

# 耦合离散流体理论的差分格式及其应用

申义庆, 高 智

(中国科学院 力学研究所, 北京 100080)

**摘 要:** 求解 Navier-Stokes 方程组, 一直是粘性流动计算的主导途径。但在计算中, 都是在一定的网格单元上进行离散, 而对不同的离散单元, 流动的特征并不相同。本文通过离散单元上网格雷诺数的变化分析, 采用耦合离散流体理论(CDFT)差分格式, 对向后台阶底部超声速流动问题进行数值模拟, 得到了满意的结果。

**关键词:** Navier-Stokes 方程; 计算流体力学; 离散方程; 耦合离散流体理论

**中图分类号:** O 351 **文献标识码:** A

## 1 前 言

近几十年来, 流体力学的计算主要是通过离散某种流体运动的微分方程组来实现的, 例如离散 NS 方程组、扩散抛物化(DP)方程组或 Euler 方程组等<sup>[1]</sup>, 但由于流动的非均匀性和非线性, 使得在不同离散单元中的流体运动具有不同的特性, 对具有不同特性的流体运动作统一的处理和计算, 其合理性和有效性就成为一个值得研究的课题。在计算中, 流体运动不同特性可表现为离散单元上计算出来的流动参数的不同变化, 如步长  $Re$  数, 步长 Knudsen 数的变化等, 这些参数与流动特征的相关性, 使我们可以根据它们的变化寻找在离散单元上与流动特征更好相符的离散方程。在连续介质假设近似下,  $Re$  数对流场的特性起着重要的作用。在文[2]中, 通过对步长  $Re$  数的分析, 提出了有限离散单元流动的流动分析(理论)和耦合离散流体理论(CDFT)的差分格式, 得到了一些重要的结果。

向后台阶底部超声速流动具有流体运动中的一些基本物理现象, 如分离、旋涡、激波、粘性流动与无粘流动之间的干扰等, 因而底部流动是检验理论和算法的一个典型的算例。本文采用耦合离散流体理论差分格式, 对底部流动进行数值模拟, 得到了与多种文献<sup>[3, 4]</sup>相符的计算结果, 进一步表明了 CDFT 的合理性和有效性。

## 2 耦合离散流体理论及其差分格式

对流与扩散(即惯性力与粘性力)之间的竞争过程是粘性流动主要的一个物理过程。在离散单元内, 对流扩散竞争的消长特性与相应方向上的单元尺度或步长雷诺数成指数关系, 对流(扩散)项的贡献随步长雷诺数的增长成指数规律增大(减少)<sup>[5]</sup>。因此我们可以选取一个扩散效应可以忽略的步长临界雷诺数  $Re_c$ , 将离散单元划分为无粘单元, 粘性单元和部分无粘-粘性单元<sup>[2]</sup>。相应地, 对粘性应力张量有如下结论:

收稿日期: 1998-12-21.

基金项目: 国家自然科学基金项目; 中国科学院力学所所长择优基金项目; 高温气体动力学开放实验室和科学与工程计算国家重点实验室资助。

作者简介: 申义庆(1969~), 男, 博士生。

对  $R_{\Delta x_i} > R_c$  ( $i=1, 2, 3$ ) 的单元, 有

$$\tau = 0 \quad (2.1)$$

对  $R_{\Delta x_i} \leq R_c$  ( $i=1, 2, 3$ ) 的单元, 有

$$\begin{aligned} \tau &= (\tau_{ij}), \tau_{ij} = 2\mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \text{div} u \right), \\ \tau_{ij} &= \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (i \neq j) \end{aligned} \quad (2.2)$$

对  $R_{\Delta x} > R_c, R_{\Delta y} \leq R_c$  和  $R_{\Delta z} \leq R_c$  的单元有

$$\tau = \mu \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ 0 & \left( \frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ 0 & \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \left( \frac{4}{3} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

对  $R_{\Delta x} > R_c, R_{\Delta z} > R_c$  和  $R_{\Delta y} \leq R_c$  的单元有

$$\tau = \mu \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial u}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial v}{\partial y} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

若速度对空间变量二次可微, 则此耦合离散流体理论的差分算法可以通过改变  $NS$  方程组的粘性项来实现. 设  $E_v, F_v, G_v$  分别代表  $NS$  方程中  $x, y, z$  方向的粘性项,  $D(E_v), D(F_v), D(G_v)$  是其差分算子, 则 CDFT 差分算子  $D_c(E_v)$  可写为

$$D_c(E_v) = \begin{cases} 0 & R_{\Delta x} > R_c \\ D(E_v) & R_{\Delta x} \leq R_c \end{cases} \quad (2.5)$$

CDFT 算法的另一种格式, 假设

$$D(E_v) = \left( E_v \right)_{j+\frac{1}{2}} - \left( E_v \right)_{j-\frac{1}{2}} \quad (2.6)$$

则 CDFT 格式

$$D_c(E_v) = \left( E_{vc} \right)_{j+\frac{1}{2}} - \left( E_{vc} \right)_{j-\frac{1}{2}} \quad (2.7)$$

其中

$$E_{vc} = \begin{cases} 0 & (R_{\Delta x})_{j+\frac{1}{2}} > R_c \\ (E_v)_{j+\frac{1}{2}} & (R_{\Delta x})_{j+\frac{1}{2}} \leq R_c \end{cases}$$

同样可以写出  $D_c(F_v), D_c(G_v)$ 。

### 3 控制方程及计算条件

为了模拟二维底部分离流动, 我们从无量纲二维可压缩  $NS$  方程组出发

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial E_v}{\partial x} + \frac{\partial G_v}{\partial y} \quad (3.1)$$

其中

$$\begin{aligned} U &= (\rho, \rho u, \rho v, \rho e_t)^\top, F = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, (\rho e_t + p)u)^\top, \\ G &= (\rho v, \rho uv, \rho v^2 + p, (\rho e_t + p)v)^\top, F_v = (0, \tau_{xx}, \tau_{xy}, u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + q_x)^\top \\ G_v &= (0, \tau_{xy}, \tau_{yy}, u\tau_{xy} + v\tau_{yy} + q_y)^\top, e_t = e + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \end{aligned}$$

$$\tau_{xx} = \frac{\mu}{\text{Re}} \cdot \frac{2}{3}(2u_x - v_y), \quad \tau_{xy} = \frac{\mu}{\text{Re}} \cdot (u_y + v_x), \quad \tau_{yy} = \frac{\mu}{\text{Re}} \cdot \frac{2}{3}(2v_y - u_x)$$

$$q_x = \frac{\mu}{\text{Re}} \frac{1}{(Y-1)M^2 P_r} \cdot T_x, \quad q_y = \frac{\mu}{\text{Re}} \frac{1}{(Y-1)M^2 P_r} \cdot T_y$$

状态方程

$$T = \frac{\gamma M^2 P}{\rho} \quad (3.2)$$

粘性系数采用 Sutherland 公式:

$$\mu = T^{\frac{3}{2}} \frac{1+C}{T+C}, \quad C = \frac{110.4}{T} \quad (3.3)$$

几何图形: 台阶上游长 12.5cm, 下游长 4.08cm, 台阶高  $h = 0.51\text{cm}$ 。

计算区域:  $x$  方向: 上游长  $2h$ , 下游长  $8h$ ,  $y$  方向: 台阶上高为  $h$ , 底部高为  $h$ 。

物理参数:  $\text{Re} = 849, M = 4.08, T = 1046^\circ, Y = 1.31, P_r = 0.72$ 。

我们先计算了  $x$  方向长为 12.5cm, 高为 0.51cm 的边界层解, 将此解作为入口边界条件。壁面采用等温壁  $T_w/T = 0.2957$ , 无滑移  $u = v = 0$  条件, 拐角处的压力采用二值处理<sup>[4]</sup>, 即计算上游内点用到拐角点的压力  $p_{i_w, j_w}$  时, 取  $p_{i_w, j_w} = 2p_{i_w, j_w+1} - p_{i_w, j_w+2}$ , 计算下游内点用到  $p_{i_w, j_w}$  时, 取  $p_{i_w, j_w} = 2p_{i_w+1, j_w} - p_{i_w+2, j_w}$ 。上边界采用简单波假设进行处理, 下游(出流)边界用外推。对流项采用 TVD 格式, 粘性项采用 CDFT 算法。

## 4 计算结果

直接对 NS 方程的 TVD 格式计算和 CDFT 算法(其中  $R_c = 2.3$ )均采用均匀网格  $51 \times 41$  (见图 1)。

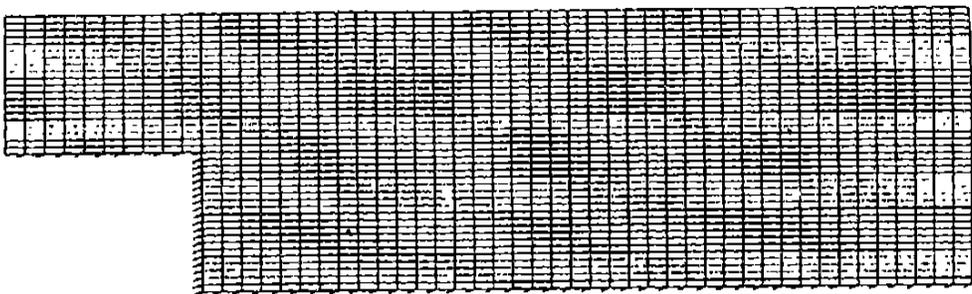


图 1 计算网格示意图

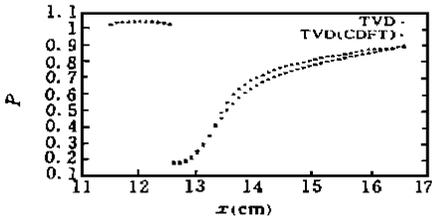


图2 壁面压力分布

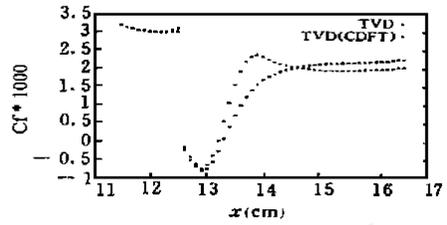


图3 壁面摩擦分布

图2和图3是物面上的压力和摩擦分布,可以看出,两种方法计算出的压力分布是比较接近的,CDFT结果比NS结果稍有增加。摩擦系数分布在回流区后有所变化,前一段CDFT值比NS的高,后半段略低。

另外我们给出垂直于流向的三个位置上的速度( $u$ )和温度( $T$ )分布图,在拐角处(图4、图5)两种结果完全一致,在回流区离垂直壁面0.306cm处(见图6和图7)和下游中点处(图8、图9),速度分布基本一致,在台阶后方靠近壁面附近的温度分布有些差别,回流区内,NS结果比CDFT格式结果增加较快,而过回流区后则相反。

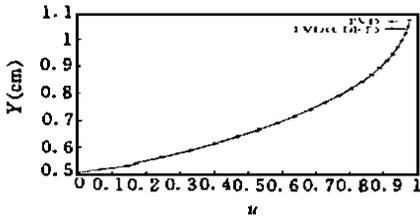


图4 速度分布图

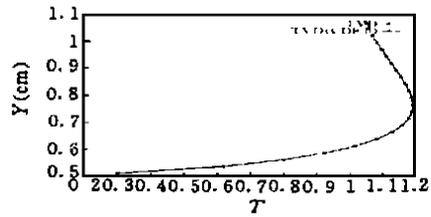


图5 温度分布图

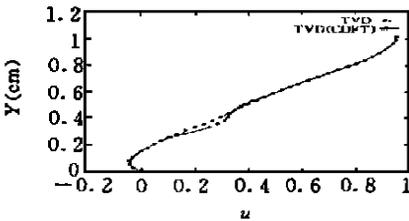


图6 速度分布图

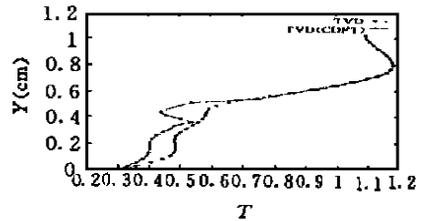


图7 温度分布图

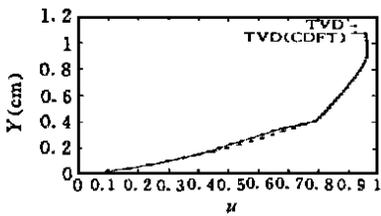


图8 速度分布图

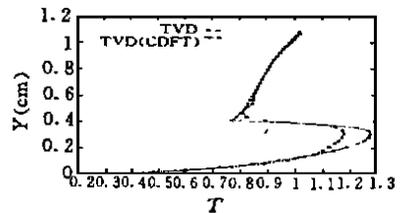


图9 温度分布图

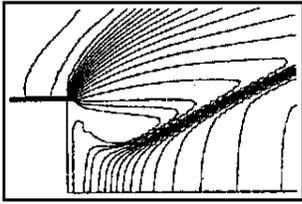


图 10 等压线图(TVD)

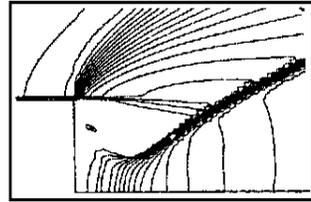


图 11 等压线图(CDFT)

图 10、图 11 是等压线图,可以看出两种方法算出的激波位置和宽度也基本相同,CDFT 格式受到压缩的情形较为明显。

由于 CDFT 算法在网格  $Re$  数较大的离散单元内不再考虑粘性项的影响,因而与整个流场内都对粘性项进行计算的 NS 算法有一些差别,但从算例中,我们看到这种差别是很小的。因为在许多单元内不计算粘性项,所以减少了相当多的计算量,这对高雷诺数流动的数值模拟是十分有用的。

## 参考文献:

- [1] Anderson DA, Tannehill J C, Pletcher R H. *Computational fluid mechanics and heat transfer* [M]. Hemisphere, New York, 1984
- [2] 高 智, 申义庆. 粘性流动有限差分计算的新策略[J]. 中国科学, 1999, 29(5): 433~ 443
- [3] Kuruvila G Anderson J D. A study of the effects of numerical dissipation on the calculation of supersonic separated flows[C], AIAA paper 85-301.
- [4] Gao Y, Wang R O. A study of numerical methods for the laminar near wake[J]. *Computational Fluid Dynamics Journal*, 1994, 2(4).
- [5] 高 智. 流场计算中离散数值近似与力学近似相结合的几个问题[J]. 中国学术期刊文摘(科技快报), 1997, 3(5): 615~ 617.

## Difference schemes coupling with discrete fluid theory and their application

SHEN Yi-qing, GAO Zhi

(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

**Abstract:** The flow characteristics in different cells are different due to nonuniformity of viscous flows. The differences of flow characteristics are shown in various computational parameters. For example, there often exist quite large quantitative difference between the grid Reynolds numbers  $R_{\Delta x_i}$  of not only in the different cells but also in the different coordinate directions of the same cell.

In this paper, we based on the analysis of the grid Reynolds numbers  $R_{\Delta x_i}$ , applied the couple discrete fluid theory (CDFT) to practical computation, simulated the supersonic separated flows of rearward-facing step and got some meaningful results.

**Key words:** NS equations; computational fluid mechanics; discrete equations; the couple discrete fluid theory