

群速度直接控制四阶迎风紧致格式^{*}

马延文^{**} 傅德薰

(中国科学院力学研究所 高温气体动力学开放实验室; 非线性力学国家重点实验室, 北京 100080)

摘要 为求解多尺度复杂流动在有限网格点的情况下高精度方法是可供选择的方法之一, 其中紧致型格式数值解的分辨率更好. 用迎风型紧致格式计算激波时, 数值解中仍有数值振荡产生, 这是由于对应于不同波数之群速度不均一所致. 采用群速度直接控制方法重构紧致型格式以提高捕捉激波的能力. 该方法简单, 精度高, 网格基架点少. 算例表明, 这一新的方法是可行的.

关键词 紧致型格式 高分辨率激波解 群速度控制

紧致型高精度格式受到人们的关注. 在同样逼近精度条件下, 紧致型格式更高的分辨率, 且所需网格点较少. 对于求解多尺度复杂流动, 要求数值方法能很好地捕捉到高波分量, 要求高波量的耗散误差及色散误差都比较小. 在计算资源有限的情况下, 采用高精度格式是有益的^[1~5]. 采用现有的一些格式, 在计算激波时数值解中将有数值振荡产生. 为克服数值振荡已发展了很多有效方法, 其中包括 TVD, NND 及 ENO 等类型的格式^[6~12]. 这些格式已成功地用于求解实际问题. 这些方法的发展都是从简单的一维问题出发进行研究, 并在实践中得到了验证, 但紧致型对激波有高分辨率的格式并不多见.

现有的一些高分辨率格式多是从数学观点出发而构造的. 在这些方法中没有很好地研究数值解中产生振荡的原因, 也不是针对数值振荡产生的直接原因而对格式进行改造的. 文献[11]中对个别具体格式通过对应数值解的群速度, 分析了数值解的行为. 文献[5]中参照数值解的群速度把格式分为 3 类: 快型(FST), 慢型(SLW)和混合型(MXD). 对于慢型格式, 数值振荡出现于激波之后, 对于快型格式数值振荡出现于激波之前, 对于混合型格式数值振荡出现于激波之两侧, 但主要出现于激波之前. 文中将引入一个函数用以控制数值解中的群速度(group velocity control, 简称 GVC), 使得在激波之前格式为 SLW 型的, 在激波之后主要表现为 FST 型的, 以此来达到控制数值解中非物理振荡的目的.

1 依赖于自由参数的紧致差分

为简便起见, 考虑如下模型方程及对应的半离散化方程:

2000-11-28 收稿

* 国家自然科学基金(批准号: 19972070)、科学技术部“九五”预选及“九七三”基金(批准号: 1999032805)资助项目

** E-mail: fud@cc5.imech.ac.cn

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad f = cu, \quad c = \text{const}, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + \frac{F_j}{x} = 0, \tag{1.2}$$

这里 F_j/x 是一阶导数 $\partial f/\partial x$ 的一种逼近. 具有四阶逼近精度的紧致差分逼近式为

$$\frac{1}{6} F_{j+1} + \frac{2}{3} F_j + \frac{1}{6} F_{j-1} = \frac{\partial f}{\partial x} f_j, \tag{1.3}$$

这里 $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{2} (\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x})$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^3}{\partial x^3} = \frac{\partial^3}{\partial x^3} (f_j - f_{j\pm 1})$. 具有三阶精度的迎风紧致差分逼近式为^[4]

$$\frac{2}{3} F_j^\pm + \frac{1}{3} F_{j\pm 1}^\pm = \left[\frac{5}{6} \frac{\partial}{\partial x} \mp \frac{1}{6} \frac{\partial}{\partial x} \right] f_j^\pm, \tag{1.4}$$

$$f^\pm = c^\pm u, \quad c^\pm = (c \pm c)/2. \tag{1.5}$$

参照文献[5]中的分析可知(1.2)和(1.3)式是 SLW 型的, 实践也表明数值振荡产生于激波之后. 作类似的分析可知(1.2)和(1.4)式是 MXD 型的, 对中低波数表现为 FST 型特性, 对高波数表现为 SLW 型特性, 但对高波数耗散量很大. 实践表明这类格式的数值解中非物理振荡主要出现在激波之前. 可构造一个如下之差分表达式:

$$\frac{1}{6} F_{j+1} + \frac{2}{3} F_j + \frac{1}{6} F_{j-1} - 2 \frac{\partial f}{\partial x} F_j = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} f_j - 2 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} f_j, \tag{1.6}$$

式中当取 $\Delta x = 0$ 时得四阶精度的紧致差分逼近, 当取 $\Delta x = \pm \frac{1}{6}$ 时得三阶精度的迎风紧致差分逼近. 对(1.6)式进行 Taylor 级数展开后可得

$$\frac{F_j}{x} = \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_j + O(\Delta x^3), \tag{1.7}$$

即逼近精度的量级为 Δx^3 . 这里并未要求 f 是 u 的线性函数.

现分析一下解的行为与参数 c 之间的关系. 设 $f = cu$, $c > 0$, 取初值为

$$u(x, 0) = \exp(ikx), \tag{1.8}$$

则(1.1)式的准确解为

$$u(x, t) = \exp[ik(x - ct)]. \tag{1.9}$$

利用同样的初始条件, (1.2)式的准确解为

$$u(x_j, t) = \exp\left[-c \frac{k_r}{x} t\right] \exp\left[ik\left(x_j - c \frac{k_i}{t}\right)\right], \tag{1.10}$$

这里 $k = k_r + ik_i$. 可很容易求出 $k_r(\omega)$, $k_i(\omega)$ 的分析表达式来. $k_r(\omega)$ 随 ω 的变化曲线给在图 1(a) 中. 波束以群速度传播, 对于数值解在文献[5]中定义群速度为

$$D(\omega) = \frac{dk_i(\omega)}{d\omega}, \tag{1.11}$$

这里的群速度已经过规整化. 对应于(1.1)式准确解规整化后的群速度为 $D(\omega) = 1$. 对不同参数 c 对应的群速度随 ω 的变化曲线给在图 1(b) 中.

从图中可看出, 对中低波分量数值解有很好的逼近精度. 随波数的增加数值解偏离于准确解的程度加大. 这种偏离导致数值解中对应于不同波数的分量产生错位, 从而导致非物理

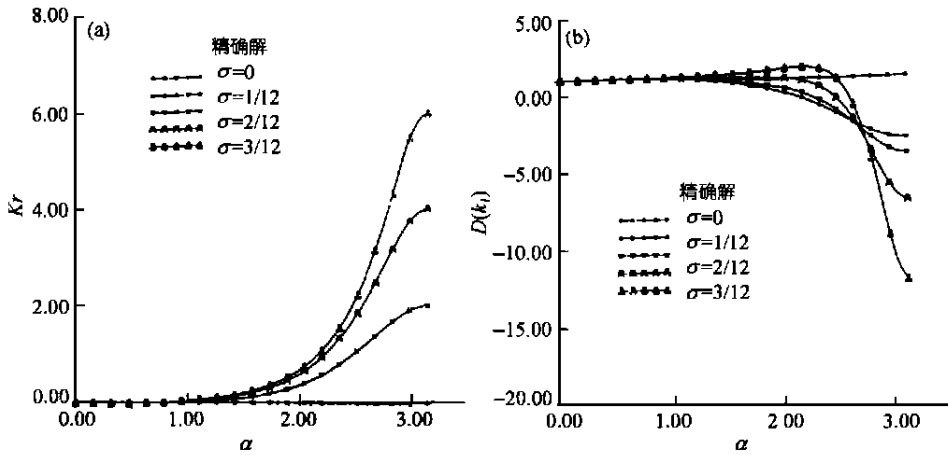


图 1 耗散特性及群速度随 α 的变化
 (a) $kr(\alpha)$ 随 $\alpha = kx$ 的变化, (b) 群速度 $D(k)$ 随 $\alpha = kx$ 的变化

振荡,群速度告诉我们这种高波束是如何传播的. 对于 SLW 型格式对应于所有波的群速度都慢于 (1.1) 方程准确解的对应群速度. 其中低中波数分量与对应于 (1.1) 式相应的波数有着相同方向的群速度,部分中波为驻波,而数值解中的高波分量有着反向的群速度. 在格式 (1.2) 和 (1.6) 中对于 $c > 0$ 情况当取 $\sigma > \sigma_0$ ($\sigma_0 = 0.1291$) 时对应的格式为 MXD 型的. 此时对应于中低波数的群速度,快于对应 (1.1) 式精确解的相应波的群速度. 而对应于中高波数的分量总是偏离于 (1.1) 式精确解对应量的. 但从图 1 中可以看出,由于对应的 $kr(\alpha)$ 很大,使这些难以控制的波有很小的幅值.

2 群速度直接控制法改善激波解的分辨率

2.1 格式的构造

可通过 (1.6) 式中的参数 σ 来控制数值解中的群速度,以改善激波解. 设激波自左向右运动,其左侧称为波后,右侧称为波前. 取 σ 值为零或很小时格式为慢型的. 如果在波前采用这一慢型格式,则在激波前不会有振荡产生. 当取 σ 值较大时格式为混合型的. 此时对应于低、中波的分量有快的群速度,而对应于高波的量有着很小的振幅,即格式主要呈现为 FST 型特性. 如果在波后取较大的参数 σ ,则波后的数值振荡可基本得到消除. 当 $c < 0$ 时可作类似的讨论.

参照这一思想构造如下之差分逼近式:

$${}^{\pm}F_{j+1}^{\pm} + {}^{\pm}F_j^{\pm} + {}^{\pm}F_{j-1}^{\pm} = d_j^{\pm}, \tag{2.1}$$

这里

$$\begin{aligned} d_j^{\pm} &= \frac{1}{6} \cdot {}^{\pm}f_{j+2}^{\pm} - \frac{1}{6} \cdot {}^{\pm}f_j^{\pm} + \frac{2}{3} \cdot {}^{\pm}f_{j-2}^{\pm} - \frac{1}{6} \cdot {}^{\pm}f_{j+2}^{\pm} + \frac{1}{6} \cdot {}^{\pm}f_{j-2}^{\pm}, \\ d_j^{\pm} &= \frac{0}{x} f_j^{\pm} - 2l \left[\frac{1}{2} \cdot {}^{\pm}f_{j+2}^{\pm} - \frac{1}{2} \cdot {}^{\pm}f_{j-2}^{\pm} \right] / c, \end{aligned} \tag{2.2}$$

$${}^{\pm}f_{j+2}^{\pm} = \pm \left[1 \pm \sigma SS(u_{j+2}^{\pm}) \right] \left| \frac{P_{j+1} - P_j}{P_{j+1} + P_j} \right| / c, \tag{2.3}$$

计算中取 $\theta = 0.2, \sigma = 0.1$. $SS(u)$ 定义为

$$SS(u) = \text{sign} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right), \tag{2.4}$$

并称其为激波结构函数 (shock structure function). 定义 N-S 激波为连续函数, 但有很大的梯度. 很显然, 在 N-S 激波的左侧 $SS(u) > 0$, 右侧 $SS(u) < 0$ (参看图 2(a)). 如此构造的格式在波前呈现 SLW 格式的特性, 而在波后主要呈现 FST 格式的特性.

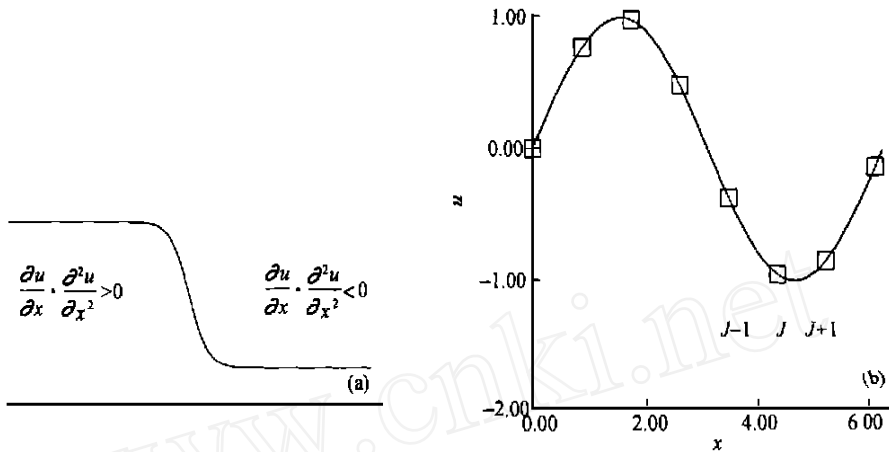


图 2 N-S 激波及极值点函数变化

(a) Navier-Stokes 激波示意图, (b) 近极值点函数的变化行为

2.2 精度分析

由(2.3)式可看出, 在解的光滑区 $x_{j+\frac{1}{2}} \sim x$. 参照(1.7)式可知, 在解的光滑区由(2.1)式得到的导数逼近式有四阶逼近精度. 进一步分析可知, 所构造的格式在极值点和拐点附近精度将降阶. 在计算中 $SS(u_{j+\frac{1}{2}})$ 是按如下方式进行逼近的:

$$SS(u_{j+\frac{1}{2}}) = \text{sign}[(u_{j+1} - u_j)(u_{j+2} - u_{j+1} - u_j + u_{j-1})]. \tag{2.5}$$

显然, 过极值点或拐点时 $SS(u_{j+\frac{1}{2}})$ 将改变自己的符号. 设(1.1)式中 $c > 0$, (2.3)式中 $\theta = 1$ (参看图 2(b)). 对应于图 2(b)的情况 $u_{j+\frac{1}{2}} > 0, u_{j-\frac{1}{2}} = 0$, 对应的差分逼近式为

$$\frac{1}{6} F_{j+1} + \frac{2}{3} F_j + \frac{1}{6} F_{j-1} = \frac{1}{x} f_j - \frac{1}{x^2} [2 f_j - (F_{j+1} + F_j)]. \tag{2.6}$$

经 Taylor 级数展开可知

$$F_j/x = \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_j + O(x^2).$$

在光滑区 $x \sim x$, 即格式在光滑区由四阶降为三阶精度.

3 Euler 方程的差分逼近

现将方法用于逼近气动方程. 无量纲化后矢量形式的一维 Euler 方程为

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad (3.1)$$

这里 $\mathbf{U} = [\rho, u, E]^T$, $f = [\rho u, \rho u^2 + p, u(E + p)]^T$,

$$p = \frac{1}{M^2} T, \quad (3.2)$$

$$E = \left[c_v T + \frac{u^2}{2} \right], \quad c_v = \frac{1}{(\gamma - 1) M^2}, \quad (3.3)$$

其中 M 是来流 Mach 数, γ 为比热比. 密度、速度和温度是以 ρ_0, u_0 和 T_0 进行无量纲化的, p 是以 $\rho_0 u_0^2$ 进行无量纲化的. 利用流通矢量分裂方法可将 Euler 方程(3.1)写为

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial f^+}{\partial x} + \frac{\partial f^-}{\partial x} = 0, \quad (3.4)$$

这里, $f^\pm = A^\pm \mathbf{U}$, $A^\pm = S^{-1} \Lambda^\pm S$, A 为对应于 f 的 Jacobi 矩阵, $A = A^+ + A^-$, S 为由 A 之左特征行矢量组成的矩阵, 对角矩阵 Λ^\pm 由元素 $\lambda_k^\pm = (\lambda_k \pm |\lambda_k|)/2$ 组成, $\lambda_1 = u$, $\lambda_2 = u - c$, $\lambda_3 = u + c$, c 为声速, 函数 $SS(p)$ 用以控制数值解中的群速度. 空间导数离散化后, 得到一按时间方向的常微分方程组, 通过具有三阶精度的 R-K 方法进行求解.

在 Harten TVD 格式中采用了 5 个网格点, 在光滑区有二阶精度, 在极值点和拐点精度降为一阶, 且需进行矩阵运算. 在本方法中同样需 5 个网格点, 但在光滑区有四阶精度, 在极值点和拐点精度降为三阶, 且不需进行矩阵运算. 在本方法中, 需求解三对角代数方程组, 可用追赶法进行求解. 这一方法可直接推广到多维问题的求解.

4 数值实验

和通常方法构造一样, 这里方法的构造是参照简单模型方程进行分析的. 而这些分析只为格式构造提供了一个启示. 在实际应用中所遇到的是极为复杂的非线性问题. 所构造的方法还需通过实践进行考验, 在本节中将给出几个不同的算例.

4.1 一维定常激波解

采用具有四阶精度并通过 GVC 控制的紧致格式逼近一维 Euler 方程, 计算域为 $[0, 1]$, 计算之初始值为

$$f = \begin{cases} \text{均匀来流,} & 0 \leq x \leq 0.45, \\ \text{线性插值,} & 0.45 < x < 0.55, \\ \text{利用 R-H 关系,} & 0.55 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (4.1)$$

这里 $f = [\rho, u, T]$, 网格点数为 $N = 101$, 步长比为 $\Delta t / \Delta x = 0.25$. 在(2.3)式中的 ρ_0 和 u_0 分别取为 $\rho_0 = 1$, $u_0 = 0.9$. 计算了两种情况. 其一为 $M = 2.0$, 结果给在图 3(a) 中, 另一为 $M = 5$, 其结果给在图 3(b) 中. 可以看出, 本文方法给出的结果是满意的.

4.2 Sod 问题的计算

计算区域为 $0 \leq x \leq 1$, 网格点数为 $N = 100$. 初始时刻在区域 $[0, 0.5]$ 取 $p = 1$, $u = 0$, 在区域 $[0.5, 1]$ 取 $p = 0.1$, $u = 0.125$ 和 $u = 0$. 在图 4 中给出了 GVC 方法在 $t = 0.14$ 的时刻各流动参数的分布. 计算中取 $\rho_0 = 1.0$, $u_0 = 0.9$. 可以看出, 在激波和接触间断附近压力及密度的分辨率是很好的, 速度分布有小的跳动.

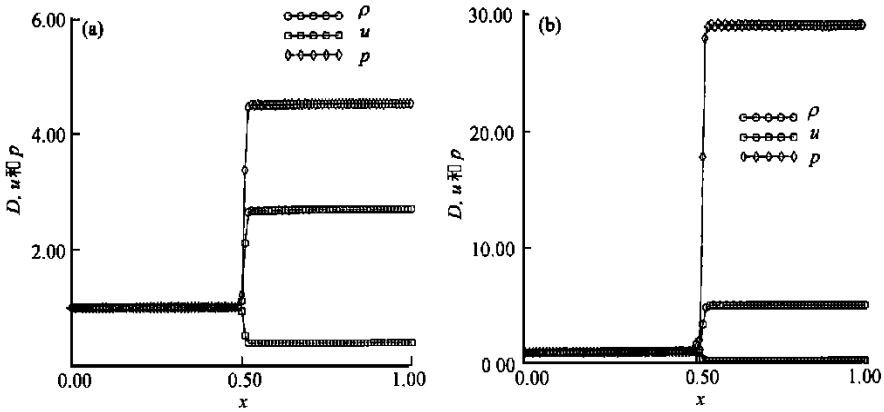


图 3 一维 Euler 方程的数值解

(a) 对 $M = 2.0$ 时的定常激波解, (b) 对 $M = 5.0$ 时的定常激波解

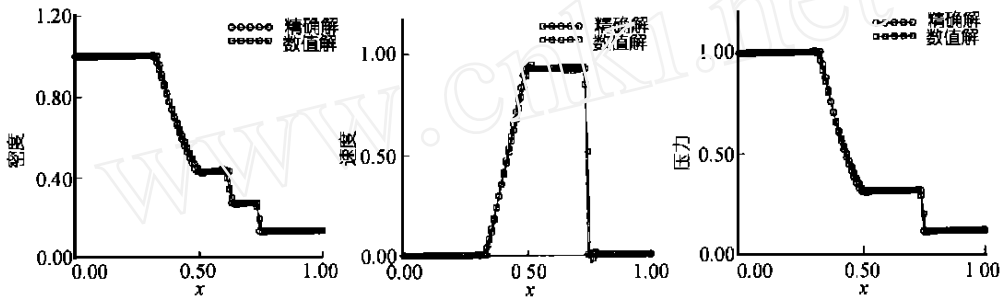


图 4 在 $t = 0.14$ 时刻 Sod 模型的数值解

4.3 二维激波反射问题的计算

利用 GVC 控制的四阶紧致格式计算二维激波反射问题. 在进行二维计算时只需在每个坐标方向上简单地采用 GVC 控制就可以了, 激波入射角取 $\theta = 29^\circ$, $M = 2.9$, 计算网格为 $x \times y = 81 \times 41$. 图 5 中给出了 $y = 0.25, 0.50, 0.75$ 时压力随 x 的变化曲线. 可看出, 激波的分辨率是很好的.

4.4 涡-激波相互干扰问题的计算

在文献[13]中利用 1044×1170 个网格点采用六阶对称紧致格式^[2]计算了由于涡-激波相互干扰导致声的产生问题. 在计算中当减少网格点数时有非物理振荡产生. 本文用 301×301 个网点利用二维可压 N-S 方程计算了同样的物理问题. 方程中的无黏项采用文中介绍的经 GVC 修正的紧致差分逼近, 黏性项采用对称

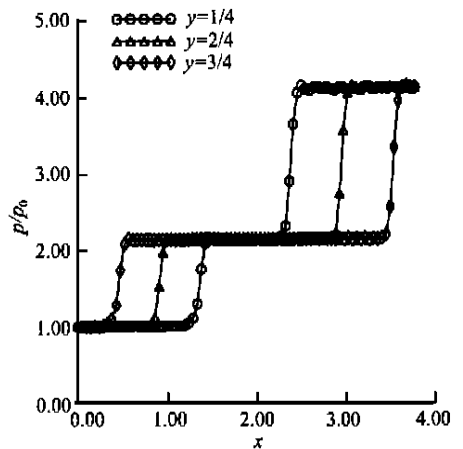


图 5 二维激波反射问题 $y = 0.25, 0.50, 0.75$ 时的压力分布

型的四阶紧致差分进行逼近,时间方向采用三步 R-K 方法进行求解. 在初始时刻有一定常激波位于 $x = -0.1$ 处. 有一双涡位于激波的上游 ($-2, \pm 2$) 处自左向右运动. 计算区域为 $-6 < x < 21, -12 < y < 12$. 在坐标原点附近两个坐标方向上都采用了细网格. 在远场采用了粗网格,其中 $x_{\min} = 0.048, x_{\max} = 0.18, y_{\min} = 0.04, y_{\max} = 0.31$. 计算中取 $M = 1.29, Re = 400$.

所考虑的涡具有以下速度分布形式^[13]:

$$\begin{aligned} u(r) &= M_v r \exp[(1 - r^2)/2], \\ u_r(r) &= 0, \end{aligned} \tag{4.2}$$

式中 r 为经涡半径无量纲化后的由考查点到涡心的距离,切向速度 u 及径向速度 u_r 都是以来流声速 a 进行无量纲化的. 旋转 Mach 数 M_v 定义为 $M_v = u_{\max}/a$, 其中 u_{\max} 为在 $r = 1$ 时的最大切向速度. 初始压力和密度分布为

$$p(r) = \frac{1}{\gamma} \left[1 - \frac{\gamma - 1}{2} M_v^2 \exp(1 - r^2) \right]^{-1}, \tag{4.3}$$

$$\rho(r) = \left[1 - \frac{\gamma - 1}{2} M_v^2 \exp(1 - r^2) \right]^{-1}, \tag{4.4}$$

比热比 $\gamma = 1.4$. 密度和压力分别以 ρ_0 和 a^2 进行无量纲化. 计算中取 $M_v = 0.39$. 在图 6

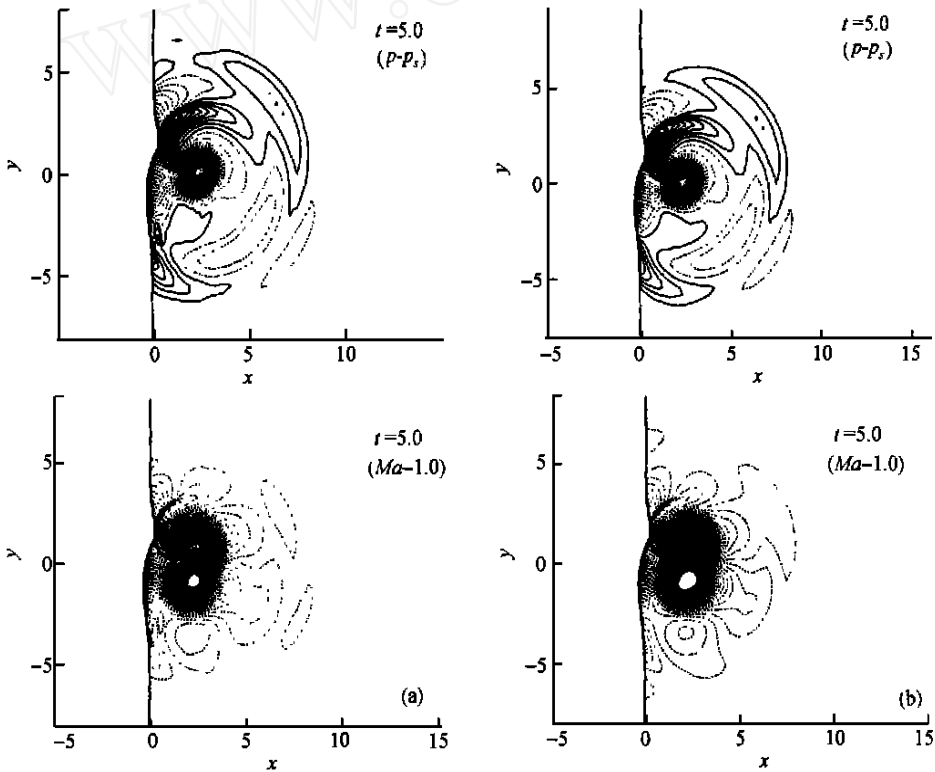


图 6 在 $t = 5$ 时压力和 Mach 数等值线图
压力差及 $M_a - 1.0$ 的等值线图(a)不加 GVC 控制; (b) 加 GVC 控制

(a) 中给出不采用 GVC 控制的 $p = (p - p_s) / p$ 和 $M_a - 1$ 的等值线图, p_s 为激波后压力, 在图 6(b) 中给出了经 GVC 控制的相应的结果. 图中实线表示 $p > 0$ 和 $M_a - 1 > 0$ 的值, 虚线对应于 $p < 0$ 和 $M_a - 1 < 0$ 的值. 比较图 6(a) 和 (b) 的结果可以看出, 经 GVC 控制的紧致格式可以改善激波解的分辨率.

5 结论

参照数值解中产生非物理振荡的原因, 利用 GVC 方法对四阶紧致差分进行了重构. 重构后的格式有着精度高, 所需网格基点少, 有较强的对激波的分辨能力. 格式在光滑区有四阶精度, 在拐点和极值降为三阶, 只需 5 个网格点. 数值实验结果是满意的.

参 考 文 献

- 1 Rai M M, Moin P. Direct simulation of turbulent flow using finite difference schemes. *J Comput Phys*, 1991, 96(1): 15 ~ 53
- 2 Lele S K. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. *J Comput Phys*, 1992, 13: 16 ~ 42
- 3 Fu D X, Ma Y W. High Resolution Schemes, *Computational Fluid Dynamics Review*. Hafez M, Oshima K, eds. New York: John Wiley & Sons, 1995. 234 ~ 250
- 4 Fu D X, Ma Y W. On efficiency and accuracy of numerical methods for solving the aerodynamics equations, numerical methods in fluid mechanics. I. In: Yasuhara M, Daiguji H, Oshima K, eds. *Proceedings of the International Symposium on Computational Fluid Dynamics*. Nagoya: Japan Society of CFD, 1989. 77 ~ 85
- 5 Fu D X, Ma Y W. A high order accurate difference scheme for complex flow fields. *J Comput Phys*, 1997, 134: 1 ~ 15
- 6 Yee H C, Warming R F, Harten A. Implicit total variation diminishing (TVD) schemes for steady-state calculations. *AIAA*, 1983, 83 ~ 1962
- 7 Harten A, Osher S. Uniformly high-order accurate non oscillatory schemes I. *SIAMJ Num Anal*, 1987, 24: 279 ~ 309
- 8 Harten A, Engquist B, Chakravarthy S R. Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes, . *J Comput Phys*, 1987, 71: 231 ~ 303
- 9 Shu C W. TVD uniformly high-order schemes for conservation law. *Math Comp*, 1987, 49(179): 105 ~ 121
- 10 马延文, 傅德薰. 计算空气动力学中的一个新的激波捕捉法——耗散比拟法. *中国科学, A 辑*, 1992, (3): 263 ~ 271
- 11 Trefethen L N. Group velocity in finite difference schemes. *SIAM Review*, 1982, 24(2): 113 ~ 136
- 12 张涵信. 差分计算中激波上、下游出现波动的探讨. *空气动力学学报*, 1984, (1): 12 ~ 19
- 13 Osamu Inone, Yuji Hattori. Sound generation by shock-vortex interactions. *J Fluid Mechanics*, 1999, 380: 81 ~ 116