研究通信

寻求广义对称的几何途径

屠规彰　秦孟兆
(中国科学院计算中心)

微分方程的相似解方法[1]是在量纲分析方法的基础上发展起来的，由于它所考察的变换群相当一般，故适用范围更广．文献[2]进一步扩充了此种变换群，使之包含未知函数的导数，据此[3]中引进了广义对称．本文给出了寻求广义对称的几何途径，系[4]的推广．

考察形如

$$\frac{\partial u}{\partial t}=f\left(u,\frac{\partial u}{\partial x},\cdots,\frac{\partial^p u}{\partial x^p}\right) \qquad (1)$$

的非线性演化方程，其中f不明显地与x, t相关．方程(1)等价于下列外形组：

$$\begin{cases}\beta_i=du_i-u_{i+1}dx-v_{i+1}dt,\\ d\beta_i=-du_{i+1}\wedge dx-dv_{i+1}\wedge dt,\ (i\geqslant 0)\\ \alpha=dx\wedge du-f(u,\ u_1,\cdots,\ u_p)dx\wedge dt.\end{cases} \qquad (2)$$

此外形组是闭的，因易验 $d\alpha=-\sum_{i\geqslant 0}\left(\frac{\partial f}{\partial u_i}dx\wedge dt\right)\wedge\beta_i$．今记$V=(V^t,V^x,V^{u_i},V^{v_k})$为与变换

$$u^*(x,\ t)=u(x,\ t)+\varepsilon V^u \qquad (3)$$

及$\frac{d^iu^*}{dx^i}=\frac{d^iu}{dx^i}+\varepsilon V^{u_i}$等相应的向量，其中$\varepsilon$为无穷小参数，$d/dx$表示对$x$的全导数，以与偏导数$V_x=\partial V/\partial x$等相区别．设

$$V_t=V_x=0,\ V^t=V^x=0, \qquad (4)$$

亦即向量V不明显地与x, t相关，且在变换(3)中，自变量t, x不作改变．

定理　V^u为方程(1)的广义对称的充要条件为

$$\mathscr{L}_V\,\omega_i=\sum_j\lambda_{ij}\omega_j, \qquad (5)$$

其中ω_i表示(2)中各个外形，$\mathscr{L}_V\,\omega$表示ω对V的Lie导数，λ_{ij}为0-形或1-形．

证明提要．令

$$\mathscr{L}_V\,\beta_i=\sum_{j\geqslant 0}\mu_{ij}\beta_j. \qquad (6)$$

由(4)，$\mathscr{L}_V\,\beta_i=dV^{u_i}-V^{u_{i+1}}dx-V^{v_{i+1}}dt$．故比较(6)式两边各基底1-形前系数可解得$\mu_{ij}=V_{u_j}{}^{u_i}$并

$$V_{v_k}{}^{u_i}=0,V^{v_{i+1}}=\sum_j V_{u_j}{}^{u_i}v_{j+1}=dV^{u_i}/dt, \qquad (7)$$
$$V^{u_{i+1}}=\sum_j V_{u_j}{}^{u_i}u_{j+1}=dV^{u_i}/dx.$$

因$\mathscr{L}_V d\beta_i=d\mathscr{L}_V\,\beta_i$，故对$d\beta_j$，(5)式依然成立．最后对于$\alpha$，设有

$$\mathscr{L}_V\ \alpha=\sum_{i\geqslant 0}\lambda_{i+1}d\beta_i+\zeta\alpha+\sum_{i\geqslant 0}\xi_i\beta_i, \qquad (8)$$

其中 $\xi_i=A_idt+\beta_idx+\sum_{j\geqslant 0}C_{ij}du_j+\sum_{k\geqslant 1}D_{ik}dv_k$ 为待定的1-形．比较(8)式两边各基底2-形前系数，可得

$$-\sum_{i\geqslant 0}f_{u_i}V^{u_i}=-\zeta f+\sum_{i\geqslant 0}(A_iu_{i+1}-B_iv_{i+1}) \qquad (9)$$

等一组方程，由此解出$D_{ik}=\lambda_k=0$, $C_{ij}=C_{ji}$及$A_i=-\sum_{k\geqslant 0}C_{ki}v_{k+1}$, $B_i=V_{u_i}{}^u-\sum_{k\geqslant 0}C_{ki}u_{k+1}-\zeta\delta_{i0}$ (δ_{ij}为Kronecker符号)，代入(9)式，并利用(7)式及 $v_{i+1}=\left(\frac{d}{dx}\right)^iu_t=\left(\frac{d}{dx}\right)^if$，便得

$$\sum_i\left(\frac{\partial f}{\partial u_i}\right)\left(\frac{d}{dx}\right)^iV^u=\sum_i\left(\frac{\partial V^u}{\partial u_i}\right)\left(\frac{d}{dx}\right)^if,$$

此正是V^u为方程(1)之广义对称的充要条件[5]．

[1] Bluman G. W., Cole J. D., *Similarity Method for Differential Equations*, Springer-Verlag (1974)
[2] Anderson R. L. *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, 28 (1972) 988
[3] Olver P. J., *J. Math. Phys.*, 18 (1977) 1212
[4] Harrison B. K., Estabrook F. B., *ibid.*, 12 (1977) 653
[5] 屠规彰，秦孟兆，«科学通报»，24 (1979) 913

(1980年3月24日收到)

关于等旋转定理

胡　文　瑞
(中国科学院力学研究所)

在定常、轴对称、无限电导率的流体中，每个磁面上的角速度相等[1,2]．这个Ferraro等

旋转定理是磁流体力学的一个基本定理．它在恒星内部及其大气中都有重要用途[2,3]．

在地球等离子体层与地壳间有大气层和低电导率的电离层，在一些恒星大气表面有一层部分电离气体，就是在脉冲星表面也有极薄的大气层．这表明，应用 Ferraro 定理时必须考虑有限电阻区域的影响．

球坐标中的定常磁感应方程可写为：

$$\nabla\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})+\eta_m\Delta\boldsymbol{B}-\nabla\eta_m\times(\nabla\times\boldsymbol{B})=0.\qquad(1)$$

轴对称($\partial/\partial\varphi=0$)时，由磁场无源条件可得到

$$B_r=\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta},\ B_\theta=-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r},$$
$$B_\varphi=G(r,\ \theta),\qquad(2)$$

其中 η_m 为磁粘性系数，ψ 为磁面函数，G 为环向分量的表达形式．纯转动时速度为

$$v_r=0,\ v_\theta=0,\ v_\varphi=r\sin\theta\Omega(r,\ \theta).\qquad(3)$$

由轴对称可得到 $\nabla\eta_m=\left(\frac{\partial\eta_m}{\partial r},\ \frac{1}{r}\frac{\partial\eta_m}{\partial\theta},\ 0\right)$.

将上述关系代入磁感应方程(1)，可得到

$$\left(\Delta B_r-\frac{2}{r^2}\frac{\partial B_\theta}{\partial\theta}-\frac{2B_r}{r^2}-\frac{2\mathrm{ctg}\theta}{r^2}B_\theta\right)$$
$$+\frac{1}{r^2}\frac{\partial\ln\eta_m}{\partial\theta}\left(\frac{\partial rB_\theta}{\partial r}-\frac{\partial B_r}{\partial\theta}\right)=0,\qquad(4)$$

$$\left(\Delta B_\theta+\frac{2}{r^2}\frac{\partial B_r}{\partial\theta}-\frac{B_\theta}{r^2\sin^2\theta}\right)$$
$$+\frac{1}{r}\frac{\partial\ln\eta_m}{\partial r}\left(\frac{\partial rB_\theta}{\partial r}-\frac{\partial B_r}{\partial\theta}\right)=0,\qquad(5)$$

$$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}-\frac{\partial\Omega}{\partial\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)$$
$$+\eta_m\left(\Delta B_\varphi-\frac{B_\varphi}{r^2\sin^2\theta}\right)+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\eta_m}{\partial r}\frac{\partial rB_\varphi}{\partial r}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\eta_m}{\partial\theta}\frac{\partial B_\varphi\sin\theta}{\partial\theta}\right)=0,\qquad(6)$$

其中

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\mathrm{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}.$$

如果 $\eta_m=0$，则(4)、(5)式满足，而(6)式给出

$$\frac{\partial\Omega}{\partial r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}-\frac{\partial\Omega}{\partial\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r}=0.\qquad(7)$$

这就是等旋转定理 $\Omega=\Omega(\psi)$．对有限电阻 $\eta_m\neq0$，只要 $B_\varphi=0$ 仍存在等旋转定理的关系(7)．

对于最常见的偶极场

$$B_r=\frac{2a}{r^3}\cos\theta,\ B_\theta=\frac{a}{r^3}\sin\theta,\ B_\varphi=0,\qquad(8)$$

它满足(4)～(6)式．所以，等旋转定理不仅在理想导体的冻结情况下成立，在很典型的有限电阻磁流体力学的一类情况下也成立．等旋转定理的条件要求 $\eta_m=0$，或者 $B_\varphi=0$．

在一般的天体物理的情况下，星体的较外层大气中，等离子体可以看成是理想的，那里的磁雷诺数很大，可应用等旋转定理．在星体表面附近的大气中，等离子体往往是部分电离的，而且典型尺度较小，磁面上可以有等离子体的剪切运动．完整的物理图象要把等旋转运动的区域与不等旋转(剪切)运动的区域衔接起来．这时，星体外层大气并不与星体本身共转，在星体表面有某种剪切，以后再维持一个共转区．这对于研究地球等离子体层或某些脉冲星的磁层结构可能是重要的．

等旋转定理一般只限于作运动学考虑．在分析有限 η_m 和 $B_\varphi\neq0$ 时，还要用(4)和(5)式，这时就应进一步讨论动力学效应，即场与流体的耦合过程，在确定边界条件下求解运动方程，而不能简单地把(3)式取作速度场．

作者感谢吴林襄教授的有益讨论．

[1] Ferraro V. C. A., *Monthly Notices RAS*, 97 (1937) 458

[2] Ferraro V. C. A, Plumpton C., *An Introduction to Magneto-fluid Mechanics* (1961)

[3] Alfvén H., Fälthammar C. -G., *Cosmical Electrodynamics* (1963)

(1980年4月30日收到)

关于室女座方向超星系团质量的估计

凌君彦

(成都电讯工程学院)

随着 Smoot[1] 和 Fabian[2] 等人近年来一系列的实验观测，宇宙的大尺度结构以及物质分布的非均匀性问题已成为十分重要的课题．他们提出的证据表明，地球正随着银河系以