

# 土质边坡极限平衡状态及临界滑动面的判定方法

刘晓宇, 赵颖, 刘洋, 李世海

(中国科学院力学研究所, 北京 100190)

**摘要:** 开展边坡失稳判据及临界滑动面确定方法的理论与数值实现研究。应用分叉理论的研究成果, 证明满足关联流动法则的理想弹塑性材料, 在平面应力或平面应变条件下的失稳模式为应变局部化模式, 由此类材料构成的边坡模型的失稳过程为局部带渐进扩展过程。基于以上证明, 提出局部化带贯通判据, 认为表征边坡整体失稳的充要条件是局部化带在边坡内部的完全贯通。基于数值模拟, 发展一种局部化带路径追踪技术, 根据每个增量时步土体单元的局部化状态信息, 通过后处理显式追踪局部化带的形成、扩展、汇合直至贯通的过程, 直观、方便地判断边坡的极限平衡状态, 同时确定临界滑动面的位置。并开展强度折减和位移加载算例研究, 验证局部化带贯通判据及数值实现方法的适用性。

**关键词:** 边坡工程; 边坡稳定性; 弹塑性模型; 分叉理论; 失稳判据; 临界滑动面

**中图分类号:** P 642

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1000 - 6915(2012)07 - 1369 - 10

## DETERMINATION METHOD OF LIMIT EQUILIBRIUM STATE AND CRITICAL SLIP SURFACE OF SOIL SLOPE

LIU Xiaoyu, ZHAO Ying, LIU Yang, LI Shihai

(*Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China*)

**Abstract:** The present contribution is concerned with theoretical and numerical issues in finite element slope stability analysis. In the theoretical part, instability phenomena of slope material are studied within the framework of bifurcation theory. It is proved that strain localization not only is a ubiquitous feature of elastoplastic geomaterials, but also is the unique instability mode of the elastic-perfectly plastic material with an associative flow rule under plane strain and plane stress conditions. The shear band coalescence criterion is proposed, which argues that slope failure occurs when smaller size shear bands coalesce into a dominant shear band which completely divides the slope into two parts. In the numerical implementation part, a strategy for tracking the localization band path is presented. By tracking the initiation, growth and coalescence of localization zones in terms of the localized state of all soil elements at each time step, the limit equilibrium state can be directly judged; and the critical slip surface can be simultaneously determined. Finally, the feasibility and reliability of the proposed criterion are validated by strength reduction and over-loading examples.

**Key words:** slope engineering; slope stability; elastoplastic model; bifurcation theory; instability criterion; critical slip surface

## 1 引言

土质边坡稳定性分析是岩土工程领域中的经典

问题之一, 传统的方法是采用极限平衡方法<sup>[1]</sup>。近年来, 弹塑性数值计算方法逐步被推广应用<sup>[2-3]</sup>, 该方法采用弹塑性本构模型计算边坡的应力场和位移场, 通过超载、强度储备等方式使边坡达到失稳

**收稿日期:** 2012 - 03 - 25; **修回日期:** 2012 - 05 - 15

**基金项目:** 国家重点基础研究发展计划(973)项目(2010CB731503); 国家自然科学基金资助项目(11002146)

**作者简介:** 刘晓宇(1973 -), 男, 博士, 1996年毕业于兰州大学固体力学专业, 现任副研究员, 主要从事岩土力学、滑坡灾害监测预警方面的研究工作。E-mail: liuxy@imech.ac.cn

破坏阶段，最终获得评价边坡稳定性的各类指标，如安全系数等。与极限平衡方法相比，数值方法考虑变形协调条件及土体本构关系，可以模拟边坡渐进破坏过程，能够更好地适用于各种复杂工况。

当采用数值方法进行土质边坡稳定性分析时，判定边坡极限平衡状态及确定临界滑动面空间位置至关重要。目前，判断边坡失稳破坏的标准(失稳判据)主要有 3 种：(1) 数值解非收敛判据<sup>[3]</sup>，以静力平衡计算不收敛作为边坡整体失稳的标志；(2) 塑性区贯通判据<sup>[4]</sup>，以塑性区或某一幅值的等效塑性应变由坡脚至坡顶贯通作为边坡整体失稳的标志；(3) 位移突变判据<sup>[5]</sup>，以土体内某些点的应变和位移发生突变且无限发展作为边坡整体失稳的标志。确定临界滑动面空间位置的方法包括：(1) 绘制临界平衡态边坡的变形图、塑性应变等值线图、干扰能量图<sup>[4]</sup>；(2) 搜寻临界滑移线或其他滑移路径中安全系数最小的路径<sup>[6]</sup>。

上述边坡失稳判据及临界滑动面确定方法在工程应用中存在一些不足之处，突出表现在：(1) 各种失稳判据之间、失稳判据与滑动面确定方法之间缺乏内部关联。如，数值解非收敛、位移突变等判据虽然能够判别边坡失稳，但无法确定滑面位置；塑性区云图、等效塑性应变等值线图虽然可以给出滑面位置，但贯通的塑性区或等效塑性应变区的出现并不一定意味着边坡的整体破坏。(2) 各种失稳判据缺乏客观、量化指标。如，非收敛指标的定义、临界塑性应变幅值的确定、突变特征点的选取都没有严密理论指导，分析结果易受人为因素影响。

究其原因，笔者认为是由于上述失稳判据和滑面确定方法更多地依靠边坡失稳的表观现象，而缺乏对边坡内部破坏机制的认识与挖掘。近年来，郑宏和刘德富<sup>[7]</sup>已开始这方面的研究。基于分叉理论，本文提出整个土质边坡的破坏实质上是局部化带逐渐扩展过程，表征边坡整体失稳的充要条件是局部化带在边坡内部的完全贯通。在数值实现方面，发展了一种局部化带路径追踪技术，根据每个增量步土体单元的局部化状态信息，通过后处理显式追踪局部化带的扩展路径，判断边坡极限平衡状态并给出临界滑动面的位置。并给出强度折减和超载算例，与现有失稳判据进行比较，验证了局部化带贯通判据的适用性。

## 2 土体材料的弹塑性本构模型

在土质边坡力学模型中，土体材料的力学行为

通常采用弹塑性本构模型进行描述。该模型将土体看作一个率无关的连续体，满足小变形假定条件。其本构方程的一般表达式为

$$\dot{\sigma} = D : \dot{\epsilon} \quad (1)$$

式中： $\sigma$  为应力张量； $\epsilon$  为应变张量； $D$  为材料切线刚度张量，在弹性(E)和塑性(P)加载条件下的表达式分别为

$$D = \begin{cases} D^e & (E) \\ D^e - \frac{1}{A}(D^e : g) \otimes (f : D^e) & (P) \end{cases} \quad (2)$$

其中，

$$f = \frac{\partial F}{\partial \sigma}, \quad g = \frac{\partial G}{\partial \sigma}, \quad A = H + f : (D^e : g) \quad (3)$$

式中： $D^e$  为四阶弹性刚度张量； $F$  和  $G$  分别为屈服函数和塑性势； $H$  为广义塑性模量，在硬化、理想塑性或软化情况下分别为正值、零或负值。当满足条件：

$$F = 0, \quad \text{且} \quad f : (D : \dot{\epsilon}) > 0 \quad (4)$$

土体材料处于塑性加载，否则为弹性加载。

## 3 土体材料的稳定及分叉理论

土质边坡力学模型的整体失稳是以土体单元的失稳为前提条件。为判定整个边坡的稳定性，首先需要判定每个土体单元的的稳定状态及其失稳模式。目前，主要有 3 种分叉理论用于判定土体单元内材料的稳定性。

### 3.1 一般分叉理论

一般分叉理论<sup>[8]</sup>认为，材料发生失稳的必要条件是材料的二阶功率为 0，即

$$\dot{\sigma} : \dot{\epsilon} = 0 \quad (5)$$

或者，材料切线刚度张量的对称部分失去正定性，即

$$\dot{\epsilon} : (D^s : \dot{\epsilon}) = 0 \quad (6)$$

其中，

$$D^s = \frac{1}{2}(D + D^T)$$

由于一般分叉的发生是以材料的二阶功率或刚度矩阵正定性为判定标准的，由式(5)或(6)给出的一般分叉判据有时亦称为二阶功率正定性判据。本文中，将一般分叉发生时的临界硬化模量记为  $H_{cr}^b$ 。

### 3.2 极限点分叉理论

一般分叉理论常用于分叉区域内、外部应力率都不为 0 的情况，而极限点分叉理论则仅考虑极限点处出现零应力率情况。该理论<sup>[9]</sup>认为，材料发生

失稳的必要条件是材料的应力率为 0, 即

$$D : \dot{\epsilon} = 0 \tag{7}$$

或者, 材料的切线刚度张量奇异, 即

$$\det(D) = 0 \tag{8}$$

由于极限点分叉的发生是以材料的刚度矩阵奇异性为判定标准的, 由式(7)或(8)给出的极限点分叉判据有时亦称为切线刚度张量非奇异性判据。本文中, 将极限点分叉发生时的临界硬化模量记为  $H_{cr}^1$ 。

### 3.3 不连续分叉理论

不连续分叉理论<sup>[10]</sup>认为, 材料的失稳方式表现为由原先光滑、连续化的变形模式转变为一种以剧烈变形狭窄条带(有时亦称为局部化带或剪切带)形式出现的、高度局部化的变形模式。当材料出现剧烈变形的局部化带时, 位移率在跨越局部化带时保持连续, 而位移梯度率出现间断(见图 1), 即

$$[\nabla \cdot \dot{u}] \equiv \nabla \cdot \dot{u}^+ - \nabla \cdot \dot{u}^- \neq 0 \tag{9}$$

式中: 上标“+”和“-”分别表示带状区域的正表面和负表面,  $\nabla \cdot \dot{u}$  表示位移梯度率,  $[\ ]$  表示间断。利用 Maxwell 相容性条件, 位移梯度率和相应的应变率间断可分别表示为如下形式:

$$[\nabla \cdot \dot{u}] = m \otimes n \tag{10a}$$

$$[\dot{\epsilon}] = \frac{1}{2}(m \otimes n + n \otimes m) \tag{10b}$$

式中:  $n$  为局部化带的单位法向量,  $m$  代表局部化带两侧区域相对速度的方向。由于应变局部化发生时, 局部化带两侧保持平衡, 且处于塑性加载状态:

$$[n \cdot \dot{\sigma}] = n \cdot [\dot{\sigma}] = n \cdot (D : [\dot{\epsilon}]) = 0 \tag{11}$$

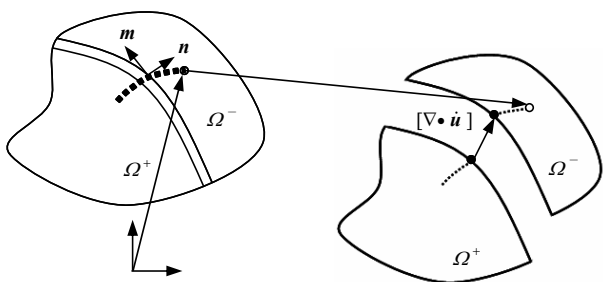


图 1 土体中的位移梯度率不连续性

Fig.1 Discontinuity of displacement gradient rate in a soil body

联立式(10a), (10b), 可导出:

$$(n \cdot D \cdot n) \cdot m = 0 \tag{12}$$

考虑到  $m$  具有任意性, 通过式(12)可推导出土体材料发生失稳的不连续分叉条件:

$$\det(Q) = \det(n \cdot D \cdot n) = 0 \tag{13}$$

式中:  $Q$  定义为材料的局部化张量, 有时亦称为声学张量。

由于材料局部化张量出现零特征值代表材料控制方程椭圆性丧失, 由式(13)给出的不连续分叉判据有时亦称为控制方程椭圆性判据。本文中, 将不连续分叉发生时的临界硬化模量记为  $H_{cr}^{db}$ 。

对于非关联流动法则的弹塑性本构模型, 材料的局部化张量是非对称的。N. S. Ottosen 等<sup>[11-12]</sup>提取局部化张量的对称部分, 提出了控制方程强椭圆性判据, 即

$$n \cdot Q^s \cdot n = 0 \tag{14}$$

其中,

$$Q^s = \frac{1}{2}(Q + Q^T)$$

将材料控制方程强椭圆性丧失时的临界硬化模量记为  $H_{cr}^{sc}$ 。

### 3.4 4 种分叉判据的比较

从应用范围上讲<sup>[13]</sup>, 一般分叉判据和极限点分叉判据具有通用性, 可同时用于材料的弥散性分叉(材料的失稳不以明显的不连续带的出现为标志)和局部化分叉问题。椭圆性判据和强椭圆性判据可看作一般分叉判据的特例, 只适用于材料的局部化分叉问题。

从失稳时间上讲<sup>[11-13]</sup>, 一般分叉判据给出的材料失稳条件要早于极限点分叉判据和椭圆性分叉判据, 即

$$H_{cr}^b \geq H_{cr}^1, H_{cr}^b \geq H_{cr}^{db} \tag{15}$$

强椭圆性分叉给出的材料失稳条件也要早于椭圆性分叉判据, 即

$$H_{cr}^{sc} \geq H_{cr}^{db} \tag{16}$$

特别地, 在平面应力和平面应变条件下, 对于服从关联流动法则的材料, D. Bigoni 和 H. Tomasz<sup>[14]</sup>证明 4 种分叉判据给出的材料失稳条件重合, 即

$$0 = H_{cr}^1 = H_{cr}^b = H_{cr}^{db} = H_{cr}^{sc} \tag{17}$$

因此, 下文将研究范围限定于平面应力或平面应变问题, 并要求土体材料服从关联流动法则。在此研究范畴内, 4 种分叉判据给出的材料失稳条件严格重合, 土体单元的失稳模式必然是不连续分叉模式, 采用不连续分叉理论可准确判定土体单元的稳定性。同时, 式(17)表明, 当选用理想弹塑性模型进行边坡稳定性分析时, 土体单元无需发生软化, 其力学行为发展至一定阶段后, 必然发生不连续分叉。例如:

(1) 对于服从 Mohr-Coulomb 准则的土体单元, 其屈服函数和塑性势为

$$F = G = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) + \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)\sin\phi - c\cos\phi = 0 \quad (18)$$

式中:  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  (拉应力为正),  $\phi$  为摩擦角,  $c$  为黏聚力。N. S. Ottosen 和 K. Runesson<sup>[11]</sup>证明此类土体单元的塑性屈服与局部化分叉同时到达。

(2) 而对于服从 Drucker-Prager 准则的土体单元, 其屈服函数和塑性势为

$$\left. \begin{aligned} F = G &= \alpha I_1 + \sqrt{J_2} - \kappa = 0 \\ I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ J_2 &= [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2] / 6 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

式中:  $\alpha, \kappa$  均为材料参数。杨强等<sup>[15-17]</sup>推导了平面应变条件下发生不连续分叉的条件为

$$2\alpha\sqrt{J_2} + \sigma_2 - I_1/3 = 0 \quad (20)$$

由式(20)可以看出, 遵循 DP 准则的土体单元发生塑性屈服时, 其声学张量通常并不奇异。因此, 此类土体单元发生局部化分叉的时间要晚于其到达塑性屈服的时间。

### 4 边坡模型的极限平衡状态和临界滑面

在平面应力或平面应变条件下, 服从关联流动法则的土质边坡的破坏过程是一个土体单元不断发生不连续分叉的、渐进失稳的过程。由于边坡内材料的非均匀性、初始弱面的存在以及非均匀分布的荷载与边界约束, 边坡内部的应力场始终是不均匀的, 一些应力集中单元率先发生失稳, 出现局部化带。随着外部荷载的增加、材料强度的减小以及土体单元失稳后释放荷载在边坡内部的转移和调整, 新的局部化带不断形成, 已有的局部化带继续扩展、汇合, 直至在坡体内部完全贯通。此时, 处于局部化带的土体单元沿其局部化带滑移方向除承担与其强度相适应的荷载之外, 已无能力承担附加荷载。因此, 任何微小的扰动都可能导致滑体沿连续贯通的局部化带发生大变形, 最终引发边坡模型的整体失稳。

因此, 本文建议将局部化带由坡底至坡顶的完全、连续贯通时刻定义为土质边坡力学模型的极限平衡状态, 将局部化带的贯通路程定义为边坡模型的临界滑动面。与现有的边坡失稳判据相比, 局部化带贯通准则具有以下特点:

(1) 局部化带贯通准则可以解释边坡失稳时各种表现现象发生的机制。例如:

① 数值解非收敛现象。局部化带的出现标志着土体单元的控制方程发生奇异。当边坡内出现由坡底贯通至坡顶的局部化带时, 整个边坡结构的边值问题也将出现病态, 从而导致传统的数值求解器在允许迭代次数内常常无法收敛。

② 塑性带贯通现象。由于局部化带的出现只有在土体单元处于塑性状态时才有可能发生, 局部化带的贯通也必然意味着塑性带的贯通。另一方面, 对于不服从 Mohr-Coulomb 屈服准则的土体单元, 局部化总是在塑性屈服后出现, 这类边坡发生塑性带贯通不代表局部化带的贯通。

③ 位移突变现象。当土体单元内出现局部化带时, 该单元在局部化带滑移方向上无法承担附加荷载。继续施加荷载力或降低其材料强度, 土体单元在局部化带滑移方向上将发生剧烈变形, 位移呈现流动性。

(2) 局部化带贯通准则根据局部化带路径来判定局部化带贯通状态, 在判定边坡模型失稳状态的同时, 也确定了边坡模型的临界滑动面, 实现了极限平衡状态判定方法与临界滑动面确定方法的统一。

### 5 数值实现

根据局部化带贯通准则, 只要准确地捕捉到局部化带扩展过程, 边坡模型的极限状态和滑动面可同时确定。在数值实现时, 这要求在每个增量步计算结束后, 先确定发生不连续分叉的土体单元及其局部化方向, 然后在后处理部分依据这些信息追踪局部化带路径。为此, 需要解决以下关键技术。

#### 5.1 不连续分叉条件求解技术

对于任意二维弹塑性模型, 本文采用 M. Ortiz 等<sup>[18]</sup>给出的计算方法求解不连续分叉条件(式(19)), 用以确定发生不连续分叉的土体单元。该方法将  $2 \times 2$  阶的局部化张量  $\mathbf{Q}$  展开为

$$\det(\mathbf{Q}) = a_0 n_1^4 + a_1 n_1^3 n_2 + a_2 n_1^2 n_2^2 + a_3 n_1 n_2^3 + a_4 n_2^4 \quad (21)$$

其中,

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= D_{1111}D_{1212} - D_{1112}D_{1211} \\ a_1 &= D_{1111}D_{1222} + D_{1111}D_{2212} - D_{1112}D_{2211} - D_{1122}D_{1211} \\ a_2 &= D_{1111}D_{2222} + D_{1112}D_{1222} + D_{1211}D_{2212} - D_{1122}D_{1212} - \\ &\quad D_{1122}D_{2211} - D_{1212}D_{2211} \\ a_3 &= D_{1112}D_{2222} + D_{1211}D_{2222} - D_{1122}D_{2212} - D_{1222}D_{2211} \\ a_4 &= D_{1212}D_{2222} - D_{2212}D_{1222} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

式中:  $n_1, n_2$  均为局部化带单位法向量的分量;  $D_{1111}$  等为材料切线刚度张量的各分量。

设  $n_1 = \cos\theta, n_2 = \sin\theta$  (其中,  $\theta$  为局部化带单位法向量与  $x$  轴方向的夹角), 代入式(21)中, 可得

$$f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \quad (23)$$

其中,

$$x = \tan\theta$$

为适于数值实现, 将式(23)重新写为如下形式:

$$\frac{a_4x_{\min}^4 + a_3x_{\min}^3 + a_2x_{\min}^2 + a_1x_{\min} + a_0}{(\lambda + 2\mu)\mu} \leq h^{\text{tol}} \quad (24)$$

式中:  $\lambda, \mu$  为 Lamé 常数, 用于归一化函数;  $h^{\text{tol}}$  为局部化容差;  $x_{\min}$  为一元三次方程  $f(x)$  的解, 可由盛金公式直接获得解析解。

如果满足式(24), 则土体单元发生不连续分叉。

对于服从 Mohr-Coulomb 准则的理想弹塑性体, 塑性屈服与局部化分叉同时到达, 单元的局部化状态可直接通过核查土体单元是否进入塑性屈服来判定。满足不连续分叉条件的解有 2 个, 它们与第一主应力  $\sigma_1$  方向所成的夹角  $\theta_1$  为

$$\theta_1 = \pm(\pi/4 + \varphi/2) \quad (25)$$

对于服从 Drucker-Prager 准则的理想弹塑性体, 式(19)已给出土体单元发生局部化的解析解。为便于数值实现, 本文将式(19)重新写为

$$\left| \frac{\sigma_2 - I_1/3}{\sqrt{J_2}} + 2\alpha \right| \leq h^{\text{tol}} \quad (26)$$

如果满足式(26), 则土体单元发生不连续分叉。

满足不连续分叉条件的解也有 2 个, 它们与第三主应力  $\sigma_3$  的方向所成的夹角  $\theta_2$  为

$$\theta_2 = \pm \tan^{-1} \left[ \sqrt{\frac{(s_1 + \nu s_2) + 2\alpha(1 + \nu)\sqrt{J_2}}{(s_3 + \nu s_2) + 2\alpha(1 + \nu)\sqrt{J_2}}} \right] \quad (27a)$$

其中,

$$s_1 = \sigma_1 - I_1/3, s_2 = \sigma_2 - I_1/3, s_3 = \sigma_3 - I_1/3 \quad (27b)$$

式中:  $\nu$  为泊松比。

### 5.2 局部化方向选取技术

由式(23), (25)和(27)可以看出, 满足不连续分叉条件的解并不唯一, 至少同时存在 2 组可能的局部化方向, 需要从候选解中选择有物理意义的局部化模式。目前, 主要采用 2 类标准:

(1) 第一类标准采用“沿实际局部化带切线方向, 绝对位移率分量最大”原则选取局部化方向<sup>[17]</sup>。其数学表达式为

$$n = \max_{(\tilde{m}, \tilde{n})} [\delta \dot{u} \cdot \tilde{m}] \quad (28)$$

式中:  $\delta \dot{u}$  为土体单元出现局部化时刻的位移增量;  $\tilde{m}$  为候选局部化带的切向量, 与法向量  $\tilde{n}$  成  $90^\circ$ 。

(2) 第二类标准采用“沿实际局部化带切线方向, 瞬时位移梯度最大”原则选取局部化方向<sup>[19]</sup>。其数学表达式为

$$n = \max_{(\tilde{m}, \tilde{n})} [\tilde{m} \cdot (\nabla \cdot \dot{u}) \cdot \tilde{n}] \quad (29)$$

J. Mosler<sup>[20]</sup>证明对于关联模型, 第一类标准与最大耗散功等效。因此, 在后文的算例中, 将采用第一类标准确定土体单元的局部化方向。

### 5.3 局部化带路径追踪技术

将某一时刻边坡模型中局部化带路径定义为无厚度的曲线集合  $\{S_i\}$ , 位于  $S_i$  上的材料点不仅处于应变局部化状态, 而且局部化方向均与这条曲线相切(见图 2)。理论上, 当已知时刻  $t$  边坡模型中每个局部化材料点的坐标  $x$  及其局部化向量  $m(x, t)$  时, 追踪局部化带路径可以通过数学上构造包络于向量场  $m(x, t)$  的曲线簇的方式来实现。然而, 由于数值模型采用有限单元覆盖整个边坡, 单元积分点(高斯点)的应力代表该积分区域平均应力值, 因此无法获取单元域  $\Omega^e$  内每个材料点的局部化信息, 而只能得到  $\Omega^e$  内平均局部化切向量  $m^{(e)}(\nabla x, t) x \in \Omega^e$  (见图 3)。在这种情况下, 单纯依靠数学方法无法构造唯一的局部化带路径, 需要辅助其他物理条件。

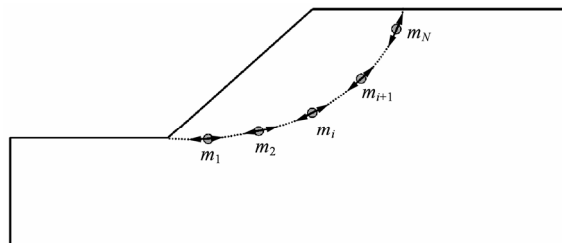


图 2 由局部化材料点构成的局部化带路径  
Fig.2 Localization path composed of localized material points

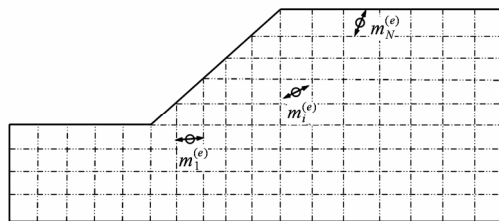


图 3 局部化的土体单元及其局部化方向  
Fig.3 Localized soil elements and those localization directions

为此, 依照局部化带扩展的物理历程, 提出了一种追踪时刻  $t$  边坡模型内部局部化带路径的算法。该算法的输入数据为在时刻  $t$  处于应变局部化

状态的所有单元的相关信息，包括这些单元在时刻  $t$  的局部化切向量集合  $\{m^{(e)}\}$ ，以及每个单元历史上首次满足局部化条件的的时间集合  $\{t^{(e)}\}$ 。具体算法流程如下：

第一步：读入所有局部化单元信息，并按局部化时间先后顺序对它们排序。历史上首次满足局部化条件早的单元排在局部化晚的单元前面，即  $t^{(e1)} \leq \dots \leq t^{(en)}$ 。其中， $en$  为所有局部化单元的数目。

第二步：循环按时间排序后的局部化单元，完成操作：

(1) 在单元  $e$  内追踪一条线段  $L$ 。存在 2 种情况：

情况 1：新局部化带的形成。当单元  $e$  的边界  $\partial\Omega^e = \Gamma^{(i1)} \cup \dots \cup \Gamma^{(im)}$ ，尚未与其他局部化路径相交时，单元  $e$  内的追踪线段  $L$  通过  $e$  的中心，沿  $m^{(e)}$  方向，分别终止于单元  $e$  的第  $i1$  条边  $\Gamma^{(i1)}$  和第  $i2$  条边  $\Gamma^{(i2)}$  上(见图 4(a))。此时，将在单元  $e$  内形成一条新的局部化带路径  $S_{dn+1}$ ，追踪线段归属于路径  $S_{dn+1}$ 。其中， $in$  为单元  $e$  的边数， $dn$  为未追踪  $e$  前已存在的局部化带路径总数。

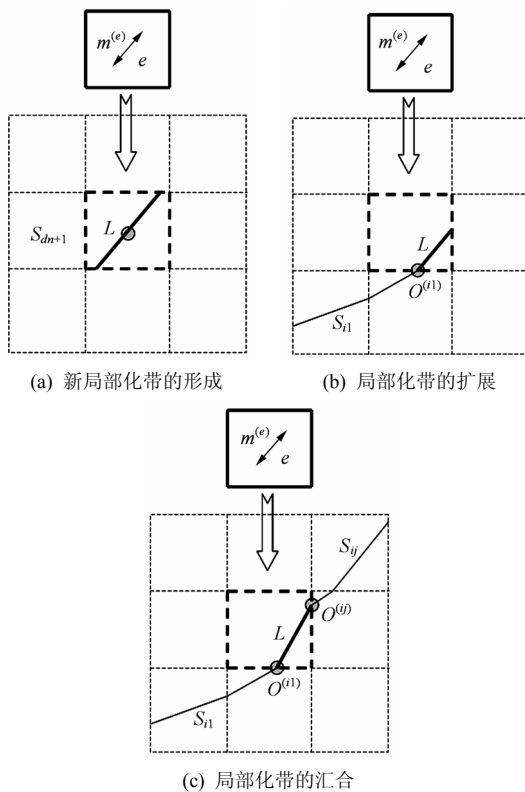


图 4 追踪单元  $e$  内的局部化带  $L$

Fig.4 Tracking a localization band  $L$  in element  $e$

情况 2：如果单元  $e$  的  $im$  条边  $\Gamma^{(i1)}$ ， $\Gamma^{(i2)}$ ， $\dots$ ， $\Gamma^{(im)}$  分别与已存在的局部化路径  $S_{i1}$ ， $S_{i2}$ ， $\dots$ ， $S_{im}$  相

交于交点  $O^{(i1)}$ ， $O^{(i2)}$ ， $\dots$ ， $O^{(im)}$ ，选择任意交点  $O^{(i1)}$  作为起始点，沿  $m^{(e)}$  方向生成一条试探线段，该线段将终止于  $\partial\Omega^e$  的第  $ij$  条边  $\Gamma^{(ij)}$  上。此时，存在 2 种可能：① 局部化带的扩展。当  $\Gamma^{(ij)} \not\subset \Gamma^{(i1)} \cup \dots \cup \Gamma^{(im)}$  时，该试探线段为单元  $e$  内的追踪线段  $L$ (见图 4(b))，局部化带路径  $S_{i1}$  扩展至单元  $e$  内，追踪线段归属于路径  $S_{i1}$ 。② 局部化带的汇合。当  $\Gamma^{(ij)} \subset \Gamma^{(i1)} \cup \dots \cup \Gamma^{(im)}$  时，该试探线段不是单元  $e$  内的追踪线段，单元  $e$  内的追踪线段  $L$  将分别连接  $\Gamma^{(i1)}$  和  $\Gamma^{(ij)}$  上的交点  $O^{(i1)}$  和  $O^{(ij)}$ (见图 4(c))。局部化带路径  $S_{i1}$  和  $S_{ij}$  将在单元  $e$  内汇合成为同一条路径，并且追踪线段  $L$  归属于这一汇合路径。

(2) 沿追踪线段将单元  $e$  分解为 2 个子单元  $es1$  和  $es2$ ，分别继承单元  $e$  与邻居单元间的拓扑信息，并代替单元  $e$ 。同时，将子单元  $es1$  和  $es2$  定义为局部化子单元，继承单元  $e$  的局部化切向量  $m^{(e)}$ ，将子单元  $es1$  和  $es2$  中位于追踪线段上的节点定义为路径节点，用追踪线段所属的局部化带路径编号标记。

(3) 按局部化子单元生成的时间顺序，依次循环所有子单元，核查每个子单元的边界  $\partial\Omega^{es} = \Gamma^{(is1)} \cup \dots \cup \Gamma^{(ism)}$  是否与已存在的局部化路径相交。如果子单元  $es$  边界与局部化路径相交，则表明局部化带将在子单元  $es$  内部继续扩展。存在 2 种情况：

情况 1：选择其中的任意交点  $O^{(is1)}$  作为起始点，沿  $m^{(e)}$  方向生成一条试探线段，该线段将终止于  $\partial\Omega^{es}$  的第  $isj$  条边  $\Gamma^{(isj)}$  上。此时，存在 3 种可能：① 局部化带的扩展。当  $\Gamma^{(isj)} \not\subset \Gamma^{(is1)} \cup \dots \cup \Gamma^{(ism)}$ ，且  $\Gamma^{(isj)}$  上不含有路径节点时，该试探线段是子单元  $es$  内的追踪线段  $L$ (见图 5(a))。此时，局部化带路径  $S_{is1}$  将扩展至子单元  $es$  内，追踪线段归属于路径  $S_{is1}$ 。② 局部化带的汇合。当  $\Gamma^{(isj)} \subset \Gamma^{(is1)} \cup \dots \cup \Gamma^{(ism)}$  时，该试探线段不是子单元  $es$  内的追踪线段，子单元  $es$  内的追踪线段  $L$  将分别连接  $\Gamma^{(is1)}$  和  $\Gamma^{(isj)}$  上的交点  $O^{(is1)}$  和  $O^{(isj)}$ (见图 5(b))。此时，局部化带路径  $S_{is1}$  和  $S_{isj}$  将在子单元  $es$  内汇合成为同一条路径，并且追踪线段归属于这一汇合路径。③ 局部化带的汇合。当  $\Gamma^{(isj)}$  上含有路径节点时，该试探线段不是单元  $es$  内的追踪线段，单元  $es$  内的追踪线段  $L$  将分别连接交点  $O^{(is1)}$  和路径节点(见图 5(c))。此时，局部化带路径  $S_{is1}$  和路径节点所在的局部化带路径将在子单元  $es$  内汇合成为同一条路径，并且追踪线段归属于这一汇合路径。

情况 2：沿追踪线段将子单元  $es$  分解为 2 个子单元  $ess1$  和  $ess2$ ，分别继承  $es$  与邻单元间的拓扑

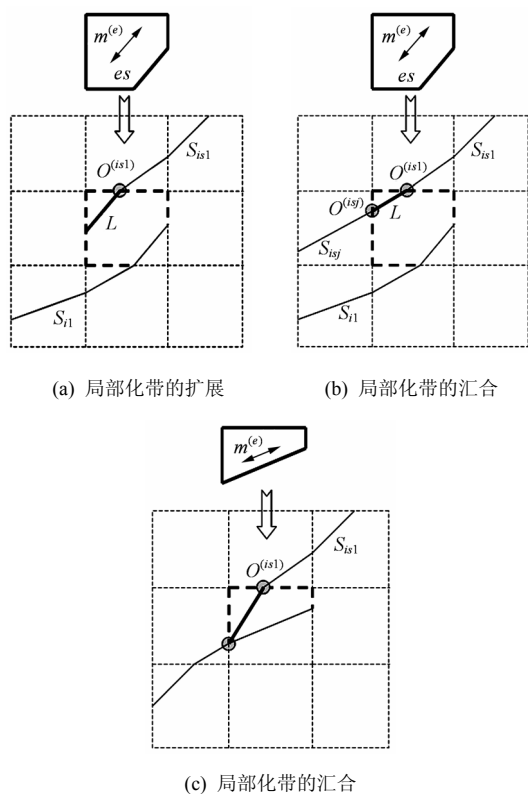


图 5 追踪子单元  $es$  内的局部化带  $L$

Fig.5 Tracking a localization band  $L$  in subelement  $es$

信息，并代替  $es$ 。同时，将子单元  $ess1$  和  $ess2$  定义为局部化子单元，继承  $es$  的局部化切向量  $m^{(es)}$ ，将子单元  $ess1$  和  $ess2$  中位于追踪线段上的节点定义为路径节点，用追踪线段所属的局部化带路径编号标记。

(4) 核查子单元循环过程中是否发生局部化带路径扩展或汇合情况。如果有，转回步骤(3)。如果没有，转回步骤(1)，对下个单元进行操作。

第三步：当完成所有局部化单元操作后，核查追踪的局部化带路径贯通情况。当某条路径的一端位于边坡模型的坡角位置，另一端位于坡顶位置时，整个边坡结构已处于极限平衡状态，该局部化带路径为临界滑动面。

## 6 算例验证

为验证方法的可行性，分别采用强度折减和位移加载方式，开展 2 类土质边坡的极限状态及临界滑动面位置数值分析。土体材料均为理想弹塑性材料，屈服准则为平面应变条件下 Mohr-Coulomb 结合 DP 准则(DP4 准则)。采用笔者自主开发的有限元程序对 2 个算例进行计算，平衡迭代方法为牛顿法，

收敛准则为位移收敛准则，位移模允许误差为  $1.0 \times 10^{-5}$ 。

### (1) 算例 1：强度折减

采用赵尚毅等<sup>[3, 21]</sup>中均质土坡算例：坡高  $H = 20$  m，坡角  $\beta = 26.57^\circ$ ，杨氏模量  $E = 100$  MPa，泊松比  $\nu = 0.3$ ，容重  $\gamma = 20$  kN/m<sup>3</sup>，黏聚力  $c = 10$  kPa，内摩擦角  $\varphi = 20^\circ$ 。边坡左、右两侧边界为法向约束，底边为双向固定约束。边坡几何尺寸及网格划分如图 6 所示。采用强度折减方法，按照  $c/\omega$ ， $\tan\varphi/\omega$  方式不断折减土体材料强度参数，直至边坡发生失稳破坏，其中， $\omega$  为折减系数，其初始值设定为 1.0，然后逐渐增大。

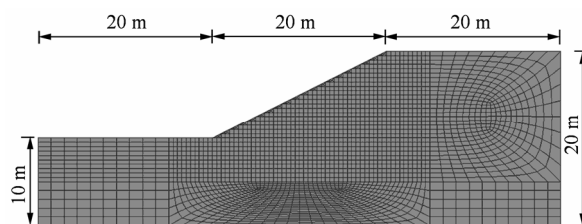
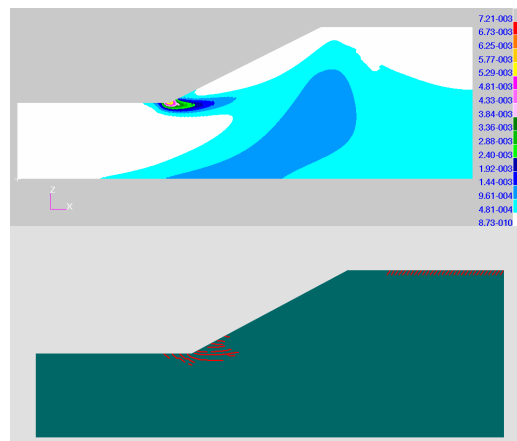


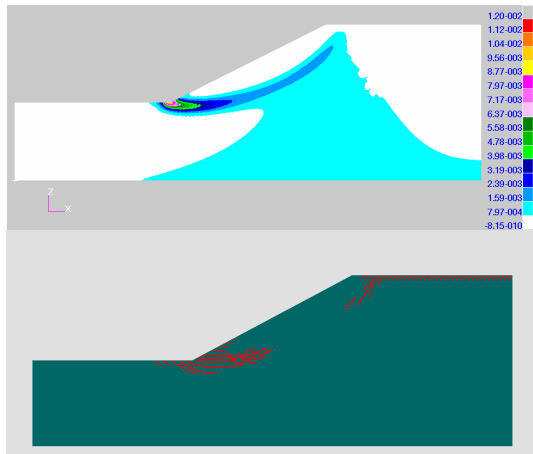
图 6 算例 1 边坡几何尺寸及网格划分

Fig.6 Geometry and mesh for slope in example 1

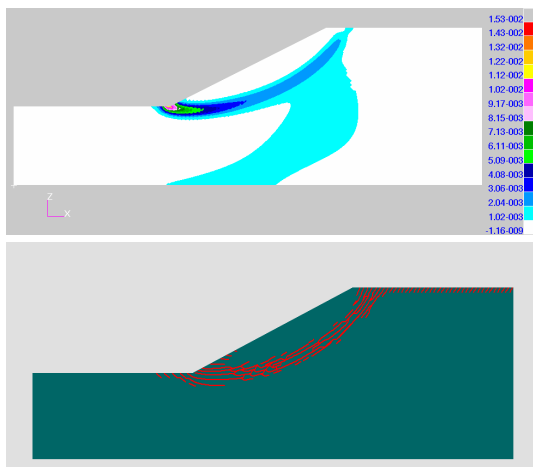
折减系数  $\omega = 1.350, 1.380$  和  $1.384$  时，边坡内部等效塑性应变和局部化带扩展路径的变化情况如图 7 所示。由图 7 可以看出，局部化带的扩展总是伴随着塑性云图的扩展，但局部化区域要比塑性云图的范围小得多，集中于边坡的局部破坏区域，这有助于识别边坡的破坏位置。此外，局部化带扩展路径还揭示了强度折减条件下均质土坡的破坏演化过程，即，先是第一条主裂纹自坡脚往上发展，接着是第二条主裂纹由坡顶向下发展，最后是 2 条主裂纹在坡体中上部(即锁固段)发生汇合。局部化带扩展路径所含信息可以为评价边坡所处破坏状态，为开展相关的工程治理措施提供理论依据。



(a) 折减系数  $\omega = 1.350$



(b) 折减系数  $\omega = 1.380$



(c) 折减系数  $\omega = 1.384$

图7 不同折减系数工况下边坡内部等效塑性应变云图及局部化带扩展路径

Fig.7 Nephograms of equivalent plastic strain and localization band path under different reduction factors

折减系数从 1.0 增大至 1.4 过程中，量纲一的位移  $E\delta_{\max}/(\gamma H^2)$  的变化情况如图 8 所示。其中， $\delta_{\max}$  为边坡到达收敛条件时刻的最大节点位移。由图 8 可以看出，局部化带的贯通必然导致位移突变点的出现，即局部化带贯通是位移突变的充分条件。并且，在局部化带贯通时刻过程中，通过采用减少  $\omega$  步长，增加迭代步数等技术，使得数值解一直都能够达到收敛。这说明使用不同的求解器、不同的迭代算法及不同的收敛准则，数值解出现不收敛的时刻并不一致。因此，采用数值解非收敛性判别边坡极限平衡状态具有一定的人为性。对比而言，采用局部化带的贯通判据，不仅可以判定边坡的极限平衡状态，而且还可以判别数值解的正确性。当出现数值解非收敛但局部化带尚未贯通情况，表明边坡并未处于整体破坏状况，数值解的不收敛必定因为其他因素所导致，此时数值解并非真解。

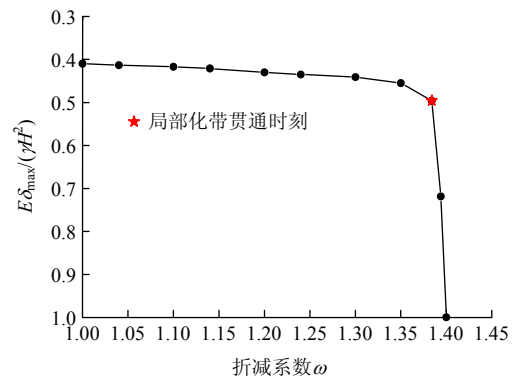


图8 折减系数与无量纲位移间关系

Fig.8 Strength reduction factor vs. dimensionless displacement

### (2) 算例 2：位移加载

采用 R. A. Regueiro 等<sup>[22-23]</sup>中均质土坡算例：坡高  $H = 10\text{ m}$ ，坡角  $\beta = 45^\circ$ ，杨氏模量  $E = 10\text{ MPa}$ ，泊松比  $\nu = 0.4$ ，容重  $\gamma = 20\text{ kN/m}^3$ ，黏聚力  $c = 20\text{ kPa}$ ，内摩擦角  $\phi = 30^\circ$ 。边坡右侧边界为法向约束，底边为双向固定约束。除重力载荷  $G$  外，边坡在坡顶承受竖直向下位移  $u$  作用， $F$  为竖向位移  $u$  产生的竖向反力。重力载荷通过初始应力场体现，所产生的位移不计入竖向位移  $u$  中。边坡几何尺寸及网格划分如图 9 所示。

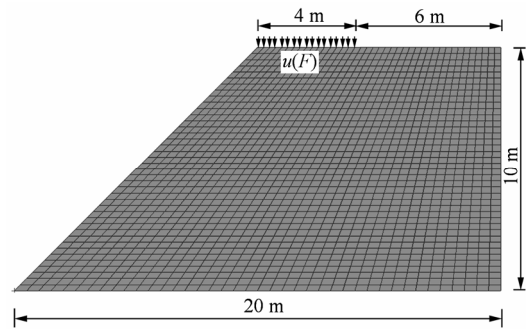
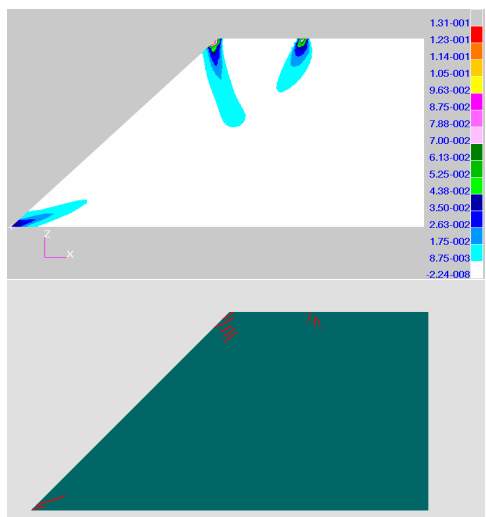


图9 算例 2 边坡几何尺寸及网格划分

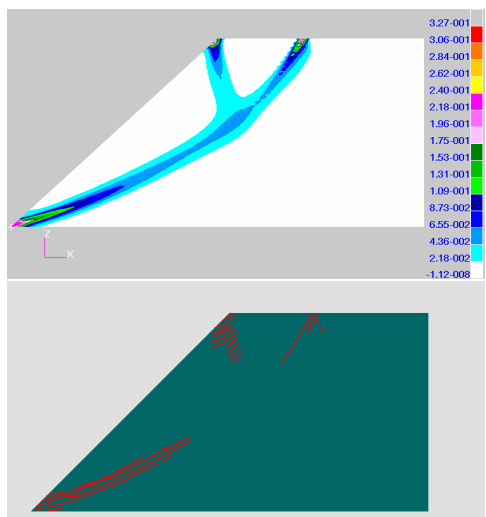
Fig.9 Geometry and mesh for slope in example 2

竖向位移  $u = 0.08, 0.13$  和  $0.14\text{ m}$  时，边坡内部的等效塑性应变和局部化带扩展路径的变化情况如图 10 所示。竖向反力  $F$  与竖向位移  $u$  曲线如图 11 所示。由图 10, 11 可以看出，在  $u = 0.11\text{ m}$  时局部化带即出现贯通，而此时局部化带扩展路径和  $F-u$  曲线均显示边坡还远未达到极限平衡状态。由于采用位移加载条件，边坡内部位移在加载过程中一直不会发生突变。而笔者通过调节竖向位移增量步长，数值解非收敛现象在求解过程中也一直没有出现。因此，塑性区贯通、位移突变和数值解非收敛

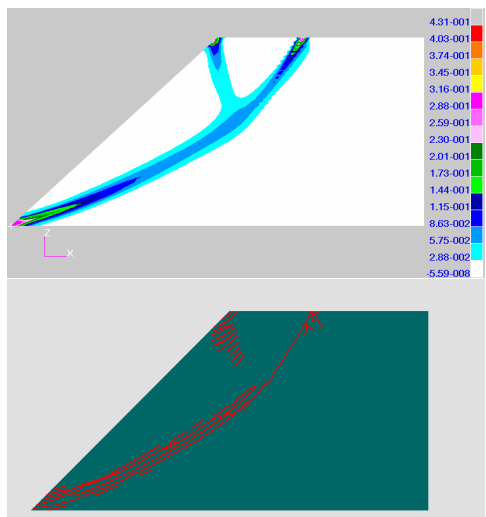




(a) 竖向位移  $u = 0.08$  m



(b) 竖向位移  $u = 0.13$  m



(c) 竖向位移  $u = 0.14$  m

图 10 不同竖向位移荷载工况下边坡内部的等效塑性应变云图及局部化带扩展路径

Fig.10 Nephograms of equivalent plastic strain and localization band path under various footing displacement loadings

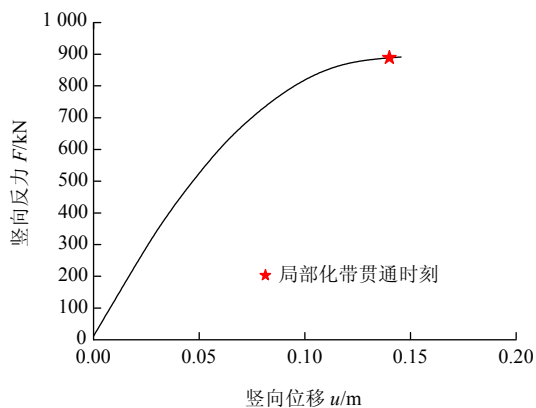


图 11 竖向反力 - 竖向位移曲线

Fig.11 Vertical force-vertical displacement curve

等判据均不适用于判定该边坡的极限平衡状态。

图 10 中的局部化带扩展路径清晰地描述了竖向位移  $u$  作用下边坡破坏演化过程，而图 11 中的  $F-u$  曲线也显示出局部化带贯通时刻即为竖向反力  $F$  到达峰值的时刻。因此，局部化带贯通判据不仅能够准确判定该边坡的极限平衡状态，而且可以同时确定其临界滑动面的位置。

### 7 结 论

在分叉理论框架下，开展土质边坡模型失稳机制研究，证明在平面应力或平面应变条件下，满足关联流动法则的理想弹塑性材料在进入塑性屈服后的特定时刻，必将发生不连续局部化失稳模式。基于以上理论，提出了局部化带贯通判据，认为表征边坡整体失稳的充要条件是局部化带在边坡内部的完全贯通。基于数值模拟，发展了一种局部化带路径追踪技术，根据每个增量步土体单元的局部化状态信息，在后处理中追踪局部化带的扩展路径，判断边坡极限平衡状态，并给出临界滑动面的位置。算例结果表明，采用局部化带贯通判据，通过追踪局部化带扩展路径，不仅能够清晰地描述边坡在各种加载条件下其内部主裂纹形成、扩展、汇合直至贯通的破坏演化全过程，而且可以准确地判定边坡到达极限平衡状态的时刻。

另一方面，对于不处于平面应力或平面应变条件，或不满足关联流动法则的土质边坡，土体材料在发生不连续局部化失稳模式前，理论上存在发生弥散性失稳模式的可能性。在此情况下，局部化带贯通判据存在不适用的可能性。

## 参考文献(References):

- [1] 陈祖煜. 土质边坡稳定分析——原理方法程序[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2003: 23.(CHEN Zuyu. Stability analysis of soil slope— theory, method and programs[M]. Beijing: China Water Power Press, 2003: 23.(in Chinese))
- [2] GRIFFITHS D V, LANE P A. Slope stability analysis by finite elements[J]. Geotechnique, 1999, 49(3): 387 - 403.
- [3] 赵尚毅, 郑颖人, 时卫民, 等. 用有限元强度折减法求边坡稳定安全系数[J]. 岩土工程学报, 2002, 24(3): 343 - 346.(ZHAO Shangyi, ZHENG Yingren, SHI Weimin, et al. Slope safety factor analysis by strength reduction FEM[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2002, 24(3): 343 - 346.(in Chinese))
- [4] 栾茂田, 武亚军, 年廷凯. 强度折减有限元法中边坡失稳的塑性区判据及其应用[J]. 防灾减灾工程学报, 2003, 23(3): 1 - 8.(LUAN Maotian, WU Yajun, NIAN Tingkai. A criterion for evaluation slope stability based on development of plastic zone by shear strength reduction FEM[J]. Journal of Disaster Prevention and Mitigation Engineering, 2003, 23(3): 1 - 8.(in Chinese))
- [5] 徐卫亚, 肖武. 基于强度折减和重度增加的边坡破坏判据研究[J]. 岩土力学, 2007, 28(3): 505 - 511.(XU Weiya, XIAO Wu. Study on slope failure criterion based on strength reduction and gravity increase method[J]. Rock and Soil Mechanics, 2007, 28(3): 505 - 511.(in Chinese))
- [6] 郑宏, 刘德富, 罗先启. 基于变形分析的边坡临界滑动面的确定[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(5): 706 - 719.(ZHENG Hong, LIU Defu, LUO Xianqi. Determination of potential slide line of slopes based on deformation analysis[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2004, 23(5): 706 - 719.(in Chinese))
- [7] 郑宏, 刘德富. 弹塑性矩阵  $D^p$  的特性和有限元边坡稳定性分析中的极限状态标准[J]. 岩石力学与工程学报, 2005, 24(7): 1 099 - 1 105.(ZHENG Hong, LIU Defu. Properties of elasto-plastic matrix  $D^p$  and a criterion on limiting state of slope stability by FEM[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2005, 24(7): 1 099 - 1 105.(in Chinese))
- [8] HILL R. A general theory of uniqueness and stability in elasticplastic solids[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1958, 6(3): 236 - 249.
- [9] VALANIS K C. Banding and stability in plastic materials[J]. Acta Mechanica, 1989, 79(1/2): 113 - 141.
- [10] RUDNICKI J W, RICE J R. Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1975, 23(6): 371 - 394.
- [11] OTTOSEN N S, RUNESSON K. Properties of discontinuous bifurcation solutions in elasto-plasticity[J]. International Journal of Solids and Structures, 1991, 27(4), 401 - 421.
- [12] NEILSEN M K, SCHREYER H L. Bifurcations in elastic-plastic materials[J]. International Journal of Solids and Structures, 1993, 30(4): 521 - 544.
- [13] 周维垣, 杨强. 岩石力学数值计算方法[M]. 北京: 中国电力出版社, 2005: 382.(ZHOU Weiyan, YANG Qiang. Numerical computational methods for rock mechanics[M]. Beijing: China Electric Power Press, 2005: 382.(in Chinese))
- [14] BIGONI D, TOMASZ H. Uniqueness and localization-I associative and non-associative elasto-plasticity[J]. International Journal of Solids and Structures, 1991, 28(2): 197 - 213.
- [15] 杨强, 陈新, 周维垣. 岩石类材料的分叉分析及其工程应用[J]. 岩土工程学报, 2001, 23(4): 403 - 406.(YANG Qiang, CHEN Xin, ZHOU Weiyan. The analysis of discontinuous bifurcation of rock like materials and its engineering application[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2001, 23(4): 403 - 406.(in Chinese))
- [16] 秦卫星, 陈胜宏, 刘金龙. 不连续化分叉条件及其在边坡稳定分析中的应用[J]. 岩石力学与工程学报, 2005, 24(增1): 4 912 - 4 916.(QIN Weixing, CHEN Shenghong, LIU Jinlong. Discontinuous bifurcation condition and its application to slope stability analysis[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2005, 24(Supp.1): 4 912 - 4 916.(in Chinese))
- [17] BORJA R I. A finite element model for strain localization analysis of strongly discontinuous fields based on standard Galerkin approximation[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2000, 190(11): 1 529 - 1 549.
- [18] ORTIZ M, LEROY Y, NEEDLEMAN A. A finite element method for localized failure analysis[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1987, 61(2): 189 - 214.
- [19] WELLS G N, SLUYS L J. Analysis of slip planes in three-dimensional solids[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2001, 190(28): 3 591 - 3 606.
- [20] MOSLER J. Numerical analyses of discontinuous material bifurcation: strong and weak discontinuities[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2005, 194(9): 979 - 1 000.
- [21] 王栋, 年廷凯, 陈煜森. 边坡稳定有限元分析中的三个问题[J]. 岩土力学, 2007, 28(11): 2 309 - 2 313.(WANG Dong, NIAN Tingkai, CHEN Yumiao. Three problems in slope stability analyses with finite element method[J]. Rock and Soil Mechanics, 2007, 28(11): 2 309 - 2 313.(in Chinese))
- [22] REGUEIRO R A, BORJA R I. Plane strain finite element analysis of pressure sensitive plasticity with strong discontinuity[J]. International Journal of Solids and Structures, 2001, 38(21): 3 647 - 3 672.
- [23] 陈胜宏, 秦卫星, 徐青. 应变局部化带追踪模拟的复合单元方法与应用[J]. 岩石力学与工程学报, 2007, 26(6): 1 116 - 1 122.(CHEN Shenghong, QIN Weixing, XU Qing. Composite element method and application of trace simulation for strain localization bands[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2007, 26(6): 1 116 - 1 122.(in Chinese))