2z_2 - z_2^3 - 3z_2z_3^2 + 3z_2z_4^2 - 6z_1z_3z_4 + c_2)\mathbf{i}_2 \\ &\quad + (3z_1^2z_3 - 3z_2^2z_3 - z_3^3 + 3z_3z_4^2 - 6z_1z_2z_4 + c_3)\mathbf{i}_3 \\ &\quad + (3z_1^2z_4 - 3z_2^2z_4 - 3z_3^2z_4 + z_4^3 + 6z_1z_2z_3 + c_4)\mathbf{j}_3. \end{aligned}$$

Ainsi, le polynôme tricomplexe  $Q_{3,c}$  peut être vu comme un polynôme  $P : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$  décrit comme suit

$$\begin{aligned} P(z_1, z_2, z_3, z_4) &= (z_1^3 - 3z_1z_2^2 - 3z_1z_3^2 + 3z_1z_4^2 + 6z_2z_3z_4 + c_1, \\ &\quad 3z_1^2z_2 - z_2^3 - 3z_2z_3^2 + 3z_2z_4^2 - 6z_1z_3z_4 + c_2, \\ &\quad 3z_1^2z_3 - 3z_2^2z_3 - z_3^3 + 3z_3z_4^2 - 6z_1z_2z_4 + c_3, \\ &\quad 3z_1^2z_4 - 3z_2^2z_4 - 3z_3^2z_4 + z_4^3 + 6z_1z_2z_3 + c_4). \end{aligned}$$

Donc, l'étude qui suit a une conséquence immédiate sur l'étude des systèmes dynamiques complexes de plusieurs variables complexes, un sujet difficile à aborder à cause de certaines différences entre la théorie des fonctions holomorphes d'une variable complexe et la théorie des fonctions holomorphes de plusieurs variables complexes [DS].

### 3.3 Multibrots tricomplexes

D. Rochon a défini l'ensemble de Mandelbrot pour les nombres bicomplexes (voir [Roc00]). En s'inspirant de cette définition, on établit celle des Multibrots bicomplexes (voir aussi [yWjS13]).

**Définition 3.6.** Soit  $Q_{p,c}(\eta) = \eta^p + c$  où  $\eta, c \in \mathbb{M}(2)$  et  $p \geq 2$  un entier. Alors, les Multibrots généralisés aux nombres bicomplexes sont les ensembles

$$\mathcal{M}_2^p := \left\{ c \in \mathbb{M}(2) : \left\{ Q_{p,c}^m(0) \right\}_{m=1}^{\infty} \text{ est bornée} \right\}.$$

Maintenant, les ensembles de Mandelbrots généralisés aux nombres tricomplexes sont définis d'une façon semblable à la définition 3.6 et aussi à celle donnée par V. Garant-Pelletier (voir [GP11]).

**Définition 3.7.** Soit  $Q_{p,c}(\eta) = \eta^p + c$  où  $\eta, c \in \mathbb{M}(3)$ . Alors, les ensembles de Mandelbrot généralisés aux nombres tricomplexes sont les ensembles

$$\mathcal{M}_3^p := \left\{ c \in \mathbb{M}(3) : \left\{ Q_{p,c}^m(0) \right\}_{m=1}^{\infty} \text{ est bornée} \right\}.$$

On remarque que, selon la représentation du nombre  $c$ ,  $\mathcal{M}_3^p$  est un sous-ensemble de l'espace vectoriel  $\mathbb{C}^4$  et  $\mathbb{R}^8$  respectivement. Donc, ils ne peut pas être visualisé. C'est pour cette raison que nous effectuerons différentes coupes de  $\mathcal{M}_3^p$  afin de se donner une idée de la structure de cet ensemble.

Cependant, avant d'entamer notre exploration des ensembles  $\mathcal{M}_3^p$ , nous généraliserons les résultats obtenus par D. Rochon [Roc00] sur l'ensemble de Mandelbrot bicomplexe  $\mathcal{M}_2^2$  et ceux de V. Garant-Pelletier [GP11] sur l'ensemble de Mandelbrot tricomplexe  $\mathcal{M}_3^2$  aux ensembles  $\mathcal{M}_2^p$  et  $\mathcal{M}_3^p$ .

D'abord, l'ensemble de Mandelbrot bicomplexe peut être représenté comme un ensemble  $\mathbb{M}(2)$ -cartésien. En effet, c'est ce que D. Rochon a démontré (voir [Roc00]) :

**Théorème 3.1.**  $\mathcal{M}_2^2 = \mathcal{M}^2 \times_{\gamma_1} \mathcal{M}^2$ .

Quant aux ensembles de la définition 3.6, nous avons un résultat analogue.

**Théorème 3.2.**  $\mathcal{M}_2^p = \mathcal{M}^p \times_{\gamma_1} \mathcal{M}^p$ .

**Démonstration.**

Nous montrons que i)  $\mathcal{M}_2^p \subset \mathcal{M}^p \times_{\gamma_1} \mathcal{M}^p$  et ii)  $\mathcal{M}^p \times_{\gamma_1} \mathcal{M}^p \subset \mathcal{M}_2^p$ .

i) Supposons  $c = c_1 + c_2 \mathbf{i}_2 \in \mathbb{M}(2)$  tel que la suite  $\left\{ Q_{p,c}^m(0) \right\}_{m=1}^{\infty}$  soit bornée.

D'après la proposition 3.2, on a que si  $w = z_1 + z_2 \mathbf{i}_2 \in \mathbb{M}(2)$ , alors

$$Q_{p,c}^m(w) = Q_{p,c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}^m(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1) \gamma_1 + Q_{p,c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}^m(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1) \overline{\gamma_1} \quad (3.2)$$

pour tout  $m \in \mathbb{N}$ . En conséquence,  $Q_{p,c}^m(0) = Q_{p,c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}^m(0) \gamma_1 + Q_{p,c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}^m(0) \overline{\gamma_1}$ . Par hypothèse, la suite  $\left\{ Q_{p,c}^m(0) \right\}_{m=1}^{\infty}$  est bornée et donc  $\left\{ Q_{p,c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}^m(0) \right\}_{m=1}^{\infty}$

et  $\left\{Q_{p,c_1+c_2\mathbf{i}_1}^m(0)\right\}_{m=1}^\infty$  sont également bornées d'après le corollaire 3.1. Alors,  $c_1 - c_2\mathbf{i}_1, c_1 + c_2\mathbf{i}_1 \in \mathcal{M}^p$  selon la définition des Multibrots. Donc, comme  $c = (c_1 - c_2\mathbf{i}_1)\gamma_1 + (c_1 + c_2\mathbf{i}_1)\bar{\gamma}_1$ ,  $c \in \mathcal{M}^p \times_{\gamma_1} \mathcal{M}^p$  par la définition du produit  $\mathbb{M}(2)$ -cartésien.

- ii) Supposons que  $c \in \mathcal{M}^p \times_{\gamma_1} \mathcal{M}^p$ , alors  $c = (c_1 - c_2\mathbf{i}_1)\gamma_1 + (c_1 + c_2\mathbf{i}_1)\bar{\gamma}_1$  et  $c_1 - c_2\mathbf{i}_1, c_1 + c_2\mathbf{i}_1 \in \mathcal{M}^p$  par définition du produit  $\mathbb{M}(2)$ -cartésien. Ainsi,  $\left\{Q_{p,c_1-c_2\mathbf{i}_1}^m(0)\right\}_{m=1}^\infty$  et  $\left\{Q_{p,c_1+c_2\mathbf{i}_1}^m(0)\right\}_{m=1}^\infty$  sont bornées. Donc, on a aussi que  $\left\{Q_{p,c}^m(0)\right\}_{m=1}^\infty$  est bornée, *i.e.*  $c \in \mathcal{M}_2^p$ .

□

Ensuite, pour l'ensemble de Mandelbrot tricomplexe, V. Garant-Pelletier et D. Rochon ont démontré que  $\mathcal{M}_3^2$  peut aussi s'exprimer en tant qu'un produit  $\mathbb{M}(3)$ -cartésien d'ensembles de Mandelbrot bicomplexes. Effectivement, on a un résultat analogue au théorème 3.1 (voir [GPR08]).

**Théorème 3.3.**  $\mathcal{M}_3^2 = \mathcal{M}_2^2 \times_{\gamma_3} \mathcal{M}_2^2$ .

On peut généraliser ce résultat pour les ensembles  $\mathcal{M}_3^p$  comme suit :

**Théorème 3.4.**  $\mathcal{M}_3^p = \mathcal{M}_2^p \times_{\gamma_3} \mathcal{M}_2^p$ .

**Démonstration.**

D'après la proposition 3.3, quelque soit l'entier  $m \geq 1$ ,

$$Q_{p,c}^m(0) = Q_{p,c_1-c_2\mathbf{i}_2}^m(0)\gamma_3 + Q_{p,c_1+c_2\mathbf{i}_2}^m(0)\bar{\gamma}_3.$$

Ainsi,  $c \in \mathcal{M}_3^p$  si et seulement si la suite  $\left\{Q_{p,c}^m(0)\right\}_{m=1}^\infty$  est bornée si et seulement si les suites  $\left\{Q_{p,c_1-c_2\mathbf{i}_2}^m(0)\right\}_{m=1}^\infty$  et  $\left\{Q_{p,c_1+c_2\mathbf{i}_2}^m(0)\right\}_{m=1}^\infty$  sont bornées d'après le corollaire 3.2. Cette dernière proposition est équivalente à ce que  $c_1 - c_2\mathbf{i}_2 \in \mathcal{M}_2^p$  et  $c_1 + c_2\mathbf{i}_2 \in \mathcal{M}_2^p$ . Donc, d'après la définition du produit  $\mathbb{M}(3)$ -cartésien,  $c \in \mathcal{M}_3^p$  si et seulement si  $c \in \mathcal{M}_2^p \times_{\gamma_3} \mathcal{M}_2^p$ . □

Une conséquence des théorèmes 3.2 et 3.4 est que les ensembles multibrots tricomplexes sont aussi exprimés en termes d'ensembles multibrots du plan complexe. En effet, on a la caractérisation suivante des ensembles  $\mathcal{M}_3^p$  :

**Corollaire 3.3.**  $\mathcal{M}_3^p = (\mathcal{M}^p \times_{\gamma_1} \mathcal{M}^p) \times_{\gamma_3} (\mathcal{M}^p \times_{\gamma_1} \mathcal{M}^p)$ .

Maintenant, nous avons besoin d'un critère afin de juger si un nombre  $c \in \mathbb{M}(3)$  appartient ou non aux Multibrots tricomplexes puisque nous nous en servons pour visualiser ces ensembles. Nous nous rappelons que les Multibrots complexes sont contenus dans une boule centrée à l'origine et de rayon  $2^{\frac{1}{p-1}}$ . Nous utilisons ce fait établi au chapitre 2 et les théorèmes 3.2 et 3.4 pour démontrer que les ensembles multibrots bicomplexes et tricomplexes sont respectivement contenus dans des disques bicomplexes et tricomplexes centrés à l'origine et de rayon  $2^{\frac{1}{p-1}}$ . Nous avons donc le théorème suivant :

**Théorème 3.5.** Soit  $\mathcal{M}_2^p$  et  $\mathcal{M}_3^p$  les Multibrots bicomplexes et tricomplexes respectivement. Alors, on a les inclusions suivantes :

- a)  $\mathcal{M}_2^p \subset \overline{D}_2(0, 2^{\frac{1}{p-1}}) \subset \overline{B}_2(0, 2^{\frac{1}{p-1}})$ .
- b)  $\mathcal{M}_3^p \subset \overline{D}_3(0, 2^{\frac{1}{p-1}}) \subset \overline{B}_3(0, 2^{\frac{1}{p-1}})$ .

**Démonstration.**

Pour la partie 1), nous remarquons que si  $c \in \mathcal{M}_2^p$ , alors, d'après le théorème 3.2,  $c \in \mathcal{M}^p \times_{\gamma_1} \mathcal{M}^p$ . Donc, en écrivant  $c = c_1 + c_2 \mathbf{i}_2$ , on a que si  $c \in \mathcal{M}_2^p$ , alors  $c_1 - c_2 \mathbf{i}_1 \in \mathcal{M}^p$  et  $c_1 + c_2 \mathbf{i}_1 \in \mathcal{M}^p$ . Donc, d'après le théorème 2.4,  $|c_1 \pm c_2 \mathbf{i}_1| \leq 2^{1/(p-1)}$ . Bref, d'une part, on remarque que  $c \in \overline{B}_1(0, 2^{1/(p-1)}) \times_{\gamma_1} \overline{B}_1(0, 2^{1/(p-1)})$  et, d'autre part,

$$\|c\|_2 = \sqrt{\frac{|c_1 - c_2 \mathbf{i}_1|^2 + |c_1 + c_2 \mathbf{i}_1|^2}{2}} \leq 2^{1/(p-1)}.$$

Pour la deuxième partie, on procède de la même façon. Si  $c \in \mathcal{M}_3^p$ , alors, d'après le théorème 3.4,  $c \in \mathcal{M}_2^p \times_{\gamma_3} \mathcal{M}_2^p$ . Donc, comme  $c = c_1 + c_2 \mathbf{i}_3$ , on a que si  $c \in \mathcal{M}_3^p$ , alors  $c_1 - c_2 \mathbf{i}_2 \in \mathcal{M}_2^p$  et  $c_1 + c_2 \mathbf{i}_2 \in \mathcal{M}_2^p$ . Donc, d'après la première partie,  $\|c_1 \pm c_2 \mathbf{i}_2\|_2 \leq 2^{1/(p-1)}$ . Bref, d'une part, on déduit que  $c \in \overline{B}_2(0, 2^{1/(p-1)}) \times_{\gamma_3} \overline{B}_2(0, 2^{1/(p-1)})$  et, d'autre part,

$$\|c\|_3 = \sqrt{\frac{\|c_1 - c_2 \mathbf{i}_2\|_2^2 + \|c_1 + c_2 \mathbf{i}_2\|_2^2}{2}} \leq 2^{1/(p-1)}.$$

□

**Remarque 24.** Cette borne est la meilleure possible. En effet, si l'entier  $p$  est pair et  $c = -2^{1/(p-1)}$ , alors on a que

$$\begin{aligned} Q_{p,-2^{1/(p-1)}}^2(0) &= (-2^{1/(p-1)})^p - 2^{1/(p-1)} = 2^{p/(p-1)} - 2^{1/(p-1)} \\ &= 2 \cdot 2^{1/(p-1)} - 2^{1/(p-1)} \\ &= 2^{1/(p-1)} \end{aligned}$$

et par induction  $Q_{p,-2^{1/(p-1)}}^m(0) = 2^{1/(p-1)} \forall m \geq 2$ . Ainsi, la suite  $\{Q_{p,-2^{1/(p-1)}}^m(0)\}_{m=1}^\infty$  est bornée et le nombre  $c = -2^{1/(p-1)} \in \mathcal{M}_3^p$ .  $\blacktriangle$

Aussi, nous pouvons établir un résultat qui caractérise complètement les nombres tricomplexes appartenant aux ensembles multibrots bicomplexes et tricomplexes. Précisément, on démontre le théorème ci-dessous :

**Théorème 3.6.** Soient  $\mathcal{M}_2^p$  et  $\mathcal{M}_3^p$  des ensembles multibrots bicomplexes et tricomplexes respectivement d'une puissance entière  $p \geq 2$  quelconque, mais fixée. Alors, on a

a)  $c \in \mathcal{M}_2^p \iff \|Q_{p,c}^m(0)\|_2 \leq 2^{\frac{1}{p-1}}$  pour tout  $m \in \mathbb{N}$ .

b)  $c \in \mathcal{M}_3^p \iff \|Q_{p,c}^m(0)\|_3 \leq 2^{\frac{1}{p-1}}$  pour tout  $m \in \mathbb{N}$ ;

### Démonstration.

Nous commençons par la partie a).

$\Rightarrow$ ) Supposons  $c = c_1 + c_2 \mathbf{i}_2 \in \mathcal{M}_2^p$ , alors, d'après le théorème 3.2,  $c_1 - c_2 \mathbf{i}_1, c_1 + c_2 \mathbf{i}_1 \in \mathcal{M}^p$ . Ainsi, d'après le théorème 2.5,  $|Q_{p,c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}^m(0)| \leq 2^{\frac{1}{p-1}}$  et  $|Q_{p,c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}^m(0)| \leq 2^{\frac{1}{p-1}}$  pour tout  $m \in \mathbb{N}$ . Puis, en combinant ces deux dernières égalités, on obtient

$$\|Q_{p,c}^m(0)\|_2 = \sqrt{\frac{|Q_{p,c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}^m(0)|^2 + |Q_{p,c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}^m(0)|^2}{2}} \leq 2^{\frac{1}{p-1}} \quad (3.3)$$

pour tout  $m \in \mathbb{N}$ .

$\Leftarrow$ ) Si on suppose que  $\|Q_{p,c}^m(0)\|_2 \leq 2^{\frac{1}{p-1}}$  pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , alors  $c \in \mathcal{M}_2^p$  par définition des ensembles multibrots bicomplexes.

La partie b) utilise les mêmes idées que la partie a) sauf que nous devrions utiliser la partie a) au lieu du théorème 2.5 du chapitre 2.  $\square$

L'inclusion du théorème 3.5 est utilisée pour limiter l'exploration des coupes tridimensionnelles des Multibrots tricomplexes. Aussi, le théorème 3.6 nous permet

de construire un algorithme similaire à celui expliqué au chapitre 2 afin de générer les ensembles multibrots du plan complexe. Les images présentées dans la prochaine section sont issues de cet algorithme.

### 3.4 Coupes tridimensionnelles

En vertu de la définition 3.4, une coupe 3D de l'ensemble  $\mathcal{M}_3^p$  est l'ensemble

$$\mathcal{T}^p(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_m, \mathbf{i}_l) := \left\{ c \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_m, \mathbf{i}_l) : \left\{ Q_{p,c}^m(0) \right\}_{m=1}^{\infty} \text{ est bornée} \right\} \quad (3.4)$$

où  $\mathbf{i}_k \neq \mathbf{i}_m$ ,  $\mathbf{i}_k \neq \mathbf{i}_l$  et  $\mathbf{i}_l \neq \mathbf{i}_m$ . L'entier  $p$  permet de distinguer quel polynôme est utilisé pour le calcul des itérées de celui-ci. D'ailleurs, nous employons seulement la notation  $\mathcal{T}^p$  lorsque le contexte est clair. Aussi, le but de cette section est d'établir certaines relations entre les coupes 3D générées par l'ensemble  $\mathcal{T}^p$ . Plus précisément, nous appréhendons une classification de ces coupes selon leur dynamique afin de dépouiller les 56 coupes possibles. La prochaine définition va nous aider à atteindre ce but.

**Définition 3.8.** Soit  $\mathcal{T}_1^p(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_m, \mathbf{i}_l)$  et  $\mathcal{T}_2^p(\mathbf{i}_n, \mathbf{i}_q, \mathbf{i}_s)$  deux coupes 3D d'un ensemble de Mandelbrot tricomplexe  $\mathcal{M}_3^p$ .

- i) On définit les ensembles  $M_1$  et  $M_2$  comme étant les sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{M}(3)$  de plus petite dimension tels que  $Q_{p,c_1}^m(0) \in M_1 \forall m \in \mathbb{N}, \forall c_1 \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_m, \mathbf{i}_l)$  et  $Q_{p,c_2}^m(0) \in M_2 \forall m \in \mathbb{N}, \forall c_2 \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_n, \mathbf{i}_q, \mathbf{i}_s)$ .
- ii)  $\mathcal{T}_1^p \sim \mathcal{T}_2^p$  s'il existe une application linéaire bijective  $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$  telle que  $\forall c_2 \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_n, \mathbf{i}_q, \mathbf{i}_s), \exists c_1 \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_m, \mathbf{i}_l)$  tel que  $\varphi(c_1) = c_2$  et  $(\varphi \circ Q_{p,c_1} \circ \varphi^{-1})(\eta) = Q_{p,c_2}(\eta) \forall \eta \in M_2$ . Dans ce cas, on dit que  $\mathcal{T}_1^p$  et  $\mathcal{T}_2^p$  ont la même dynamique.

**Remarque 25.** Cette définition est inspirée de celle de V. Garant-Pelletier et D. Rochon [GPR08].

Ici, les espaces vectoriels  $M_1$  et  $M_2$  dépendent fortement de la puissance du polynôme  $Q_{p,c}$ . De plus, d'après la définition de  $M_1$ , l'espace  $\mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_m, \mathbf{i}_l) \subset M_1$  puisque  $Q_{p,c_1}(0) = c_1 \in M_1$ . De même, l'espace  $\mathbb{T}(\mathbf{i}_n, \mathbf{i}_q, \mathbf{i}_s) \subset M_2$  puisque  $Q_{p,c_2}(0) = c_2 \in M_2$ . ▲

La définition 3.8 est en fait une façon de conjuguer deux fonctions à valeurs tricomplexes. Le fait d'obtenir une telle conjugaison particulière permet de relier les itérées de deux polynômes. En fait, s'il existe une application linéaire bijective  $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$  avec  $\varphi \circ Q_{p,c_1} \circ \varphi^{-1} = Q_{p,c_2}$ , alors pour tout entier  $m \geq 1$

$$(\varphi \circ Q_{p,c_1}^m \circ \varphi^{-1})(\eta) = Q_{p,c_2}^m(\eta) \quad \forall \eta \in M_2. \quad (3.5)$$

Comme  $M_1$  et  $M_2$  contiennent respectivement les itérées de  $Q_{p,c_1}$  et de  $Q_{p,c_2}$ , les domaines de définition des membres de gauche et de droite de la relation (3.5) demeurent consistants. D'ailleurs, cette relation permet de passer des itérées du polynôme  $Q_{p,c_1}$  aux itérées du polynôme  $Q_{p,c_2}$  et donc de passer d'un système dynamique à un autre. De plus, comme  $\varphi$  est une application linéaire bijective,  $\{Q_{p,c_1}^m(0)\}_{m=1}^{\infty}$  est bornée si et seulement si  $\{Q_{p,c_2}^m(0)\}_{m=1}^{\infty}$  est bornée. Un concept similaire est souvent utilisé en théorie des systèmes dynamiques. D'une manière plus générale, l'application  $\varphi$  est un homéomorphisme [Dev03, chap.1, p.47].

On peut déduire, de la définition, le lemme suivant.

**Lemme 3.1.** Supposons que  $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$  est une application linéaire bijective telle que  $\forall c_2 \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_n, \mathbf{i}_q, \mathbf{i}_s)$ , il existe  $c_1 \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_m, \mathbf{i}_l)$  tel que  $\varphi(c_1) = c_2$ . Alors,  $\varphi(\mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_m, \mathbf{i}_l)) = \mathbb{T}(\mathbf{i}_n, \mathbf{i}_q, \mathbf{i}_s)$ .

**Démonstration.**

Soit  $\{\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_m, \mathbf{i}_l\}$  une base évidente de  $\mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_m, \mathbf{i}_l)$ . Comme  $\varphi$  est bijective, alors cette dernière application est non singulière. Par conséquent,  $\{\varphi(\mathbf{i}_k), \varphi(\mathbf{i}_m), \varphi(\mathbf{i}_l)\}$  forme une base de  $\varphi(\mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_m, \mathbf{i}_l))$  [DF99, Cor. 9, p. 413]. Or, comme  $\mathbb{T}(\mathbf{i}_n, \mathbf{i}_q, \mathbf{i}_s) \subset \varphi(\mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_m, \mathbf{i}_l))$  et les deux espaces sont de même dimension, on conclut que

$$\mathbb{T}(\mathbf{i}_n, \mathbf{i}_q, \mathbf{i}_s) = \varphi(\mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_m, \mathbf{i}_l)).$$

□

Cette dernière relation est intéressante puisqu'elle est une relation d'équivalence.

**Théorème 3.7.** Soit  $p \geq 2$  un entier. Alors la relation  $\sim$  de la définition 3.8 est une relation d'équivalence pour l'ensemble des coupes  $\mathcal{T}^p$ .

Dans la preuve de ce théorème, nous allons utiliser le fait connu que la composition de deux applications linéaires bijectives demeure une application linéaire bijective et que l'inverse d'une application linéaire bijective est une application linéaire bijective. Il faut aussi remarquer que la dimension des sous-espaces vectoriels est conservée par l'application linéaire bijective. Ces faits se trouvent dans bon nombre d'ouvrages d'algèbre linéaire, dont celui de D. S. Dummit et R. M. Foote [DF99].

### Démonstration.

Pour démontrer que la relation  $\sim$  est une relation d'équivalence sur l'ensemble des coupes 3D  $\mathcal{T}^p$ , on doit démontrer que :

- 1)  $\sim$  est réflexive ;
- 2)  $\sim$  est symétrique et ;
- 3)  $\sim$  est transitive.

- 1) Supposons que  $\mathcal{T}^p(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_m, \mathbf{i}_l)$  est une coupe tridimensionnelle quelconque. Considérons  $M$  comme étant l'espace vectoriel de plus petite dimension contenant la suite  $\{Q_{p,c}^m(0)\}_{m=1}^{\infty}$ . Dans ce cas, il suffit de poser  $\varphi(\eta) = \eta \forall \eta \in M$ . Ainsi,  $\forall c \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_m, \mathbf{i}_l)$ ,  $\varphi(c) = c$  et  $\varphi \circ Q_{p,c} \circ \varphi^{-1} = Q_{p,c}$ . D'après la définition 3.8,  $\mathcal{T}^p \sim \mathcal{T}^p$ .
- 2) On veut montrer que quelque soit  $\mathcal{T}_1^p$  et  $\mathcal{T}_2^p$ , si  $\mathcal{T}_1^p \sim \mathcal{T}_2^p$ , alors  $\mathcal{T}_2^p \sim \mathcal{T}_1^p$ . Supposons deux coupes  $\mathcal{T}_1^p(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_m, \mathbf{i}_l)$  et  $\mathcal{T}_2^p(\mathbf{i}_n, \mathbf{i}_q, \mathbf{i}_s)$  quelconques. Si  $\mathcal{T}_1^p \sim \mathcal{T}_2^p$ , alors il existe une application linéaire bijective  $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$  telle que  $\forall c_2 \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_n, \mathbf{i}_q, \mathbf{i}_s)$ ,  $\exists c_1 \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_m, \mathbf{i}_l)$  tel que  $\varphi(c_1) = c_2$  et  $\varphi \circ Q_{p,c_1} \circ \varphi^{-1} = Q_{p,c_2}$ . Or, comme  $\varphi$  est inversible, en composant à gauche par  $\varphi^{-1}$  et à droite par  $\varphi$ , on obtient  $Q_{p,c_1} = \varphi^{-1} \circ Q_{p,c_2} \circ \varphi$ . De plus, d'après le lemme 3.1,  $\varphi(\mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_m, \mathbf{i}_l)) = \mathbb{T}(\mathbf{i}_n, \mathbf{i}_q, \mathbf{i}_s)$ . Donc, comme  $\varphi$  est bijective, alors  $\mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_m, \mathbf{i}_l) = \varphi^{-1}(\mathbb{T}(\mathbf{i}_n, \mathbf{i}_q, \mathbf{i}_s))$ . Ainsi, en prenant  $\varphi^{-1}$  comme fonction dans la définition 3.8, on obtient que  $\mathcal{T}_2^p \sim \mathcal{T}_1^p$ .
- 3) Enfin, nous montrons que  $\sim$  est transitive. Soit  $\mathcal{T}_1^p(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_m, \mathbf{i}_l) \sim \mathcal{T}_2^p(\mathbf{i}_n, \mathbf{i}_q, \mathbf{i}_s)$  et  $\mathcal{T}_2^p(\mathbf{i}_n, \mathbf{i}_q, \mathbf{i}_s) \sim \mathcal{T}_3^p(\mathbf{i}_v, \mathbf{i}_t, \mathbf{i}_r)$ . Alors, il existe une application linéaire bijective  $\varphi_1 : M_1 \rightarrow M_2$  telle que  $\forall c_2 \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_n, \mathbf{i}_q, \mathbf{i}_s)$ , il existe  $c_1 \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_m, \mathbf{i}_l)$  tel que  $\varphi_1(c_1) = c_2$  et  $(\varphi_1 \circ Q_{p,c_1} \circ \varphi_1^{-1})(\eta) = Q_{p,c_2}(\eta) \forall \eta \in M_2$ . Aussi, il existe une application  $\varphi_2 : M_2 \rightarrow M_3$  tel que  $\forall c_3 \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_v, \mathbf{i}_t, \mathbf{i}_r)$ , il existe  $c_2 \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_n, \mathbf{i}_q, \mathbf{i}_s)$  tel que  $\varphi_2(c_2) = c_3$  et  $(\varphi_2 \circ Q_{p,c_2} \circ \varphi_2^{-1})(\eta) = Q_{p,c_3}(\eta) \forall \eta \in M_3$ . Posons  $\psi := \varphi_2 \circ \varphi_1$  et  $\psi : M_1 \rightarrow M_3$ . Soit  $c_3 \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_v, \mathbf{i}_t, \mathbf{i}_r)$ . Alors, il existe un  $c_2 \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_n, \mathbf{i}_q, \mathbf{i}_s)$  tel

que  $\varphi_2(c_2) = c_3$ . De plus, il existe un  $c_1 \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_m, \mathbf{i}_l)$  tel que  $\varphi_1(c_1) = c_2$ . Ainsi, on a que

$$\psi(c_1) = \varphi_2(\varphi_1(c_1)) = \varphi_2(c_2) = c_3$$

et si  $\eta \in M_3$ , alors, comme  $Q_{p,c_2}(\eta) = (\varphi_1 \circ Q_{p,c_1} \circ \varphi_1^{-1})(\eta) \forall \eta \in M_2$ , on a que

$$\begin{aligned} Q_{p,c_3}(\eta) &= (\varphi_2 \circ Q_{p,c_2} \circ \varphi_2^{-1})(\eta) \\ &= (\varphi_2 \circ \varphi_1 \circ Q_{p,c_1} \circ \varphi_1^{-1} \circ \varphi_2^{-1})(\eta) \\ &= (\psi \circ Q_{p,c_1} \circ \psi^{-1})(\eta). \end{aligned}$$

Donc,  $\mathcal{T}_1^p \sim \mathcal{T}_3^p$ .

En conclusion, d'après 1), 2) et 3), on conclut que  $\sim$  est une relation d'équivalence sur l'ensemble des coupes 3D des ensembles multibrots tricomplexes.  $\square$

**Remarque 26.** La relation  $\sim$  permet de classifier les différentes dynamiques issues des coupes tridimensionnelles de l'ensemble de Mandelbrot tricomplexe. En effet, d'après le dernier théorème, cette dernière relation est une relation d'équivalence. Ceci permet de faire des classes d'équivalence et donc de partitionner l'ensemble des coupes 3D des ensembles multibrots tricomplexes. Aussi, lorsque les ensembles ont la même dynamique, leur visualisation 3D dans un logiciel sera la même. Par le fait même, on peut dire que  $\mathcal{T}_1^p$  et  $\mathcal{T}_2^p$  sont symétriques lorsque  $\mathcal{T}_1^p \sim \mathcal{T}_2^p$ .  $\blacktriangle$

V. Garant-Pelletier (voir [GP11]) a remarqué que les itérées du polynôme  $Q_{2,c}$  reste fermé ou ne reste pas fermé dans l'ensemble  $\mathbb{M}(\mathbf{i}_m, \mathbf{i}_l)$  lorsque le nombre  $c$  respecte certaines conditions. En fait, le premier cas se produit lorsque  $\mathbf{i}_m \mathbf{i}_l = \pm \mathbf{i}_k$  ou  $\mathbf{i}_k = 1$ . Sinon, si nous n'avons ni l'une ni l'autre des propriétés du premier cas, les itérées ne sont pas fermées dans l'espace  $\mathbb{M}(\mathbf{i}_m, \mathbf{i}_l)$ . Ce dernier cas est précisément celui où les itérées du polynôme  $Q_{2,c}$  se calculent dans  $\mathbb{M}(3)$ . Ceci est expliqué à la prochaine sous-section.

Pour bien comprendre notre exploration des ensembles multibrots tricomplexes qui sera présentée dans la prochaine sous-section, nous présentons brièvement les résultats de V. Garant-Pelletier et D. Rochon [GPR08] pour l'ensemble de Mandelbrot tricomplexe  $\mathcal{M}_3^2$ . Nous allons, par la suite, explorer l'ensemble de Mandelbrot tricomplexe  $\mathcal{M}_3^3$ . Nous remarquerons que les coupes tridimensionnelles de  $\mathcal{M}_3^3$  présentent de grandes différences, autant sur le plan du calcul des itérées du polynôme  $Q_{3,c}$  vis-à-vis le calcul de celles de  $Q_{2,c}$  que sur celui du nombre de coupes principales tridimensionnelles présentes.

## L'ensemble de Mandelbrot tricomplexe

D. Rochon et V. Garant-Pelletier ont étudié les coupes 3D de l'ensemble de Mandelbrot tricomplexe en utilisant la relation  $\sim$  de la définition 3.8. Dans leur article [GPR08], ils exposent les huit coupes (parmi les 56 possibles) principales de l'ensemble de Mandelbrot tricomplexe  $\mathcal{M}_3^2$ . Dans cette sous-section, nous effectuons un rappel succinct de ces huit coupes principales. Elles sont à la base de notre étude des coupes principales du Mandelbrot tricomplexe  $\mathcal{M}_3^3$ .

D'abord, parmi les huit coupes principales répertoriées, quatre d'entre elles figurent dans le premier cas (discuté dans la sous-section précédente), *i.e.* les ensembles tridimensionnels  $\mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_m, \mathbf{i}_l)$  possédant la propriété que soit  $\mathbf{i}_m \mathbf{i}_l = \pm \mathbf{i}_k$  ou soit  $\mathbf{i}_k = 1$ . Voici un premier lemme pour clarifier la situation.

**Lemme 3.2.** Si  $c \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_m, \mathbf{i}_l)$ , alors  $c^2 = x_1 + x_2 \mathbf{i}_k \mathbf{i}_m + x_3 \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l + x_4 \mathbf{i}_m \mathbf{i}_l$  avec  $x_i \in \mathbb{R}$ .

### Démonstration.

Si  $c \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_m, \mathbf{i}_l)$ , alors  $c = c_1 \mathbf{i}_k + c_2 \mathbf{i}_m + c_3 \mathbf{i}_l$  avec  $c_i \in \mathbb{R}$ . Un petit calcul fournit

$$c^2 = (\pm c_1^2 \pm c_2^2 \pm c_3^2) + 2c_1 c_2 \mathbf{i}_k \mathbf{i}_m + 2c_1 c_3 \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l + 2c_2 c_3 \mathbf{i}_m \mathbf{i}_l.$$

□

Ceci nous conduit aux corollaires suivants.

**Corollaire 3.4.** Si  $\mathbf{i}_k = 1$  et si  $c \in \mathbb{T}(1, \mathbf{i}_m, \mathbf{i}_l)$ , alors  $Q_{2,c}^m(0) \in \mathbb{M}(\mathbf{i}_m, \mathbf{i}_l) \forall m \in \mathbb{N}$ .

### Démonstration.

Supposons que  $\mathbf{i}_k = 1$ . Montrons par induction que  $Q_{2,c}^m(0) \in \mathbb{M}(\mathbf{i}_m, \mathbf{i}_l) \forall m \in \mathbb{N}$ . Le cas  $m = 1$  est évident. Pour  $m = 2$ , on a, d'après le lemme 3.2, que

$$c^2 = x_1 + x_2 \mathbf{i}_k \mathbf{i}_m + x_3 \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l + x_4 \mathbf{i}_m \mathbf{i}_l = x_1 + x_2 \mathbf{i}_m + x_3 \mathbf{i}_l + x_4 \mathbf{i}_m \mathbf{i}_l$$

et donc

$$c^2 + c = (x_1 + c_1) + (x_2 + c_2) \mathbf{i}_m + (x_3 + c_3) \mathbf{i}_l + x_4 \mathbf{i}_m \mathbf{i}_l \in \mathbb{M}(\mathbf{i}_m, \mathbf{i}_l).$$

Supposons que  $Q_{2,c}^k(0) \in \mathbb{M}(\mathbf{i}_m, \mathbf{i}_1)$  pour un certain entier  $k \geq 1$ . Alors, d'après la fermeture de l'espace  $\mathbb{M}(\mathbf{i}_m, \mathbf{i}_1)$  (voir remarque 22), on a que  $(Q_{2,c}^k(0))^2 \in \mathbb{M}(\mathbf{i}_m, \mathbf{i}_1)$  et en conséquence

$$Q_{2,c}^{k+1}(0) = (Q_{2,c}^k(0))^2 + c \in \mathbb{M}(\mathbf{i}_m, \mathbf{i}_1).$$

Ceci termine l'induction. □

**Corollaire 3.5.** Si  $\mathbf{i}_k \neq 1$ ,  $\mathbf{i}_m \mathbf{i}_1 = \pm \mathbf{i}_k$  et  $c \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_m, \mathbf{i}_1)$ , alors  $Q_{2,c}^m(0) \in \mathbb{M}(\mathbf{i}_m, \mathbf{i}_1) \forall m \in \mathbb{N}$ .

**Démonstration.**

La preuve se fait aussi par induction. Le cas  $m = 1$  est évident. Si  $m = 2$ , alors, d'après le lemme 3.2, on a que

$$c^2 = x_1 + x_2 \mathbf{i}_k \mathbf{i}_m + x_3 \mathbf{i}_k \mathbf{i}_1 + x_4 \mathbf{i}_m \mathbf{i}_1.$$

Or, comme  $\mathbf{i}_k \mathbf{i}_1 = \pm \mathbf{i}_m$  et  $\mathbf{i}_k \mathbf{i}_m = \pm \mathbf{i}_1$ , on trouve que

$$\begin{aligned} c^2 + c &= x_1 + (\pm x_4 + c_1) \mathbf{i}_k + (\pm x_3 + c_2) \mathbf{i}_m + (\pm x_2 + c_3) \mathbf{i}_1 \\ &= x_1 + (\pm x_3 + c_2) \mathbf{i}_m + (\pm x_2 + c_3) \mathbf{i}_1 + (\pm x_4 + c_1) \mathbf{i}_m \mathbf{i}_1 \in \mathbb{M}(\mathbf{i}_m, \mathbf{i}_1). \end{aligned}$$

Supposons maintenant que  $Q_{2,c}^k(0) \in \mathbb{M}(\mathbf{i}_m, \mathbf{i}_1)$  pour un certain entier  $k \geq 1$ . Alors, d'après la fermeture de  $\mathbb{M}(\mathbf{i}_m, \mathbf{i}_1)$ ,  $(Q_{2,c}^k(0))^2 \in \mathbb{M}(\mathbf{i}_m, \mathbf{i}_1)$  et ainsi

$$Q_{2,c}^{k+1}(0) = (Q_{2,c}^k(0))^2 + c \in \mathbb{M}(\mathbf{i}_m, \mathbf{i}_1).$$

Ceci termine la démonstration. □

Ces derniers corollaires nous montrent que les itérées du polynôme  $Q_{2,c}$  évaluées en  $\eta = 0$  demeurent toujours dans le sous-espace  $\mathbb{M}(\mathbf{i}_m, \mathbf{i}_1)$  lorsque  $\mathbf{i}_k = 1$  ou que  $\mathbf{i}_m \mathbf{i}_1 = \pm \mathbf{i}_k$ . Ceci prouve ce qui était énoncé à la fin de la sous-section précédente. Les quatre coupes principales dans ce cas sont respectivement :

1) le *Tétrabrot*

$$\mathcal{T}^2(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2) := \left\{ c \in \mathbb{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2) : \left\{ Q_{2,c}^m(0) \right\}_{m=1}^{\infty} \text{ est bornée} \right\}; \quad (3.6)$$

2) le *Perplexbrot*

$$\mathcal{T}^2(1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2) := \left\{ c \in \mathbb{T}(1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2) : \left\{ Q_{2,c}^m(0) \right\}_{m=1}^{\infty} \text{ est bornée} \right\}; \quad (3.7)$$

3) le *Mousebrot*

$$\mathcal{T}^2(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_1) := \left\{ c \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_1) : \left\{ Q_{2,c}^m(0) \right\}_{m=1}^{\infty} \text{ est bornée} \right\}; \quad (3.8)$$

4) et le *Arrow-Pitbrot*

$$\mathcal{T}^2(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1) := \left\{ c \in \mathbb{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1) : \left\{ Q_{2,c}^m(0) \right\}_{m=1}^{\infty} \text{ est bornée} \right\}. \quad (3.9)$$

En utilisant directement la définition 3.8 et les propriétés d'une relation d'équivalence, V. Garant-Pelletier et D. Rochon [GPR08] ont démontré les différentes symétries :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^2(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2) &\sim \mathcal{T}^2(1, \mathbf{i}_k, \mathbf{i}_m), \forall \mathbf{i}_k, \mathbf{i}_m \in \{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \mathbf{i}_4\} \text{ et } \mathbf{i}_k \neq \mathbf{i}_m; \\ \mathcal{T}^2(1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2) &\sim \mathcal{T}^2(1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3) \sim \mathcal{T}^2(1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_3); \\ \mathcal{T}^2(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_1) &\sim \mathcal{T}^2(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_3, \mathbf{j}_2) \sim \mathcal{T}^2(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_4, \mathbf{j}_3) \sim \mathcal{T}^2(\mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \mathbf{j}_3) \\ &\sim \mathcal{T}^2(\mathbf{i}_2, \mathbf{i}_4, \mathbf{j}_2) \sim \mathcal{T}^2(\mathbf{i}_3, \mathbf{i}_4, \mathbf{j}_1); \\ \mathcal{T}^2(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1) &\sim \mathcal{T}^2(1, \mathbf{i}_k, \mathbf{i}_m), \mathbf{i}_k \in \{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \mathbf{i}_4\} \text{ et } \mathbf{i}_m \in \{\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3\}. \end{aligned}$$

Ces quatre dernières, soient (3.6), (3.7), (3.8) et (3.9), sont illustrées aux figures 3.1(a), 3.1(b), 3.1(c) et 3.1(d). Les couleurs utilisées dans les images (et les autres de la prochaine sous-section) proviennent de la propriété des ensembles multibrots tricomplexes du corollaire 3.3. Selon ce corollaire, l'ensemble de Mandelbrot  $\mathcal{M}_3^2$  se décompose en un produit cartésien selon quatre ensembles de Mandelbrot  $\mathcal{M}^2$  du plan complexe. Donc, si  $c = c_1\gamma_1\gamma_3 + c_2\overline{\gamma_1}\gamma_3 + c_3\gamma_1\overline{\gamma_3} + c_4\overline{\gamma_1}\overline{\gamma_3}$ , nous avons les quatre cas suivants :

- 1) Intervalle de vert au bleu : aucune composante  $c_i$  n'est dans un des ensembles  $\mathcal{M}^2$ ;
- 2) Jaune : un et un seul des composantes  $c_i \in \mathcal{M}^2$ ;
- 3) Rouge : seulement deux composantes  $c_i$  appartiennent à l'ensemble  $\mathcal{M}^2$ ;
- 4) Orange : trois composantes  $c_i$  appartiennent à l'ensemble  $\mathcal{M}^2$ ;
- 5) Gris : toutes les composantes appartiennent à l'ensemble  $\mathcal{M}^2$ .

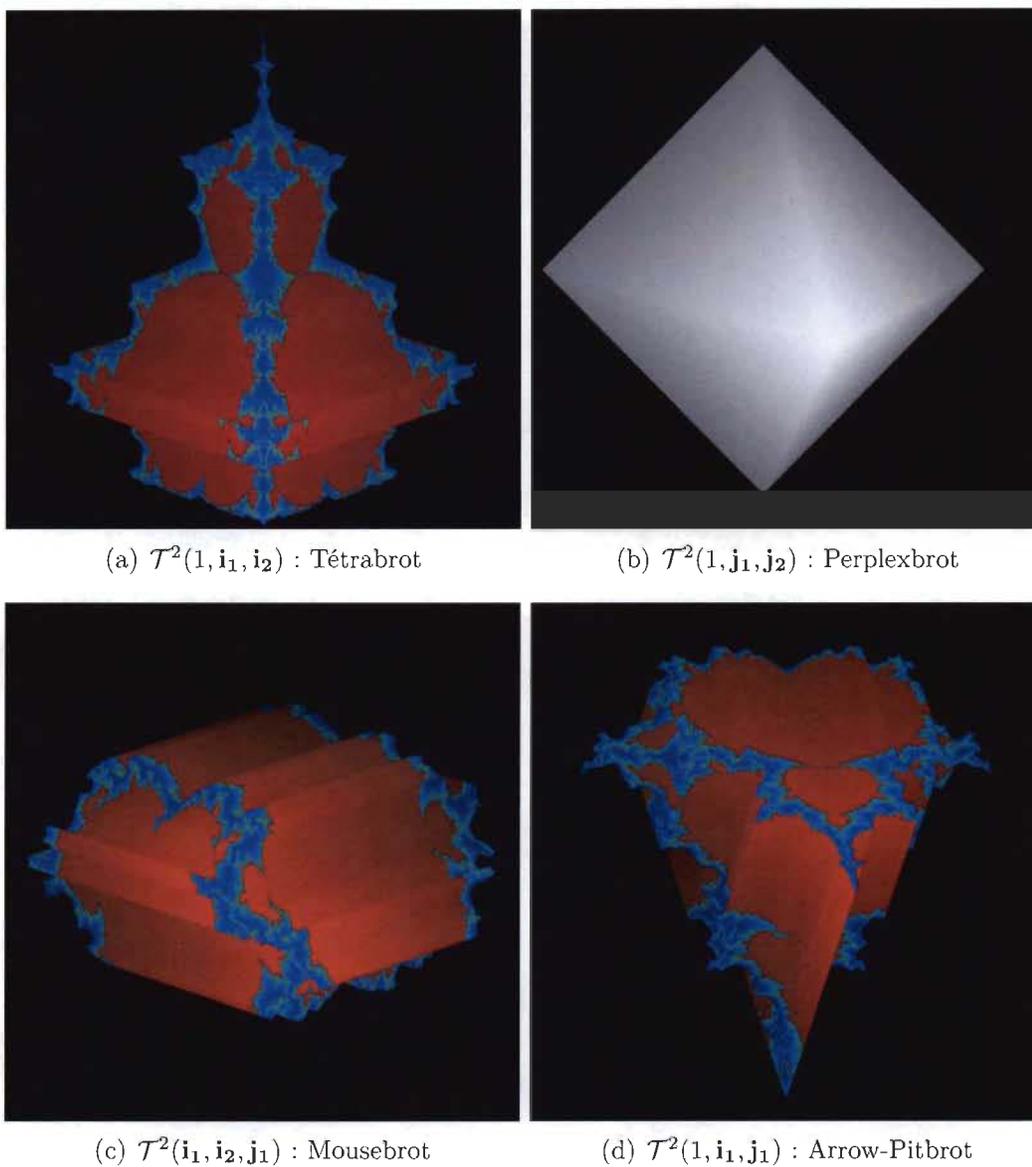


FIGURE 3.1 – Quatre coupes 3D de l'ensemble de Mandelbrot  $\mathcal{M}_3^2$

Ensuite, les quatre autres coupes principales se conjuguent au second cas puisque le calcul des itérées du polynôme  $Q_{2,c}$  (évalué initialement en  $\eta = 0$ ) s'effectue complètement dans l'ensemble  $\mathbb{M}(3)$ . En effet le lemme 3.2 nous conduit au corollaire suivant :

**Corollaire 3.6.** Si  $\mathbf{i}_k \neq 1$ ,  $\mathbf{i}_m \mathbf{i}_l \neq \pm \mathbf{i}_k$  et  $c \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_m, \mathbf{i}_l)$ , alors  $\exists m \in \mathbb{N}$  tel que  $Q_{p,c}^m(0) \in \mathbb{M}(3)$ .

**Démonstration.**

Un petit calcul de  $Q_{2,c}^3(0)$  permet de vérifier la proposition avec  $m = 3$ . En effet, pour  $m = 2$ , on a que

$$Q_{2,c}^2(0) = x_1 + x_2 \mathbf{i}_k \mathbf{i}_m + x_3 \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l + x_4 \mathbf{i}_m \mathbf{i}_l + c_1 \mathbf{i}_k + c_2 \mathbf{i}_m + c_3 \mathbf{i}_l$$

puisque  $c^2 \in \mathbb{M}(\mathbf{i}_m, \mathbf{i}_l)$ . Or, comme  $\pm \mathbf{i}_k \neq \mathbf{i}_m \mathbf{i}_l$ , on ne peut pas avoir  $\mathbf{i}_k \mathbf{i}_m = \mathbf{i}_l$  et  $\mathbf{i}_k \mathbf{i}_l = \mathbf{i}_m$ . Ainsi,  $Q_{2,c}^2(0) \notin \mathbb{M}(\mathbf{i}_m, \mathbf{i}_l)$ . En poursuivant le calcul, on obtient bien que  $Q_{2,c}^3(0) \in \mathbb{M}(3)$ .  $\square$

Ces dernières coupes sont :

1) le *Metabrot*

$$\mathcal{T}^2(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3) := \left\{ c \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3) : \left\{ Q_{2,c}^m(0) \right\}_{m=1}^{\infty} \text{ est bornée} \right\}; \quad (3.10)$$

2) le *Turtlebrot*

$$\mathcal{T}^2(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2) := \left\{ c \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2) : \left\{ Q_{2,c}^m(0) \right\}_{m=1}^{\infty} \text{ est bornée} \right\}; \quad (3.11)$$

3) le *Hourglassbrot*

$$\mathcal{T}^2(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2) := \left\{ c \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2) : \left\{ Q_{2,c}^m(0) \right\}_{m=1}^{\infty} \text{ est bornée} \right\}; \quad (3.12)$$

4) et le *Firebrot*

$$\mathcal{T}^2(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3) := \left\{ c \in \mathbb{T}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3) : \left\{ Q_{2,c}^m(0) \right\}_{m=1}^{\infty} \text{ est bornée} \right\}. \quad (3.13)$$

Les symétries obtenues en appliquant directement la définition 3.8 sont :

$$\mathcal{T}^2(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3) \sim \mathcal{T}^2(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_4) \sim \mathcal{T}^2(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_3, \mathbf{i}_4) \sim \mathcal{T}^2(\mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \mathbf{i}_4);$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}^2(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2) &\sim \mathcal{T}^2(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_3) \sim \mathcal{T}^2(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_3, \mathbf{j}_1) \sim \mathcal{T}^2(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_3, \mathbf{j}_3) \sim \mathcal{T}^2(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_4, \mathbf{j}_1) \\
 &\sim \mathcal{T}^2(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_4, \mathbf{j}_2) \sim \mathcal{T}^2(\mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \mathbf{j}_1) \sim \mathcal{T}^2(\mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \mathbf{j}_2) \sim \mathcal{T}^2(\mathbf{i}_2, \mathbf{i}_4, \mathbf{j}_1) \\
 &\sim \mathcal{T}^2(\mathbf{i}_2, \mathbf{i}_4, \mathbf{j}_3) \sim \mathcal{T}^2(\mathbf{i}_3, \mathbf{i}_4, \mathbf{j}_2) \sim \mathcal{T}^2(\mathbf{i}_3, \mathbf{i}_4, \mathbf{j}_3); \\
 \mathcal{T}^2(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2) &\sim \mathcal{T}^2(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_3) \sim \mathcal{T}^2(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3) \sim \mathcal{T}^2(\mathbf{i}_2, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2) \sim \mathcal{T}^2(\mathbf{i}_2, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_3) \\
 &\sim \mathcal{T}^2(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3) \sim \mathcal{T}^2(\mathbf{i}_3, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2) \sim \mathcal{T}^2(\mathbf{i}_3, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_3) \sim \mathcal{T}^2(\mathbf{i}_3, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3) \\
 &\sim \mathcal{T}^2(\mathbf{i}_4, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2) \sim \mathcal{T}^2(\mathbf{i}_4, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_3) \sim \mathcal{T}^2(\mathbf{i}_4, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3).
 \end{aligned}$$

Les quatre coupes principales (3.10), (3.11), (3.12) et (3.13) sont illustrées dans les figures 3.2(a), 3.2(b), 3.2(c) et 3.2(d). Ces figures suggèrent deux choses intéressantes : l'une semble illustrer un tétraèdre (voir la figure 3.2(d)) et une autre semble illustrer un octaèdre (voir la figure 3.1(b)). Malgré que la première constatation concernant la coupe  $\mathcal{T}^2(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)$  est fortement appuyée par la figure 3.2(d), elle demeure une conjecture (voir à ce sujet la conclusion du mémoire de V. Garant-Pelletier [GP11]). Par contre, la figure 3.1(b) illustre exactement un octaèdre. En effet, les auteurs de l'article [GPR08] ont démontré que la coupe  $\mathcal{T}^2(1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2)$  est un octaèdre de côté d'une longueur de  $\frac{9}{8}\sqrt{2}$ . Ces dernières observations sont remarquables puisque ces solides platoniciens sont issus d'un système dynamique en plusieurs variables complexes.

Après ce bref aperçu des travaux de V. Garant-Pelletier et D. Rochon sur les coupes 3D de  $\mathcal{M}_3^2$ , la prochaine sous-section nous réserve quelques surprises. Nous y explorons les coupes 3D du Mandelbrique tricomplexe.

## Le Mandelbrique tricomplexe

Comme mentionné dans la dernière sous-section, nous basons notre étude du Mandelbrique tricomplexe sur les huit coupes principales de l'ensemble de Mandelbrot tricomplexe répertoriées par D. Rochon et V. Garant-Pelletier. Nous découvrirons un fait étonnant : certaines coupes principales qui n'engendraient pas la même dynamique dans le cas d'une puissance  $p = 2$  engendre désormais la même dynamique dans le cas d'une puissance  $p = 3$ .

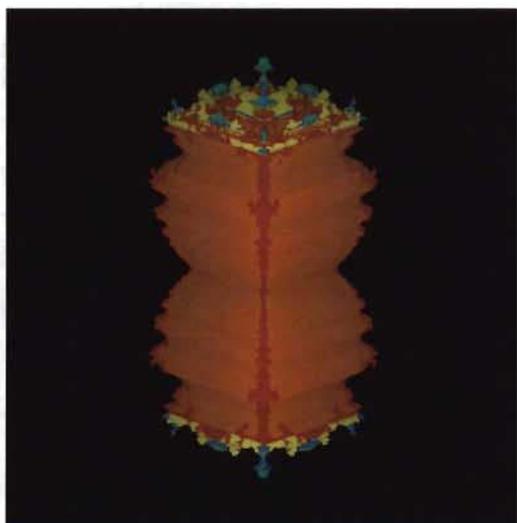
Nous commençons notre exploration en définissant huit coupes principales (que nous allons démontrer plus loin) de l'ensemble  $\mathcal{M}_3^3$ . Ces huit coupes sont les mêmes que celles de l'ensemble  $\mathcal{M}_3^2$  et se divisent donc selon deux cas. Dans le premier cas (celui dont les itérées du polynôme  $Q_{3,c}$  sont fermées dans l'ensemble  $\mathbb{M}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l)$ ), on définit les quatre coupes principales suivantes :



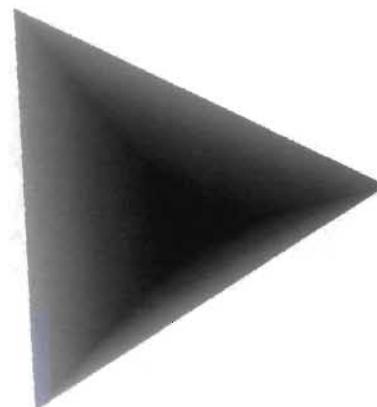
(a)  $\mathcal{T}^2(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$  : Metabrot



(b)  $\mathcal{T}^2(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2)$  : Turtlebrot



(c)  $\mathcal{T}^2(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2)$  : Hourglassbrot



(d)  $\mathcal{T}^2(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)$  : Firebrot

FIGURE 3.2 – Quatre coupes 3D de l'ensemble de Mandelbrot  $\mathcal{M}_3^2$

1) le *Tétrabric*

$$\mathcal{T}^3(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2) := \left\{ c \in \mathbb{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2) : \left\{ Q_{3,c}^m(0) \right\}_{m=1}^{\infty} \text{ est bornée} \right\} \quad (3.14)$$

2) le *Perplexbric*

$$\mathcal{T}^3(1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2) := \left\{ c \in \mathbb{T}(1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2) : \left\{ Q_{3,c}^m(0) \right\}_{m=1}^{\infty} \text{ est bornée} \right\} \quad (3.15)$$

3) le *Tétrabric* (voir plus loin)

$$\mathcal{T}^3(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_1) := \left\{ c \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_1) : \left\{ Q_{3,c}^m(0) \right\}_{m=1}^{\infty} \text{ est bornée} \right\} \quad (3.16)$$

4) et le *Hourglassbric*

$$\mathcal{T}^3(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1) := \left\{ c \in \mathbb{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1) : \left\{ Q_{3,c}^m(0) \right\}_{m=1}^{\infty} \text{ est bornée} \right\}. \quad (3.17)$$

Les figures 3.3(a), 3.3(b), 3.3(c) et 3.3(d) représentent les quatre coupes du premier cas. La signification des couleurs qui apparaissent dans les figures est la même que celle mentionnée dans la sous-section précédente. Quelques commentaires sur la nomination des coupes. Nous nommons la coupe  $\mathcal{T}^3(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2)$  par *Tétrabric* qui est l'union des mots « *Tétrabrot* » et « *cubic* » (ce dernier est en lien avec la nature du polynôme  $Q_{3,c}$ ). Aussi, nous nommons la coupe  $\mathcal{T}^3(1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2)$  par *Perplexbric*; ce dernier est l'union des mots « *Perplexbrot* » et « *cubic* ». La coupe  $\mathcal{T}^3(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1)$  a aussi un nom, il s'agit de *Hourglassbric* puisque sa forme s'apparente à un sablier.

À présent, nous présentons quelques résultats concernant ce premier groupe de coupes 3D. Des exemples de calculs sont présentés dans l'annexe C.

**Lemme 3.3.** Les coupes  $\mathcal{T}^3(1, \mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l)$  où  $\mathbf{i}_k \neq \mathbf{i}_l$  et  $\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l \in \{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \mathbf{i}_4\}$  sont symétriques entre elles.

**Démonstration.**

D'abord, nous montrons que  $\mathcal{T}^3(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2) \sim \mathcal{T}^3(1, \mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l)$  pour  $\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l \in \{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \mathbf{i}_4\}$  et  $\mathbf{i}_k \neq \mathbf{i}_l$ . Pour ce faire, posons les nombres  $c \in \mathbb{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2)$  et  $c' \in \mathbb{T}(1, \mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l)$  ainsi que la fonction  $\varphi : \mathbb{M}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2) \rightarrow \mathbb{M}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l)$  par

$$c = c_1 + c_2 \mathbf{i}_1 + c_3 \mathbf{i}_2, \quad c' = c_1 + c_2 \mathbf{i}_k + c_3 \mathbf{i}_l$$

et

$$\varphi(a + b \mathbf{i}_1 + c \mathbf{i}_2 + d \mathbf{j}_1) = a + b \mathbf{i}_k + c \mathbf{i}_l + d \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l.$$

Ainsi,  $\varphi$  est évidemment une application linéaire bijective. Soit  $\eta \in \mathbb{M}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l)$ . On obtient :

$$\begin{aligned}
 (\varphi \circ Q_{3,c} \circ \varphi^{-1})(\eta) &= \varphi \left( (a^3 - 3ab^2 - 3ac^2 + 3ad^2 + 6bcd + c_1) \right. \\
 &\quad + (-b^3 + 3a^2b - 3bc^2 + 3bd^2 - 6acd + c_2)\mathbf{i}_1 \\
 &\quad + (-c^3 + 3a^2c - 3b^2c + 3cd^2 - 6abd + c_3)\mathbf{i}_2 \\
 &\quad \left. + (d^3 + 3a^2d - 3b^2d - 3c^2d + 6abc)\mathbf{j}_1 \right) \\
 &= (a^3 - 3ab^2 - 3ac^2 + 3ad^2 + 6bcd + c_1) \\
 &\quad + (-b^3 + 3a^2b - 3bc^2 + 3bd^2 - 6acd + c_2)\mathbf{i}_k \\
 &\quad + (-c^3 + 3a^2c - 3b^2c + 3cd^2 - 6abd + c_3)\mathbf{i}_l \\
 &\quad + (d^3 + 3a^2d - 3b^2d - 3c^2d + 6abc)\mathbf{i}_k\mathbf{i}_l \\
 &= Q_{3,c'}(\eta).
 \end{aligned}$$

Donc, en vertu de la définition 3.8,  $\mathcal{T}^3(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2) \sim \mathcal{T}^3(1, \mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l)$ . On obtient le résultat du lemme en appliquant le théorème 3.7 qui stipule que  $\sim$  est une relation d'équivalence et ainsi  $\sim$  est transitive.  $\square$

**Lemme 3.4.** Nous avons les symétries suivantes :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}^3(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_1) &\sim \mathcal{T}^3(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_3, \mathbf{j}_2) \sim \mathcal{T}^3(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_4, \mathbf{j}_3) \sim \mathcal{T}^3(\mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \mathbf{j}_3) \sim \mathcal{T}^3(\mathbf{i}_2, \mathbf{i}_4, \mathbf{j}_2) \\
 &\sim \mathcal{T}^3(\mathbf{i}_3, \mathbf{i}_4, \mathbf{j}_1).
 \end{aligned}$$

**Démonstration.**

Nous démontrons que  $\mathcal{T}^3(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_1) \sim \mathcal{T}^3(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_k\mathbf{i}_l)$  avec  $\mathbf{i}_k \neq \mathbf{i}_l$  et  $\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l \in \{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \mathbf{i}_4\}$ . Pour ce faire, posons les nombres  $c \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_1)$  et  $c' \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_k\mathbf{i}_l)$  ainsi que la fonction  $\varphi : \mathbb{M}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2) \rightarrow \mathbb{M}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l)$  par

$$c = c_1\mathbf{i}_1 + c_2\mathbf{i}_2 + c_3\mathbf{j}_1, \quad c' = c_1\mathbf{i}_k + c_2\mathbf{i}_l + c_3\mathbf{i}_k\mathbf{i}_l$$

et

$$\varphi(a + b\mathbf{i}_1 + c\mathbf{i}_2 + d\mathbf{j}_1) = \begin{cases} a + b\mathbf{i}_k + c\mathbf{i}_l + d\mathbf{i}_k\mathbf{i}_l & \text{si } \mathbf{i}_1 \neq \mathbf{i}_4 \\ -a + b\mathbf{i}_k + c\mathbf{i}_l + d\mathbf{i}_k\mathbf{i}_l & \text{si } \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_4. \end{cases}$$

Ainsi, pour  $\eta \in \mathbb{M}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l)$ , nous obtenons

$$(\varphi \circ Q_{3,c} \circ \varphi^{-1})(\eta) = \varphi \left( (a^3 - 3ab^2 - 3ac^2 + 3ad^2 + 6bcd) \right)$$

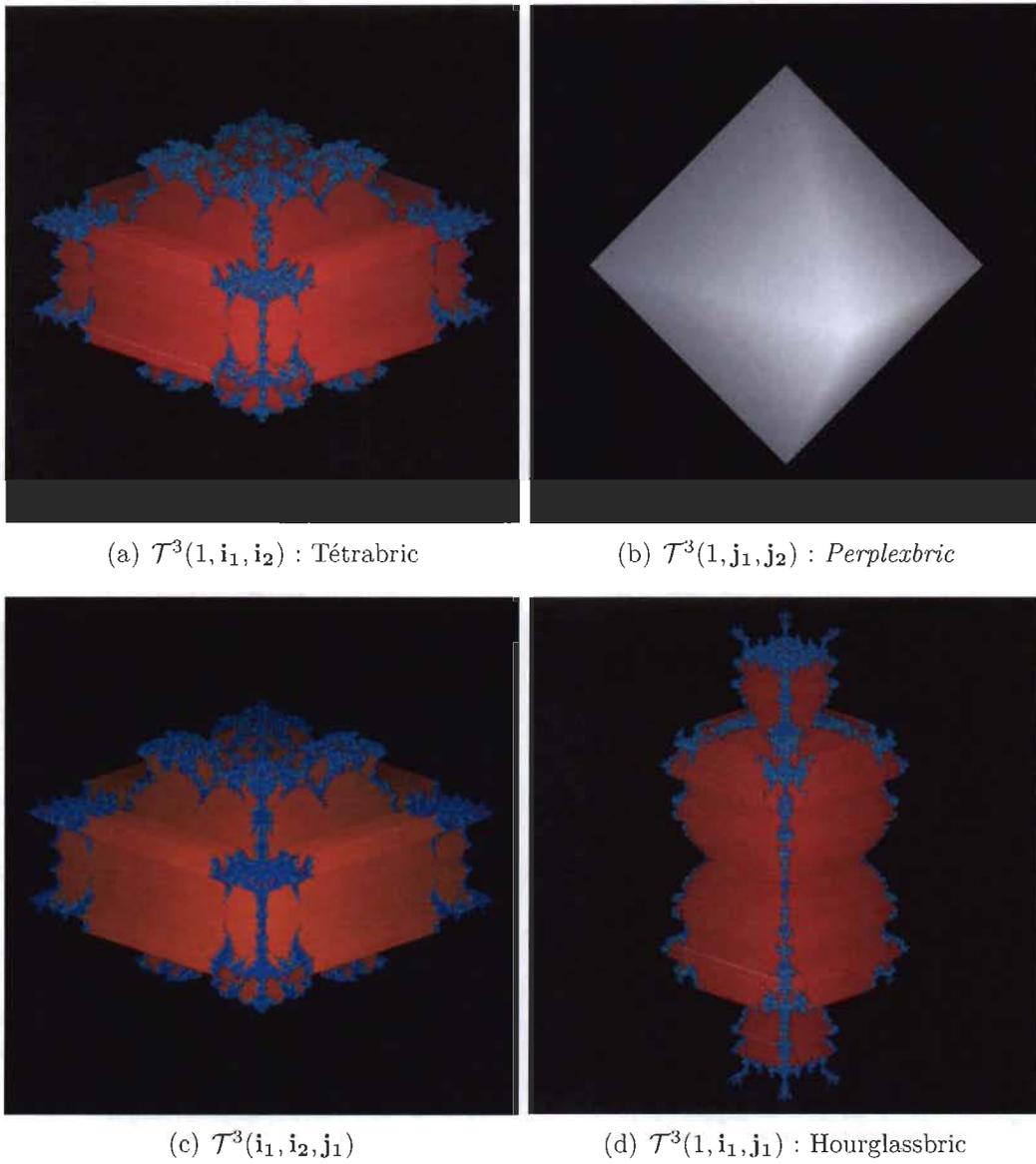


FIGURE 3.3 – Quatre coupes 3D de l'ensemble de Mandelbrot  $\mathcal{M}_3^3$

$$\begin{aligned}
 & + (-b^3 + 3a^2b - 3bc^2 + 3bd^2 - 6acd + c_1)\mathbf{i}_1 \\
 & + (-c^3 + 3a^2c - 3b^2c + 3cd^2 - 6abd + c_2)\mathbf{i}_2 \\
 & + (d^3 + 3a^2d - 3b^2d - 3c^2d + 6abc + c_3)\mathbf{j}_1) \\
 & = (a^3 - 3ab^2 - 3ac^2 + 3ad^2 + 6bcd) \\
 & + (-b^3 + 3a^2b - 3bc^2 + 3bd^2 - 6acd + c_1)\mathbf{i}_k \\
 & + (-c^3 + 3a^2c - 3b^2c + 3cd^2 - 6abd + c_2)\mathbf{i}_l \\
 & + (d^3 + 3a^2d - 3b^2d - 3c^2d + 6abc + c_3)\mathbf{i}_k\mathbf{i}_l \\
 & = Q_{3,c'}(\eta).
 \end{aligned}$$

Donc,  $\mathcal{T}^3(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_1) \sim \mathcal{T}^3(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_k\mathbf{i}_l)$  selon la définition 3.8 et en vertu du théorème 3.7, on obtient le résultat du lemme.  $\square$

Nous remarquons (voir les figures 3.3(a) et 3.3(b)) que la relation  $\mathcal{T}^3(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2) \sim \mathcal{T}^3(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_1)$  semble plausible. C'est l'objet de la proposition suivante.

**Proposition 3.4.** Les coupes  $\mathcal{T}^3(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2)$  et  $\mathcal{T}^3(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_1)$  sont symétriques.

**Démonstration.**

Pour établir ce résultat, on pose les nombres  $c \in \mathbb{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2)$  et  $c' \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_1)$  ainsi que la fonction  $\varphi : \mathbb{M}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2) \rightarrow \mathbb{M}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2)$  comme suit

$$c = c_1 + c_2\mathbf{i}_1 + c_3\mathbf{i}_2, \quad c' = c_2\mathbf{i}_1 + c_3\mathbf{i}_2 + c_1\mathbf{j}_1$$

et

$$\varphi(a + b\mathbf{i}_1 + c\mathbf{i}_2 + d\mathbf{j}_1) = d + b\mathbf{i}_1 + c\mathbf{i}_2 + a\mathbf{j}_1.$$

De cette façon, en posant  $\eta \in \mathbb{M}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2)$ , nous trouvons que

$$\begin{aligned}
 (\varphi \circ Q_{3,c} \circ \varphi^{-1})(\eta) & = \varphi \left( (a^3 - 3ab^2 - 3ac^2 + 3ad^2 + 6bcd + c_1) \right. \\
 & + (-b^3 + 3a^2b - 3bc^2 + 3bd^2 - 6acd + c_2)\mathbf{i}_1 \\
 & + (-c^3 + 3a^2c - 3b^2c + 3cd^2 - 6abd + c_3)\mathbf{i}_2 \\
 & \left. + (d^3 + 3a^2d - 3b^2d - 3c^2d + 6abc)\mathbf{j}_1 \right) \\
 & = (d^3 + 3a^2d - 3b^2d - 3c^2d + 6abc) \\
 & + (-b^3 + 3a^2b - 3bc^2 + 3bd^2 - 6acd + c_2)\mathbf{i}_1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ (-c^3 + 3a^2c - 3b^2c + 3cd^2 - 6abd + c_3)\mathbf{i}_2 \\
 &+ (a^3 - 3ab^2 - 3ac^2 + 3ad^2 + 6bcd + c_1)\mathbf{j}_1 \\
 &= Q_{3,c'}(\eta).
 \end{aligned}$$

Donc, d'après la définition 3.8, on a le résultat voulu.  $\square$

**Remarque 27.** En vertu des lemmes 3.3 et 3.4, ainsi que le théorème 3.7, nous pouvons prendre comme représentant principal de la classe d'équivalence regroupant les symétries des deux lemmes précédents la coupe  $\mathcal{T}^3(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2)$ . Ainsi, toutes les coupes appartenant à la classe d'équivalence  $[\mathcal{T}^3(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2)]$  correspondent au *Tetrabric*.  $\blacktriangle$

**Lemme 3.5.** Nous avons les symétries suivantes :

$$\mathcal{T}^3(1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2) \sim \mathcal{T}^3(1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3) \sim \mathcal{T}^3(1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_3).$$

**Démonstration.**

On démontre la première similitude. La deuxième se fait de façon similaire. On pose les deux nombres  $c \in \mathbb{T}(1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2)$  et  $c' \in \mathbb{T}(1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_3)$  ainsi que la fonction  $\varphi : \mathbb{M}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2) \rightarrow \mathbb{M}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_3)$  comme suit

$$c = c_1 + c_2\mathbf{j}_1 + c_3\mathbf{j}_2, \quad c' = c_1 + c_2\mathbf{j}_1 + c_3\mathbf{j}_3$$

et

$$\varphi(a + b\mathbf{j}_1 + c\mathbf{j}_2 + d\mathbf{j}_3) = a + b\mathbf{j}_1 + d\mathbf{j}_2 + c\mathbf{j}_3.$$

L'application  $\varphi$  a comme inverse

$$\varphi^{-1}(a + b\mathbf{j}_1 + c\mathbf{j}_3 + d\mathbf{j}_2) = a + b\mathbf{j}_1 + d\mathbf{j}_2 + c\mathbf{j}_3.$$

Par conséquent, en posant  $\eta \in \mathbb{M}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_3)$ , nous obtenons que

$$\begin{aligned}
 (\varphi \circ Q_{3,c} \circ \varphi^{-1})(\eta) &= \varphi \left( (a^3 + 3ab^2 + 3ac^2 + 3ad^2 - 6bcd + c_1) \right. \\
 &\quad + (b^3 + 3a^2b + 3bc^2 + 3bd^2 - 6acd + c_2)\mathbf{j}_1 \\
 &\quad + (c^3 + 3a^2c + 3b^2c + 3cd^2 - 6abd + c_3)\mathbf{j}_2 \\
 &\quad \left. + (d^3 + 3a^2d + 3b^2d + 3c^2d - 6abc)\mathbf{j}_3 \right) \\
 &= (a^3 + 3ab^2 + 3ac^2 + 3ad^2 - 6bcd + c_1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (b^3 + 3a^2b + 3bc^2 + 3bd^2 - 6acd + c_2)\mathbf{j}_1 \\
& + (d^3 + 3a^2d + 3b^2d + 3c^2d - 6abc)\mathbf{j}_2 \\
& + (c^3 + 3a^2c + 3b^2c + 3cd^2 - 6abd + c_3)\mathbf{j}_3 \\
& = Q_{3,c'}(\eta).
\end{aligned}$$

Donc, d'après la définition 3.8, on trouve que  $\mathcal{T}^3(1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2) \sim \mathcal{T}^3(1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_3)$ .  $\square$

Puis, nous avons le prochain lemme qui traite des coupes reliées au Hourglassbric.

**Lemme 3.6.** Nous avons les similitudes suivantes :

$$\mathcal{T}^3(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1) \sim \mathcal{T}^3(1, \mathbf{i}_k, \mathbf{j}_1), \mathbf{i}_k \in \{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \mathbf{i}_4\} \text{ et } \mathbf{j}_1 \in \{\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3\}.$$

**Démonstration.**

Les idées pour démontrer ce lemme sont les mêmes que celles des lemmes précédents. Nous démontrons que  $\mathcal{T}^3(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1) \sim \mathcal{T}^3(1, \mathbf{i}_k, \mathbf{j}_1)$  où  $\mathbf{i}_k \in \{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \mathbf{i}_4\}$  et  $\mathbf{j}_1 \in \{\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3\}$ . Pour y arriver, nous posons les deux nombres  $c \in \mathbb{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1)$  et  $c' \in \mathbb{T}(1, \mathbf{i}_k, \mathbf{j}_1)$  ainsi que la fonction  $\varphi : \mathbb{M}(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1) \rightarrow \mathbb{M}(\mathbf{i}_k, \mathbf{j}_1)$  comme ceci

$$c = c_1 + c_2\mathbf{i}_1 + c_3\mathbf{j}_1, \quad c' = c_1 + c_2\mathbf{i}_k + c_3\mathbf{j}_1$$

et

$$\varphi(a + b\mathbf{i}_1 + c\mathbf{i}_2 + d\mathbf{j}_1) = a + b\mathbf{i}_k - c\mathbf{i}_k\mathbf{j}_1 + d\mathbf{j}_1.$$

Ainsi, pour  $\eta \in \mathbb{M}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_1)$ , nous obtenons que

$$\begin{aligned}
(\varphi \circ Q_{3,c} \circ \varphi^{-1})(\eta) &= \varphi \left( (a^3 - 3ab^2 - 3ac^2 + 3ad^2 - 6bcd + c_1) \right. \\
& + (-b^3 + 3a^2b - 3bc^2 + 3bd^2 + 6acd + c_2)\mathbf{i}_1 \\
& + (-c^3 + 3a^2c - 3b^2c + 3cd^2 - 6abd)\mathbf{i}_2 \\
& \left. + (d^3 + 3a^2d - 3b^2d - 3c^2d + 6abc + c_3)\mathbf{j}_1 \right) \\
&= (a^3 - 3ab^2 - 3ac^2 + 3ad^2 - 6bcd + c_1) \\
& + (-b^3 + 3a^2b - 3bc^2 + 3bd^2 + 6acd + c_2)\mathbf{i}_k \\
& + (c^3 - 3a^2c + 3b^2c - 3cd^2 + 6abd)\mathbf{i}_k\mathbf{j}_1 \\
& + (d^3 + 3a^2d - 3b^2d - 3c^2d + 6abc + c_3)\mathbf{j}_1 \\
&= Q_{3,c'}(\eta).
\end{aligned}$$

Donc, nous avons démontré le résultat voulu. Maintenant, en appliquant le théorème 3.7, on obtient le résultat du lemme.  $\square$

Bref, jusqu'à présent, nous avons les trois classes d'équivalence suivantes :  $[\mathcal{T}^3(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2)]$ ,  $[\mathcal{T}^3(1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2)]$  et  $[\mathcal{T}^3(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1)]$ . Celles-ci sont les trois premières coupes principales du Mandelbrique tricomplexe.

Ensuite, les quatre autres coupes sont classées dans le second cas (où les itérées du polynôme  $Q_{3,c}$  évaluées initialement en  $\eta = 0$  ne sont pas fermées dans l'ensemble  $\mathbb{M}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l)$ ). Nous définissons donc les quatre coupes suivantes :

$$1) \quad \mathcal{T}^3(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3) := \left\{ c \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3) : \left\{ Q_{3,c}^m(0) \right\}_{m=1}^{\infty} \text{ est bornée} \right\}; \quad (3.18)$$

$$2) \quad \mathcal{T}^3(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2) := \left\{ c \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2) : \left\{ Q_{3,c}^m(0) \right\}_{m=1}^{\infty} \text{ est bornée} \right\}; \quad (3.19)$$

$$3) \quad \mathcal{T}^3(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2) := \left\{ c \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2) : \left\{ Q_{3,c}^m(0) \right\}_{m=1}^{\infty} \text{ est bornée} \right\}; \quad (3.20)$$

$$4) \text{ et} \quad \mathcal{T}^3(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3) := \left\{ c \in \mathbb{T}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3) : \left\{ Q_{3,c}^m(0) \right\}_{m=1}^{\infty} \text{ est bornée} \right\}. \quad (3.21)$$

Les figures 3.4(a), 3.4(b), 3.4(c) et 3.4(d) illustrent les quatre autres coupes du deuxième cas. Les couleurs qui apparaissent dans les images portent la même signification que celle mentionnée dans la première sous-section (à propos de l'ensemble de Mandelbrot tricomplexe). Nous allons donner un nom particulier à la coupe  $\mathcal{T}^3(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ . Nous la nommons par *Metabrot*; ce nom est l'union des mots « *Meta*-*brot* » et « *cubic* ».

On remarque, en se basant sur les figures, que les coupes  $\mathcal{T}^3(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2)$ ,  $\mathcal{T}^3(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_1)$  et  $\mathcal{T}^3(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2)$  semblent similaires. Également, en comparant les figures 3.3(b) et 3.3(c) aux figures 3.4(d) et 3.4(c) respectivement, on remarque que les coupes correspondantes semblent identiques. Donc, il se produit un phénomène particulier qui lie les coupes du premier cas à celles du deuxième cas. Mais, comment aborder et comprendre ce phénomène lorsque les itérées du polynôme  $Q_{3,c}$  évalué initialement en 0 semblent ne pas se contenir dans un sous-ensemble à quatre dimensions, comme pour le premier cas de fermeture.

Quelques pistes de réflexion concernant les coupes du deuxième cas nous guideront vers la compréhension de ce phénomène et ses démonstrations. Comme nous

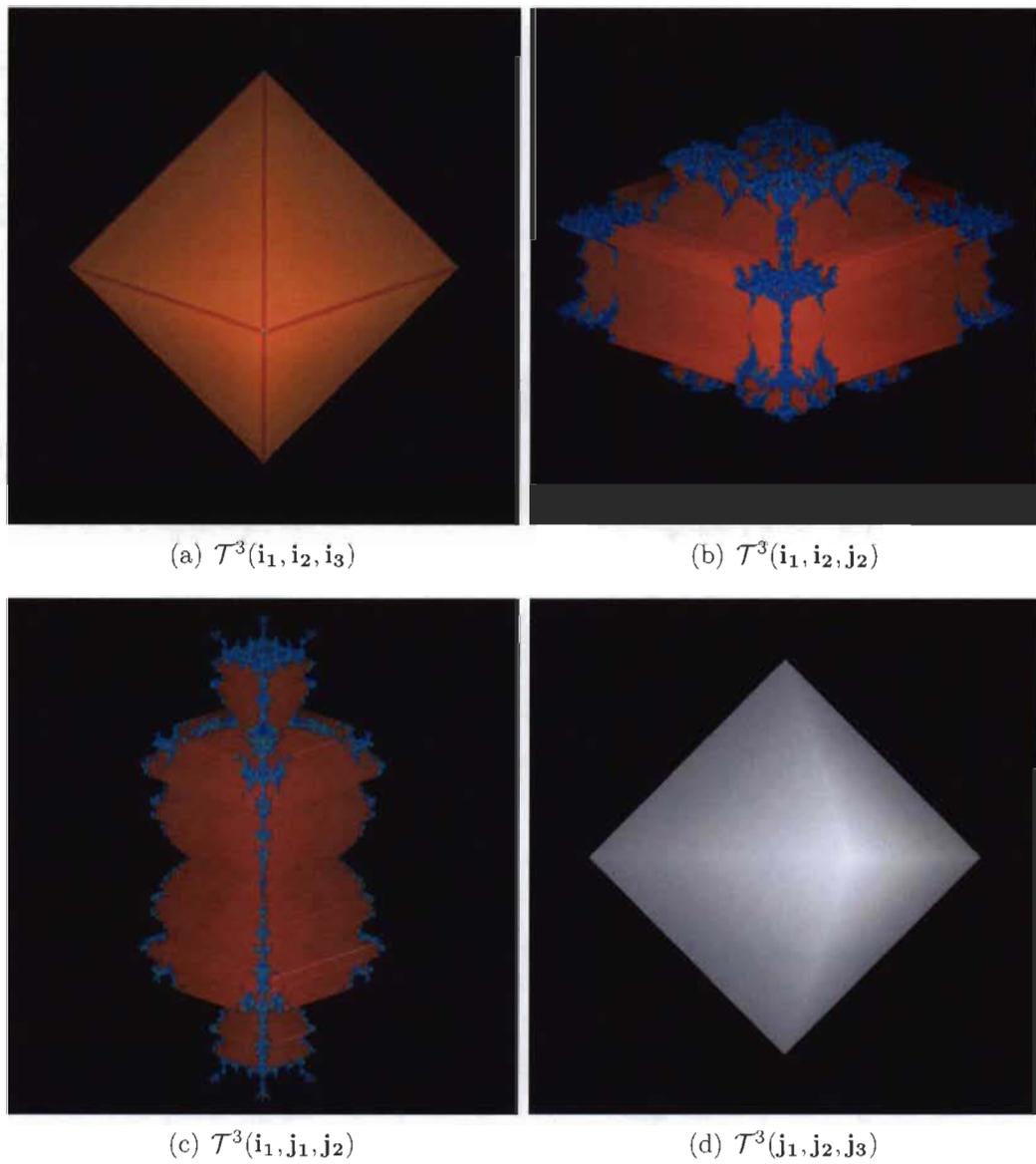


FIGURE 3.4 – Quatre coupes 3D de l'ensemble de Mandelbrot  $\mathcal{M}_3^3$

l'avons mentionné, les itérées dans  $\mathbb{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2)$  ne sont pas fermées dans le sous-ensemble  $\mathbb{M}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2)$ . Par contre, nous devons remarquer que chaque triplet et paire de coupes 3D s'« échangent » une unité réelle et une unité hyperbolique. Prenons par exemple les coupes  $\mathcal{T}^3(1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2)$  et  $\mathcal{T}^3(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)$ . La première est composée de l'unité réelle 1 et des deux unités hyperboliques  $\mathbf{j}_1$  et  $\mathbf{j}_2$ . Tandis que la deuxième est composée de trois unités hyperboliques soient  $\mathbf{j}_1$ ,  $\mathbf{j}_2$  et de  $\mathbf{j}_3$ . Ainsi, le rôle de l'unité réelle dans le système dynamique serait transposé sur l'unité hyperbolique  $\mathbf{j}_3$ . Serait-ce la bonne clé ? Non, pas tout à fait puisque cette remarque ne règle pas la fermeture des calculs des itérées du polynôme  $Q_{3,c}$ . Nous tentons de faire correspondre un ensemble dont les itérées sont fermées dans un sous-ensemble à quatre dimensions avec un ensemble dont les itérées semblent se perdre dans l'espace des nombres tricomplexes à huit dimensions. Incompatible, non ? Sommes-nous sûr que ces itérées s'écartent aux dimensions de l'espace  $\mathbb{M}(3)$  ? Permettons-nous d'effectuer quelques calculs à partir d'un exemple. Prenons la coupe  $\mathcal{T}^3(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2)$  et fixons  $c = c_1\mathbf{i}_1 + c_2\mathbf{i}_2 + c_3\mathbf{j}_2$  où  $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ . N'oublions pas que nous effectuons le calcul de  $Q_{3,c}^m(0)$ . Pour  $m = 2$ , un calcul simple fournit

$$\begin{aligned}
 Q_{3,c}^2(0) &= (-c_1^3 - 3c_1c_2^2 + 3c_1c_3^2 + c_1)\mathbf{i}_1 \\
 &\quad + (-c^3 - 3c_1^2c_2 + 3c_2c_3^2 + c_2)\mathbf{i}_2 \\
 &\quad + (c_3^3 - 3c_1^2c_3 - 3c_2^2c_3 + c_3)\mathbf{j}_2 \\
 &\quad - 6c_1c_2c_3\mathbf{j}_3.
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Nous remarquons que l'unité  $\mathbf{j}_3$  est apparue dans (3.22) et qu'il n'y en a pas d'autres. Pourtant, le produit  $\mathbf{i}_2\mathbf{j}_2$  devrait faire apparaître l'unité imaginaire  $\mathbf{i}_4$ . Cependant, en élevant au cube, celle-ci est remplacée par  $\mathbf{j}_3 = \mathbf{i}_1\mathbf{i}_4$ ,  $\mathbf{j}_2 = \mathbf{i}_2\mathbf{i}_4$  et  $\mathbf{i}_2 = \mathbf{i}_4\mathbf{j}_2$ . Si nous procédons au calcul du cas  $m = 3$ , nous obtenons les mêmes unités. Ainsi, pour cet exemple, les itérées restent fermés dans un sous-ensembles de nombres tricomplexes à quatre dimensions. Mais, nous verrons que c'est aussi le cas pour n'importe quel choix de coupes 3D. Donc, deux idées maîtresses à garder en tête :

- 1) le nombre d'unités réelle et hyperbolique doivent être les mêmes dans les sous-espaces considérés. Le cas échéant, l'unité réelle est remplacée par une unité hyperbolique ;
- 2) les calculs des itérées du polynôme  $Q_{3,c}$  évaluées initialement en 0 s'effectuent dans un sous-espace de quatre dimensions pour n'importe quel triplet d'unités imaginaires et hyperboliques.

La première idée est un guide pour les futures démonstrations des symétries du deuxième cas de fermeture des itérées du polynôme  $Q_{3,c}$ . La deuxième idée est justifiée par l'introduction d'un nouvel ensemble.

**Définition 3.9.** Soient  $\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_m, \mathbf{i}_l \in \{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \mathbf{i}_4, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3\}$  avec  $\mathbf{i}_k \neq \mathbf{i}_l$ ,  $\mathbf{i}_k \neq \mathbf{i}_m$  et  $\mathbf{i}_l \neq \mathbf{i}_m$ . On définit l'ensemble  $\mathbb{M}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_m, \mathbf{i}_l)$  par

$$\mathbb{M}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_m, \mathbf{i}_l) := \{a\mathbf{i}_k + b\mathbf{i}_m + c\mathbf{i}_l + d\mathbf{i}_k\mathbf{i}_m\mathbf{i}_l : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}. \quad (3.23)$$

Ce dernier sous-espace, comme nous allons le voir, simplifie l'étude des coupes 3D qui correspondent au deuxième cas. Pour illustrer la définition 3.9, on reprend notre exemple précédent. Dans ce cas, on pose  $\mathbf{i}_k = \mathbf{i}_1$ ,  $\mathbf{i}_m = \mathbf{i}_2$  et  $\mathbf{i}_l = \mathbf{j}_2$ . Ainsi, on obtient l'ensemble  $\mathbb{M}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2) = \{x_1\mathbf{i}_1 + x_2\mathbf{i}_2 + x_3\mathbf{j}_2 - x_4\mathbf{j}_3 : x_i \in \mathbb{R}\}$  puisque  $\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{j}_2 = -\mathbf{j}_3$ . Le prochain théorème assure que l'ensemble de la définition 3.9 est bien fermé après avoir répété trois fois l'opération de multiplication sur les nombres qui le composent.

**Théorème 3.8.** Pour tout  $\eta \in \mathbb{M}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_m, \mathbf{i}_l)$ ,  $\eta^3 \in \mathbb{M}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_m, \mathbf{i}_l)$ .

**Démonstration.**

Supposons que  $\eta \in \mathbb{M}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_m, \mathbf{i}_l)$ . Donc,  $\eta = a\mathbf{i}_k + b\mathbf{i}_m + c\mathbf{i}_l + d\mathbf{i}_k\mathbf{i}_m\mathbf{i}_l$  avec  $x_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Le but étant de montrer que  $\eta^3$  est dans  $\mathbb{M}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_m, \mathbf{i}_l)$ , il suffit d'effectuer à trois reprises la multiplication de  $\eta$ . Adoptons la notation suivante pour désigner cette dernière opération :

$$\begin{pmatrix} a\mathbf{i}_k \\ b\mathbf{i}_m \\ c\mathbf{i}_l \\ d\mathbf{i}_k\mathbf{i}_m\mathbf{i}_l \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a\mathbf{i}_k \\ b\mathbf{i}_m \\ c\mathbf{i}_l \\ d\mathbf{i}_k\mathbf{i}_m\mathbf{i}_l \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a\mathbf{i}_k \\ b\mathbf{i}_m \\ c\mathbf{i}_l \\ d\mathbf{i}_k\mathbf{i}_m\mathbf{i}_l \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

où nous allons choisir une unité et une seule dans chaque vecteur colonne, les multiplier ensemble et considérer le nombre de combinaisons possibles (coefficients binomiaux) dans trois positions. Par exemple, si trois unités identiques sont choisies pour les trois positions, le résultat est exactement  $\pm a^3\mathbf{i}_k$ ,  $\pm b^3\mathbf{i}_m$ ,  $\pm c^3\mathbf{i}_l$  et  $\pm d^3\mathbf{i}_k\mathbf{i}_m\mathbf{i}_l$ . En calculant de cette façon, on obtient le résultat suivant, aux signes près,

$$\eta^3 = (a^3 + 3ab^2 + 3ac^2 + 3ad^2 + 6bcd)\mathbf{i}_k$$

$$\begin{aligned}
 &+ (b^3 + 3a^2b + 3bc^2 + 3bd^2 + 6acd)\mathbf{i}_m \\
 &+ (c^3 + 3a^2c + 3b^2c + 3cd^2 + 6abd)\mathbf{i}_1 \\
 &+ (d^3 + 3a^2d + 3b^2d + c^2d + 6abc)\mathbf{i}_k\mathbf{i}_m\mathbf{i}_1.
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Donc, d'après (3.25),  $\eta^3 \in \mathbb{M}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_m, \mathbf{i}_1)$ .  $\square$

À l'aide du nouvel ensemble de la définition 3.9, du dernier théorème et l'idée discutée précédemment, nous pourrions démontrer les équivalences entre les coupes  $\mathcal{T}^3(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2)$  et  $\mathcal{T}^3(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2)$  ainsi qu'entre  $\mathcal{T}^3(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1)$  et  $\mathcal{T}^3(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2)$ .

**Lemme 3.7.** Nous avons les similitudes suivantes :

$$\mathcal{T}^3(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3) \sim \mathcal{T}^3(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_4) \sim \mathcal{T}^3(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_3, \mathbf{i}_4) \sim \mathcal{T}^3(\mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \mathbf{i}_4).$$

**Démonstration.**

Nous procédons en démontrant que  $\mathcal{T}^3(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3) \sim \mathcal{T}^3(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$  où  $\{\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m\} \subset \{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \mathbf{i}_4\}$ . Pour ce faire, nous posons les nombres  $c \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$  et  $c' \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$  ainsi que la fonction  $\varphi : \mathbb{M}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3) \rightarrow \mathbb{M}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$  comme suit :

$$c = c_1\mathbf{i}_1 + c_2\mathbf{i}_2 + c_3\mathbf{i}_3, \quad c' = c_1\mathbf{i}_k + c_2\mathbf{i}_l + c_3\mathbf{i}_m$$

et

$$\varphi(a\mathbf{i}_1 + b\mathbf{i}_2 + c\mathbf{i}_3 + d\mathbf{i}_4) = a\mathbf{i}_k + b\mathbf{i}_l + c\mathbf{i}_m + d\mathbf{i}_k\mathbf{i}_l\mathbf{i}_m.$$

Par conséquent, lorsque  $\eta \in \mathbb{M}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$ , on obtient

$$\begin{aligned}
 (\varphi \circ Q_{3,c} \circ \varphi^{-1})(\eta) &= \varphi \left( (-a^3 - 3ab^2 - 3ac^2 - 3ad^2 + 6bcd + c_1)\mathbf{i}_1 \right. \\
 &\quad + (-b^3 - 3a^2b - 3bc^2 - 3bd^2 + 6acd + c_2)\mathbf{i}_2 \\
 &\quad + (-c^3 - 3a^2c - 3b^2c - 3cd^2 + 6abd + c_3)\mathbf{i}_3 \\
 &\quad \left. + (-d^3 - 3a^2d - 3b^2d - 3c^2d + 6abc)\mathbf{i}_4 \right) \\
 &= (-a^3 - 3ab^2 - 3ac^2 - 3ad^2 + 6bcd + c_1)\mathbf{i}_k \\
 &\quad + (-b^3 - 3a^2b - 3bc^2 - 3bd^2 + 6acd + c_2)\mathbf{i}_l \\
 &\quad + (-c^3 - 3a^2c - 3b^2c - 3cd^2 + 6abd + c_3)\mathbf{i}_m \\
 &\quad + (-d^3 - 3a^2d - 3b^2d - 3c^2d + 6abc)\mathbf{i}_k\mathbf{i}_l\mathbf{i}_m \\
 &= Q_{3,c'}(\eta).
 \end{aligned}$$

Ainsi, d'après la définition 3.8, on a les symétries voulues. Le théorème 3.7 termine la démonstration.  $\square$

**Lemme 3.8.** Les coupes  $\mathcal{T}^3(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{j}_m)$  où  $\mathbf{i}_k \mathbf{i}_l \neq \mathbf{j}_m$ ,  $\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l \in \{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \mathbf{i}_4\}$ ,  $\mathbf{i}_k \neq \mathbf{i}_l$  et  $\mathbf{j}_m \in \{\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3\}$  sont similaires au sens de la relation  $\sim$ . Précisément, nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^3(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2) &\sim \mathcal{T}^3(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_3) \sim \mathcal{T}^3(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_3, \mathbf{j}_1) \sim \mathcal{T}^3(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_3, \mathbf{j}_3) \sim \mathcal{T}^3(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_4, \mathbf{j}_1) \\ &\sim \mathcal{T}^3(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_4, \mathbf{j}_2) \sim \mathcal{T}^3(\mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \mathbf{j}_1) \sim \mathcal{T}^3(\mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \mathbf{j}_2) \sim \mathcal{T}^3(\mathbf{i}_2, \mathbf{i}_4, \mathbf{j}_1) \\ &\sim \mathcal{T}^3(\mathbf{i}_2, \mathbf{i}_4, \mathbf{j}_3) \sim \mathcal{T}^3(\mathbf{i}_3, \mathbf{i}_4, \mathbf{j}_2) \sim \mathcal{T}^3(\mathbf{i}_3, \mathbf{i}_4, \mathbf{j}_3). \end{aligned}$$

**Démonstration.**

Nous démontrons que  $\mathcal{T}^3(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2) \sim \mathcal{T}^3(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{j}_m)$  où  $\mathbf{i}_k \mathbf{i}_l \neq \mathbf{j}_m$ ,  $k < l$ ,  $\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l \in \{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \mathbf{i}_4\}$  et  $\mathbf{j}_m \in \{\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3\}$ . Nous posons les nombres  $c \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2)$  et  $c' \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{j}_m)$  ainsi que la fonction  $\varphi : \mathbb{M}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2) \rightarrow \mathbb{M}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{j}_m)$  comme ceci :

$$c = c_1 \mathbf{i}_1 + c_2 \mathbf{i}_2 + c_3 \mathbf{j}_2, \quad c' = c_1 \mathbf{i}_k + c_2 \mathbf{i}_l + c_3 \mathbf{j}_m$$

et

$$\varphi(a \mathbf{i}_1 + b \mathbf{i}_2 + c \mathbf{j}_2 + d \mathbf{j}_3) = a \mathbf{i}_k + b \mathbf{i}_l + c \mathbf{j}_m - d \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l \mathbf{j}_m$$

dont l'inverse est

$$\varphi^{-1}(a \mathbf{i}_k + b \mathbf{i}_l + c \mathbf{j}_m + d \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l \mathbf{j}_m) = a \mathbf{i}_1 + b \mathbf{i}_2 + c \mathbf{j}_2 - d \mathbf{j}_3.$$

Ainsi, pour  $\eta \in \mathbb{M}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{j}_m)$ , on obtient

$$\begin{aligned} (\varphi \circ Q_{3,c} \circ \varphi^{-1})(\eta) &= \varphi \left( (-a^3 - 3ab^2 + 3ac^2 + 3ad^2 - 6bcd + c_1) \mathbf{i}_1 \right. \\ &\quad + (-b^3 - 3a^2b + 3bc^2 + 3bd^2 - 6acd + c_2) \mathbf{i}_2 \\ &\quad + (c^3 - 3a^2c - 3b^2c + 3cd^2 + 6abd + c_3) \mathbf{j}_2 \\ &\quad \left. + (-d^3 + 3a^2d + 3b^2d - 3c^2d - 6abc) \mathbf{j}_3 \right) \\ &= (-a^3 - 3ab^2 + 3ac^2 + 3ad^2 - 6bcd + c_1) \mathbf{i}_k \\ &\quad + (-b^3 - 3a^2b + 3bc^2 + 3bd^2 - 6acd + c_2) \mathbf{i}_l \\ &\quad + (c^3 - 3a^2c - 3b^2c + 3cd^2 + 6abd + c_3) \mathbf{j}_m \\ &\quad + (d^3 - 3a^2d - 3b^2d + 3c^2d + 6abc) \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l \mathbf{j}_m \end{aligned}$$

$$= Q_{3,c'}(\eta).$$

Donc, on obtient les symétries du lemme en s'appuyant sur les mêmes arguments que le lemme précédent.  $\square$

**Remarque 28.** Un exemple de calculs est illustré dans l'annexe C. Il faut se rendre à la section de la feuille de travail *Maple* suivante : **CALCULS coupes  $\mathbf{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2)$  et  $\mathbf{T}(\mathbf{i}_2, \mathbf{i}_4, \mathbf{j}_1)$** . Le signe du produit  $\mathbf{i}_k \mathbf{i}_l \mathbf{j}_m$  est important dans la détermination de l'application  $\varphi$  et de son inverse. En effet, le lecteur peut consulter l'exemple de calculs à la suite de celui mentionné précédemment.  $\blacktriangle$

Le prochain lemme traite des coupes dont leurs expressions sont  $\mathcal{T}^3(\mathbf{i}_k, \mathbf{j}_l, \mathbf{j}_m)$  avec  $\mathbf{i}_k \in \{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \mathbf{i}_4\}$ ,  $\mathbf{j}_l, \mathbf{j}_m \in \{\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3\}$ .

**Lemme 3.9.** Nous avons les symétries (au sens de la relation  $\sim$ ) suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^3(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2) &\sim \mathcal{T}^3(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_3) \sim \mathcal{T}^3(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3) \sim \mathcal{T}^3(\mathbf{i}_2, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2) \sim \mathcal{T}^3(\mathbf{i}_2, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_3) \\ &\sim \mathcal{T}^3(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3) \sim \mathcal{T}^3(\mathbf{i}_3, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2) \sim \mathcal{T}^3(\mathbf{i}_3, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_3) \sim \mathcal{T}^3(\mathbf{i}_3, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3) \\ &\sim \mathcal{T}^3(\mathbf{i}_4, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2) \sim \mathcal{T}^3(\mathbf{i}_4, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_3) \sim \mathcal{T}^3(\mathbf{i}_4, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3). \end{aligned}$$

**Démonstration.**

Nous allons montrer que  $\mathcal{T}^3(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2) \sim \mathcal{T}^3(\mathbf{i}_k, \mathbf{j}_l, \mathbf{j}_m)$  où  $\mathbf{i}_k \in \{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \mathbf{i}_4\}$ ,  $\mathbf{j}_l, \mathbf{j}_m \in \{\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3\}$  et  $l < m$ . Nous exécuterons les mêmes étapes que les lemmes précédents.

On pose d'abord les nombres  $c \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2)$  et  $c' \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{j}_l, \mathbf{j}_m)$  comme suit :

$$c = c_1 \mathbf{i}_1 + c_2 \mathbf{j}_1 + c_3 \mathbf{j}_2 \text{ et } c' = c_1 \mathbf{i}_k + c_2 \mathbf{j}_l + c_3 \mathbf{j}_m.$$

Puis, on pose la fonction  $\varphi : \mathbb{M}(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2) \rightarrow \mathbb{M}(\mathbf{i}_k, \mathbf{j}_l, \mathbf{j}_m)$  par l'expression suivante :

$$\varphi(a \mathbf{i}_1 + b \mathbf{j}_1 + c \mathbf{j}_2 + d \mathbf{i}_4) = a \mathbf{i}_k + b \mathbf{j}_l + c \mathbf{j}_m - d \mathbf{i}_k \mathbf{j}_l \mathbf{j}_m$$

dont l'inverse est

$$\varphi^{-1}(a \mathbf{i}_k + b \mathbf{j}_l + c \mathbf{j}_m + d \mathbf{i}_k \mathbf{j}_l \mathbf{j}_m) = a \mathbf{i}_1 + b \mathbf{j}_1 + c \mathbf{j}_2 - d \mathbf{i}_4.$$

Par conséquent, pour  $\eta \in \mathbb{M}(\mathbf{i}_k, \mathbf{j}_l, \mathbf{j}_m)$ , nous déterminons que

$$Q_{3,c}(\varphi^{-1}(\eta)) = (-a^3 + 3ab^2 + 3ac^2 - 3ad^2 + 6bcd + c_1) \mathbf{i}_1$$

$$\begin{aligned}
& + (b^3 - 3a^2b + 3bc^2 - 3bd^2 - 6acd + c_2)\mathbf{j}_1 \\
& + (c^3 - 3a^2c + 3b^2c - 3cd^2 - 6abd + c_3)\mathbf{j}_2 \\
& + (d^3 + 3a^2d - 3b^2d + 3c^2d - 6abc)\mathbf{i}_4
\end{aligned}$$

et que

$$\begin{aligned}
Q_{3,c'}(\eta) & = (-a^3 + 3ab^2 + 3ac^2 - 3ad^2 + 6bcd + c_1)\mathbf{i}_k \\
& + (b^3 - 3a^2b + 3bc^2 - 3bd^2 - 6acd + c_2)\mathbf{j}_1 \\
& + (c^3 - 3a^2c + 3b^2c - 3cd^2 - 6abd + c_3)\mathbf{j}_m \\
& + (-d^3 - 3a^2d + 3b^2d + 3c^2d + 6abc)\mathbf{i}_k\mathbf{j}_l\mathbf{j}_m.
\end{aligned}$$

Donc, il s'en suit que  $\varphi \circ Q_{3,c} \circ \varphi^{-1} = Q_{3,c'}$ . D'après la définition 3.8,  $\mathcal{T}^3(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2) \sim \mathcal{T}^3(\mathbf{i}_k, \mathbf{j}_l, \mathbf{j}_m)$  où  $\mathbf{i}_k \in \{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \mathbf{i}_4\}$ ,  $\mathbf{j}_l, \mathbf{j}_m \in \{\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3\}$ ,  $\mathbf{j}_l \neq \mathbf{j}_m$  et  $l < m$ . Le théorème 3.7 termine la démonstration (en particulier, par transitivité de la relation  $\sim$ ).  $\square$

**Remarque 29.** Des exemples de calculs sont présentés aux sections **CALCULS coupes  $\mathbf{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2)$  et  $\mathbf{T}(\mathbf{i}_4, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_3)$**  et **CALCULS coupes  $\mathbf{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2)$  et  $\mathbf{T}(\mathbf{i}_2, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2)$**  de l'annexe C. Il faut remarquer l'importance du signe du produit  $\mathbf{i}_k\mathbf{j}_l\mathbf{j}_m$  dans la détermination de l'application  $\varphi$  et de son inverse  $\varphi^{-1}$ .  $\blacktriangle$

Enfin, la coupe  $\mathcal{T}^3(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)$  ne possède pas d'autres formes avec trois unités hyperboliques. Conséquemment, nous avons à présent les quatre classes d'équivalence suivantes :

$$[\mathcal{T}^3(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)], [\mathcal{T}^3(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2)], [\mathcal{T}^3(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2)] \text{ et } [\mathcal{T}^3(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)].$$

Maintenant que nous avons réglé ce deuxième cas (où les itérées du polynôme  $Q_{3,c}$  ne sont pas fermées dans l'ensemble  $\mathbb{M}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l)$ ), nous pouvons nous concentrer sur l'étude de la symétrie de trois paires de coupes, soient la première paire  $\mathcal{T}^3(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2)$ ,  $\mathcal{T}^3(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2)$ , la deuxième paire  $\mathcal{T}^3(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1)$ ,  $\mathcal{T}^3(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2)$  et la troisième paire  $\mathcal{T}^3(1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2)$ ,  $\mathcal{T}^3(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)$ . Celles-ci sont particulières puisqu'elles créent un pont entre deux systèmes dynamiques apparemment différents. Comme nous l'avons vu, les lemmes précédents fournissent déjà les similitudes pour sept classes d'équivalence de coupes 3D (et non plus huit) qui produisent la même dynamique. Ainsi, il suffit de prendre deux coupes parmi les sept classes de coupes (par exemple les représentants principaux des classes d'équivalences en traitement) et utiliser la propriété de transitivité de la relation  $\sim$  pour assurer la relation entre toutes les coupes

des deux classes d'équivalence en traitement. Aussi, nous utiliserons une propriété à propos des permutations des unités imaginaires et des unités hyperboliques dans une même coupe qui n'est pas mentionnée dans les lignes précédentes. Cette propriété stipule que la coupe est exactement la même, peu importe la permutation effectuée. Nous pouvons interpréter cela comme une invariance selon le groupe des permutations à trois éléments, ou, d'un point de vue géométrique, ceci engendre des rotations d'angles  $\pm \frac{\pi}{2}$  (resp.  $\pm \pi$ ) de l'objet fractal généré par la coupe 3D selon ses trois axes imaginaires ou hyperboliques choisis. Commençons par la première paire.

**Lemme 3.10.** Les coupes  $\mathcal{T}^3(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2)$  et  $\mathcal{T}^3(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2)$  sont conjuguées en accord avec la relation  $\sim$ .

**Démonstration.**

Supposons  $c \in \mathbb{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2)$  et  $c' \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2)$ . Ainsi, les nombres  $c$  et  $c'$  s'écrivent des manières suivantes :

$$c = c_1 + c_2\mathbf{i}_1 + c_3\mathbf{i}_2 \text{ et } c' = c_2\mathbf{i}_1 + c_3\mathbf{i}_2 + c_1\mathbf{j}_2.$$

Maintenant, on pose la fonction  $\varphi : \mathbb{M}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2) \rightarrow \mathbb{M}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2)$  comme

$$\varphi(a + b\mathbf{i}_1 + c\mathbf{i}_2 + d\mathbf{j}_1) = b\mathbf{i}_1 + c\mathbf{i}_2 + a\mathbf{j}_2 - d\mathbf{j}_3.$$

Ainsi, en posant  $\eta \in \mathbb{M}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_1)$ , nous calculons

$$\begin{aligned} Q_{3,c}(\varphi^{-1}(\eta)) &= (a^3 - 3ab^2 - 3ac^2 + 3ad^2 + 6bcd + c_1) \\ &\quad + (-b^3 + 3a^2b - 3bc^2 + 3bd^2 - 6acd + c_2)\mathbf{i}_1 \\ &\quad + (-c^3 + 3a^2c - 3b^2c + 3cd^2 - 6abd + c_3)\mathbf{i}_2 \\ &\quad + (d^3 + 3a^2d - 3b^2d - 3c^2d + 6abc)\mathbf{j}_1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} Q_{3,c'}(\eta) &= (-b^3 + 3a^2b - 3bc^2 + 3bd^2 - 6acd + c_2)\mathbf{i}_1 \\ &\quad + (-c^3 + 3a^2c - 3b^2c + 3cd^2 - 6abd + c_3)\mathbf{i}_2 \\ &\quad + (a^3 - 3ab^2 - 3ac^2 + 3ad^2 + 6bcd + c_1)\mathbf{j}_2 \\ &\quad - (d^3 + 3a^2d - 3b^2d - 3c^2d + 6abc)\mathbf{j}_3. \end{aligned}$$

Ainsi, en appliquant  $\varphi$  sur l'expression précédente de  $Q_{3,c}$ , nous remarquons que  $(\varphi \circ Q_{3,c} \circ \varphi^{-1})(\eta) = Q_{3,c'}(\eta)$  puisque  $\eta$  est arbitraire. Donc, en vertu de la définition 3.8, on obtient le résultat escompté.  $\square$

**Remarque 30.** Ce lemme permet de réduire le nombre de coupes principales (ou de classes d'équivalence) à six. Aussi, nous choisissons la coupe  $\mathcal{T}^3(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2)$  comme le représentant principal des classes  $[\mathcal{T}^3(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2)]$  et  $[\mathcal{T}^3(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2)]$  qui sont maintenant les mêmes. Ainsi, toutes les coupes  $\mathcal{T}^3 \in [\mathcal{T}^3(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2)]$  sont nommées *Tetrabric*. ▲

Emboîtons le pas pour le résultat de la deuxième paire.

**Lemme 3.11.** Les coupes  $\mathcal{T}^3(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1)$  et  $\mathcal{T}^3(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2)$  engendrent la même dynamique au sens de la définition 3.8.

**Démonstration.**

La même stratégie est utilisée pour démontrer ce lemme. Supposons que  $c \in \mathbb{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1)$  et  $c' \in \mathbb{T}(\mathbf{j}_2, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1)$ . Ainsi, les nombres  $c$  et  $c'$  prennent les formes suivantes :

$$c = c_1 + c_2\mathbf{i}_1 + c_3\mathbf{j}_1 \text{ et } c' = c_2\mathbf{i}_1 + c_3\mathbf{j}_1 + c_1\mathbf{j}_2.$$

Désormais, posons la fonction  $\varphi : \mathbb{M}(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1) \rightarrow \mathbb{M}(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2)$  comme

$$\varphi(a + b\mathbf{i}_1 + c\mathbf{i}_2 + d\mathbf{j}_1) = b\mathbf{i}_1 + d\mathbf{j}_1 + a\mathbf{j}_2 + c\mathbf{i}_4.$$

dont l'inverse est

$$\varphi^{-1}(a\mathbf{j}_2 + b\mathbf{i}_1 + c\mathbf{j}_1 + d\mathbf{i}_4) = a + b\mathbf{i}_1 + d\mathbf{i}_2 + c\mathbf{j}_1.$$

En prenant  $\eta \in \mathbb{M}(\mathbf{j}_2, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1)$ , les détails des calculs à la section **CALCULS coupes  $\mathbf{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1)$  et  $\mathbf{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2)$**  de l'annexe C permettent de conclure que  $(\varphi \circ Q_{3,c_1} \circ \varphi^{-1})(\eta) = Q_{3,c_2}(\eta)$ . □

**Remarque 31.** Le lemme 3.11 réduit le nombre de coupes principales à cinq. Aussi, nous énonçons des commentaires similaires à la remarque 30. D'abord, la coupe  $\mathcal{T}^3(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1)$  est utilisée pour représenter les deux classes d'équivalence  $[\mathcal{T}^3(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1)]$  et  $[\mathcal{T}^3(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2)]$ . Puis, toutes les coupes  $\mathcal{T}^3 \in [\mathcal{T}^3(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2)]$  sont dénommées par *Hourglassbric*. ▲

Pour terminer, nous démontrons le résultat concernant la troisième paire.

**Lemme 3.12.** Les coupes  $\mathcal{T}^3(1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2)$  et  $\mathcal{T}^3(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)$  engendrent la même dynamique au sens de la relation  $\sim$ .

**Démonstration.**

Supposons  $c \in \mathbb{T}(1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2)$  et  $c' \in \mathbb{T}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)$ . Ainsi, les nombres  $c$  et  $c'$  prennent les formes suivantes :

$$c = c_1 + c_2\mathbf{j}_1 + c_3\mathbf{j}_2 \text{ et } c' = c_1\mathbf{j}_1 + c_2\mathbf{j}_2 + c_3\mathbf{j}_3.$$

Puis, posons comme suit la fonction  $\varphi : \mathbb{M}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2) \rightarrow \mathbb{M}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)$  :

$$\varphi(a + b\mathbf{j}_1 + c\mathbf{j}_2 + d\mathbf{j}_3) = d + a\mathbf{j}_1 + b\mathbf{j}_2 + c\mathbf{j}_3$$

dont l'inverse est

$$\varphi^{-1}(a\mathbf{j}_1 + b\mathbf{j}_2 + c\mathbf{j}_3 + d) = a + b\mathbf{j}_1 + c\mathbf{j}_2 + d\mathbf{j}_3.$$

En prenant  $\eta \in \mathbb{M}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)$ , les détails des calculs à la section **CALCULS coupes  $\mathbb{T}(1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2)$  et  $\mathbb{T}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)$**  de l'annexe C permettent de conclure que  $(\varphi \circ Q_{3,c} \circ \varphi^{-1})(\eta) = Q_{3,c'}(\eta)$ . Donc, en vertu de la définition 3.8, on obtient le résultat du lemme.  $\square$

**Remarque 32.** Ce dernier lemme réduit le nombre de coupes principales à quatre. Puis, nous prenons la coupe  $\mathcal{T}^3(1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2)$  comme représentant principal des classes d'équivalence  $[\mathcal{T}^3(1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2)]$  et  $[\mathcal{T}^3(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)]$ . Aussi, nous nommons toute coupe  $\mathcal{T}^3 \in [\mathcal{T}^3(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)]$  *Perplexbric*.  $\blacktriangle$

Bref, au regard des résultats précédents et des remarques qui les suivent, nous présentons cet étonnant résultat.

**Théorème 3.9.** Les coupes principales du *Mandelbric* tricomplexe sont au nombre de quatre. Celles-ci sont

$$\mathcal{T}^3(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2), \mathcal{T}^3(1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2), \mathcal{T}^3(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1) \text{ et } \mathcal{T}^3(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3).$$

Donc, en vertu du théorème 3.9, nous avons montré qu'il n'y a que quatre coupes principales de  $\mathcal{M}_3^3$  ! Ceci est une réduction de moitié du nombre de coupes de l'ensemble de Mandelbrot tricomplexe.

Dans ce qui va suivre, nous démontrons que la coupe  $\mathcal{T}^3(1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2)$  engendrant le *Perplexbric* est un octaèdre de côté de longueur  $\frac{2}{3\sqrt{3}}\sqrt{2}$ . Cette preuve a paru dans l'article [PR15].

### Le *Perplexbric*

Nous avons démontré, à la section 2.5 du chapitre 2, que le Mandelbrique hyperbolique est un carré de côté  $\frac{2}{3\sqrt{3}}\sqrt{2}$  (voir le théorème 2.11). En utilisant la dynamique tricomplexe, nous allons maintenant nous intéresser à la version hyperbolique du Mandelbrique dans  $\mathbb{R}^3$ , soit le *Perplexbric*. Nous définissons ce dernier comme

$$\mathcal{P}^3 := \mathcal{T}^3(1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2) = \left\{ c = c_1 + c_4 \mathbf{j}_1 + c_6 \mathbf{j}_2 : c_i \in \mathbb{R} \text{ et } \left\{ Q_{3,c}^m(0) \right\}_{m=1}^{\infty} \text{ est bornée} \right\}. \quad (3.26)$$

Avant d'atteindre notre but, on démontre le lemme suivant.

**Lemme 3.13.** Le Perplexbrique peut être caractérisé par

$$\mathcal{P}^3 = \bigcup_{y \in \left[ \frac{-2}{3\sqrt{3}}, \frac{2}{3\sqrt{3}} \right]} \left\{ \left[ (\mathcal{H}^3 - y \mathbf{j}_1) \cap (\mathcal{H}^3 + y \mathbf{j}_1) \right] + y \mathbf{j}_2 \right\}$$

où  $\mathcal{H}^3$  est le Mandelbrique hyperbolique.

### Démonstration.

Par définition de  $\mathcal{P}^3$ , on a que

$$\mathcal{P}^3 = \left\{ c = c_1 + c_4 \mathbf{j}_1 + c_6 \mathbf{j}_2 : c_i \in \mathbb{R} \text{ et } \left\{ Q_{3,c}^m(0) \right\}_{m=1}^{\infty} \text{ est bornée} \right\}.$$

Supposons  $c = c_1 + c_2 \mathbf{i}_1 + (c_3 + c_4 \mathbf{i}_1) \mathbf{i}_2 + (c_5 + c_6 \mathbf{i}_1) \mathbf{i}_3 + (c_7 + c_8 \mathbf{i}_1) \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_3$  avec  $c_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, \dots, 8$ . Si on pose  $c_2 = c_3 = c_5 = c_7 = c_8 = 0$ , on peut exprimer le nombre  $c$  comme

$$\begin{aligned} c &= c_1 + c_4 \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2 + c_6 \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_3 \\ &= ((c_1 + c_4 \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2) - c_6 \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2) \gamma_2 + ((c_1 + c_4 \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2) + c_6 \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2) \bar{\gamma}_2 \\ &= ((c_1 + c_4 \mathbf{j}_1) - c_6 \mathbf{j}_1) \gamma_2 + ((c_1 + c_4 \mathbf{j}_1) + c_6 \mathbf{j}_1) \bar{\gamma}_2 \\ &= (d - c_6 \mathbf{j}_1) \gamma_2 + (d + c_6 \mathbf{j}_1) \bar{\gamma}_2 \end{aligned}$$

où  $d = c_1 + c_4 \mathbf{j}_1 \in \mathbb{D}(\mathbf{j}_1)$ . Ainsi,

$$\mathcal{P}^3 = \left\{ c = (d - c_6 \mathbf{j}_1) \gamma_2 + (d + c_6 \mathbf{j}_1) \bar{\gamma}_2 : \left\{ Q_{3,c}^m(0) \right\}_{m=1}^{\infty} \text{ est bornée} \right\}. \quad (3.27)$$

Or, la suite  $\left\{ Q_{3,c}^m(0) \right\}_{m=1}^{\infty}$  est bornée ssi  $\left\{ Q_{3,d-c_6 \mathbf{j}_1}^m(0) \right\}_{m=1}^{\infty}$  et  $\left\{ Q_{3,d+c_6 \mathbf{j}_1}^m(0) \right\}_{m=1}^{\infty}$  sont bornées. On remarque, avant de poursuivre, que dans la dynamique hyperbolique,

on a  $\forall z \in \mathbb{D}(\mathbf{j}_1)$

$$\mathcal{H}^3 - z := \left\{ c \in \mathbb{D}(\mathbf{j}_1) : \left\{ Q_{3,c+z}^m(0) \right\}_{m=1}^{\infty} \text{ est bornée} \right\}. \quad (3.28)$$

Par définition, les deux suites  $\left\{ Q_{3,d-c_6\mathbf{j}_1}^m(0) \right\}_{m=1}^{\infty}$  et  $\left\{ Q_{3,d+c_6\mathbf{j}_1}^m(0) \right\}_{m=1}^{\infty}$  sont bornées ssi  $d - c_6\mathbf{j}_1, d + c_6\mathbf{j}_1 \in \mathcal{H}^3$ . Toutefois, d'après (3.28), on a aussi que  $d - c_6\mathbf{j}_1, d + c_6\mathbf{j}_1 \in \mathcal{H}^3$  ssi  $d \in (\mathcal{H}^3 - c_6\mathbf{j}_1) \cap (\mathcal{H}^3 + c_6\mathbf{j}_1)$ . Donc, si on exprime  $c = c_1 + c_4\mathbf{j}_1 + c_6\mathbf{j}_2$  par  $(d - c_6\mathbf{j}_1)\gamma_2 + (d + c_6\mathbf{j}_1)\bar{\gamma}_2$ , alors

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^3 &= \left\{ c = c_1 + c_4\mathbf{j}_1 + c_6\mathbf{j}_2 : c_1 + c_4\mathbf{j}_1 \in (\mathcal{H}^3 - c_6\mathbf{j}_1) \cap (\mathcal{H}^3 + c_6\mathbf{j}_1) \right\} \\ &= \bigcup_{y \in \mathbb{R}} \left\{ [(\mathcal{H}^3 - y\mathbf{j}_1) \cap (\mathcal{H}^3 + y\mathbf{j}_1)] + y\mathbf{j}_2 \right\}. \end{aligned}$$

En fait, d'après le théorème 2.11,

$$(\mathcal{H}^3 - y\mathbf{j}_1) \cap (\mathcal{H}^3 + y\mathbf{j}_1) = \emptyset \quad (3.29)$$

lorsque  $y \in \left[ -\frac{2}{3\sqrt{3}}, \frac{2}{3\sqrt{3}} \right]^c$ . Ceci nous conduit à la caractérisation désirée du *Perplexbric* :

$$\mathcal{P}^3 = \bigcup_{y \in \left[ \frac{-2}{3\sqrt{3}}, \frac{2}{3\sqrt{3}} \right]} \left\{ [(\mathcal{H}^3 - y\mathbf{j}_1) \cap (\mathcal{H}^3 + y\mathbf{j}_1)] + y\mathbf{j}_2 \right\}.$$

□

Donc, comme conséquence du dernier lemme 3.13 et du théorème 2.11, on a le résultat suivant pour le *Perplexbric*.

**Théorème 3.10.**  $\mathcal{P}^3$  est un octaèdre de côtés d'une longueur  $\frac{2}{3\sqrt{3}}\sqrt{2}$ .

## Cas général

Maintenant, qu'en est-il des Multibrots tricomplexes d'ordres supérieurs? Leur étude est plus fastidieuse que celle de l'ensemble de Mandelbrot et du *Mandelbric* tricomplexes. En fait, l'étude est plus complexe au niveau calculatoire puisque nous devons élever un polynôme de degré  $p \geq 2$  de plusieurs variables. Cependant, on peut soupçonner que les applications trouvées pour le cas  $p = 2$  et le cas  $p = 3$  seront les mêmes et vérifier les calculs à l'aide d'un logiciel tel que *Maple*. Avant d'émettre

une proposition, nous allons d'abord démontrer un théorème, qui selon l'auteur de ce mémoire, est à la base de la classification des coupes tridimensionnelles des ensembles multibrots tricomplexes.

**Théorème 3.11.**  $\forall \eta \in \mathbb{M}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_m, \mathbf{i}_l)$ ,  $\eta^p \in \mathbb{M}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_m, \mathbf{i}_l)$  lorsque  $p \geq 2$  est un entier impair.

Un lemme est nécessaire avant de démontrer ce théorème.

**Lemme 3.14.** Si  $a, b, c \in \mathbb{M}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_m, \mathbf{i}_l)$ , alors  $abc \in \mathbb{M}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_m, \mathbf{i}_l)$ .

**Démonstration.**

Un calcul direct fournit, avec  $a = a_1\mathbf{i}_k + a_2\mathbf{i}_m + a_3\mathbf{i}_l + a_4\mathbf{i}_k\mathbf{i}_m\mathbf{i}_l$ ,  $b = b_1\mathbf{i}_k + b_2\mathbf{i}_m + b_3\mathbf{i}_l + b_4\mathbf{i}_k\mathbf{i}_m\mathbf{i}_l$  et  $c = c_1\mathbf{i}_k + c_2\mathbf{i}_m + c_3\mathbf{i}_l + c_4\mathbf{i}_k\mathbf{i}_m\mathbf{i}_l$ ,

$$abc = f_1(a, b, c)\mathbf{i}_k + f_2(a, b, c)\mathbf{i}_m + f_3(a, b, c)\mathbf{i}_l + f_4(a, b, c)\mathbf{i}_k\mathbf{i}_m\mathbf{i}_l$$

où  $f_i$  sont des fonctions des composantes des nombres  $a, b, c$ . Par exemple, l'expression de  $f_1$  est

$$\begin{aligned} f_1(a, b, c) = & a_1b_1c_1 + a_1b_2c_2 + a_2b_1c_2 + a_2b_2c_1 + a_1b_3c_3 + a_3b_1c_3 + a_3b_3c_1 + a_1b_4c_4 \\ & + a_4b_1c_4 + a_4b_4c_1 + a_2b_3c_4 + a_2b_4c_3 + a_3b_2c_4 + a_4b_2c_3 + a_3b_4c_2 + a_4b_3c_2. \end{aligned}$$

□

**Démonstration** (du théorème 3.11).

La preuve se fait par induction sur  $p$ .

□

À la lumière des résultats précédents, nous pouvons énoncer la conjecture suivante.

**Conjecture 3.1.** Les coupes 3D du Multibrot tricomplexe  $\mathcal{M}_3^p$  se comptent au nombre de huit lorsque  $p$  est pair et au nombre de quatre lorsque  $p$  est impair.

Cette conjecture est vérifiée dans de nombreux cas et a fait l'objet d'une expérimentation numérique. Le seul obstacle à surmonter pour démontrer cette conjecture

est de nature calculatoire. Il faut, dans ce cas, déterminer une méthode plus algébrique qui prendrait en compte la nature des applications. Par exemple, utiliser certains groupes de symétries. En particulier, l'auteur de ce mémoire avait pensé aux groupes de Coxeter. Mais encore, dans le mémoire de V. Garrant-Pelletier [GP11], l'auteur présente différents conjugués d'un nombre tricomplexe. Y a-t-il un lien entre les applications déterminées ci-haut dans la preuve de symétrie des coupes 3D et ces conjugués? Tout cela demande encore de l'exploration puisque nous pensons qu'il serait possible de mettre en relation la coupe  $\mathcal{T}^p(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$  avec la coupe  $\mathcal{T}^p(1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2)$  lorsque l'entier  $p \geq 2$  est impair.

En résumé, nous avons remarqué que la dynamique des polynômes de puissance impaire se réduisait à seulement quatre coupes, tandis que la dynamique des polynômes de puissance paire fournit toujours huit coupes principales.

---

## Conclusion

À cheval sur mes mathématiques, je galope sur les plaines de la découverte.

---

Pierre-Olivier Parisé

À la fin de la section 2.4 du chapitre 2, nous avons mentionné une conjecture sur l'intersection entre l'axe réelle du plan complexe et les ensembles multibrots. En fait, ce mémoire a été le feu vert pour une collaboration inattendue avec T. Ransford, professeur au département de mathématiques et de statistique de l'Université Laval. Plus précisément, une preuve de la conjecture ci-dessous, mentionnée à la fin d'un exposé à l'Université Laval par l'auteur de ce mémoire, a été communiquée par T. Ransford. Plus précisément, avant de mettre sous presse l'article à la base du canevas de ce mémoire, la conjecture suivante avait été émise sur la caractérisation de l'ensemble  $\mathcal{M}^p \cap \mathbb{R}$ . Nous allons maintenant le citer en tant que théorème.

**Théorème 3.12.** Soit un entier  $p \geq 2$ . Alors,

- a) Si  $p$  est pair,  $\mathcal{M}^p \cap \mathbb{R} = \left[2^{1/(p-1)}, \frac{p-1}{p^{p/(p-1)}}\right]$  ;
- b) Si  $p$  est impair,  $\mathcal{M}^p \cap \mathbb{R} = \left[-\frac{p-1}{p^{p/(p-1)}}, \frac{p-1}{p^{p/(p-1)}}\right]$ .

Deux approches ont été proposées. La première se base essentiellement sur une étude exhaustive des racines réelles du polynôme  $R_{p,c}(x) := x^p - x + c$ . Suite à cela, il est possible de repérer précisément l'emplacement de la racine positive et de l'utiliser, dans le cas où l'entier  $p$  est impair, afin de borner la suite des itérées  $\left\{Q_{p,c}^m(0)\right\}_{m=1}^{\infty}$ . Cette démarche est présentée dans l'article [PR17] qui paraîtra dans la revue *Frac-*

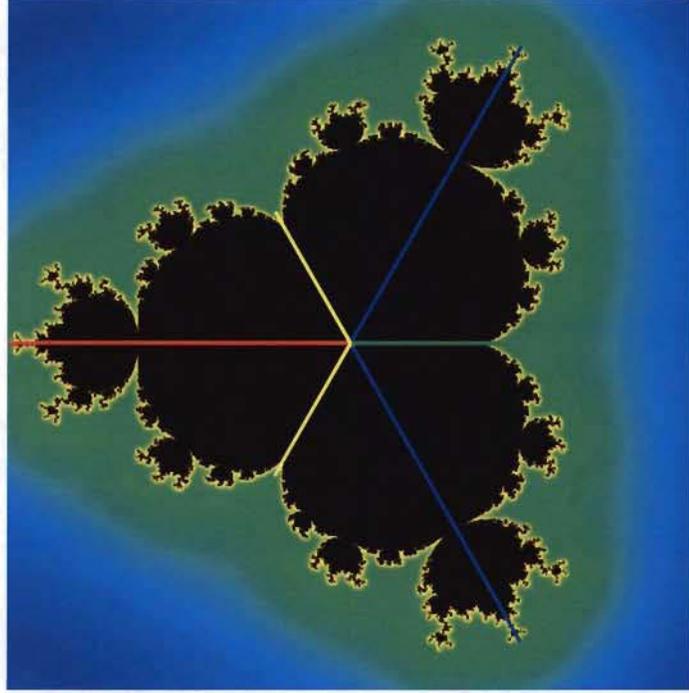


FIGURE 3.5 – Illustration de la conjecture 3.7 pour un entier  $p$  pair

*tals*. La deuxième approche est celle communiquée par T. Ransford. Cette approche est présentée dans l'article [PRR17] qui paraîtra dans les *proceedings* de la conférence internationale *CHAOS 2016*. Grâce à ces résultats, il est possible d'énoncer le corollaire suivant, qui est une conséquence des symétries des Multibrots. Si  $A \subset \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$  est un ensemble, on définit l'ensemble  $zA := \{za : a \in A\}$  pour un certain  $z \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$ .

**Corollaire 3.7.** Soit un entier  $p \geq 2$ . Alors,

- a) si  $p$  est pair,  $e^{\mathbf{i}_1 \frac{2k\pi}{p-1}} [-2^{1/(p-1)}, 0] \subset \mathcal{M}^p$  pour chaque entier  $k$ .
- b) que  $p$  soit pair ou impair, on a  $e^{\mathbf{i}_1 \frac{2k\pi}{p-1}} [0, \frac{p-1}{p^{p/(p-1)}}] \subset \mathcal{M}^p$ .

La figure 3.5 illustre le corollaire lorsque l'entier  $p$  est un nombre pair. La ligne rouge représente l'ensemble  $[-2^{1/(p-1)}, 0]$  et les lignes bleues représentent les ensembles  $e^{\mathbf{i}_1 \frac{2k\pi}{p-1}} [-2^{1/(p-1)}, 0]$ . La ligne verte représente l'ensemble  $[0, \frac{p-1}{p^{p/(p-1)}}]$  et les lignes jaunes représentent les ensembles  $e^{\mathbf{i}_1 \frac{2k\pi}{p-1}} [0, \frac{p-1}{p^{p/(p-1)}}]$ .

T. Ransford et L. Baribeau ont été plus loin et ont publié un article [BR16] dans lequel ils montrent que l'intersection entre l'axe imaginaire et un Multibrot d'ordre

$p \equiv 1 \pmod{4}$  est exactement  $[-\gamma_p, \gamma_p]$  où  $\gamma_p := p^{-p/(p-1)} (\sinh(p\xi_p) + p \sinh(\xi_p))$  et  $\xi_p$  est l'unique racine positive de  $\cosh(p\xi) = p \cosh(\xi)$ . Donc, les résultats exposés dans ce mémoire ont permis d'ouvrir la voie sur de nombreux autres résultats et a permis une collaboration importante dans le cheminement professionnel et académique de l'auteur de ce mémoire. Entre autres, à la suite du résultat de l'intersection de  $\mathcal{M}^3$  et  $\mathbb{R}$  énoncé pour la puissance  $p = 3$ , nous avons démontré que l'Hyperbrique, l'ensemble  $\mathcal{H}^3$ , est un carré de diagonale  $\sqrt{2} \frac{2}{3\sqrt{3}}$ . En utilisant le résultat général pour l'ensemble  $\mathcal{M}^p \cap \mathbb{R}$ , nous avons aussi remarqué qu'en fait, tout les Hyperbrot  $\mathcal{H}^p$  sont des carrés.

Enfin, avec la présentation des nombres tricomplexes au chapitre 1, nous avons étudié, dans le troisième chapitre, les ensembles multibrots sur l'espace des nombres tricomplexes. Nous avons répertorié plusieurs propriétés partagées avec l'ensemble de Mandelbrot tricomplexe classique. Par contre, l'étude des coupes tridimensionnelles de cet ensemble s'est avérée différente. Nous avons démontré qu'il y a quatre coupes 3D principales pour l'ensemble  $\mathcal{M}_3^3$ , au lieu de huit dans le cas de l'ensemble de Mandelbrot  $\mathcal{M}_3^2$ . Ceci nous a permis d'émettre une conjecture sur la classification des coupes tridimensionnelles qui restent à démontrer. Lorsque la puissance  $p$  est pair, il y aurait huit coupes 3D principales et lorsque l'entier  $p$  est impair, il y aurait quatre coupes tridimensionnelles.

Certaines approches peuvent être envisagées pour démontrer cette conjecture. Nous avons mentionné l'utilisation des groupes de Coxeter et des différents conjugués d'un nombre tricomplexe introduits dans l'ouvrage de V. Garrat-Pelletier [GP11]. En fait, cette deuxième façon peut être combinée à une autre idée. Celle-ci consiste à écrire l'ensemble des coupes 3D  $\mathcal{T}^p(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_m, \mathbf{i}_l)$  sous la même forme que le lemme 3.13 du chapitre 3, *i.e.*

$$\mathcal{T}^p(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_m, \mathbf{i}_l) = \bigcup_{y \in I} \{[(E - y\mathbf{i}_m) \cap (E + y\mathbf{i}_m)] + y\mathbf{i}_l\}$$

où  $E \subset \text{span}_{\mathbb{R}}\{\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_m\}$  et  $I$  est l'intersection entre  $E$  et l'un des deux axes du  $\text{span}_{\mathbb{R}}\{\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_m\}$ . Sinon, des calculs avec un logiciel pourraient être une solution exploratoire. Néanmoins, nous laissons ce plaisir de découverte se construire pour un prochain travail.

---

## Bibliographie

- [Bea91] A. F. BEARDON : *Iteration of Rational Functions : Complex Analytic Dynamical Systems*. Springer-Verlag New-York, 1991.
- [BR16] L. BARIBEAU et T. RANSFORD : Cross-sections of multibrot sets. *The Journal of Analysis*, 24:95–101, 2016.
- [BSMM07] I. N. BRONSHTEIN, K. A. SEMUNDYAGEV, G. MUSIOL et H. MUCHLIG : *Handbook of Mathematics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007.
- [CG93] L. CARLESON et T. W. GAMELIN : *Complex Dynamics*. Springer-Verlag New York, 1993.
- [Cha08] I. CHALENDAR : Analyse Fonctionnelle et théorie des opérateur Chapitre 6 - Algèbre de Banach. Récupéré de [math.univ-lyon1.fr/~chalenda/chap-alg-banach.pdf](http://math.univ-lyon1.fr/~chalenda/chap-alg-banach.pdf), 2008.
- [Dev03] R. L. DEVANEY : *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Westview Press, 2003.
- [DF99] D. S. DUMMIT et R. M. FOOTE : *Abstract Algebra*. John Wiley and Sons, 1999.
- [DH82] A. DOUADY et J.H. HUBBARD : Itération des polynômes quadratiques complexes. *C. R. Acad. Sci.*, 294:123–126, 1982.
- [DS] T.-C. DINH et N. SIBONY : Dynamics in several complex variables : endomorphisms of projective spaces and polynomial-like mappings. Récupéré sur <https://arxiv.org/abs/0810.0811>.

- [Egu11] G. EGUETHER : *S - Equations de degre 3 et 4 ; racines d'un polynôme mesurant les cotes d'un triangle*. <http://iecl.univ-lorraine.fr/~Gerard.Eguether/zARTICLE/1S.pdf>, 2011.
- [Fal14] K. FALCONER : *Fractal Geometry - Mathematical Foundations and Applications*. John Wiley & Sons, Ltd, 2014.
- [Fat19] P. FATOU. : Sur les équations fonctionnelles. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 47:161–271, 1919.
- [Gam01] T. W. GAMELIN : *Complex Analysis*. Springer-Verlag, 2001.
- [GB91] U. G. GUJAR et V. C. BHAVSAR : Fractals from  $z \leftarrow z^\alpha + c$  in the complex c-plane. *Comput. & Graphics*, 15:441–449, 1991.
- [GP11] V. GARANT-PELLETIER : Ensemble de Mandelbrot et de Julia remplis classiques généralisés aux espaces multicomplexes et théorème de Fatou-Julia généralisé. Mémoire de Maîtrise, Université du Québec à Trois-Rivières, 2011.
- [GPR08] V. GARANT-PELLETIER et D. ROCHON : On a Generalized Fatou-Julia Theorem in Multicomplex Spaces. *Fractals*, 17(3):241–255, 2008.
- [Jul18] G. JULIA : Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 1:47–246, 1918. Accessible via [http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher\\_notice.php?id=JMPA\\_1918\\_8\\_1\\_A2](http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher_notice.php?id=JMPA_1918_8_1_A2).
- [LCa13] S. LIU, X. CHENG et AL. : Fractal property of generalized M-set with rational number. *Applied Mathematics and Computation*, 220:668–675, 2013.
- [LESSV15] M. E. LUNA-ELIZARRARÁS, M. SHAPIRO, D. C. STRUPPA et A. VAJAC : *Bicomplex Holomorphic Functions : The Algebra, Geometry and Analysis of Bicomplex Numbers*. Birkhäuser Basel, 2015.
- [LS96] E. LAU et D. SCHLEICHER : Symmetries of fractals revisited. *The Mathematical Intelligencer*, 18:45–51, 1996.
- [LZa01] X.-D. LIU, W.-Y. ZHU et AL. : The Bounds of The General M and J Sets and The Estimations For The Hausdorff,s Dimension of The

- General J Set. *Applied Mathematics and Mechanics, English Edition*, 22:1318–1324, November 2001.
- [Mar04] É. MARTINEAU : Bornes de la distance à l'ensemble de Mandelbrot généralisé. Mémoire de Maîtrise, Université du Québec à Trois-Rivières, 2004.
- [Mat11] C. MATTEAU : La méthode d'itération inverse pour les ensembles de Julia du plan et de l'espace tridimensionnel. Mémoire de Maîtrise, Université du Québec à Trois-Rivières, 2011.
- [McM94] C. T. MCMULLEN : *Complex Dynamics and Renormalization*. Princeton University Press, 1994.
- [Met94] W. METZLER : The “mystery” of the quadratic Mandelbrot set. *Am.J.Phys.*, 62(9):813–814, 1994.
- [Mil14] J. MILNOR : *Arithmetic of Unicritical Polynomial Maps*, pages 15–24. Princeton University Press, 2014.
- [Mor17] H. MOREAU : La représentation des nombres premiers hyperboliques dans le plan. Mémoire de Maîtrise, Université du Québec à Trois-Rivières, 2017.
- [MR05] É. MARTINEAU et D. ROCHON : On a Bicomplex Distance Estimation for the Tetrabrot. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 15(6):501–521, 2005.
- [MR15] C. MATTEAU et D. ROCHON : The Inversion Iteration Method for Julia Sets in The 3D-Dimensional Spaces. *Chaos, Solitons & Fractals*, 75:13, 2015.
- [Nor82] A. NORTON : Generation and Display of Geometric Fractals in 3-D. *Comput. Graph.*, 16:61–67, 1982.
- [PJ87] T. V. PAPATHOMAS et B. JULESZ : Animation with fractals from variations on the Mandelbrot set. *Visual Computer*, 3:23–26, 1987.
- [PR15] P.-O. PARISÉ et D. ROCHON : A Study of Dynamics of The Tricomplex Polynomial  $\eta^p + c$ . *Non Lin. Dyn.*, 82:157–171, 2015.
- [PR17] P.-O. PARISÉ et D. ROCHON : Tricomplex Dynamical Systems Generated by Polynomials of Odd Degree. *Fractals*, 25(3):1–11, 2017.

- [PRD06] A. POGORUY et R. M. ROGRIGUEZ-DAGNINO : On the set of zeros of bicomplex polynomials. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 51(7):725–730, 2006.
- [Pri91] G. B. PRICE : *An Introduction to Multicomplex Spaces and Functions*. Marcel Dekker Inc., New York, 1991.
- [PRR17] P.-O. PARISÉ, T. RANSFORD et D. ROCHON : Tricomplex dynamical systems generated by polynomials of even degree. *In Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM)*, 2017.
- [Roc97] D. ROCHON : Sur une généralisation des nombres complexes : Les tétranombres. Mémoire de Maîtrise, Université de Montréal, 1997.
- [Roc00] D. ROCHON : A Generalized Mandelbrot Set for Bicomplex Numbers. *Fractals*, 8(4):355–368, 2000.
- [Roc03] D. ROCHON : On a Generalized Mandelbrot Set for Bicomplex Numbers. *Fractals*, 11(3):213–219, 2003.
- [RR08] Noah H. RHEE et Noah C. RHEE : The radius of the  $n$ -Mandelbrot set. *ScienceDirect Applied Mathematics Letters*, 21:877–879, 2008.
- [RS04] D. ROCHON et M. SHAPIRO : On algebraic properties of bicomplex and hyperbolic numbers. *Anal. Univ. Oradea*, 11:71–110, 2004.
- [Rud87] W. RUDIN : *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill Inc., 1987.
- [Sch04] D. SCHLEICHER : On fibers and local connectivity of Mandelbrot and Multibrot Sets. *In M. L. LAPIDUS AND M. VAN FRANKENHUIJSEN, éditeur : Fractal Geometry and Applications : A Jubilee of Benoît Mandelbrot - Part I*, volume 72, pages 477–507. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, AMS, 2004.
- [Sen90] P. SENN : The Mandelbrot set for binary numbers. *Am. J. Phys.*, 58:1018, 1990.
- [Sob95] G. SOBCZYK : The Hyperbolic Number Plane. *Coll. Math. J.*, 26(4): 268–280, 1995.
- [XJ13] W. XINGYUAN et T. JIN : Hyperdimensional generalized M-J sets for hypercomplex number space. *Non lin. Dyn.*, 73:843–852, 2013.

- [XP06] W. XINGYUAN et C. PEIJUN : Research on fractal structure of generalized M-J sets utilized Lyapunov exponents and periodic scanning techniques. *Applied Mathematics and Computation*, 175:1007–1025, 2006.
- [XYeSYY07] W. XING-YUAN et et S. YUAN-YUAN : The general quaternionic M-J sets on the mapping  $z \leftarrow z^\alpha + c (\alpha \in \mathbb{N})$ . *Computers and Mathematics with Applications*, 53:1718–1732, 2007.
- [yWjS13] X. y. WANG et W. j. SONG : The generalized M-J sets for bicomplex numbers. *Non lin. Dyn.*, 72:17–26, 2013.

## Racines d'un polynôme cubique

Notre objectif est de tirer de l'information sur les racines d'un polynôme du 3<sup>ième</sup> degré de la forme  $P(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$  où  $b, c, d \in \mathbb{R}$  à partir des racines d'un polynôme  $Q(y)$  de la forme  $Q(y) = y^3 + py + q$ , conjugué à  $P(x)$ . Les résultats qui suivent se basent sur un document créé par Eguether [Egu11].

Pour commencer, rappelons les racines cubiques de l'unité  $\mathbf{1}$  du corps des complexes et la racine carrée d'un nombre complexe.

Pour obtenir les racines cubiques de l'unité, on remarque que  $\mathbf{1}$  s'écrit sous sa forme polaire comme

$$\mathbf{1} = \cos(0) + \mathbf{i} \sin(0).$$

Ainsi, en déterminant l'amplitude de chaque racine, on trouve

$$\begin{aligned} \theta_1 = 0 &\Rightarrow r_1 = 1 \\ \theta_2 = 2\pi/3 &\Rightarrow r_2 = \frac{-1 + \mathbf{i}\sqrt{3}}{2} \\ \theta_3 = 4\pi/3 &\Rightarrow r_3 = \frac{-1 - \mathbf{i}\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Dû à Eisenstein, on note les deux dernières racines cubiques de l'unité respectivement par  $\omega$  et  $\omega^2 = \bar{\omega}$ . Autrement dit,  $\omega = \frac{-1 + \mathbf{i}\sqrt{3}}{2}$  et  $\omega^2 = \bar{\omega} = \frac{-1 - \mathbf{i}\sqrt{3}}{2}$ .

Puis, nous noterons la racine d'un nombre complexe  $z = a + \mathbf{b}\mathbf{i}$ , où  $a, b \in \mathbb{R}$  comme

$$\sqrt{a + \mathbf{i}b} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + \mathbf{sgn}(b)\mathbf{i}\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \quad (\text{A.1})$$

où  $\mathbf{sgn}(b) = 1$  si  $b > 0$  et  $\mathbf{sgn}(b) = -1$  si  $b < 0$ . Si l'on veut désigné la racine négative, nous multiplierons (A.1) par  $-1$ . Ces notations seront utilisées pour la suite.

## A.1 Conjugaison du polynôme

Pour ramener le polynôme  $P(x)$  sous la forme du polynôme  $Q(y)$ , on procède comme suit. Posons le changement de variable suivant :

$$y = x + \frac{b}{3}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} P(x) = P(y - b/3) &= \left(y - \frac{b}{3}\right)^3 + b\left(y - \frac{b}{3}\right)^2 + c\left(y - \frac{b}{3}\right) + d \\ &= y^3 - y^2b + y\frac{b^2}{3} - \frac{b^3}{27} + by^2 - 2y\frac{b^2}{3} + \frac{b^3}{9} + cy - \frac{cb}{3} + d \\ &= y^3 + \left(c - \frac{b}{3}\right)y + \frac{2b^3}{27} - \frac{cb}{3} + d. \end{aligned}$$

En posant  $p = c - \frac{b^2}{3}$  et  $q = \frac{2b^3}{27} - \frac{cb}{3} + d$ , on trouve que  $P(x) = Q(y) = y^3 + py + q$ . Par conséquent, il suffit de connaître les racines de  $Q(y)$  pour ensuite connaître celles de  $P(x)$ .

## A.2 Racines du polynôme conjugué et systèmes équivalents

La proposition qui suit va permettre d'établir un lien entre les racines du polynôme  $Q(y)$  et la résolution d'un système d'équations.

**Proposition A.1.** Soit  $Q(y)$  un polynôme de la forme  $Q(y) = y^3 + py + q$ , où  $p, q \in \mathbb{R}$ . Alors, un nombre complexe  $z$  est racine de  $Q(y)$  ssi il existe deux nombres complexes  $y_1$  et  $y_2$  tels que  $z = y_1 + y_2$  et

$$\begin{cases} y_1^3 + y_2^3 + q = 0; \\ y_1 y_2 = -p/3. \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

**Démonstration.**

$\Leftarrow$ ) Supposons  $y_1$  et  $y_2$  deux nombres complexes tels que  $z = y_1 + y_2$  et qui sont solution du système (A.2). Alors,

$$Q(z) = (y_1 + y_2)^3 + p(y_1 + y_2) + q$$

$$\begin{aligned}
&= y_1^3 + 3y_1^2y_2 + 3y_1y_2^2 + y_2^3 + p(y_1 + y_2) + q \\
&= y_1^3 + y_2^3 + 3y_1y_2(y_1 + y_2) + p(y_1 + y_2) + q \\
&= y_1^3 + y_2^3 + (3y_1y_2 + p)(y_1 + y_2) + q \\
&= 0
\end{aligned}$$

car  $y_1^3 + y_2^3 + q = 0$  et  $3y_1y_2 + p = 0$ . Ainsi,  $z$  est racine de  $Q(y)$ .

$\Rightarrow$ ) Maintenant, supposons que  $z$  soit racine du polynôme  $Q(y)$ . Alors, il existe nécessairement deux nombres complexe  $y_1$  et  $y_2$  tels que  $z = y_1 + y_2$  et  $3y_1y_2 + p = 0$ . En effet, considérons le polynôme

$$w(v) = v^2 - zv - p/3.$$

Soit le discriminant  $\Delta = z^2 + \frac{4p}{3}$  du trinôme  $w(v)$ , alors ses racines sont

$$y_1^{(1,2)} = \frac{z}{2} \pm \frac{\sqrt{z^2 + \frac{4p}{3}}}{2}.$$

Par conséquent, on obtient  $y_2^{(1,2)} = \frac{z}{2} \mp \frac{\sqrt{z^2 + \frac{4p}{3}}}{2}$  de sorte que

$$y_1^{(1)}y_2^{(1)} = -\frac{p}{3} \text{ ou } y_1^{(2)}y_2^{(2)} = -\frac{p}{3}. \quad (\text{A.3})$$

Puis, comme  $z$  est racine de  $Q(y)$ , on a que  $Q(y_1 + y_2) = Q(z) = 0$  et donc que

$$y_1^3 + y_2^3 + q = 0. \quad (\text{A.4})$$

par (A.3). Ainsi,  $(y_1, y_2)$  est solution du système (A.2). Donc, si  $z$  est racine de  $Q(y)$ , alors il existe deux nombres  $y_1$  et  $y_2$  qui sont solution du système (A.2).  $\square$

Cette proposition sera très utile pour déterminer les racines de  $Q(y)$  et conséquemment les racines de  $P(x)$ . Pour la prochaine étape, nous utiliserons un système équivalent au système (A.2) de la proposition A.1. Ce système est le suivant :

$$\begin{cases}
y_1^3 + y_2^3 + q = 0; \\
y_1^3y_2^3 = -\frac{p^3}{27}; \\
y_1y_2 \in \mathbb{R}.
\end{cases} \quad (\text{A.5})$$

D'après le système (A.5), on remarque que  $y_1^3$  et  $y_2^3$  sont racines du trinôme suivant :

$$T(t) = t^2 - (y_1^3 + y_2^3)t + y_1^3y_2^3$$

$$= t^2 + qt - \frac{p^3}{27}$$

dont le discriminant est  $\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27}$ .

Ainsi, les racines de  $T(t)$  sont

$$\begin{aligned} t_{1,2} &= \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2} \\ &= \frac{-q}{2} \pm \frac{\sqrt{27\Delta}}{2\sqrt{27}}. \end{aligned}$$

Donc, pour la suite, nous nous intéresserons au signe de l'expression suivante :

$$D = 27\Delta = 27q^2 + 4p^3.$$

$D$  est souvent appelé le discriminant du polynôme.

### A.3 Étude du signe du discriminant

Nous allons explorer l'influence qu'a le signe de  $D$  sur la nature des racines du polynôme  $Q(y)$ . Nous débuterons par démontrer trois lemmes correspondant au signe que peut prendre  $D$  avant d'énoncer le résultat final. Le premier lemme est le suivant.

**Lemme A.1.** Posons  $D = 27\Delta = 27q^2 + 4p^3$ . Si  $D > 0$ , alors le polynôme  $Q(y) = y^3 + py + q$  possède une racine réelle et deux racines complexes conjuguées.

#### Démonstration.

Supposons que  $D > 0$ . Alors,  $T(t)$  admet deux racines réelles distinctes  $t_1$  et  $t_2$ . Par conséquent, comme  $y_1^3$  et  $y_2^3$  sont racines du polynôme  $T(t)$ , posons  $y_1^3 = t_1$  et  $y_2^3 = t_2$ . En accord avec le système (A.5) (le produit  $y_1 y_2 = -p/3$ , où  $p \in \mathbb{R}$ ), on trouve les solutions suivantes :

$$(t_1^{1/3}, t_2^{1/3}), (\omega t_1^{1/3}, \bar{\omega} t_2^{1/3}) \text{ et } (\bar{\omega} t_1^{1/3}, \omega t_2^{1/3}).$$

D'après la proposition A.1, les racines de  $Q(y)$  sont

$$r_1 = t_1^{1/3} + t_2^{1/3}, r_2 = \omega t_1^{1/3} + \bar{\omega} t_2^{1/3} \text{ et } r_3 = \bar{\omega} t_1^{1/3} + \omega t_2^{1/3}.$$

Ainsi,  $r_1$  est réelle, tandis que  $r_2$  et  $r_3$  sont conjuguées. En effet, on a

$$\begin{aligned}\bar{r}_2 &= \overline{\omega t_1^{1/3} + \bar{\omega} t_2^{1/3}} \\ &= \bar{\omega} \bar{t}_1^{1/3} + \bar{\bar{\omega}} \bar{t}_2^{1/3} \\ &= \bar{\omega} t_1^{1/3} + \omega t_2^{1/3} \\ &= r_3.\end{aligned}$$

L'autre cas  $y_2^3 = t_1$  et  $y_1^3 = t_2$  se fait de façon similaire.  $\square$

Ce lemme apporte une information importante sur les racines du polynôme  $Q(y)$ .

**Corollaire A.1.** Les racines du polynôme  $Q(y)$  sont données par

$$r_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{\sqrt{D}}{2\sqrt{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \frac{\sqrt{D}}{2\sqrt{27}}}, \quad (\text{A.6})$$

$$r_2 = \omega \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{\sqrt{D}}{2\sqrt{27}}} + \bar{\omega} \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \frac{\sqrt{D}}{2\sqrt{27}}}, \quad (\text{A.7})$$

$$\text{et } r_3 = \bar{\omega} \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{\sqrt{D}}{2\sqrt{27}}} + \omega \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \frac{\sqrt{D}}{2\sqrt{27}}} \quad (\text{A.8})$$

lorsque  $D > 0$ .

Enchaînons au prochain lemme.

**Lemme A.2.** Posons  $D = 27\Delta = 27q^2 + 4p^3$ . Si  $D < 0$ , alors le polynôme  $Q(y) = y^3 + py + q$  possède trois racines réelles.

**Démonstration.**

Supposons que  $D < 0$ . Alors,  $R(t)$  possède deux racines complexes conjuguées  $t$  et  $\bar{t}$ . Par conséquent, le système (A.5) a comme solution (puisque  $y_1 y_2$  doit être réel)

$$\left(\sqrt[3]{t}, \sqrt[3]{\bar{t}}\right), \left(\omega \sqrt[3]{t}, \bar{\omega} \sqrt[3]{\bar{t}}\right) \text{ et } \left(\bar{\omega} \sqrt[3]{t}, \omega \sqrt[3]{\bar{t}}\right)$$

où  $\sqrt[3]{\bar{t}} := \sqrt[3]{\bar{r}}e^{i\theta/3}$  lorsque  $t = re^{i\theta}$ . D'après la proposition A.1, les racines de  $Q(y)$  sont

$$r_1 = \sqrt[3]{t} + \sqrt[3]{\bar{t}}, r_2 = \omega \sqrt[3]{t} + \bar{\omega} \sqrt[3]{\bar{t}} \text{ et } r_3 = \bar{\omega} \sqrt[3]{t} + \omega \sqrt[3]{\bar{t}}.$$

Ces trois racines sont réelles puisque  $r_i = \bar{r}_i$  pour  $i = 1, 2, 3$ .  $\square$

On a le corollaire suivant :

**Corollaire A.2.** Les racines du polynôme  $Q(y)$  sont données par

$$r_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + i\frac{\sqrt{-D}}{2\sqrt{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - i\frac{\sqrt{-D}}{2\sqrt{27}}}, \quad (\text{A.9})$$

$$r_2 = \omega \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + i\frac{\sqrt{-D}}{2\sqrt{27}}} + \bar{\omega} \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - i\frac{\sqrt{-D}}{2\sqrt{27}}}, \quad (\text{A.10})$$

$$\text{et } r_3 = \bar{\omega} \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + i\frac{\sqrt{-D}}{2\sqrt{27}}} + \omega \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - i\frac{\sqrt{-D}}{2\sqrt{27}}} \quad (\text{A.11})$$

lorsque  $D < 0$ .

Enfin, le dernier lemme de cette partie est le suivant.

**Lemme A.3.** Posons  $D = 27\Delta = 27q^2 + 4p^3$ . Si  $D = 0$ , alors le polynôme  $Q(y) = y^3 + py + q$  possède trois racines réelles et l'une est multiple.

**Démonstration.**

Supposons que  $D = 0$ . Alors,  $R(t)$  a une racine double  $t = -q/2$ . En posant  $y^3 = t$ ,  $y$  est une racine cubique réelle de  $t$ . Ainsi le système (A.5) a comme solution

$$(t^{1/3}, t^{1/3}), (\omega t^{1/3}, \bar{\omega} t^{1/3}) \text{ et } (\bar{\omega} t^{1/3}, \omega t^{1/3}).$$

Par conséquent, d'après la proposition A.1, les racines de  $Q(y)$  sont

$$r_1 = t^{1/3} + t^{1/3} = 2t^{1/3}, r_2 = \omega t^{1/3} + \bar{\omega} t^{1/3} \text{ et } r_3 = \bar{\omega} t^{1/3} + \omega t^{1/3}.$$

Or, remarquons que  $r_2 = -t^{1/3} = r_3$ . Donc,  $r_2$  serait racine multiple de  $Q(y)$ . En effet,  $Q'(y) = 3y^2 + p$  et en évaluant  $Q'(y)$  en  $r_2$ , on trouve que

$$Q'(r_2) = 3 \left(\frac{q}{2}\right)^{2/3} + p = 3 \left(\frac{q^2}{4}\right)^{1/3} + p. \quad (\text{A.12})$$

De plus, puisque  $D = 0$ ,  $q^2 = -\frac{4p^3}{27}$ . Ainsi, (A.12) devient

$$Q'(r_2) = 3 \left(\frac{-4p^3}{4 \cdot 27}\right)^{1/3} + p$$

$$\begin{aligned}
&= 3 \left( \frac{-p^3}{27} \right)^{1/3} + p \\
&= -3 \left( \frac{p}{3} \right) + p = 0,
\end{aligned}$$

ce qui assure que  $r_2 = r_3$  est la racine multiple de  $Q(y)$ . Bref, quand  $D = 0$ ,  $Q(y)$  a trois racines réelles dont l'une est multiple.  $\square$

Comme pour les autres lemmes qui ont précédé, on a le corollaire suivant :

**Corollaire A.3.** Les racines du polynôme  $Q(y)$  sont données par

$$r_1 = -2\sqrt[3]{\frac{q}{2}} \text{ et,} \quad (\text{A.13})$$

$$r_2 = \sqrt[3]{\frac{q}{2}} \quad (\text{A.14})$$

lorsque  $D = 0$ .

En conclusion, voici le théorème réunissant l'ensemble des résultats obtenus précédemment.

**Théorème A.1.** Soit un polynôme  $P(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$  où  $b, c, d \in \mathbb{R}$  avec  $D := 4c^3 + 27d^2 + 4db^3 - b^2c^2 - 18bcd$ . Nous avons que

- i) si  $D > 0$ , alors  $P$  a une racine réelle et deux racines complexes conjuguées ;
- ii) si  $D = 0$ , alors  $P$  a trois racines réelles dont l'une est multiple ;
- iii) si  $D < 0$ , alors  $P$  a trois racines réelles distinctes.

**Démonstration.**

Posons  $y = x + \frac{b}{3}$ . Alors,  $P(x) = Q(y) = y^3 + py + q$  avec  $p = c - \frac{b^2}{3}$  et  $q = d - \frac{cb}{3} + \frac{2b^3}{27}$ . Les racines de  $P(x)$  se déduisent de celles de  $Q(y)$ .

D'après la proposition A.1, les racines de  $Q(y)$  sont données par deux nombres complexes qui satisfait le système (A.2). Ces deux nombres complexes sont aussi racines du système (A.5), équivalent au système (A.2) et donc leur cube sont racines du polynôme  $R(t) = t^2 + qt - \frac{p^3}{27}$  dont le discriminant est

$$\Delta = \frac{27q^2 + 4p^3}{27}. \quad (\text{A.15})$$

On en déduit  $D = 27\Delta = 4c^3 + 27d^2 + 4db^3 - b^2c^2 - 18bcd$ .

Puis, selon le signe de  $D$ , les lemmes A.1, A.2 et A.3 fournissent la nature des racines de  $Q(y)$  qui est la même que  $P(y)$  puisque  $Q$  et  $P$  sont conjugués. Plus précisément, on obtient que

- i) si  $D > 0$ , d'après le lemme A.1,  $Q$  a une racine réelle et deux racines complexes conjuguées et donc  $P$  aussi ;
- ii) si  $D = 0$ , d'après le lemme A.3,  $Q$  a trois racines réelles et l'une d'elle est conjuguée. Il s'ensuit que les racines de  $P$  sont aussi réelles et l'une d'elle est multiple ;
- iii) si  $D < 0$ , il s'ensuit que  $Q$  a trois racines réelles distinctes (lemme A.2) et donc il en va de même pour  $P$ .

□

## Nombres hyperboliques

Cette annexe est dédiée à une brève introduction à l'anneau des nombres hyperboliques. Le lecteur peut consulter le mémoire de H. Moreau [Mor17], l'ouvrage suivant [LESSV15] ou encore l'article [Sob95] pour approfondir ses connaissances sur le sujet.

De manière analogue aux nombres complexes, les nombres hyperboliques sont représentés par deux nombres réels  $a, b$  et par une unité imaginaire  $\mathbf{j}$  appelée unité hyperbolique. Contrairement aux nombres complexes où  $\mathbf{i}^2 = -1$ , l'unité hyperbolique  $\mathbf{j}$  élevée au carré donne 1, *i.e.*  $\mathbf{j}^2 = 1$ . En fait, on définit les nombres hyperboliques comme suit :

**Définition B.1.** Soit  $a, b \in \mathbb{R}$ . Un nombre hyperbolique  $z$  s'écrit sous la forme  $z = a + b\mathbf{j}$  où  $\mathbf{j}^2 = 1$ .

**Remarque 33.** On notera l'ensemble des nombres hyperboliques par  $\mathbb{D}$ . Ainsi, d'après la définition B.1,

$$\mathbb{D} = \{z = a + b\mathbf{j} : (a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } \mathbf{j}^2 = 1\}. \quad (\text{B.1})$$

▲

Nous pouvons aussi avoir un point de vue matriciel sur les nombres hyperboliques. Si l'on pose  $\mathbf{1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $\mathbf{j} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , on obtient la représentation matricielle d'un nombre hyperbolique, soit

$$z = a \cdot \mathbf{1} + b \cdot \mathbf{j} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

Une addition et une multiplication sont définies sur les nombres hyperboliques de la même façon que sur les nombres complexes.

**Définition B.2.** Soit  $z = a + bj$  et  $w = c + dj$  deux nombres hyperboliques. L'addition et la multiplication de  $z$  et  $w$  sont définies comme suit :

$$z + w := (a + c) + (b + d)\mathbf{j}, \quad (\text{B.3})$$

$$z \cdot w := (ac + bd) + (ad + bc)\mathbf{j}. \quad (\text{B.4})$$

**Remarque 34.** La multiplication de deux nombres hyperboliques diffère légèrement de la multiplication de deux nombres complexes par un signe près. Ceci est causé par la définition de l'unité hyperbolique  $\mathbf{j}$ . De plus, d'après la représentation matricielle (B.2), additionner et multiplier deux nombres hyperboliques revient à l'addition et la multiplication matricielles. En effet, on a

$$z + w = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + c & b + d \\ b + d & a + c \end{pmatrix}, \quad (\text{B.5})$$

$$z \cdot w = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac + bd & ad + bc \\ ad + bc & ac + bd \end{pmatrix}. \quad (\text{B.6})$$

▲

Les nombres hyperboliques admettent un conjugué défini comme suit [Mor17] :

**Définition B.3.** Soit  $z = a + bj \in \mathbb{D}$ . On définit le conjugué de  $z$ , noté  $\bar{z}$ , comme  $\bar{z} = a - bj$ .

À partir de la définition B.3, il est simple de démontrer les propriétés suivantes :

**Théorème B.1** ([RS04], section 5). Soient  $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ . Alors

i)  $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$  ;

ii)  $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$  ;

iii)  $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$  ;

iv)  $\overline{\bar{z}_1} = z_1$ .

Finalement, on définit le module réel d'un nombre hyperbolique par la fonction  $|\cdot| : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{B.7}$$

où  $z = a + bj$ . Ainsi, en référence au module B.7, une suite  $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{D}$ ,  $n \mapsto h_n$  est bornée si et seulement si il existe un nombre  $M \in \mathbb{R}$  tel que  $|h_n| \leq M$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

## Représentation matricielle d'un nombre tricomplexe et Maple

Dans cet annexe, nous présentons, en premier lieu, comment représenter un nombre tricomplexe sous forme de matrice. Cette représentation est utile afin d'implémenter, dans le logiciel *Maple 16*, la structure algébrique des nombres tricomplexes. En fait, nous allons voir que l'addition et la multiplication reviennent à une addition et une multiplication des matrices représentant les nombres tricomplexes utilisés dans chacune des opérations.

### C.1 Représentation matricielle

Nous allons essentiellement nous baser sur la section 44 du chapitre 5 de l'ouvrage de G. B. Price [Pri91]. Afin d'être conforme à ce qui est donné dans cet ouvrage, nous reconfigurons la représentation d'un nombre tricomplexe de la façon suivante :

$$\eta = x_1 + x_2\mathbf{i}_1 + x_3\mathbf{i}_2 + x_4\mathbf{j}_1 + x_5\mathbf{i}_3 + x_6\mathbf{j}_2 + x_7\mathbf{j}_3 + x_8\mathbf{i}_4$$

où  $\eta \in \mathbb{M}(3)$  et  $x_i \in \mathbb{R}$  pour tout  $i = 1, 2, \dots, 8$ . Si on pose

$$\zeta = y_1 + y_2\mathbf{i}_1 + y_3\mathbf{i}_2 + y_4\mathbf{j}_1 + y_5\mathbf{i}_3 + y_6\mathbf{j}_2 + y_7\mathbf{j}_3 + y_8\mathbf{i}_4,$$

alors nous avons vu au chapitre 1 que la multiplication de  $\eta$  par  $\zeta$  fournissait les équations suivantes :

$$u_1 = x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 + x_4y_4 - x_5y_5 + x_6y_6 + x_7y_7 - x_8y_8$$

$$u_2 = x_2y_1 + x_1y_2 - x_4y_3 - x_3y_4 - x_6y_5 - x_5y_6 + x_8y_7 + x_7y_8$$

$$\begin{aligned}
 u_3 &= x_3y_1 - x_4y_2 + x_1y_3 - x_2y_4 - x_7y_5 + x_8y_6 - x_5y_7 + x_6y_8 \\
 u_4 &= x_4y_1 + x_3y_2 + x_2y_3 + x_1y_4 - x_8y_5 - x_7y_6 - x_6y_7 - x_5y_8 \\
 u_5 &= x_5y_1 - x_6y_2 - x_7y_3 + x_8y_4 + x_1y_5 - x_2y_6 - x_3y_7 + x_4y_8 \\
 u_6 &= x_6y_1 + x_5y_2 - x_8y_3 - x_7y_4 + x_2y_5 + x_1y_6 - x_4y_7 - x_3y_8 \\
 u_7 &= x_7y_1 - x_8y_2 + x_5y_3 - x_6y_4 + x_3y_5 - x_4y_6 + x_1y_7 - x_2y_8 \\
 u_8 &= x_8y_1 + x_7y_2 + x_6y_3 + x_5y_4 + x_4y_5 + x_3y_6 + x_2y_7 + x_1y_8.
 \end{aligned}$$

où  $u = u_1 + u_2\mathbf{i}_1 + u_3\mathbf{i}_2 + u_4\mathbf{j}_1 + u_5\mathbf{i}_3 + u_6\mathbf{j}_2 + u_7\mathbf{j}_3 + u_8\mathbf{i}_4$  est le résultat de la multiplication. En considérant cela comme un système d'équations en termes des variables  $y_1, y_2, \dots, y_8$ , on trouve la matrice des coefficients de  $\eta$  :

$$M_{\mathbb{R}}(\eta) := \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 & -x_3 & x_4 & -x_5 & x_6 & x_7 & -x_8 \\ x_2 & x_1 & -x_4 & -x_3 & -x_6 & -x_5 & x_8 & x_7 \\ x_3 & -x_4 & x_1 & -x_2 & -x_7 & x_8 & -x_5 & x_6 \\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1 & -x_8 & -x_7 & -x_6 & -x_5 \\ x_5 & -x_6 & -x_7 & x_8 & x_1 & -x_2 & -x_3 & x_4 \\ x_6 & x_5 & -x_8 & -x_7 & x_2 & x_1 & -x_4 & -x_3 \\ x_7 & -x_8 & x_5 & -x_6 & x_3 & -x_4 & x_1 & -x_2 \\ x_8 & x_7 & x_6 & x_5 & x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix}.$$

Il est aussi possible de construire une matrice à coefficients complexe qui représente un nombre tricomplexe. Si on reprend la représentation d'un nombre tricomplexe en fonction des coefficients complexes :

$$\eta = z_1 + z_2\mathbf{i}_2 + z_3\mathbf{i}_3 + z_4\mathbf{j}_3 \text{ et } \zeta = s_1 + s_2\mathbf{i}_2 + s_3\mathbf{i}_3 + s_4\mathbf{j}_3,$$

alors nous avons vu au chapitre 1 que la multiplication fournissait les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 v_1 &= z_1s_1 - z_2s_2 - z_3s_3 + z_4s_4 \\
 v_2 &= z_2s_1 + z_1s_2 - z_4s_3 - z_3s_4 \\
 v_3 &= z_3s_1 - z_4s_2 + z_1s_3 - z_2s_4 \\
 v_4 &= z_4s_1 + z_3s_2 + z_2s_3 + z_1s_4
 \end{aligned}$$

où  $v = v_1 + v_2\mathbf{i}_2 + v_3\mathbf{i}_3 + v_4\mathbf{j}_3$ . En considérant ce système d'équations en termes des

variables  $s_1, s_2, s_3$  et  $s_4$ , on trouve la matrice des coefficients de  $\eta$  :

$$M_{\mathbb{C}}(\eta) := \begin{pmatrix} z_1 & -z_2 & -z_3 & z_4 \\ z_2 & z_1 & -z_4 & -z_3 \\ z_3 & -z_4 & z_1 & -z_2 \\ z_4 & z_3 & z_2 & z_1 \end{pmatrix}.$$

G. B. Price [Pri91] appelle ces matrices *Cauchy-Riemann*. Soit  $\mathcal{M}(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices de Cauchy-Riemann à coefficients réels et soit  $\mathcal{M}(\mathbb{C})$  l'ensemble des matrices de Cauchy-Riemann à coefficients complexes. On peut vérifier par des calculs directs le contenu des théorèmes suivants. D'ailleurs, les preuves sont similaires au cas des nombres bicomplexes présenté à la section 23 du chapitre 3 de l'ouvrage de G.B. Price [Pri91].

**Théorème C.1.** Soit  $M_{\mathbb{R}} : \mathbb{M}(3) \rightarrow \mathcal{M}(\mathbb{R}) : \eta \mapsto M_{\mathbb{R}}(\eta)$ . Alors, l'application  $M_{\mathbb{R}}$  est un isomorphisme entre l'anneau des matrices de Cauchy-Riemann à coefficients réels et l'anneau des nombres tricomplexes.

**Théorème C.2.** Soit  $M_{\mathbb{C}} : \mathbb{M}(3) \rightarrow \mathcal{M}(\mathbb{C}) : \eta \mapsto M_{\mathbb{C}}(\eta)$ . Alors, l'application  $M_{\mathbb{C}}$  est un isomorphisme entre l'anneau des matrices de Cauchy-Riemann à coefficients complexes et l'anneau des nombres tricomplexes.

Cette nouvelle représentation des nombres tricomplexes en termes de matrices nous permet d'utiliser *Maple* et de faire des calculs qui serait fastidieux à la main. Entre autres, la prochaine section de cette annexe présente le code permettant de faire les calculs nécessaires pour la classification des coupes tridimensionnelles au chapitre 3.

## C.2 Feuille de calculs *Maple 16*

La représentation matricielle d'un nombre tricomplexe est très utile afin de réaliser des calculs avec *Maple*. Nous mentionnons quelques notations qui seront traînées tout au long des calculs et mentionnons quelques remarques.

D'abord, les lettres  $U$  et  $V$  sont réservées pour les nombres tricomplexes se trouvant soit dans les espaces  $\mathbb{M}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_m)$  ou  $\mathbb{M}(\mathbf{i}_m, \mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l)$ . Les lettres  $C1$  et  $C2$  sont réservées aux nombres se trouvant dans les espaces  $\mathbb{T}(\mathbf{i}_m, \mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l)$  et  $\mathbb{T}(\mathbf{i}_n, \mathbf{i}_q, \mathbf{i}_s)$ . La lettre  $P$  est réservée au cube des nombres  $U$  et  $V$ . Les lettres  $Q1$  et  $Q2$  sont réservées aux polynômes  $Q_{3,c_1}$  et  $Q_{3,c_2}$ . Enfin, les lettres  $Z$  et  $Zinv$  sont prises pour l'application linéaire  $\varphi$  et son inverse  $\varphi^{-1}$ .

Ensuite, il faut remarquer que la première colonne de la matrice  $M_{\mathbb{R}}(\eta)$  du nombre tricomplexe  $\eta$  contient tous les coefficients du nombre  $\eta$ , dans l'ordre. Ainsi, dans tous les calculs, on effectue la multiplication matricielle des nombres tricomplexes et ensuite on extrait seulement la première colonne de la matrice résultante afin d'obtenir les coefficients avec la méthode `Column(nomMatrice, #colonne)` avec `#colonne = 1`.

> with(LinearAlgebra) :

### ▼ Procédure pour la représentation matricielle d'un nombre tricomplexe

Nous définissons une procédure afin de représentation un nombre tricomplexe à l'aide d'une matrice 8x8 à coefficients réels (voir *An Introduction to Multicomplex spaces and functions*, G. B. Price, p.311)

```
> TC := proc(u :: list)

    description "La liste u correspond aux coefficients du nombre tricomplexe selon l'ordre
    suivant : a + bi1 + ci2 + dj1 + ei3 + fj2 + gj3 + hi4."
    local z1, z2, z3, z4, w;
    z1 := Matrix(2, 2, [u[1], -u[2], u[2], u[1]]);
    z2 := Matrix(2, 2, [u[3], -u[4], u[4], u[3]]);
    z3 := Matrix(2, 2, [u[5], -u[6], u[6], u[5]]);
    z4 := Matrix(2, 2, [u[7], -u[8], u[8], u[7]]);
    w := Matrix(8, 8, [[z1, -z2, -z3, z4], [z2, z1, -z4, -z3], [z3, -z4, z1, -z2], [z4, z3, z2, z1]]);
    return w;
end proc;
TC := proc(u::list) (1.1)
    local z1, z2, z3, z4, w;
    description
    "La liste u correspond aux coefficients du nombre tricomplexe selon l'ordre suivant : a +
    bi1 + ci2 + dj1 + ei3 + fj2 + gj3 + hi4.";
    z1 := Matrix(2, 2, [u[1], -u[2], u[2], u[1]]);
    z2 := Matrix(2, 2, [u[3], -u[4], u[4], u[3]]);
    z3 := Matrix(2, 2, [u[5], -u[6], u[6], u[5]]);
    z4 := Matrix(2, 2, [u[7], -u[8], u[8], u[7]]);
    w := Matrix(8, 8, [[z1, -z2, -z3, z4], [z2, z1, -z4, -z3], [z3, -z4, z1, -z2], [z4,
    z3, z2, z1]]);
    return w
end proc
> U := TC([a, b, c, d, e, f, g, h]);
V := TC([A, B, C, D, E, F, G, H]);
```

$$U := \begin{bmatrix} a & -b & -c & d & -e & f & g & -h \\ b & a & -d & -c & -f & -e & h & g \\ c & -d & a & -b & -g & h & -e & f \\ d & c & b & a & -h & -g & -f & -e \\ e & -f & -g & h & a & -b & -c & d \\ f & e & -h & -g & b & a & -d & -c \\ g & -h & e & -f & c & -d & a & -b \\ h & g & f & e & d & c & b & a \end{bmatrix}$$

$$V := \begin{bmatrix} A & -B & -C & D & -E & F & G & -H \\ B & A & -D & -C & -F & -E & H & G \\ C & -D & A & -B & -G & H & -E & F \\ D & C & B & A & -H & -G & -F & -E \\ E & -F & -G & H & A & -B & -C & D \\ F & E & -H & -G & B & A & -D & -C \\ G & -H & E & -F & C & -D & A & -B \\ H & G & F & E & D & C & B & A \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

> P := U.V: Transpose(P[1]);

$$\begin{bmatrix} aA - bB - cC + dD - eE + fF + gG - hH \\ -aB - bA + cD + dC + eF + fE - gH - hG \\ -aC + bD - cA + dB + eG - fH + gE - hF \\ aD + bC + cB + dA - eH - fG - gF - hE \\ -aE + bF + cG - dH - eA + fB + gC - hD \\ aF + bE - cH - dG + eB + fA - gD - hC \\ aG - bH + cE - dF + eC - fD + gA - hB \\ -aH - bG - cF - dE - eD - fC - gB - hA \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

Test pour la multiplication de nombres bicomplexes

> U := TC([a, b, c, d, 0, 0, 0, 0]);

V := TC([A, B, C, D, 0, 0, 0, 0]);

$$U := \begin{bmatrix} a & -b & -c & d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & a & -d & -c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & -d & a & -b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d & c & b & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & -b & -c & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & a & -d & -c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & -d & a & -b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d & c & b & a \end{bmatrix}$$

(1.4)

$$V := \begin{bmatrix} A & -B & -C & D & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B & A & -D & -C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C & -D & A & -B & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D & C & B & A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A & -B & -C & D \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B & A & -D & -C \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C & -D & A & -B \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D & C & B & A \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

> P := U.V: Transpose(P[1]);

$$\begin{bmatrix} aA - bB - cC + dD \\ -aB - bA + cD + dC \\ -aC + bD - cA + dB \\ aD + bC + cB + dA \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

### ▼ CALCULS coupés T(1, i1, i2) et T(1, i1, i3)

U correspond au nombre dans l'espace  $M(j1, j2)$ , C1 au nombre dans  $T(1, j1, j2)$  et Q1 au polynôme  $Q_{\{3,c1\}}$ .

> U := TC([a, b, c, d, 0, 0, 0, 0]):

C1 := TC([γ, δ, μ, 0, 0, 0, 0, 0]):

P := U.U.U: Q1 := simplify(Column(P, 1) + Column(C1, 1));

$$Q1 := \begin{bmatrix} a^3 - 3ab^2 - 3ac^2 + 3ad^2 + 6bcd + \gamma \\ 3a^2b - 6acd - b^3 - 3bc^2 + 3bd^2 + \delta \\ 3a^2c - 6abd - 3b^2c - c^3 + 3cd^2 + \mu \\ 3a^2d + 6abc - 3b^2d - 3c^2d + d^3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

V correspond au nombre dans l'espace  $M(j1, j3)$ , C2 au nombre dans  $T(1, j1, j3)$  et Q2 au polynôme  $Q_{\{3,c2\}}$ .

> V := TC([a, b, 0, 0, c, d, 0, 0]):

```
C2 := TC([γ δ, 0, 0, μ, 0, 0, 0]) :
P := V.V.V: Q2 := simplify(Column(P, 1) + Column(C2, 1));
```

$$Q2 := \begin{bmatrix} a^3 - 3ab^2 - 3ac^2 + 3ad^2 + 6bcd + \gamma \\ 3a^2b - 6acd - b^3 - 3bc^2 + 3bd^2 + \delta \\ 0 \\ 0 \\ 3a^2c - 6abd - 3b^2c - c^3 + 3cd^2 + \mu \\ 3a^2d + 6abc - 3b^2d - 3c^2d + d^3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Z est l'application linéaire, Zinv est l'application linéaire inverse et Z.Q1 - Q2 correspond à l'opération  $\phi_{3,c1}^{-1}(\eta) - Q_{3,c2}$ .

```
> Z := Matrix([[1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0],
[0, 1, 0, 0], [0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1]]);
```

```
Zinv := MatrixInverse(Z);
"φ-1(η)" = Transpose(Column(Zinv.TC([a, b, 0, 0, c, d, 0, 0]), 1));
Transpose(Z.Q1 - Q2);
```

$$Z := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Zinv := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$"\phi^{-1}(\eta)" = [a \ b \ c \ d \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

(2.3)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

### ▼ CALCULS coupes T(1, i1, i2) et T(1, i2, i4)

U correspond au nombre dans l'espace  $M(j1, j2)$ , C1 au nombre dans  $T(1, j1, j2)$  et Q1 au polynôme  $Q_{\{3,c1\}}$ .

>  $U := TC([a, b, c, -d, 0, 0, 0, 0]) :$   
 $C1 := TC([\gamma, \delta, \mu, 0, 0, 0, 0, 0]) :$   
 $P := U.U.U : Q1 := simplify(Column(P, 1) + Column(C1, 1));$

$$Q1 := \begin{bmatrix} a^3 - 3ab^2 - 3ac^2 + 3ad^2 - 6bcd + \gamma \\ 3a^2b + 6acd - b^3 - 3bc^2 + 3bd^2 + \delta \\ 3a^2c + 6abd - 3b^2c - c^3 + 3cd^2 + \mu \\ -3a^2d + 6abc + 3b^2d + 3c^2d - d^3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

V correspond au nombre dans l'espace  $M(j1, j3)$ , C2 au nombre dans  $T(1, j1, j3)$  et Q2 au polynôme  $Q_{\{3,c2\}}$ .

>  $V := TC([a, 0, b, 0, 0, d, 0, c]) :$   
 $C2 := TC([\gamma, 0, \delta, 0, 0, 0, 0, \mu]) :$   
 $P := V.V.V : Q2 := simplify(Column(P, 1) + Column(C2, 1));$

$$Q2 := \begin{bmatrix} a^3 - 3ab^2 - 3ac^2 + 3ad^2 - 6bcd + \gamma \\ 0 \\ 3a^2b + 6acd - b^3 - 3bc^2 + 3bd^2 + \delta \\ 0 \\ 0 \\ 3a^2d - 3b^2d - 3c^2d + d^3 - 6abc \\ 0 \\ 3a^2c + 6abd - 3b^2c - c^3 + 3cd^2 + \mu \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Z est l'application linéaire, Zinv est l'application linéaire inverse et  $Z.Q1 - Q2$  correspond à l'opération  $\phi_{\{3,c1\}}^{-1}(\eta) - Q_{\{3,c2\}}$ .

>  $Zinv := Matrix([[1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1], [0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0]]);$   
 $Z := MatrixInverse(Zinv);$   
 $"\phi_{\{3,c1\}}^{-1}(\eta)" = Transpose(Column(Zinv.TC([a, 0, b, 0, 0, d, 0, c]), 1));$   
 $Transpose(Z.Q1 - Q2);$

$$\begin{aligned}
 Z_{inv} &:= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 Z &:= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \phi^{-1}(\eta) &= \begin{bmatrix} a & b & c & -d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

▼ **CALCULS coupes T(i1, i2, j1) et T(i1, i3, j2)**

U correspond au nombre dans l'espace M(j1, j2), C1 au nombre dans T(1, j1, j2) et Q1 au polynôme  $Q_{\{3,c1\}}$ .

```

> U := TC([a, b, c, d, 0, 0, 0, 0, 0]) :
  C1 := TC([0, γ, δ, μ, 0, 0, 0, 0, 0]) :
  P := U.U.U: Q1 := simplify(Column(P, 1) + Column(C1, 1));
  
```

$$Q1 := \begin{bmatrix} a^3 - 3ab^2 - 3ac^2 + 3ad^2 + 6bcd \\ 3a^2b - 6acd - b^3 - 3bc^2 + 3bd^2 + \gamma \\ 3a^2c - 6abd - 3b^2c - c^3 + 3cd^2 + \delta \\ 3a^2d + 6abc - 3b^2d - 3c^2d + d^3 + \mu \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

V correspond au nombre dans l'espace M(j1, j3), C2 au nombre dans T(1, j1, j3) et Q2 au polynôme

$Q_{\{3,c2\}}$ .

```
> V := TC([a, b, 0, 0, c, d, 0, 0]) :
C2 := TC([0, γ, 0, 0, δ, μ, 0, 0]) :
P := V.V.V: Q2 := simplify(Column(P, 1) + Column(C2, 1));
```

$$Q2 := \begin{bmatrix} a^3 - 3ab^2 - 3ac^2 + 3ad^2 + 6bcd \\ 3a^2b - 6acd - b^3 - 3bc^2 + 3bd^2 + \gamma \\ 0 \\ 0 \\ 3a^2c - 6abd - 3b^2c - c^3 + 3cd^2 + \delta \\ 3a^2d + 6abc - 3b^2d - 3c^2d + d^3 + \mu \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Z est l'application linéaire, Zinv est l'application linéaire inverse et Z.Q1 - Q2 correspond à l'opération  $\phi_{\{3,c1\}}^{-1}(\eta) - Q_{\{3,c2\}}$ .

```
> Zinv := Matrix([[1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0],
0, 0, 1, 0, 0], [0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1]]);
Z := MatrixInverse(Zinv);
"φ-1(η)" = Transpose(Column(Zinv.TC([a, b, 0, 0, c, d, 0, 0]), 1));
Transpose(Z.Q1 - Q2);
```

$$Zinv := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Z := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \text{"}\phi^{-1}\{\eta\}" \\ \text{"}\phi^{-1}\{\eta\}" \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c & d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

▼ **CALCULS coupes T(i1, i2, j1) et T(i3, i4, j1)**

U correspond au nombre dans l'espace M(j1, j2), C1 au nombre dans T(1, j1, j2) et Q1 au polynôme  $Q_{\{3,c1\}}$ .

```
> U := TC([-a, b, c, -d, 0, 0, 0, 0]) :
  C1 := TC([0, γ, δ, μ, 0, 0, 0, 0]) :
  P := U.U.U : Q1 := simplify(Column(P, 1) + Column(C1, 1)) ;
```

$$Q1 := \begin{bmatrix} -a^3 + 3ab^2 + 3ac^2 - 3ad^2 - 6bcd \\ 3a^2b - 6acd - b^3 - 3bc^2 + 3bd^2 + \gamma \\ 3a^2c - 6abd - 3b^2c - c^3 + 3cd^2 + \delta \\ -3a^2d - 6abc + 3b^2d + 3c^2d - d^3 + \mu \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

V correspond au nombre dans l'espace M(j1, j3), C2 au nombre dans T(1, j1, j3) et Q2 au polynôme  $Q_{\{3,c2\}}$ .

```
> V := TC([a, 0, 0, -d, b, 0, 0, c]) :
  C2 := TC([0, 0, 0, μ, γ, 0, 0, δ]) :
  P := V.V.V : Q2 := simplify(Column(P, 1) + Column(C2, 1)) ;
```

$$Q2 := \begin{bmatrix} a^3 - 3ab^2 - 3ac^2 + 3ad^2 + 6bcd \\ 0 \\ 0 \\ -3a^2d - 6abc + 3b^2d + 3c^2d - d^3 + \mu \\ 3a^2b - 6acd - b^3 - 3bc^2 + 3bd^2 + \gamma \\ 0 \\ 0 \\ 3a^2c - 6abd - 3b^2c - c^3 + 3cd^2 + \delta \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

Z est l'application linéaire, Zinv est l'application linéaire inverse et Z.Q1 - Q2 correspond à l'opération  $\phi.Q_{\{3,c1\}}.\phi^{-1}\{\eta\} - Q_{\{3,c2\}}$ .

```
> Zinv := Matrix([[ -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1], [0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0]]);
Z := MatrixInverse(Zinv);
"}\phi^{-1}\{\eta\}" = Transpose(Column(Zinv.TC([a, 0, 0, -d, b, 0, 0, c]), 1));
```

```

Transpose(Z.Q1 - Q2);

```

$$\begin{aligned}
 Z_{inv} &:= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 Z &:= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \text{"}\phi^{-1}\text{"}(\eta) &= \begin{bmatrix} -a & b & c & -d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{5.3}$$

▼ **CALCULS coupes T(1, i1, j1) et T(1, i4, j3)**

U correspond au nombre dans l'espace M(i1, j1), C1 au nombre dans T(1, i1, j1) et Q1 au polynôme  $Q_{\{3,c1\}}$ .

```

> U := TC([a, c, -b, d, 0, 0, 0, 0]);
C1 := TC([γ, δ, 0, μ, 0, 0, 0, 0]);
P := U.U.U: Q1 := simplify(Column(P, 1) + Column(C1, 1));

```

$$Q1 := \begin{bmatrix} a^3 - 3ab^2 - 3ac^2 + 3ad^2 - 6bcd + \gamma \\ 6abd - 3b^2c + 3a^2c + 3cd^2 - c^3 + \delta \\ -3a^2b + b^3 + 3bc^2 - 3bd^2 - 6acd \\ -6abc - 3b^2d + 3a^2d - 3c^2d + d^3 + \mu \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
 \tag{6.1}$$

V correspond au nombre dans l'espace  $M(i2, j3)$ , C2 au nombre dans  $T(1, i2, j3)$  et Q2 au polynôme  $Q_{\{3,c2\}}$ .

```
> V := TC([a, b, 0, 0, 0, 0, d, c]) :
  C2 := TC([γ, 0, 0, 0, 0, 0, μ, δ]) :
  P := V.V.V : Q2 := simplify(Column(P, 1) + Column(C2, 1));
```

$$Q2 := \begin{bmatrix} a^3 - 3ab^2 - 3ac^2 + 3ad^2 - 6bcd + \gamma \\ 3a^2b + 6acd - b^3 - 3bc^2 + 3bd^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -6abc - 3b^2d + 3a^2d - 3c^2d + d^3 + \mu \\ 6abd - 3b^2c + 3a^2c + 3cd^2 - c^3 + \delta \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

Z est l'application linéaire, Zinv est l'application linéaire inverse et Z.Q1 - Q2 correspond à l'expression  $\phi.Q_{\{3,c1\}}.\phi^{-1}(\eta) - Q_{\{3,c2\}}$ .

```
> Z := Matrix([[1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0],
  [0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1], [0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0]]);
  Zinv := MatrixInverse(Z);
  "φ^{-1}(η)" = Transpose(Column(Zinv.TC([a, b, 0, 0, 0, 0, d, c]), 1));
  Transpose(Z.Q1 - Q2);
```

$$Z := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Zinv := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \phi^{-1}(\eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c & -b & d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

### ▼ CALCULS coupes T(1, j1, j2) et T(1, j1, j3)

U correspond au nombre dans l'espace M(j1, j2), C1 au nombre dans T(1, j1, j2) et Q1 au polynôme  $Q_{\{3,c1\}}$ .

>  $U := TC([a, 0, 0, b, 0, c, d, 0])$  ;  
 $C1 := TC([\gamma, 0, 0, \delta, 0, \mu, 0, 0])$  ;  
 $P := U.U.U$  ;  $Q1 := simplify(Column(P, 1) + Column(C1, 1))$  ;

$$Q1 := \begin{bmatrix} a^3 + 3ab^2 + 3ac^2 + 3ad^2 - 6bcd + \gamma \\ 0 \\ 0 \\ 3a^2b - 6acd + b^3 + 3bc^2 + 3bd^2 + \delta \\ 0 \\ -6abd + 3cd^2 + 3a^2c + 3b^2c + c^3 + \mu \\ 3a^2d + 3b^2d + 3c^2d + d^3 - 6abc \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.1)$$

V correspond au nombre dans l'espace M(j1, j3), C2 au nombre dans T(1, j1, j3) et Q2 au polynôme  $Q_{\{3,c2\}}$ .

>  $V := TC([a, 0, 0, b, 0, d, c, 0])$  ;  
 $C2 := TC([\gamma, 0, 0, \delta, 0, 0, \mu, 0])$  ;  
 $P := V.V.V$  ;  $Q2 := simplify(Column(P, 1) + Column(C2, 1))$  ;

$$Q2 := \begin{bmatrix} a^3 + 3ab^2 + 3ac^2 + 3ad^2 - 6bcd + \gamma \\ 0 \\ 0 \\ 3a^2b - 6acd + b^3 + 3bc^2 + 3bd^2 + \delta \\ 0 \\ 3a^2d + 3b^2d + 3c^2d + d^3 - 6abc \\ -6abd + 3cd^2 + 3a^2c + 3b^2c + c^3 + \mu \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

Z est l'application linéaire, Zinv est l'application linéaire inverse et Z.Q1 - Q2 correspond à l'opération  $\phi_{\{3,c1\}}^{-1}(\eta) - Q_{\{3,c2\}}$ .

>  $Z := Matrix([[1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1]])$  ;

$Zinv := MatrixInverse(Z)$  ;

$\phi^{-1}(\eta) = Transpose(Column(Zinv.TC([a, 0, 0, b, 0, d, c, 0]), 1))$  ;

*Transpose(Z.Q1 - Q2);*

$$Z := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Z_{inv} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{"}\phi^{-1}\text{"}(\eta) &= \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b & 0 & c & d & 0 \end{bmatrix} \\ &\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{7.3}$$

▼ **CALCULS coupes T(1, i1, j1) et T(1, i2, j3)**

U correspond au nombre dans l'espace M(i1, j1), C1 au nombre dans T(1, i1, j1) et Q1 au polynôme Q\_{3,c1}.

```
> U := TC([a, b, c, d, 0, 0, 0, 0]) :
  C1 := TC([γ, δ, 0, μ, 0, 0, 0, 0]) :
  P := U.U.U : Q1 := simplify(Column(P, 1) + Column(C1, 1));
```

(8.1)

$$Q1 := \begin{bmatrix} a^3 - 3ab^2 - 3ac^2 + 3ad^2 + 6bcd + \gamma \\ 3a^2b - 6acd - b^3 - 3bc^2 + 3bd^2 + \delta \\ 3a^2c - 6abd - 3b^2c - c^3 + 3cd^2 \\ 3a^2d + 6abc - 3b^2d - 3c^2d + d^3 + \mu \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8.1)$$

V correspond au nombre dans l'espace  $M(i2, j3)$ , C2 au nombre dans  $T(1, i2, j3)$  et Q2 au polynôme  $Q_{\{3,c2\}}$ .

>  $V := TC([a, 0, b, 0, c, 0, d, 0])$  ;  
 $C2 := TC([\gamma, 0, \delta, 0, 0, 0, \mu, 0])$  ;  
 $P := V.V.V$ ;  $Q2 := simplify(Column(P, 1) + Column(C2, 1))$ ;

$$Q2 := \begin{bmatrix} a^3 - 3ab^2 - 3ac^2 + 3ad^2 + 6bcd + \gamma \\ 0 \\ 3a^2b - 6acd - b^3 - 3bc^2 + 3bd^2 + \delta \\ 0 \\ 3a^2c - 6abd - 3b^2c - c^3 + 3cd^2 \\ 0 \\ 3a^2d + 6abc - 3b^2d - 3c^2d + d^3 + \mu \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8.2)$$

Z est l'application linéaire, Zinv est l'application linéaire inverse et  $Z.Q1 - Q2$  correspond à l'expression  $\phi.Q_{\{3,c1\}}.\phi^{-1}(\eta) - Q_{\{3,c2\}}$ .

>  $Z := Matrix([[1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0], [0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0], [0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1]])$  ;  
 $Zinv := MatrixInverse(Z)$  ;  
 $\phi^{-1}(\eta) = Transpose(Column(Zinv.TC([a, 0, b, 0, c, 0, d, 0]), 1))$  ;  
 $Transpose(Z.Q1 - Q2)$  ;

$$\begin{aligned}
 Z := & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 Z_{inv} := & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 \phi^{-1}(\eta) = & \begin{bmatrix} a & b & c & d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{8.3}$$

▼ **CALCULS coupes T(i1, i2, j2) et T(i2, i4, j1)**

U correspond au nombre dans l'espace M(i1, i2, j2), C1 au nombre dans T(i1, i2, j2) et Q1 correspond au polynôme  $Q_{\{3,c1\}}$ .

>  $U := TC([0, a, b, 0, 0, c, -d, 0]) :$

$C1 := TC([0, \gamma, \delta, 0, 0, \mu, 0, 0]) :$

$P := U.U.U : Q1 := simplify(Column(P, 1) + Column(C1, 1));$

$$Q1 := \begin{bmatrix} 0 \\ -a^3 - 3ab^2 + 3ac^2 + 3ad^2 - 6bcd + \gamma \\ -3a^2b - 6acd - b^3 + 3bc^2 + 3bd^2 + \delta \\ 0 \\ 0 \\ -3a^2c + 6abd - 3b^2c + c^3 + 3cd^2 + \mu \\ -6abc + 3a^2d + 3b^2d - 3c^2d - d^3 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{9.1}$$

V correspond au nombre dans l'espace  $M(i2, i4, j1)$ , C2 au nombre dans  $T(i2, i4, j1)$  et Q2 correspond au polynôme  $Q_{\{3,c2\}}$ .

>  $V := TC([0, 0, a, c, 0, 0, d, b]) :$

$C2 := TC([0, 0, \gamma, \mu, 0, 0, 0, \delta]) :$

$P := V.V.V : Q2 := simplify(Column(P, 1) + Column(C2, 1)) ;$

$$Q2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -a^3 - 3ab^2 + 3ac^2 + 3ad^2 - 6bcd + \gamma \\ -3a^2c + 6abd - 3b^2c + c^3 + 3cd^2 + \mu \\ 0 \\ 0 \\ -3a^2d + 6abc + 3c^2d - 3b^2d + d^3 \\ -3a^2b - 6acd - b^3 + 3bc^2 + 3bd^2 + \delta \end{bmatrix} \quad (9.2)$$

Zinv est l'application linéaire inverse, Z est l'applcation linéaire et Z.Q1 - Q2 correspond à l'équation  $\phi_{\{3,c1\}} \cdot \phi^{-1}(\eta) - Q_{\{3,c2\}}$ .

>  $Zinv := Matrix([[1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1], [0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0]]) ;$

$"\phi^{-1}(\eta)" = Transpose(Column(Zinv.TC([0, 0, a, c, 0, 0, d, b]), 1)) ;$

$Z := MatrixInverse(Zinv) ;$

$Transpose(Z.Q1 - Q2) ;$

$$Zinv := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$"\phi^{-1}(\eta)" = [ 0 \ a \ b \ 0 \ 0 \ c \ -d \ 0 ]$$

$$Z := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 ] \end{bmatrix} \quad (9.3)$$

▼ **CALCULS coupes T(i1,i2,j2) et T(i1, i3, j3)**

U correspond au nombre dans l'espace M(i1, i2, j2), C1 au nombre dans T(i1, i2, j2) et Q1 correspond au polynôme Q\_{3,c1}.

```
> U := TC([0, a, b, 0, 0, c, d, 0]) :
  C1 := TC([0, γ, δ, 0, 0, μ, 0, 0]) :
  P := U.U.U : Q1 := simplify(Column(P, 1) + Column(C1, 1));
```

$$Q1 := \begin{bmatrix} 0 \\ -a^3 - 3ab^2 + 3ac^2 + 3ad^2 + 6bcd + \gamma \\ -3a^2b + 6acd - b^3 + 3bc^2 + 3bd^2 + \delta \\ 0 \\ 0 \\ -3a^2c - 6abd - 3b^2c + c^3 + 3cd^2 + \mu \\ -6abc - 3a^2d - 3b^2d + 3c^2d + d^3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10.1)$$

V correspond au nombre dans l'espace M(i1, i3, j3), C2 au nombre T(i1, i3, j3) et Q2 correspond au polynôme Q\_{3,c2}.

```
> V := TC([0, a, 0, d, b, 0, c, 0]) :
  C2 := TC([0, γ, 0, 0, δ, 0, μ, 0]) :
  P := V.V.V : Q2 := simplify(Column(P, 1) + Column(C2, 1));
```

(10.2)

$$Q2 := \begin{bmatrix} 0 \\ -a^3 - 3ab^2 + 3ac^2 + 3ad^2 + 6bcd + \gamma \\ 0 \\ -6abc - 3a^2d - 3b^2d + 3c^2d + d^3 \\ -3a^2b + 6acd - b^3 + 3bc^2 + 3bd^2 + \delta \\ 0 \\ -3a^2c - 6abd - 3b^2c + c^3 + 3cd^2 + \mu \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10.2)$$

Zinv est l'application linéaire inverse, Z est l'application linéaire et Z.Q1 - Q2 correspond à l'expression  $\phi_{3,c1} \cdot \phi^{-1}(\eta) - Q_{3,c2}$ .

```
> Zinv := Matrix([[1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0], [0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0],
0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0], [0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1]]);
"phi^{-1}(eta)" = Transpose(Column(Zinv.TC([0, a, 0, d, b, 0, c, 0]), 1));
Z := MatrixInverse(Zinv);
Transpose(Z.Q1 - Q2);
```

$$Zinv := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\phi^{-1}(\eta) = [0 \ a \ b \ 0 \ 0 \ c \ d \ 0]$$

$$Z := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \quad (10.3)$$

▼ **CALCULS coupes T(i1,j1,j2) et T(i4, j1, j3)**

U correspond au nombre dans l'espace M(i1, j1, j2), C1 un nombre dans T(i1, j1, j2) et Q1 est le polynôme  $Q_{\{3,c1\}}$ .

```
> U := TC([0, a, 0, b, 0, c, 0, d]) :
  C1 := TC([0, γ, 0, δ, 0, μ, 0, 0]) :
  P := U.U.U : Q1 := simplify(Column(P, 1) + Column(C1, 1));
```

$$Q1 := \begin{bmatrix} 0 \\ -a^3 + 3ab^2 + 3ac^2 - 3ad^2 - 6bcd + \gamma \\ 0 \\ -3a^2b + 6acd + b^3 + 3bc^2 - 3bd^2 + \delta \\ 0 \\ -3a^2c + 6abd + 3b^2c + c^3 - 3cd^2 + \mu \\ 0 \\ -3a^2d - 6abc + 3b^2d + 3c^2d - d^3 \end{bmatrix} \quad (11.1)$$

V correspond au nombre dans l'espace M(i4, j1, j3), C2 un nombre dans T(i4, j1, j3) et Q2 est le polynôme  $Q_{\{3,c2\}}$ .

```
> V := TC([0, 0, d, b, 0, 0, c, a]) :
  C2 := TC([0, 0, 0, δ, 0, 0, μ, γ]) :
  P := V.V.V : Q2 := simplify(Column(P, 1) + Column(C2, 1));
```

$$Q2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3a^2d - 6abc + 3b^2d + 3c^2d - d^3 \\ -3a^2b + 6acd + b^3 + 3bc^2 - 3bd^2 + \delta \\ 0 \\ 0 \\ -3a^2c + 6abd + 3b^2c + c^3 - 3cd^2 + \mu \\ -a^3 + 3ab^2 + 3ac^2 - 3ad^2 - 6bcd + \gamma \end{bmatrix} \quad (11.2)$$

Zinv correspond à l'application linéaire inverse, Z correspond à l'application linéaire et Z.Q1 - Q2 correspond à l'expression  $\phi_{\{3,c1\}} \cdot \phi^{-\{\}} (\eta) - Q_{\{3,c2\}}$ .

```
> Zinv := Matrix([[1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1], [0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0], [0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0]]);
  Transpose(Column(Zinv.TC([0, 0, d, b, 0, 0, c, a]), 1));
  Z := MatrixInverse(Zinv);
  Transpose(Z.Q1 - Q2);
```