Suomen ainedidaktisen tutkimusseuran julkaisuja
Ainedidaktisia tutkimuksia 2

Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen ajankohtaista tutkimusta

Heidi Krzywacki, Kalle Juuti & Jarkko Lampiselkä (toim.)

Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen ajankohtaista tutkimusta

Suomen ainedidaktisen tutkimusseuran julkaisuja
Ainedidaktisia tutkimuksia 2

Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen ajankohtaista tutkimusta

Heidi Krzywacki, Kalle Juuti & Jarkko Lampiselkä (toim.)

Suomen ainedidaktinen
tutkimusseura ry

Puheenjohtaja:
Professori Arto Kallioniemi
Opettajankoulutuslaitos
PL9
00014 Helsingin yliopisto

Suomen
ainedidaktinen
tutkimusseura

Suomen ainedidaktisen tutkimusseuran julkaisuja

Ainedidaktisia tutkimuksia

Sarjassa ilmestyneet julkaisut on vertaisarvioitu.

Ainedidaktisia tutkimuksia 2

Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen ajankohtaista tutkimusta

Toimituskunta:
Liisa Tainio (pj.), Kaisu Rättyä (siht.), Kalle Juuti, Henry Leppäaho, Eila Lindfors, Harry Silfverberg, Arja Virta ja Eija Yli-Panula

Kansi ja ulkoasu:
Katja Kontu

Taitto:
Mikko Halonen

Painatus:
Unigrafia Oy, Helsinki

ISSN 1799-9596 (nid.)
ISSN 1799-960x (verkko)
ISBN 978-952-5993-02-8 (nid.)
ISBN 978-952-5993-03-5 (verkko)

https://helda.helsinki.fi/

Helsinki 2012

Sisällys

Esipuhe
HEIDI KRZYWACKI, KALLE JUUTI JA JARKKO LAMPISELKÄ 7

OPETTAJA JA OPETUS 11

Opetusharjoittelijoiden tutkivan matematiikan tunneilla esittämät kysymykset ja uskomukset niiden taustalla
RIINA HARRI, SUVI SIRONEN, MARKUS HÄHKIÖNIEMI JA JOUNI VIIRI 13

Avoin ongelmanratkaisu teknologia-avusteisessa oppimisympäristössä
MARKUS HÄHKIÖNIEMI, HENRY LEPPÄAHO JA ANTTI VIHOLAINEN 29

Teachers’ organization and representation of subject matter knowledge for teaching purposes: Biot-Savart and Ampère’s law
SHARAREH MAJIDI AND TERHI MÄNTYLÄ 45

Guided collaboration in making ordered concept maps in physics teacher education
TERHI MÄNTYLÄ 63

Erilaisia tapoja johdatella ongelmanratkaisutehtävään - esimerkkinä aritmagon-tehtävän ratkaiseminen alakoulun kolmannella luokalla
LIISA NÄVERI, MAIJA AHTEE, ANU LAINE, ERKKI PEHKONEN JA MARKKU S. HANNULA 81

”Matematiikka on värikäs matto” – matematiikan opettajiksi opiskelevien metaforia matematiikasta
PÄIVI PORTAANKORVA-KOIVISTO 99

Opettajaopiskelijoiden käsityksiä tutkimalla oppimisesta esi- ja alkuopetuksessa
LIISA SUOMELA 115

Aloittavien matematiikan pää- ja sivuaineopiskelijoiden uskomuksia matematiikasta
ANTTI VIHOLAINEN, MERVI ASIKAINEN JA PEKKA E. HIRVONEN 129

OPPILAS, OPISKELU JA OPPIMINEN 145

Developing an instrument to measure students' situational motivation
JUSSI HELAAKOSKI AND JOUNI VIIRI 147

Koulutulokkaat pituuden mittaajina
KAUKO HIHNALA 169

Matematiikka kouluaineena – yläkoulun oppilaiden tekemien oppiainevertailujen paljastamia matematiikkakäsityksiä
PÄIVI PORTAANKORVA-KOIVISTO JA HARRY SILFVERBERG 183

KESKUSTELURYHMÄ 201

The VIDEOMAT project
ANN-SOFI RÖJ-LINDBERG 203

Esipuhe

Helsingin yliopiston opettajankoulutuslaitoksella järjestettiin jo 28. kerran pidettävä Matematiikan, luonnontieteen ja teknologian opetuksen tutkimuksen päivät (27.-28.10.2011). Vuoden 2011 tutkimuksen päivien kokoava teema 'Ajattelua käsin ja käsittein' liittyi ajattelun kehollisuuteen (embodied cognition) ja sen soveltamiseen alan tutkimuksessa ja opetuksen kehittämisessä. Ajattelun kehollisuus korostaa ihmiskehon asettamia reunaehtoja ja sen antamia mahdollisuuksia kognitiiviselle toiminnalle. Kehollisuus on kiinnostavaa matematiikan, luonnontieteiden ja teknologian opetuksessa esimerkiksi oppimisvaikeuksien, teknologian hyödyntämisen ja erilaisten opetuksen haasteiden näkökulmasta.

Valittu teema näkyi erityisesti kutsuttujen puhujien esityksissä ja työpajojen tarjonnassa, joissa valotettiin kehollisuutta myös käytännön esimerkein ja aktiviteetein. Professori Ferdinando Arzarello (Università di Torino) tarkasteli esityksessään eleiden merkitystä oppimisessa ja käsitteellisen ymmärryksen kehittymisessä. Hän pohti erityisesti sitä, miten eleet sulautuvat yhteen kielellisen ja kirjallisen ilmaisun kanssa ja miten tämä näkyy luokkahuonetilanteessa. Arzarello nosti esiin didaktisia näkökulmia, joita matematiikan opetuksessa voisi huomioida luotaessa merkityksellisiä opetustilanteita. Toinen tutkimuksen päivien kutsuttu esiintyjä oli akatemiaprofessori Riitta Hari (Aalto Yliopisto), joka esityksessään tarkasteli käsien merkitystä ihmiselle aivotutkijan näkökulmasta. Käsiensä avulla ihminen muovaa sekä ympäristöään että aivojaan. Oppimisen kannalta tämä esimerkiksi tarkoittaa, että alkuaan ulkomaailmaan suuntautunut toiminta vähitellen automatisoituu ja sisäistyy.

Tutkimuksen päivien ohjelmassa oli yleisluentojen ja perinteisten paperiesitysten lisäksi myös työpajoja ja keskusteluryhmiä. Ajatuksena oli tarjota esitys- ja toimintamuotoja, jossa teoreettinen tutkimus ja käytäntö kohtaisivat ja kokoava teema 'Ajattelua käsin ja käsittein' valottuisi erityisesti. Tutkimuksen päivien ohjelma oli suunnattu tutkijoiden lisäksi myös muille konferenssiin osallistuville, opettajille ja yhteistyötahoille. Työpajoissa oli tarjolla ajankohtaisia ja koulutuksen kannalta mielenkiintoisia aiheita matematiikan, luonnontieteen ja teknologian opetuksen alaan liittyen, kuten esimerkiksi teknologian hyödyntäminen matematiikan ja luonnontieteen opetuksessa (Geogebra, laskimet) ja aktiivinen oppilastyö osana opiskelua.

Tässä kokoelmassa julkaistavat artikkelit antavat monipuolisen kuvan matematiikan, luonnontieteen ja teknologian opetuksen tutkimuksesta nykypäivänä – tutkimusaiheita on monia, niin myös lähestymistapoja. Artikkelit ovat käyneet läpi vertaisarvioinnin, joka on edesauttanut laadukkaiden kirjoitusten syntymistä. Haluamme esittää kiitoksen arvioitsijoille heidän antamastaan arvokkaasta panoksesta. Olemme ryhmitelleet artikkelit kahden teeman mukaan: 'Opettaja ja opetus' ja 'Oppilas, opiskelu ja oppiminen'.

Opettaja ja opetus

Useissa artikkeleissa korostetaan opettajan roolin ja opettajan tekemien ohjaavien kysymysten merkitystä oppilaan opiskelun ohjaajamisessa. Mäntylä havaitsi, että pelkkä luento-opetus ja pienryhmätyöskentely eivät riitä lämpötilan käsitteen oppimiseksi vaan opettajan on ohjattava kysymyksillään käsitteenmuodostusta. Harri, Sironen, Hähkiöniemi ja Viiri tarkastelevat opettajaopiskelijoiden esittämiä kysymyksiä opetusharjoittelussa tutkivan matematiikan tunneilla. Heidän tekemänsä havainnot ovat rohkaiseva osoitus siitä, että opettajankoulutuksessa voidaan vaikuttaa tulevien matematiikan opettajien ammatilliseen kehittymiseen ja valmiuksiin opettaa matematiikkaa. Ongelmanratkaisuprosessissa opettajan rooli on erityisen keskeinen, kuten sekä Hähkiöniemi, Leppäaho ja Viholainen että Näveri, Ahtee, Laine, Pehkonen ja Hannula toteavat. Tutkijat korostavat selkeän tavoitteenasettelun ja tehtävänannon merkitystä sekä opettajan kykyä reagoida eri tilanteissa oppilaan ongelmanratkaisuprosessin vaiheissa.

Opettajan tieto ja sen jäsentäminen on keskeistä hyvän opetuksen kannalta. Majidi ja Mäntylä tarkastelevat artikkelissaan opettajien tapaa jäsentää ja soveltaa tietämystään luonnontieteen opetuksessa. He ovat tutkineet opettajien tiedon jäsentymistä ja muotoja hyödyntämällä tutkimuksessaan käsitekarttoja ja haastattelemalla. Heidän käyttämässään esimerkissä Bio-Savartin lait opettajat näyttävät hyödyntävän matemaattisia malleja tiedon jäsentämisessä ja lisäksi tieto on erityisen verkottoitunutta.

Opettajaopiskelijat ovat tutkimuskohteena useammassa raportoidussa tutkimuksessa. Suomela tarkastelee artikkelissaan sitä, miten esi- ja alkuopetuksen opiskelijat luonnehtivat tutkimalla oppimista luonnontieteissä. Opiskelijoiden luonnehdinnoissa korostuvat havaintojen tekeminen ja kokeilu. Opiskelijat eivät kuitenkaan juurikaan puhu oppilaiden ihmettelystä ja kysymyksistä, joita pidetään tutkivan oppimisen lähestymistavoissa opetuksen keskeisenä lähtökohtana. Matematiikan aineenopettajaopiskelijoiden uskomuksia matematiikasta on käsitelty sekä Portaankorva-Koiviston että Viholaisen, Asikaisen ja Hirvosen kirjoittamissa artikkeleissa, joskin aihetta on lähestytty eri näkökulmista niin tutkimusmenetelmällisesti kuin käsitteellisesti. On haaste kouluttaa aineenopettajia, joiden uskomukset matematiikasta ja valmiudet opettajana myötävaikuttaisivat hyvän matematiikan opetuksen toteutumisessa myös tulevaisuudessa. Viholainen, Asikainen ja Hirvonen esittelevät pitkittäistutkimuksensa ensimmäisen vaiheen tuloksia opiskelijoiden kehittymisestä ja koulutusuudistuksesta. Portaankorva-Koiviston tutkimuksessa matematiikkauskomuksia on lähestytty tulkitsemalla opettajaopiskelijoiden reflektioprosessissa syntyneitä metaforia. Metaforien avulla nostetaan esiin kehittymässä ja olemassa olevia uskomuksia.

Oppilas, opiskelu ja oppiminen

Uskomukset ja käsitykset matematiikasta on yksi keskeinen teema, jota artikkeleissa käsitellään. Portaankorva-Koivisto ja Silfverberg tarkastelevat oppilaiden matematiikkakäsityksiä. He käyttävät tutkimuksensa aineistona oppilaiden kirjoittamia vastauksia, joissa heidän on pyydetty vertailemaan matematiikkaa johonkin toiseen valitsemaansa oppiaineeseen. He pohtivat artikkelissaan tutkimuksen lähestymistapoja ja sitä, miten tietoa oppilaiden käsityksistä voidaan saada. Helaakoski ja Viiri puolestaan tarkastelevat oppilaiden asenteita opiskelua kohtaan ja tutkimusinstrumentin kehittämistä oppilaiden tilannekohtaisen motivaation tutkimiseksi. He käsitteellistävät motivaatiota ja siihen liittyviä keskeisiä kysymyksiä ja nostavat esiin haasteita hyvän tutkimusinstrumentin kehittämiseksi. Hieman erilaisen näkökulman opiskeluun ja oppimiseen avaa Hihnalan artikkeli, jossa käsitellään koulunsa aloittavia oppilaita pituuden mittaajina. Hihnala on tarkkaillut oppilaita tuntityöskentelyn aikana ja tarkastelee artikkelissaan jo koulun alussa olemassa olevia ennakkokäsityksiä ja lähtövalmiuksia mittaamisesta. On haaste tukea oppilaiden käsitteellisen ymmärtämisen kehittymistä liittyen pituuden mittaamiseen ja mittayksiköiden käyttöön.

Perinteisten tutkimusraporttien lisäksi tässä artikkelikokoelmassa on mukana Ann-Sofi Röj-Lindbergin artikkeli, joka perustuu tutkimuksen päivillä järjestettyyn keskusteluryhmään. Teemana ryhmässä oli vertaileva luokkahuonetutkimus, jossa hyödynnetään videointia aineiston keräämisen menetelmänä. Artikkelissa valotetaan yhteistyössä toteutettavan pohjoismaisen luokkahuonetutkimuksen taustoja ja näkökulmia. Tavoitteena tutkimusprojektissa on vertailla ja saada tietoa erityisesti algebran opetuksesta eri maissa. Lisäksi hankkeessa on tavoitteena tutkia opettajien ammatillista kehittymistä ja toimintakulttuureja, joiden tarkasteluun kerätty aineisto tulee myös soveltumaan.

Toivotamme antoisia lukuhetkiä!

Helsingissä 15.10.2012

Heidi Krzywacki, Kalle Juuti ja Jarkko Lampiselkä

OPETTAJA JA OPETUS

Opetusharjoittelijoiden tutkivan matematiikan tunneilla esittämät kysymykset ja uskomukset niiden taustalla

RIINA HARRI, SUVI SIRONEN, MARKUS HÄHKIÖNIEMI
JA JOUNI VIIRI

riina.harri@sipoo.fi
Jyväskylän yliopisto, Opettajankoulutuslaitos

Tiivistelmä

Tämän tutkimuksen tavoitteena selvittää, miten paljon opetusharjoittelijat kysyvät erityyppisiä kysymyksiä GeoGebra-avusteisella tutkivan matematiikan oppitunnilla ja millaisia uskomuksia kysymysten esittämisen taustalla on. Oppilaat oppivat matematiikkaa, kun he opettajan ohjaamina tutkivat matematiikkaa tehtävissä, joihin heillä ei ole valmiita ratkaisumenetelmiä. Käytämme tällaisista opetusmenetelmistä nimitystä tutkiva matematiikka. Tutkivassa matematiikassa korostuu opettajan esittämien kysymysten merkitys. Tutkimuksen aineistona ovat kolmen opetusharjoittelijan videoidut oppitunnit sekä oppituntien jälkeen toteutetut videoreflektointihaastattelut. Luokittelimme opetusharjoittelijoiden esittämät kysymykset fakta-, ohjaaviin ja syventäviin kysymyksiin sekä analysoimme videoreflektointikeskusteluista, miksi he esittivät erityyppisiä kysymyksiä. Opetusharjoittelijat esittivät monipuolisesti erityyppisiä kysymyksiä. Kysymysten esittämisen taustalla oli useita tutkivan matematiikan mukaisia uskomuksia. Tutkimustulokset antavat siis rohkaisevia tuloksia tutkivan matematiikan mahdollisuuksista tukea opetusharjoittelijoiden kehitystä matematiikan opettajina.

Asiasanat

opettajan kysymykset, tutkiva matematiikka, uskomukset

Johdanto

Matematiikan opetusta on pyritty uudistamaan siten, että oppilaat osallistuisivat entistä aktiivisemmin matemaattiseen ongelmanratkaisuun ja opittavan matematiikan rakentamiseen vuorovaikutuksessa muiden oppilaiden ja opettajan kanssa. Eräs tällainen oppilaiden omaa matematiikan tutkimista korostava opetusmenetelmä on tutkiva matematiikka (Bray, 2011; Hähkiöniemi, 2011). Vaikka tutkivan matematiikan tapaisten opetusmenetelmien tehokkuudelle on runsaasti empiiristä todistusaineistoa ja opetussuunnitelmissakin korostetaan tämän kaltaista oppimisista ja opetusta, käytännössä opetuksen uudistuminen on ollut hidasta. Hillin (2000) mukaan usein käy niin, että opettajat palaavat opetuksessaan omalta kouluajaltaan tuttuihin menetelmiin. Opettajankoulutuksen yksi merkittävimmistä haasteista onkin rohkaista tulevia opettajia näkemään matematiikan opetuksen eri tavoin kuin heille itselleen matematiikkaa opetettiin (Nicol, 1999). Uskomukset siitä, miten matematiikkaa opitaan, ohjaavat opettajan toimintaa (Thompson, 1992). Siten uskomusten muuttuminen on avain opetuksen muuttumiseen. Toisaalta opettajien pitäisi kokeilla uusia opetusmenetelmiä, jotta heidän uskomuksensa voisivat muuttua. Kiistanalaista on, tulisiko opettajan uskomusten muuttua ennen opetuksen muuttumista vai päinvastoin (Philipp, 2007). Luultavasti opettajan uskomukset ja toiminta kehittyvätkin vuorotellen.

Tässä tutkimuksessa tarkastellaan kolmen matematiikan opetusharjoittelijan toimintaa tutkivan matematiikan tunneilla ja heidän uskomuksiaan matematiikan oppimisesta. Tutkimuskysymykset ovat:

1. Millaisia kysymyksiä ja miten paljon opetusharjoittelijat esittävät?
2. Millaisia uskomuksia opetusharjoittelijat liittävät kysymysten esittämiseen?

Tutkiva matematiikka

Tutkivalla matematiikalla tarkoitetaan oppilaslähtöistä, vuorovaikutusta korostavaa opetusmenetelmää, jossa oppilaat itse tutkivat jotain matematiikan ilmiötä tehtävissä, joihin heillä ei ole valmiita ratkaisumenetelmiä (Hähkiöniemi, 2011). Tutkivan matematiikan oppitunti rakentuu alustus-, tutkimus- ja koontivaiheesta (Stein, Engle, Smith & Hughes, 2008).

Alustusvaiheessa opettaja varmistaa, että oppilaat ymmärtävät ratkaistavaksi annettavat tehtävät, mutta ei esitä valmiita ratkaisumenetelmiä tai anna esimerkkejä. Opettaja voi myös kerrata aiemmin opittua, korostaa tehtävien merkityksellisyyttä tai motivoida oppilaita.

Tutkimusvaiheessa oppilaat ratkaisevat tehtäviä kahden tai kolmen hengen ryhmissä opettajan kierrellessä ohjaamassa heidän työskentelyään. Tutkimusvaiheessa tärkeintä on, että opettaja kuuntelee oppilaita, on aidosti kiinnostunut heidän ajattelustaan ja aktivoi heidät yhä syvällisempään matemaattiseen päättelyyn. Hähkiöniemi ja Leppäaho (2012) ovat havainnollistaneet opettajan toimintaa erottamalla kolme ohjaamisen muotoa. Esimerkiksi jos opettaja huomaa

oppilaan saaneen johonkin tehtävään vastauksen, opettaja voi käyttää aktivoivaa ohjausta pyytämällä oppilasta selittämään, mistä hän tietää vastauksen olevan oikein. Samassa tilanteessa opettaja käyttää passivoivaa ohjausta, jos hän itse selittää, miksi vastaus on oikein. Pinnallisessa ohjauksessa opettaja ei taas ollenkaan kiinnitä huomiota vastauksen perustelemiseen vaan esimerkiksi toteaa vastauksen olevan oikein.

Koontivaiheessa opettaja pyytää oppilaita esittämään ratkaisumenetelmiään ja johtaa koko luokan yhteistä keskustelua. Koontivaiheessa opettaja myös tiivistää tunnin opetuksen ja ottaa käyttöön standardit merkinnät.

Oppilaiden omaa tutkimista nopeuttamaan ja helpottamaan voidaan tarvittaessa käyttää matematiikan opetukseen kehittyjä tietokoneohjelmia kuten GeoGebraa (ks. Hähkiöniemi, 2011). Tällöin havaintojen tekeminen on helppoa, mutta oppilaat tarvitsevat opettajan tukea siirtyäkseen deduktiiviseen päättelyyn (ks. Hähkiöniemi & Leppäaho, 2012). Tutkivassa matematiikassa teknologian käyttö suunnitellaan siten, että oppilaat saavat itse käyttää tietokonetta.

Tutkivalla matematiikalla on yhtymäkohtia Hakkaraisen, Longan ja Lipposen (2004) tutkivan oppimisen malliin. Myös Hakkaraisen ym. mallissa korostetaan oppilaiden omaehtoista ongelmalähtöistä työskentelyä ja selitysten muodostamista. Tutkiva matematiikka ei kuitenkaan sisällä Hakkaraisen ym. mallin vaiheita ja on toteutettavissa lyhyemmässä ajassa pidemmän projektin sijasta. Tutkiva matematiikka muistuttaa myös tutkivaa luonnontieteiden oppimista (NRC, 2000). Varsinkin käytettäessä GeoGebran tapaisia tietokoneohjelmia myös matematiikan oppimisessa voidaan tehdä empiirisiä havaintoja, muodostaa näille selityksiä deduktiivisen päättelyn kautta ja vertailla erilaisia perusteluja.

Opettajan esittämät kysymykset

Opettajan esittämistä kysymyksistä löytyy useita luokittelumalleja (ks. mm. Daines, 2001; Harri, 2010; Ahtee, Pehkonen, Krzywacki-Vainio, Lavonen & Jauhiainen, 2005; Myhill, 2006; Sahin & Kulm, 2008). Tässä tutkimuksessa käytimme Sahinin ja Kulmin (2008) kehittämää luokittelua, koska se sopii hyvin tutkivaan matematiikkaan. Sahin ja Kulm (2008, s. 224-225) määrittelevät erilaiset kysymystyypit seuraavasti:

Syventävät kysymykset (Probing questions)

- Pyytää oppilaita selittämään tai tarkastelemaan ajatteluaan.

- Pyytää oppilaita käyttämään aiempia tietojaan ja soveltamaan niitä kyseiseen ongelmaan tai ideaan.
- Pyytää oppilaita perustelemaan tai todistamaan ideansa.

Ohjaavat kysymykset (Guiding questions)

- Kysyy tiettyä vastausta tai ratkaisun seuraavaa askelta, kun oppilaat ovat jumissa.
- Pyytää oppilaita ajattelemaan yleistä heuristiikkaa tai strategiaa (Polya, 1957).
- Kysyy sarjan faktakysymyksiä, jotka antavat oppilaille ideoita tai vihjeitä, jotka tukevat tai johdattavat kohti jonkin käsitteen ymmärtämistä tai menetelmät täydentämistä.

Faktakysymykset (Factual questions)

- Kysyy oppilaalta tiettyä faktaa tai määritelmää.
- Kysyy oppilaan vastausta tehtävään.
- Kysyy oppilaalta seuraavaa vaihetta menetelmässä.

Sahinin ja Kulmin (2008) tarkasteleman kahden kuudennen luokan opettajan viidellä matematiikan tunnilla esittämistä kysymyksistä valtaosa oli faktakysymyksiä: ensimmäistä vuotta työssä olevan opettajan kysymyksistä keskimäärin 62 % oli faktakysymyksiä ja kokeneemman opettajan kysymyksistä n. 80 % oli faktakysymyksiä. Myös useiden muiden tutkimusten mukaan valtaosa opettajan esittämistä kysymyksistä on faktakysymyksiä vastaavia suljettuja kysymyksiä, joihin opettajalla on ennalta odottama yksi oikea vastaus eli ns. suljettuja kysymyksiä (Edwards & Mercer, 1987; Mercer & Dawes, 2008; Myhill & Dunkin, 2002; Perkkilä, 2002).

Uskomukset

Uskomuksilla tarkoitetaan yksilön toimintaan vaikuttavia henkilökohtaisia näkemyksiä, joille ei välttämättä löydy perusteluita objektiivisessa tarkastelussa (Pietilä, 2002). Philipp (2007) selventää uskomusten ja tiedon välistä eroa siten, että henkilöt, joilla on samasta asiasta erilaiset uskomukset voivat silti pitää toistensa näkökulmia mielekkäinä. Sen sijaan erilaisen tiedon asiasta omaavat henkilöt eivät voi pitää toistensa tietoja mielekkäinä (Philipp, 2007). Matematiikkaan liittyviä uskomuksia ovat esimerkiksi: ”matematiikka on laskemista” ja ”matematiikkaa opitaan ulkoa opettelemalla sääntöjä” (ks. esim. Shoenfeld, 1985). Nämä uskomukset eivät ole yhdenmukaisia tutkivan matematiikan kanssa. Sen sijaan

Bray (2011, s.11) esittää seuraavien uskomusten olevan tutkivan matematiikan mukaisia:

1. Matematiikka on verkko toisiinsa liittyviä käsitteitä ja proseduureja (ja myös koulumatematiikan tulisi olla sitä).
2. Matematiikan proseduurien hallinta ei välttämättä tarkoita käsitteellistä ymmärtämistä.
3. Matematiikan käsitteiden ymmärtäminen on tärkeämpää kuin matemaattisten proseduurien muistaminen.
4. Jos oppilaat oppivat matemaattiset käsitteet ennen proseduureja, he todennäköisemmin myös ymmärtävät proseduurit opiskellessaan ne. Jos oppilaat oppivat ensin proseduurit, he eivät todennäköisemmin opi koskaan käsitteitä.
5. Lapset kykenevät ratkaisemaan matemaattisia ongelmia uusin tavoin ennen kuin heille on opetettu kuinka ratkaista ongelma. Peruskouluikäiset lapset ymmärtävät matematiikkaa paremmin ja omaavat joustavampia strategioita kuin aikuiset olettavat heidän osaavan.
6. Lasten tapa ajatella matematiikkaa eroaa siitä miten aikuiset olettavat heidän ajattelevan. Esimerkiksi arkielämän kontekstit tukevat lasten alustavaa ajattelua, kun taas symbolit eivät tue.
7. Vuorovaikutuksen aikana opettajan tulisi antaa oppilaiden tehdä ajattelutyötä mahdollisimman paljon itse.

Vaikka matematiikan opettajien uskomuksista ja niiden vaikutuksesta opettajan toimintaan on tehty useita tutkimuksia (mm. Calderhead, 1996; Furinghetti & Pehkonen, 2002; Thompson, 1992), tutkijat ovat yksimielisiä siitä, että opettajan uskomuksista ja niiden vaikutuksista opetukseen tarvitaan yhä lisää tietoa. Uskomuksia tutkimalla voidaan kasvattaa ymmärrystä opettajan toimintaan vaikuttavista tekijöistä sekä selvittää tekijöitä, kuinka tukea opettajia opetuksensa kehittämisessä. Tutkimuksissa onkin saatu rohkaisevia tuloksia koulutusohjelmien mahdollisuudesta muuttaa opettajien uskomuksia ja toimintaa enemmän tutkivan matematiikan suuntaiseksi (Fennema ym., 1996; Raymond & Santos, 1995).

Menetelmä

Aineiston keruu

Tutkimuksen aineisto on osa tutkiushanketta ”Tutkiva matematiikka opetusharjoittelussa”, jonka osana kaksi ensimmäistä kirjoittajaa tekivät pro gradu -tutkielmansa (ks. Harri & Sironen, 2011). Osana matematiikan aineenopettajien pedagogisia aineopintoja matematiikan aineenopettajaopiskelijoille opetettiin yhteensä 18 tuntia tutkivan matematiikan periaatteita, joista GeoGebra oli käytössä kuudella tunnilla. Tutkivan matematiikan periaatteiden opetus pyrittiin liittämään opetusharjoittelijoiden omakohtaisiin ja käytännönläheisiin kokemuksiin mm. ohjausharjoituksella, jossa opetusharjoittelijat pohtivat, miten ohjaisivat oppilaita hypoteettisissa tilanteissa (ks. Hähkiöniemi & Leppäaho, 2012). Tämän jälkeen opetusharjoittelijat toteuttivat syventävässä opetusharjoittelussaan tutkivan matematiikan oppitunnit. Opetusharjoittelijat suunnittelivat tunnit 2–4 opiskelijan ryhmissä Hähkiöniemen ja harjoittelukoulun opettajien ohjauksessa. Tähän tutkimukseen valitsimme näistä kolmen opetusharjoittelijan pitämät tunnit, joilla kaikilla oppilaat käyttivät GeoGebraa. Valinta perustui oppilaiden ikien, tuntien aiheiden ja opetusharjoittelijoiden esittämien kysymysten määrän vaihteluun. Lisäksi valittujen opetusharjoittelijoiden haastatteluaineistosta arveltiin saavan analyysissä monipuolisesti tietoa. Opetusharjoittelijoiden B (9. luokka) ja C (7. luokka) tunnit olivat 45 minuutin mittaisia. Opetusharjoittelijan A tunti oli 90 minuutin mittainen, josta kuitenkin tutkivan matematiikan osuus oli 71 minuuttia (lukion lyhyt matematiikka). Opetusharjoittelijoiden pitämät oppitunnit videoitiin seuraamalla opetusharjoittelijaa, jolla oli langaton mikrofoni. Kuvaaja liikutti videokameraa siten, että oppilaiden tietokoneiden ruudut ja heidän kynällä tekemänsä merkinnät näkyivät opetusharjoittelijan keskustellessa heidän kanssaan.

Oppituntien jälkeen opetusharjoittelijat osallistuivat erillisiin videoreflektointikeskusteluihin, joissa hyödynnettiin stimulated recall -menetelmää (Denley & Bishop, 2010). Keskustelut toimivat teemahaastatteluina (Hirsjärvi & Hurme, 2000). Haastattelut toteutettiin kahden tai kolmen kuukauden kuluttua kunkin opetusharjoittelijan videoidusta harjoitustunnista. Haastatteluiden pituus vaihteli 25 minuutista 40 minuuttiin. Haastattelut nauhoitettiin sanelimella. Jokaiselta opetusharjoittelijan oppitunnilta valittiin haastatteluun kaksi tilannetta, joissa opetusharjoittelija esitti edellä kuvatut ohjaavan tai syventävän kysymyksen. Videoidut kohdat näytettiin, jotta opetusharjoittelijan olisi helpompi palauttaa mieleen tutkimukseen valitut ohjaan ja syventävän kysymyksen tilanteet. Kunkin kohdan jälkeen keskusteltiin etukäteen laadituista teemoista. Teemoiksi valikoituivat oppilaan ajattelu, kysymysten tavoite, ideaali tilanne ja tunteet. Teemat valittiin, koska niiden perusteella ennakoitiin olevan mahdollista saada esille opetusharjoittelijoiden matematiikkaan liittyviä uskomuksia. Teemoihin laadittiin avoimia kysymyksiä. Esimerkiksi kysymysten tavoitteen teemaan liittyivät seuraavat kysymykset: Mitä tavoittelit näillä kysymyksillä? Miksi tavoittelit tätä? Mitä hyötyä / huonoja puolia tällaisten kysymysten esittämisestä on oppilaalle / opettajalle? Lisäksi tutkijat pohtivat etukäteen mahdollisia tilanteeseen sopivia tarkentavia kysymyksiä kuten ”miksi perusteleminen on tärkeää” tai ”miksi oppilaat pitää saada selittämään ratkaisunsa”.

Aineiston analyysi

Kysymysten luokittelu

Tässä tutkimuksessa opetusharjoittelijan esittämät kysymykset luokiteltiin Atlas.ti -ohjelmalla syventäviin, ohjaaviin, fakta- ja muihin kysymyksiin hieman muokaten Sahinin ja Kulmin (2008) luokkien määritelmiä:

Syventävä kysymys edellyttää oppilaan selittävän tai tarkastelevan ajatteluaan, ratkaisumenetelmää tai matemaattista ideaa. Tällainen on esimerkiksi opettajan kysymys ”Miten päädyitte tuohon vastaukseen?”

Ohjaava kysymys antaa potentiaalisesti oppilaalle vihjeen tai ohjaa oppilaan tehtävän ratkaisua. Potentiaalinen tarkoittaa, että oppilaiden ei välttämättä täydy ymmärtää vihjettä tai ohjausta, mutta kysymys tarjoaa tähän mahdollisuuden. Esim.: ”Onko siinä jokin säännönmukaisuus?”

Faktakysymyksessä kysytään jotain tunnetuksi oletettua matemaattista asiaa. Erona ohjaaviin kysymyksiin on, että tässä oppilaat eivät ole ratkaisemassa tehtävää, johon kysymys liittyy eikä kysymys ohjaa tai anna vihjettä ratkaisuun. Esim.: ”Mikä on suunnikkaan määritelmä?”

Muu kysymys ei ole mikään edellä mainituista kolmesta kysymystyypistä vaan esimerkiksi luokan hallintaan liittyvä. Esim.: ”Ovatko kaikki avanneet GeoGebran?”

Kysymykseksi katsottiin opetusharjoittelijan suullisesti esittämä lausahdus, johon odotetaan oppilaalta suullista vastausta. Siten kysymyksen ei tarvinnut olla kieliopillisesti kysymys eikä kaikkia kieliopillisia kysymyksiä luokiteltu kysymyksiksi. Harri ja Sironen (2011) ovat esittäneet tarkemmat määritelmät kysymysluokille.

Haastattelujen analyysi

Haastattelut litteroitiin. Tutkijat merkitsivät tekstistä, mitä uskomuksia opetusharjoittelijan vastaus mahdollisesti ilmensi. Tutkijat analysoivat ensin erikseen litteroiduista videoreflektointihaastatteluista opetusharjoittelijoiden uskomusten esiintymistä ja vertasivat niitä sitten keskenään. Pääosin merkinnät olivat yhtenevät, mutta joitakin merkintöjä tarkennettiin neuvottelun jälkeen. Uskomusten etsimisen lähtökohtana toimi Brayn (2011) uskomusluettelo, mutta sitä muokattiin aineistosta löydettyjen uskomusten mukaan.

Tulokset

Tässä luvussa esitellään, miten opetusharjoittelijoiden kysymykset jakaantuivat eri kysymystyyppeihin sekä millaisia uskomuksia heillä oli kysymysten esittämiseen liittyen.

Opetusharjoittelijoiden esittämät kysymykset

Opetusharjoittelijoiden esittämien kysymysten määrät on esitetty Taulukossa 1. Tuloksia tulkitessa on huomattava, että opetusharjoittelijan A tunti oli kaksoistunti. Opetusharjoittelija A kysyi tasapuolisesti kaikkia kysymystyyppejä. Sen sijaan opetusharjoittelijat B ja C kysyivät eniten fakta- ja muita kysymyksiä.

Taulukko 1. Opetusharjoittelijoiden esittämien kysymysten jakautuminen eri kysymystyyppeihin

	Fakta-kysymykset	*Ohjaavat kysymykset*	*Syventävät kysymykset*	*Muut kysymykset*	*Yhteensä*
A	34 (28,1 %)	32 (26,5 %)	28 (23,1 %)	27 (22,3 %)	121
B	22 (32,4 %)	13 (19,1 %)	5 (7,4 %)	28 (41,1 %)	68
C	10 (26,3 %)	4 (10,5 %)	4 (10,5 %)	20 (52,6 %)	38
Yhteensä	66 (29,1 %)	49 (21,6 %)	37 (16,3 %)	75 (33,0 %)	227

Matematiikkaan liittyvien kysymysten tarkastelemiseksi Taulukossa 2 on esitetty fakta-, ohjaavien ja syventävien kysymysten suhteelliset osuudet, kun muita kysymyksiä ei ole mukana tarkastelussa. Kokonaisuutena faktakysymyksiä kysyttiin eniten, mutta ohjaavien ja syventävien kysymysten osuus oli kuitenkin huomattava. Kysymystyyppien jakauman valossa opetusharjoittelijat toteuttivat onnistuneesti opetusta, jossa oppilaan rooli mahdollisesti aktivoituu enemmän perinteisen passiivisen vastaanottajan roolin sijasta.

Taulukko 2. Opetusharjoittelijoiden esittämien fakta-, ohjaavien ja syventävien kysymysten suhteelliset frekvenssit

	Faktakysymykset	*Ohjaavat kysymykset*	*Syventävät kysymykset*
A	36,2 %	34,0 %	29,8 %
B	55,0 %	32,5 %	12,5 %
C	55,6 %	22,2 %	22,2 %
Yhteensä	43,4 %	32,2 %	24,3 %

Esimerkin vuoksi käsittelemme tarkemmin opetusharjoittelijan A tunnilta haastatteluun valitut tilanteet, joissa hän esittää ohjaavia ja syventäviä kysymyksiä. Opetusharjoittelijan A pitämän lukion lyhyen matematiikan tunnin tavoitteena oli ymmärtää ympyrälle piirretyn kahden tangentin muodostaman tangenttikulman ja kehäkulman välinen yhteys. Eräässä tehtävässä lukiolaisten piti tutkia GeoGebra-sovelluksen avulla kuinka suuri keskuskulma α voi olla (ks. Kuvio 1).

Kuvio 1. GeoGebra-sovellus, jossa pisteitä A ja B voi raahata

Eräs lukiolainen oli ratkaisemassa tehtävää, mutta ei ollut ymmärtänyt kuinka suuri keskuskulma voi enimmillään olla. Hänen ehdottaessa astelukua 180 käytiin seuraava keskustelu:

1. A: Voiko se olla 180? *[Ohjaava kysymys]*
2. Lukiolainen: Kyllä se mun mielestä voi.
3. A: Mm elikkä tää on, tää ois 180? Minkälaisii nää kaks suoraa [ympyrän tangentit] silloin olis? *[Ohjaava kysymys]* Jos siitä leikkaa joku suora tollei.
4. Lukiolainen: Niiku yhensuuntasia.
5. A: Joo. Jos ne on yhensuuntasia, niin mitenkäs käy tälle pisteelle [tangenttien leikkauspiste] täällä? Jos nää kaks on yhensuuntasia ja tää ois niitten leikkauspiste nii? *[Ohjaava kysymys]*
6. Lukiolainen: Sittenhän ne tavallaan ei vois olla siinä kun ne ois tollee niinku vinossa
7. A: eli se ei voi olla koskaan 180, eihän?
8. Lukiolainen: Eli ei voi olla 180.

Tässä tilanteessa opetusharjoittelija esitti ohjaavia kysymyksiä, joiden avulla lukiolainen huomasi, että keskuskulma ei voi olla 180 astetta. Vaikka opetusharjoittelija lopuksi vahvistaa suoraan sanomalla, ettei keskuskulma ”voi olla koskaan 180”, niin lukiolainen sai kuitenkin ennen tätä itse opetusharjoittelijan ohjaamana päätellä tämän.

Eräs toinen lukiolaisryhmä oli kirjoittanut vastauspaperiin keskuskulman voivan suurimmillaan olla 179 astetta. Tällöin käytiin seuraava keskustelu:

1. A: Mistä päättelitte, että toi voi olla 179 astetta? *[Syventävä kysymys]*
2. Lukiolainen 1: No voihan se olla vaikka 179,9999… Mut sit jos se on 180 astetta [Oppilas 2 puhuu päälle]
3. Lukiolainen 2: Niin sit se menee päällekäin
4. Lukiolainen 1: Niin sit ne on sillee yhdensuuntaset ne suorat tällee ja sit ne ei leikkaa ikinä
5. A: Joo, just.
6. Lukiolainen 1: Ku sillee alle 180 ku se on, niin sit se voi leikata.
7. A: Oikein hyvä, siitähän se nimenomaan johtuu.

Tässä tilanteessa opetusharjoittelija sai syventävällä kysymyksellä lukiolaiset itse perustelemaan ratkaisunsa. Virheellisestä vastauksesta huolimatta lukiolaiset olivat selvästi ymmärtäneet kuinka suuri kehäkulma voi olla.

Kysymysten esittämiseen liittyvät uskomukset

Tunnin jälkeisistä videoreflektiokeskusteluista tulkittiin useita opetusharjoittelijoiden kysymysten esittämisen taustalla olevia uskomuksia. Kaikki kolme opetusharjoittelijaa uskoivat, että yhteyksien muodostaminen on tärkeää matematiikan oppimisessa. Esimerkiksi opetusharjoittelija C kertoi oppilaiden hyötyvän ohjaavista kysymyksistä seuraavasti

> *…löytäis jotenki sillai jotai yhteyttä tai semmosta säännönmukaisuutta tai jotain semmoista perustelua sieltä taustalta et miks se menee niinku miten ne menee siinä ruudulla näyttäs menevän ja sitten osais vielä yhdistää niitä jotenkin semmoisiin asioihin mitä on ehkä opittu. (C, ohjaava)*

Kaikki opetusharjoittelijat uskoivat myös, että matematiikan proseduurien hallinta ei välttämättä tarkoita käsitteellistä ymmärtämistä ja matematiikan käsitteiden ymmärtäminen on tärkeämpää kuin ulkoa oppiminen. Opetusharjoittelijalla C tämä ilmeni hänen selittäessään syventävän kysymyksen tilannetta:

> *Oppilas joutuu itekin sitten miettimään että mitä se on oikeesti tehny eikä vaa tee suurin piirtein silmät kiinni ja ajatteleekin sitten että mitä on tullu tehtyä että miten on päätynyt tällaiseen tilanteeseen. (C, syventävä)*

Kaikki opetusharjoittelijat myös korostivat, että oppilaat voivat ajatella odottamattomin tavoin eikä ajattelutapa välttämättä vastaa kirjallista vastausta. Esimerkiksi opetusharjoittelija A selitti, mitä hyötyä syventävän kysymyksen esittämisestä on opettajalle:

> *No opettajalle on totta kai se hyöty että niinku ku se on vaan vastaus paperissa on vaan yks luku ei siitä voi tietää yhtään sillä tavalla voi siitä arvata että ne on ymmärtäny sen mutta ei siitä voi oikeestaan vielä niinku päätellä siitä osaamisesta yhtään mitään. (A, syventävä)*

Opetusharjoittelija C korosti lisäksi, että opettajan on tärkeää selittää juuri oppilaiden ajattelutavasta lähtien:

> *Jos ne on jonkun asian sillai käsittäny eri tavalla mut kuitenkin oikein jotain ihan ihme kautta, mitä sitten ite ei tuu ajatelleeks, ja jos sä sitten yrittää selittää sen jutun jotain toista kautta, mitä ne ei ymmärrä ja sitten ne vaan turhautuu. (C, ohjaava)*

Kaikki opetusharjoittelijat uskoivat myös, että oppilaiden tulee tehdä ajattelutyötä mahdollisimman paljon itse. Esimerkiksi opetusharjoittelija B selitti ohjaavaa kysymystään seuraavasti:

> *Sen muistamisen kannalta että jos se on ite tuotettua tietoa mahollisimman paljon ite tuotettua tietoa niin siitä jää paremmin muistijälki ja se pystyy palauttamaan myöhemmin myös. (B, ohjaava)*

Samoin opetusharjoittelija A selitti ohjaavaa kysymyksen merkitystä oppimisen tehokkuuden kannalta seuraavasti:

> *No kun se ei oo niiku ylhäältä annettu että opettaja kertoo nää asiat suoraan vaikka mää voisin perustella tän ihan samalla tavalla siinä niinkun edessä mutta sitten jos se oppilas ite muodostaa sen niin mun mielestä se on tehokkaampi. (A, ohjaava)*

Lisäksi kaikki opetusharjoittelijat uskoivat, että matematiikan kielentäminen on olennaista matematiikan oppimisessa. Esimerkiksi opetusharjoittelija A selitti kielentämisen merkitystä seuraavasti:

> *…puhumaan ja se on ihan eri asia kertoa jostakin asiasta ku vaan miettiä sitä mielessään, että koska matematiikka on kuitenkin jollakin tavalla semmoinen kieli jotenkin että niin. (A, ohjaava)*

Opetusharjoittelija B puolestaan korosti syventävän kysymyksen merkitystä selittäessään kuinka kielentäminen lisää ymmärrystä:

> *"Jotenki sen kun muotoilee sanoiksi niin sen ymmärtää sen jälkeen itekkin paremmin, että se ei jää vaan irralliseks vaan se selittäminen jotenki vahvistaa, vahvistaa sitä ymmärrystä sitte." (B, syventävä)*

Pohdinta

Aiemmat tutkimustulokset kertovat opettajan käyttävän usein faktakysymyksiä vastaavia ns. suljettuja kysymyksiä, joihin on yksi oikea ennalta opettajan odottama vastaus (Edwards & Mercer, 1987; Mercer & Dawes, 2008; Harri, 2010; Myhill & Dunkin, 2002; Perkkilä, 2002; Sahin & Kulm, 2008). Tällöin oppilaalle ei jää tilaa tuoda esiin omia ajatuksiaan eikä aloitteitaan. Tämän tutkimuksen tulokset eroavat aiemmista tutkimustuloksista. Opetusharjoittelijat esittivät faktakysymysten ohella myös paljon syventäviä ja ohjaavia kysymyksiä. Syventävät ja ohjaavat kysymykset edellyttävät oppilaalta aktiivisempaa omaa ajatteluprosessia sekä paljastavat oppilaan ajattelutavan.

Opetusharjoittelijat toivat esille myös useita tutkivan matematiikan mukaisia uskomuksia. Kaikilla kolmella opetusharjoittelijalla ilmeni seuraavat uskomukset, jotka vastaavat osittain Brayn (2011) listaa tutkivan matematiikan mukaisista uskomuksista:

- Yhteyksien muodostaminen on tärkeää matematiikan oppimisessa. (Bray, 2011, Uskomus 1)
- Matematiikan proseduurien hallinta ei välttämättä tarkoita käsitteellistä ymmärtämistä. Matematiikan käsitteiden ymmärtäminen on tärkeämpää kuin ulkoa oppiminen. (Bray, 2011, Uskomukset 2-3)
- Oppilaat voivat ajatella odottamattomin tavoin eikä ajattelutapa välttämättä vastaa kirjallista vastausta. (Bray, 2011, Uskomukset 5-6)
- Oppilaiden tulee tehdä ajattelutyötä mahdollisimman paljon itse. (Bray, 2011, Uskomus 7)
- Matematiikan kielentäminen on olennaista matematiikan oppimisessa.

Brayn (2011) listaamien uskomusten lisäksi opetusharjoittelijat toivat vahvasti esille matematiikan kieliaspektin, jonka merkityksen tunnistamista matematiikan oppimisessa Joutsenlahti (2010) pitää tärkeänä.

Tutkimuksen tulokset viittaavat siihen, että sekä opetusharjoittelijoiden toiminta (kysymysten esittäminen) että uskomukset ovat kehittyneet siihen suuntaan,

mitä pidetään tehokkaana matematiikan opettamisena. Tutkiva matematiikka saattaa olla menetelmänä sellainen, joka luo opettajalle tilaisuuden rohkaista oppilaita tuomaan esille ajatuksiaan ja perustelujaan, esittämällä heille sellaisia kysymyksiä, joihin ei ole vain yhtä ainoaa oikeaa vastausta. Myös muissa tutkimuksissa on saatu rohkaisevia tuloksia koulutusohjelmien mahdollisuudesta kehittää opettajien uskomuksia ja toimintaa (Fennema, Carpenter, Franke, Levi, Jacobs & Empson, 1996; Raymond & Santos, 1995). Olennaisena tekijänä näissä tutkimuksissa sekä tässä tutkimuksessa on opettajien omakohtaiset kokemukset uudenlaisesta opetustavasta tutkijoiden tukemana. Tällaisia tilaisuuksia opetusharjoille pitäisikin tarjota opettajankoulutuksessa.

Tässä tutkimuksessa tuimme opetusharjoittelijoita tutkivan matematiikan kokeilemisessa siten, että kytkimme opettajankoulutuksen kurssit läheisesti opetusharjoiteluun. Opetusharjoittelijat eläytyivät itse oppilaan asemaan ratkaistessaan GeoGebra-avusteisia tehtäviä, keskustelivat useista tutkivan matematiikan esimerkeistä, suunnittelivat tutkivan matematiikan tehtäviä, harjoittelivat reagoimaan hypoteettisiin tutkivan matematiikan opetustilanteisiin (ks. Hähkiöniemi & Leppäaho, 2012) sekä tutustuivat tutkivaa matematiikkaa käsitteleviin tutkimuksiin. Opetusharjoittelijat myös suunnittelivat ja toteuttivat kukin yhden tutkivan matematiikan tunnin. Tunnin suunnitteluun sai huomattavasti avustusta opettajankouluttajalta (Hähkiöniemi), ja suunnitelmaa useimmiten muokattiinkin huomattavasti ensimmäisen version jälkeen. Käytännössä havaitsimme myös, että tunnin jälkeiset palautekeskustelut sekä videoreflektointihaastattelut tarjosivat opetusharjoittelijoille mahdollisuuden reflektoida kokemuksiaan yhdessä tutkijoiden kanssa. Lisäksi osana tutkimusmenetelmäopintojaan opetusharjoittelijat analysoivat toteuttamansa tunnin, kirjoittivat tutkimusraportin ja esittivät tuloksensa seminaarissa. Tämäntyyppinen käytännönläheinen opetusjakso vaikuttaa lupaavalta edistämään tutkivaan matematiikkaan perehtymistä. Kuitenkin siitä, kuinka matematiikkaa opetetaan tutkivalla otteella valmistumisen jälkeen, tarvitaan lisää tutkimustietoa.

Lähteet

Ahtee, M., Pehkonen, E., Krzywacki, H., Lavonen, J., & Jauhiainen, J. (2005). Kommunikointi luokassa – opetuksen ydin? Teoksessa A. Virta, K. Merenluoto & P. Pöyhönen (Toim.), *Ainedidaktiikan ja oppimistutkimuksen haasteet opettajankoulutukselle: ainedidaktinen symposium 11.2.2005* (s. 94–100). Turun yliopiston kasvatustieteiden tiedekunta. Julkaisusarja B 75.

Bray, W. S. (2011). A collective case study of the influence of teacher's beliefs and knowledge on error-handling practices during class discussion of mathematics. *Journal for Research in Mathematics education, 42*(1), 2–38.

Calderhead, J. (1996). Teachers: Beliefs and knowledge. Teoksessa D.C. Berliner & R.C. Calfee (Toim.), *Handbook of Educational Psychology* (s. 709–725). New York: Macmillan.

Daines, D. (2001). Are teachers asking higher order questions? *Education 106*(4), 368–374.

Denley, P., & Bishop, K. (2010). The potential of using stimulated recall approaches to explore teacher thinking. Teoksessa S. Rodrigues (Toim.), *Using analytical frameworks for classroom research: Collecting data and analyzing narrative* (s. 109–124). New York: Routledge.

Fennema, E., Carpenter, T., Franke, M., Levi, L., Jacobs, V. R., & Empson, S. B. (1996). A longitudinal study of learning to use children´s thinking in mathematical instruction. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 403–434.

Hakkarainen, K., Lonka, K., & Lipponen, L. (2004). *Tutkiva oppiminen: järki, tunteet ja kulttuuri oppimisen sytyttäjinä*. Porvoo: WSOY.

Harri, R. (2010). *Luokanopettajaopiskelijan matematiikkakuvan ilmeneminen luokkahuonekeskustelussa*. Pro gradu -tutkielma. Jyväskylän yliopisto. Opettajankoulutuslaitos.

Harri, R., & Sironen, S. (2011). *Matematiikan aineenopettajien uskomusten ilmeneminen ja heidän esittämänsä kysymykset GeoGebra-avusteisella oppitunnilla*. Pro gradu -tutkielma. Jyväskylän yliopisto. Matematiikan ja tilastotieteen laitos.

Hill, L. (2000). Theory practice and reflection: a pre-service primary mathematics education programme. *Teachers and Teaching: Theory and Practice, 6*(1), 23–39.

Hirsjärvi, S., & Hurme, H. (2000). *Tutkimushaastattelu. Teemahaastattelun teoria ja käytäntö*. Helsinki: Yliopistopaino.

Hähkiöniemi, M., & Leppäaho, H. (2012). Prospective mathematics teachers' ways of guiding high school students in GeoGebra-supported inquiry tasks. *The International Journal for Technology in Mathematics Education, 19*(2), 45–58.

Hähkiöniemi, M. (2011). Miten opettaja kokee valmiiksi suunnitellun opetusjakson tukevan GeoGebra-avusteisen tutkivan matematiikan toteuttamista? Teoksessa H. Silfverberg & J. Joutsenlahti (Toim.), *Tutkimus suuntaamassa 2010-luvun matemaattisten aineiden opetusta. Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimuksen päivät Tampereella 14.–15.10.2010* (s. 151–170). Tampere: Tampereen yliopistopaino.

Furinghetti, F., & Pehkonen, E. (2002). Rethinking characterizations of beliefs. Teoksessa E. Pehkonen, G. C. Leder & G. Törner (Toim.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (s. 39–58). Dordrecht: Kluwer.

Joutsenlahti, J. (2010). Matematiikan kirjallinen kielentäminen lukiomatematiikassa. Teoksessa M. Asikainen, P. E. Hirvonen & K. Sormunen (Toim.), *Ajankohtaista matemaattisten aineiden opetuksen ja oppimisen tutkimuksessa. Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimuspäivät Joensuussa 22.–23.10.2009* (s. 3–16). Joensuu: Itä-Suomen yliopisto.

Mercer, N., & Dawes, L. (2008). The value of exploratory talk. Teoksessa N. Mercer & S. Hodgkinson (Toim.), *Exploring talk in School* (s. 55–72). London: SAGE.

Myhill, D. (2006). Talk, talk, talk: Teaching and learning in whole class discourse. *Research Papers in Education, 21*(1), 19–41.

Myhill, D., & Dunkin, F. (2005). Questioning learning? *Language in Education, 19*(5), 415–427.

National Research Council. (2000). *Inquiry and the National Science Education Standards*. Washington, DC: The National Academies Press.

Nicol, C. (1999). Learning to teach mathematics: Questioning, listening and responding. *Educational Studies in Mathematics, 37*(1), 45–66.

Perkkilä, P. (2002). *Opettajien matematiikkauskomukset ja matematiikan oppikirjan merkitys alkuopetuksessa.* Jyväskylän yliopisto. Jyväskylä studies in education, psychology and social research 195.

Pietilä, A. (2002). *Luokanopettajaopiskelijoiden matematiikkakuva. Matematiikkakokemukset matematiikkauskomusten muodostajina*. Helsingin yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Tutkimuksia 238.

Philipp, R. A. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affects. Teoksessa F. Lester (Toim.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 257–315). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Polya, G. (1957). *How to solve it: A new aspect of a mathematical method* (2. painos). Princeton, NJ: Princeton University Press.

Raymond, A. M., & Santos, V. (1995). Preservice elementary teachers and self-reflection: How innovation in mathematics teachers preparation challenges mathematics beliefs. *Journal of Teacher Education, 46*(1), 58–70.

Sahin, A., & Kulm, G. (2008). Sixth grade mathematics teachers' intentions and use of probing, guiding, and factual questions. *Journal of Mathematics Teacher Education, 11*(3), 145–172.

Shoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, FL: AP.

Stein, M., Engle, R., Smith, M., & Hughes, E. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10*(4), 313–340.

Thompson, A. G. (1992). Teachers beliefs and conceptions: A synthesis of research. Teoksessa D. A. Grows (Toim.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 127–146). New York, NY: MacMillan.

Avoin ongelmanratkaisu teknologia-avusteisessa oppimisympäristössä

MARKUS HÄHKIÖNIEMI[1], HENRY LEPPÄAHO[1] JA ANTTI VIHOLAINEN[2]

markus.hahkioniemi@jyu.fi
[1] Jyväskylän yliopisto, Opettajankoulutuslaitos
[2] Itä-Suomen yliopisto, Fysiikan ja matematiikan laitos

Tiivistelmä

Tämän tutkimuksen tavoitteena on selvittää, miten oppilaiden ongelmanratkaisuprosessit etenevät teknologia-avusteisella avoimen ongelmanratkaisun oppitunnilla ja miten opettajana toimiva opetusharjoittelija ohjaa oppilaitaan. Tarkastelemme yhtä 9. luokan avoimen ongelmanratkaisun tuntia. Tunnilla seitsemän paria ratkaisi Huvipuisto-ongelmaa, jossa pyydetään tutkimaan GeoGebra-ohjelmaa käyttäen, mikä olisi optimaalisin ja tasapuolisin sijainti neljän kaupungin rakentamalle huvipuistolle. Tunti videoitiin kahdella videokameralla sekä nauhoittamalla oppilaiden tietokoneiden näytöt ruudunkaappausohjelmalla. Aineiston perusteella kehitimme avoimen ongelmanratkaisun mallin, jossa oppilaat liikkuvat ongelman rajaamisen, ratkaisun etsimisen, hypoteesin muodostamisen sekä perustelemisen tai hypoteesin tarkastelemisen välillä. Tulostemme mukaan oppilaiden ongelmanratkaisuprosesseista muodostui erilaisia reittejä, joissa hypättiin joidenkin vaiheiden yli ja palattiin takaisin tiettyihin vaiheisiin. Opettaja vaikutti huomattavasti oppilaiden siirtymiseen vaiheesta toiseen ja palaamiseen aiempaan vaiheeseen.

Asiasanat

avoin ongelmanratkaisu, GeoGebra, ongelmanratkaisumalli

Johdanto

Matemaattinen ongelmanratkaisu on monivaiheinen prosessi, jota kuvaamaan on kehitetty useita erilaisia malleja (Lester, 1978; Mason, Burton & Stacy, 1982; Pólya, 1945; Schoenfeld, 1985). Käytettävissä olevat apuvälineet ja käsiteltävän ongelman luonne ovat olennaisia tekijöitä, jotka vaikuttavat matemaattisen ongelmanratkaisuprosessin kulkuun oppitunnilla. Nykyaikaisen teknologian käyttö mahdollistaa ongelmatilanteen tutkimisen uudella tavalla (Healy & Hoyles, 2001), ja ongelman avoin luonne puolestaan ohjaa ratkaisuprosessia kysymyksenasetteluun sekä erilaisten ratkaisuideoiden kehittelyyn (Nohda, 2000).

Tässä raportoidun tutkimuksen aineistoksi valikoitui opetusharjoittelijan pitämä yhdeksännen luokan matematiikan oppitunti, jonka tavoitteena oli tutustuttaa oppilaat ensimmäistä kertaa GeoGebra-ohjelmaan ja avoimeen ongelmanratkaisuun. Tapaustutkimuksemme tarkoituksena on selvittää: 1) Miten oppilaiden ongelmanratkaisuprosessit etenevät teknologia-avusteisella avoimen ongelmanratkaisun oppitunnilla? ja 2) Miten opettajana toimiva opetusharjoittelija ohjaa oppilaiden ratkaisuprosesseja toteutetulla tunnilla?

Ongelmanratkaisumalleja

Pólyan (1945) tunnetun mallin mukaan matemaattinen ongelmanratkaisu koostuu neljästä vaiheesta, jotka ovat 1) *ongelman ymmärtäminen*, 2) *suunnitelman laatiminen*, 3) *suunnitelman toteuttaminen* ja 4) *arviointi*. Tämän pohjalta on kehitetty useita muita ongelmanratkaisumalleja (Lester, 1978; Mason ym., 1982; Schoenfeld, 1985). Näissäkin malleissa on Pólyan vaiheita 1 ja 4 vastaavat vaiheet. Sen sijaan suurin osa muutoksista koskee Pólyan vaiheita 2 ja 3, jotka saattavat antaa hieman liian suoraviivaisen kuvan ongelmanratkaisusta. Schoenfeld (1985) jakaa Pólyan toisen vaiheen kahteen osaan: *Suunnittelu*-vaiheessa (design) ratkaisija eksplisiittisesti suunnittelee ja kontrolloi ratkaisuprosessia, kun taas *tutkimus*-vaiheessa (exploring) ratkaisija käyttää heuristiikkoja, tutkii vastaavia ongelmia ja saattaa tarvittaessa palata analyysi vaiheeseen. Schoenfeld painottaa, että suunnittelu- ja tutkimusvaiheet vuorottelevat siten, että ongelmanratkaisuprosessi etenee epälineaarisesti. Myöskään Lesterin (1978) mukaan ongelmanratkaisuprosessi ei yleensä etene suoraviivaisesti suunnitelman laatimisesta sen toteuttamiseen. Sen sijaan ratkaisija liikkuu edestakaisin seuraavien vaiheiden välillä: *tavoitteen analysointi, suunnitelman laadinta, suunnitelman toteuttaminen* ja *suorituksen arviointi* (Lester, 1978). Myös Mason ym. (1982) painottavat ongelmanratkaisuprosessin epälineaarisuutta. Polyan mallin vaiheiden 1-3 sijaan ratkaisuprosessissa vuorottelevat *sisäänpääsyn* (entry) ja *hyökkäyksen* (attack) vaiheet, kun ratkaisijan saa uusia ideoita ja yrittää toteuttaa niitä, mutta kohtaa vaikeuksia joiden johdosta hän joutuu etsimään uusia lähestymistapoja (Mason ym.,1982).

Ongelmanratkaisuprosessin epälineaarinen ja syklinen luonne aiheuttavat sen, että ratkaisuprosessiin sisältyy tutkimista ilman selkeää tavoitetta ja toimintasuunnitelmaa. Matemaattinen ongelmanratkaisu onkin usein erilaisten ideoiden löytämistä ja näiden ideoiden tarkastelua sekä soveltamista. Ratkaisuprosessin kulkua ei ratkaisija voi yleensä etukäteen kovin tarkkaan tietää tai suunnitella.

Avoin lähestymistapa

Ongelman sanotaan olevan *avoin*, mikäli joko ongelman *lähtötilanne* tai *lopputilanne* on avoin (Pehkonen, 1997) tai *ratkaisuprosessi* on avoin (Nohda, 2000). Mikäli lähtötilanne on avoin, ratkaisija joutuu itse valitsemaan, mitä asioita hän ryhtyy ongelmatilanteesta tutkimaan. Lopputilanteen avoimuus tarkoittaa sitä, että ongelmaan on olemassa useampi kuin yksi oikea vastaus, ja prosessin avoimuus tarkoittaa sitä, että ongelma voidaan ratkaista usealla eri tavalla.

Avoin lähestymistapa on Japanissa kehitetty opetusmetodi, jossa avoimia ongelmia käytetään oppilaiden matemaattisen ajattelun aktivointiin (Nohda, 2000). Avoimessa lähestymistavassa, kuten myös *tutkivassa matematiikassa* (ks. Harri, Sironen, Hähkiöniemi & Viiri, painossa; Hähkiöniemi & Leppäaho, 2012), oppiminen tapahtuu ongelmia ratkaisemalla ja ratkaisumenetelmistä keskustelemalla. Steinin, Englen, Smithin ja Hughesin (2008) mukaan tutkivan matematiikan oppitunti koostuu seuraavista kolmesta vaiheesta:

1. Alustusvaiheessa opettaja johdattelee oppilaat ongelmatilanteeseen tarjoamatta kuitenkaan valmiita ratkaisumenetelmiä tai esimerkkejä.
2. Tutkimusvaiheessa oppilaat työskentelevät pienissä ryhmissä ja yrittävät ratkaista ongelmaa ja opettaja ohjaa heidän työskentelyään.
3. Koontivaiheessa oppilaat esittävät keksimiään ratkaisuja ja keskustelevat ratkaisumenetelmistä. Lopuksi opettaja tekee yhteenvedon oppitunnista

Myös avointa lähestymistapaa soveltavassa matematiikan opetuksessa käytetään samanlaisia vaiheita (Nohda, 2000). Nohdan mukaan avoimeen lähestymistapaan perustuvassa opetuksessa on olennaista, että oppilaat aktiivisesti osallistuvat ongelman muotoiluun ja erilaisten ratkaisumenetelmien konstruointiin ja että he edellisten ratkaisujen pohjalta muotoilevat uusia, edellistä yleisempään tilanteeseen liittyviä ongelmia.

Ongelmanratkaisutilanteessa opettaja voi tukea oppilaan työskentelyä monin tavoin, esimerkiksi kysymällä huolellisesti harkittuja kysymyksiä (Sahin & Kulm, 2008; Martino & Maher, 1999). Pólya (1965) neuvoo opettajaa esimerkiksi olemaan kiinnostunut oppilaan työskentelystä sekä antamaan oppilaalle mahdollisuuksia opetella hypoteesien muodostamista ja niiden todistamista. Avoimessa lähestymistavassa ja tutkivassa matematiikassa opettajan tulisi ohjata oppilasta yhä syvällisempiin matemaattisiin tutkimuksiin. Hähkiöniemi ja Leppäaho (2012) ovat luokitelleet kolme erilaista tasoa opettajan ohjaukselle erityisesti tutkivassa matematiikassa:

1. Pinnallisessa ohjauksessa (surface-level guidance) opettaja ei kiinnitä oppilaan huomiota johonkin oppilaan ratkaisun olennaiseen asiaan kuten ratkaisun perustelemiseen.
2. Passivoivassa ohjauksessa (inactivating guidance) opettaja paljastaa oppilaalle potentiaalisen tutkimuskohteen kuten ratkaisun perustelun.
3. Aktivoivassa ohjauksessa (activating guidance) opettaja ohjaa oppilasta tutkimaan ratkaisuaan, esimerkiksi perustelemaan sen.

Dynaamisen geometrian ohjelmat

Dynaamisen geometrian ohjelmat (dynamic geometry software, DGS) rikastuttavat oppilaan matemaattista ongelmanratkaisua monin tavoin. Esimerkiksi Healyn ja Hoylesin (2001) tutkimuksen mukaan dynaamisen geometrian ohjelmien käyttö voi auttaa oppilaita tutkimaan geometrisia riippuvuussuhteita ja muodostamaan niitä koskevia hypoteeseja, selittämään niitä ja jopa tarjota perustan deduktiivisten todistusten rakentamiselle.

Dynaamisen geometrian ohjelmat tarjoavat visuaalisia havainnollistuksia, jotka ongelman ratkaisijan tulisi osata yhdistää usein formaalissa muodossa esitettyyn matemaattiseen kontekstiin. Tähän liittyen Arzarello, Olivero, Paola ja Robutti (2002) ovat erottaneet kaksi erilaista päättelyprosessia: *Ylenevässä prosessissa* (ascending process) ratkaisija siirtyy havainnollistuksista teoriaan esimerkiksi havaitessaan jonkin säännönmukaisuuden ja muotoillessaan siitä matemaattisen kaavan. *Alenevassa prosessissa* (descending process) ratkaisija siirtyy teoriasta havainnollistuksiin esimerkiksi selittäessään matemaattisen teorian avulla tekemäänsä havaintoa (Arzarello ym., 2002). Ylenevän prosessin avulla ratkaisija voi konstruoida hypoteeseja ja vakuuttua niiden paikkaansa pitävyydestä. Aleneva prosessi puolestaan auttaa ratkaisijaa ymmärtämään, miksi väittämät ovat totta.

Kun perusteleminen ymmärretään totuuden varmistamisen sijasta syyn muodostamisena havaitulle ilmiölle, voi dynaamisen geometrian ohjelmien käyttö motivoida oppilaita perustelemaan tuloksensa deduktiivisesti (Jones, 2000). Useat tutkimukset ovat kuitenkin osoittaneet, että oppilaat tarvitsevat opettajan ohjausta siirtyäkseen havainnollistuksiin perustuvasta empiirisestä työskentelystä deduktiiviseen päättelyyn (Christou, Mousoulides, Pittalis & Pitta-Pantazi, 2004; Jones, 2000; Lew & So, 2008).

Tutkimusmenetelmät

Tämä tutkimus on osa artikkelin ensimmäisen kirjoittajan johtamaa laajempaa projektia, jonka tavoitteena on tutkia matematiikan aineenopettajaopiskelijoiden tutkivan matematiikan soveltamista opetusharjoittelussa. Tässä projektissa opetusharjoittelussa olleille matematiikan aineenopettajaopiskelijoille opetettiin aluksi tutkivan matematiikan periaatteet: He mm. harjoittelivat oppilaiden ohjaamista hypoteettisissa opetustilanteissa (ks. Hähkiöniemi & Leppäaho, 2012). Tämän jälkeen kukin opetusharjoittelija toteutti yhden tutkivan matematiikan oppitunnin peruskoulun yläluokilla (7-9) tai lukiossa.

Eräällä opetusharjoittelijan pitämällä yhdeksännen luokan tunnilla käsiteltiin seuraavaa huvipuisto-ongelmaa:

Neljä kaupunkia rakennuttaa yhteistyössä hulppean huvipuiston. Tutki GeoGebraa käyttäen, mikä olisi optimaalisin ja tasapuolisin sijainti huvipuistolle. Pohdi erilaisia tilanteita sen mukaan, miten kaupungit ovat sijoittuneet toisiinsa nähden. [Muokattu Christoun, Mousoulidesin, Pittaliksen & Pitta-Pantazin (2005) esittämästä ongelmasta.]

Oppitunti (kesto 45 minuuttia) toteutettiin tietokoneluokassa. Oppilaita ohjattiin käyttämään sivulla http://users.jyu.fi/~mahahkio/huvipuisto olevaa GeoGebra-applettia. Tässä appletissa GeoGebraan on lisättynä työkalu, jolla voidaan laskea yhteen neljän valitun pisteen etäisyydet yhdestä pisteestä.

Tunnin alussa opetusharjoittelija esitteli oppilaille GeoGebra-ohjelman. Hän näytti oppilaille myös muutaman esimerkin GeoGebran käytöstä. Oppilaat käyttivät GeoGebraa ensimmäistä kertaa. Tämän jälkeen oppilaat yrittivät pareittain työskennellen ratkaista huvipuisto-ongelmaa GeoGebraa apuna käyttäen. Opetusharjoittelija kiersi luokassa ohjaamassa oppilaita. Yhteensä työpareja oli seitsemän. Kullakin työparilla oli käytössään yksi tietokone. Lopuksi opetusharjoittelija kokosi yhteen oppilaiden keksimät ratkaisut. Erilaisista ratkaisuista myös keskusteltiin ja niitä arvioitiin koko luokan kanssa. Oppitunnin ajasta 11 minuuttia kului alustusvaiheeseen, 23 minuuttia tutkimusvaiheeseen ja 11 minuuttia koontivaiheeseen.

Oppitunti videoitiin artikkelin ensimmäisen ja toisen kirjoittajan toimesta käyttäen kahta videokameraa. Toinen kameroista seurasi opetusharjoittelijaa ja toinen yhtä työparia. Sekä opetusharjoittelijalla että kuvattavalla työparilla oli langaton mikrofoni puheen nauhoitusta varten. Tämän lisäksi kaikkien työparien tietokoneruudun tapahtumat nauhoitettiin ruudunkaappausohjelman avulla. Ruudunkaappausohjelman nauhoituksista on mahdollista kuulla myös työparien keskustelut. Myös oppilaiden tuottamat kirjalliset ratkaisut kerättiin tutkimusaineistoksi.

Sekä videoiden että ruudunkaappausohjelman tallenteiden analyysissä käytettiin Atlas.ti-sovellusta. Ensimmäisessä vaiheessa kustakin tallenteesta erotettiin oppitunnin alustusvaihe, tutkimusvaihe ja koontivaihe. Seuraavaksi erotettiin kohdat, joissa opettaja keskustelee kunkin parin kanssa. Kunkin parin ratkaisut ja ratkaisuyritykset koodattiin ja kuvailtiin. Tämän perusteella analysoitiin, millaisia vaiheita oppilaiden ongelmanratkaisuprosessissa esiintyi, ja löydetyille vaiheille laadittiin määritelmät. Tämän jälkeen kunkin parin työskentelystä etsittiin ja koodattiin nämä vaiheet. Lopuksi vielä analysoitiin opettajan ohjauksen ja GeoGebran käytön merkitystä kussakin vaiheessa. Tämän kaiken pohjalta laadittiin kullekin työparille kokoava kaavio, joka kuvasi työparin siirtymiä eri vaiheiden välillä ja opettajan ohjauksen merkityksestä näissä siirtymissä. Näiden kaavioiden pohjalta laadittiin avointa ongelmanratkaisuprosessia teknologia-avusteisessa oppimisympäristössä kuvaava malli.

Tulokset

Analyysissä löydettiin neljä matemaattisen ongelmanratkaisuprosessin vaihetta: *ongelman rajaaminen, ratkaisun etsiminen, hypoteesin muodostaminen* ja *hypoteesin perusteleminen tai sen tarkasteleminen.* Seuraavassa esitetään määrittelyt näille vaiheille ja esitetään aineistosta muutamia niitä havainnollistavia esimerkkejä. Oppilaiden nimet on vaihdettu englanninkielisiksi, jotta tuloksia voisi verrata englanninkielisiin julkaisuihimme.

Ongelman rajaaminen

Mikäli ongelman lähtötilanne on avoin, ratkaisija joutuu tekemään valintoja tutkittavien asioiden suhteen. Ongelmanratkaisuprosessin tätä vaihetta kutsutaan *ongelman rajaamiseksi*. Ratkaisija ei välttämättä ilmaise eksplisiittisesti tekemiään rajauksia. Tässä tutkimuksessa ongelman rajaamisvaiheeseen koodattiin kaikki ne kohdat, joissa oppilaat tekivät valintoja neljän kaupungin sijainnin suhteen tai muodostivat kriteereitä huvipuiston sijainnille.

Usein ongelman rajaaminen on avoimen ongelman ratkaisuprosessin ensimmäinen vaihe. Alla olevassa esimerkissä Mary ja Mark kuitenkin lähtivät etsimään ratkaisua miettimättä kaupunkien sijaintia. Aluksi heidän työskentelynsä vaikuttikin perustuvan sattumanvaraiseen kokeilemiseen. Opettaja (opetusharjoittelija) kuitenkin ohjasi heitä rajaamaan ongelmaa:

> *Opettaja: Mites Markilla ja?*
>
> *Mark: Ei oikein mitenkään.*

> *Opettaja: Mikäs teillä on niinkun, onks teillä joku idea, mitä te yritätte tässä?*
>
> *Mark: Ei. Kokeilemalla.*
>
> *Opettaja: Joo. Aivan. No ei, ei se huono oo. Kannattaisko ehkä lähteä semmosesta vähän yksinkertaisemmasta. Nyt teillä on ne kaupungit tollein vähän randomisti tuolla, mut jos ottasitte ensin vaikka semmosen tilanteen, että noi on jotenkin vähän simppelimmin sijoittuneet toisiinsa nähden.*
>
> *Mary: On noi nyt aika simppelisti.*
>
> *Opettaja: Siirrätte ne sillain, et se ois niinku tehtävä ois helpompi ratkaista aluks. Raahaatte ne pisteet semmosiin sijainteihin. [...] Ratkaiskaa ensin vaikka joku helppo tilanne. Ja sit lähetään siitä vaikeuttamaan sitä.*

Tämän jälkeen Mary ja Mark siirsivät kaupunkeja siten, että ne sijoittuivat suorakulmion muotoon. He piirsivät muodostuneelle suorakulmiolle lävistäjät ja ehdottivat, että huvipuisto kannattaisi rakentaa lävistäjien leikkauspisteeseen. Kirjallisessa vastauksessaan he perustelivat tätä ratkaisua seuraavasti:

> *Tasapuolisin, koska jokaisesta kaupungista on sama etäisyys huvipuistoon.*

Tässä tapauksessa opettaja siis ohjasi työparin rajaamaan ongelmaa, mutta ei kertonut, kuinka rajaus tulisi tehdä. Rajaamisen jälkeen oppilaat melko nopeasti löysivät myös hypoteesin.

Ratkaisun etsiminen

Ratkaisun etsimisvaiheeseen sisältyy kaikki matemaattinen työskentely tehtävään liittyen ennen hypoteesin muodostamista. Välttämättä ratkaisun etsiminen ei kuitenkaan johda hypoteesin muodostamiseen. Irene ja Ian piirsivät eräässä ratkaisussaan keskinormaalit neljälle kaupunkeja yhdistävälle janalle ja sijoittivat huvipuiston kahden piirretyn keskinormaalin leikkauspisteeseen. Tämän jälkeen opettaja ohjasi heitä etsimään muita ratkaisuja:

> *Opettaja: Joo. Hyvä. Te ootte oikeilla jäljillä. Tota. Löytäsittes te jonkun semmosen tavallaan tavan löytää aina se piste, se tietty oikee piste, tavallaan kun näähän voi olla sijoittunu nää kaupungit niinku periaattees vaikka toi ois sentin tännemmäs, niin miten te sitten keksisitte kätevästi sen pisteen? Löytyskö joku semmonen yleinen, yleinen tapa niinku ratkasta toi ongelma?*

Irene: No emmä tiiä.

Ian: No jos laittaa keskinormaalit jokaikiseen paikkaan

Irene: Niin.

Ian: Ja sitten sen leikkauspisteen.

Opettaja: Teeppä se. Katotaan mitä tulee. […] (Ian piirtää keskinormaalit viidelle kaupunkeja yhdistävälle janalle.)

Opettaja: Nyt meillä on ongelma. Nää ei leikkaa kaikki samassa pisteessä.

Irene: Eli se on laitettava tohon keskelle (osoittaa keskinormaalien muodostamaa kolmiota).

Opettaja: Mites te sen saatte?

Ian: Jonkun ympyrä-systeemin [avulla].

Irene: Niin.

Opettaja: Kokeilkaas. Toi on. Hei toi on ihan loistavaa.

Yllä olevassa esimerkissä opettaja ohjasi oppilaita kohti matemaattisempaa ratkaisua. Opettaja myös osoitti oppilaille ongelman: keskinormaalit eivät leikanneet samassa pisteessä. Opettaja ei kuitenkaan kiinnittänyt huomiota siihen, että oppilaat itse asiassa olivat jo edellisessä ratkaisussaan melko lähellä matemaattisesti perusteltua ratkaisua: Kahden keskinormaalin leikkauspistehän on yhtä etäällä kolmesta kaupungista.

Hypoteesin muodostaminen

Hypoteesin muodostamisvaiheessa ratkaisija muodostaa ehdotuksen ongelman vastaukseksi. Huvipuisto-ongelman tapauksessa tämä tarkoittaa ehdotusta huvipuiston sijainnille. Yhteensä työparit muodostivat 20 erilaista hypoteesia (ks. Taulukko 1).

Taulukko 1. Oppilaiden hypoteesit huvipuisto-ongelmaan

Hypoteesi	*f*
Neliön keskipiste (5 ratkaisua) tai suorakulmion keskipiste (2 ratkaisua)	7
Lävistäjien leikkauspiste (epäsymmetrinen nelikulmio)	1
Piste, jossa yhteenlaskettu etäisyys kaupunkeihin on pienin	1
Lävistäjien keskipisteitä yhdistävän janan keskipiste	1
Kaupunkeja siirretään siten, että molempien lävistäjien keskipisteet sijaitsevat samassa pisteessä. Huvipuisto sijoitetaan tähän pisteeseen.	1
Lävistäjien keskinormaalien leikkauspiste	2
Kahden vierekkäisen kaupunkeja yhdistävän janan keskinormaalien leikkauspiste (yhtä suuri etäisyys kolmeen kaupunkiin)	1
Piirretään keskinormaalit kaupunkeja yhdistäville janoille. Huvipuisto sijoitetaan kolmen keskinormaalien leikkauspisteen kautta kulkevan ympyrän keskipisteeseen.	2
Kaupungit ovat samalla suoralla. Huvipuisto sijoitetaan kahta ulointa kaupunkia yhdistävän janan keskipisteeseen (1 ratkaisu) tai kahta sisintä kaupunkia yhdistävän janan keskipisteeseen (1 ratkaisu).	2
Kaupungit ovat samalla suoralla. Huvipuisto sijoitetaan kahta ulointa kaupunkia yhdistävän janan keskinormaalille kaupunkeja yhdistävän janan ulkopuolelle.	2

Kaikkia näitä ehdotuksia ei kirjattu kirjallisiin vastauksiin, vaan ne tulivat esiin keskusteluissa. Erilaisten hypoteesien runsas lukumäärä ilmentää hyvin ongelman lopputilanteen avointa luonnetta. Suosituin ja usein myös ensimmäiseksi mieleen tullut ongelman rajaus oli sijoittaa kaupungit joko neliön tai suorakulmion kärkiin. Tällöin luonnollinen hypoteesi oli sijoittaa huvipuisto neliön tai suorakulmion keskipisteeseen.

Hypoteesin perusteleminen tai sen tarkasteleminen

Hypoteesin perusteleminen tarkoittaa vaihetta, jossa ratkaisija pyrkii selittämään, miksi hypoteesi olisi järkevä tai hyväksyttävä. Huvipuisto-ongelman tapauksessa oppilaat perustelivat huvipuiston sijaintia. Oppilaiden perustelut eivät välttämättä ole matemaattisia, mutta heidän näkökulmastaan ne perustelevat hypoteesin mielekkyyttä. Seuraavassa esimerkissä Carol ja Cecilia selittävät järjestyksessään toista hypoteesiaan opettajalle.

Carol & Cecilia: Miten me selitetään tää?

Opettaja: (Lukee kirjallista vastausta.) Hei, hei loistavaa. Elikkä puisto on... [...] Mites te ... öö?

Carol: Me tehtiin jana, jana ja sitten niille keskinormaalit ja tossa oli niitten keskinormaalien leikkauspiste (osoittaa kuviota).

Cecilia: Ja sitten noissa on sama etäisyys (osoittaa toisen lävistäjän kaupunkeja) ja noissa on sama etäisyys (osoittaa toisen lävistäjän kaupunkeja).

Opettaja: Okei. Piirtäkääs vielä ne. Katotaan.

Carol: (Oppilaat piirtävät ratkaisunsa, ks. Kuvio 1.) Me laskettiin etäisyydet. Näihin kahteen se on sama ja näihin kahteen se on sama. Sit se olis sillein suunnilleen reilua niille kaikille kaupungeille.

Opettaja: Joo okei. Aivan eli se on teidän mielestä tavallaan optimaalisin sijainti sen takia, että kaikilla on yhtä pitkä matka sinne.

Cecilia: Ei. No näillä on lyhyempi matka kuin näillä, mutta silti niin kun millään kaupungilla ei oo yksin pidempi matka.

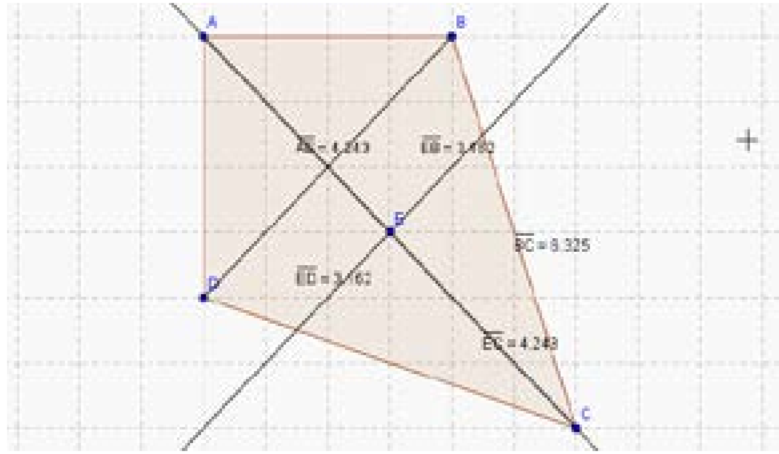
Opettaja: Yhm, yhm. Joo, kyl mä taisin ymmärtää. Kyl mä taisin ymmärtää. [...]

Carol: Mut miten me selitetään tää tilanne?

Opettaja: Just niinkun äsken selititte mulle? (Opettaja pyynnöstä oppilaat vielä kirjoittavat perustelun.)

Carol ja Cecilia piirtävät keskinormaalit vastakkaisia kaupunkeja yhdistäville janoille AC ja BD ja ehdottavat, että huvipuisto sijoitettaisiin näiden keskinormaalien leikkauspisteeseen E (ks. Kuvio 1). Piirroksessa on hämäävä se, että janan BD keskinormaali sijoittuu janan AC päälle. Opettajalla näyttää olevan vaikeuksia ymmärtää oppilaiden hypoteesia. Hän pyytää oppilaita selittämään ja piirtämään ratkaisun. Opettaja itse asiassa ehdottaa virheellistä perustelua hypoteesille, mutta sitä Carol ja Cecilia eivät hyväksy, vaan selittävät uudelleen omaa perusteluaan.

Tässä tilanteessa opettaja ja oppilaat vaikuttavat tasaveroisilta ”matemaatikoilta”, jotka yrittävät ymmärtää toistensa ideoita. Tämä havainnollistaa opettajan roolia kysymysten esittäjänä ja oppilaiden selitysten kuuntelijana.



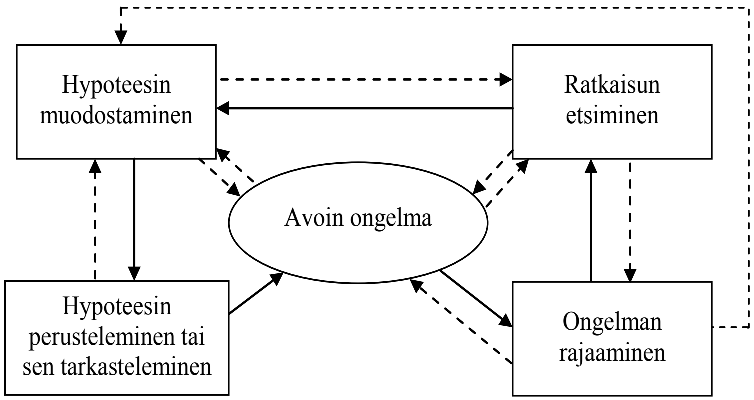
Kuvio 1. Carolin ja Cecilian piirros GeoGebralla

Joissakin tapauksissa oppilaat eivät eksplisiittisesti perustelleet hypoteesiaan, vaan selittivät, kuinka olivat päätyneet hypoteesiinsa tai sitten pohtivat onko hypoteesi järkevä vai ei. Nimesimme tällaiset tilanteet *hypoteesin tarkastelemiseksi*. Esimerkiksi erään toisen parin ensimmäisessä ratkaisussa kaupungit olivat neliön kärjissä. He ehdottivat, että huvipuisto tulisi sijoittaa neliön keskipisteeseen ja tarkastelivat tätä hypoteesia empiirisesti piirtämällä kaupunkien kautta kulkevan ympyrän ja mittaamalla etäisyydet huvipuistosta (neliön/ympyrän keskipisteestä) kuhunkin kaupunkiin. Etäisyyksien toteaminen yhtä suuriksi toimi heille vahvistuksena hypoteesin järkevyydestä.

Pohdinta

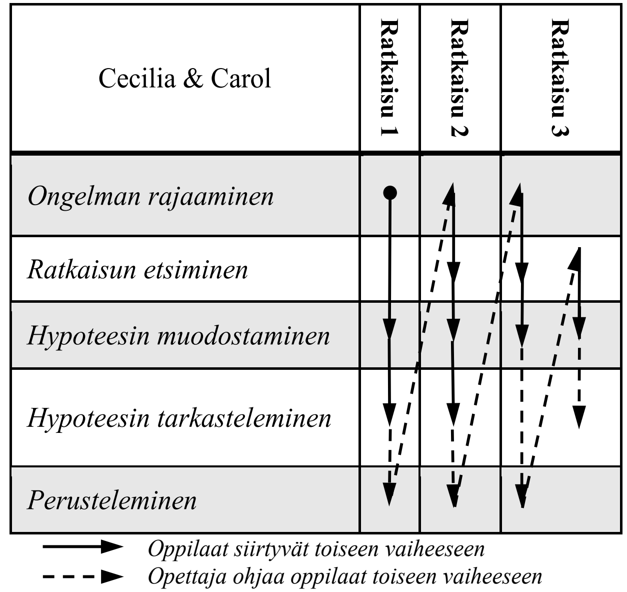
Työparien ongelmanratkaisuprosessien analyysin pohjalta muodostettiin avoimen ongelmanratkaisun malli (Kuvio 2). Tämän mallin perusajatuksena on, että avoimeen ongelmaan liittyvässä ratkaisuprosessissa ratkaisija liikkuu neljän eri vaiheen välillä. Kuviossa 2 yhtenäiset nuolet kuvaavat suoraviivaisesti etenevää ideaalisen ongelmanratkaisuprosessin kulkua ja epälineaariseen ratkaisuprosessiin mahdollisesti sisältyvät etenemissuunnat on kuvattu katkonuolilla.

Prosessi alkaa kun ratkaisija tiedostaa ongelman ja päättää ryhtyä ratkaisemaan sitä. Ideaalisessa tapauksessa ratkaisija ensin *rajaa ongelmaa* tekemällä valintoja tutkittavan asian ja tehtävän annon suhteen. *Ratkaisun etsimisvaiheessa* ratkaisija kehittää ja kokeilee erilaisia ideoita. Tämä voi sitten johtaa *hypoteesin muodostamiseen*. Tämän jälkeen ratkaisijan olisi suotavaa jatkaa *hypoteesinsa tarkastelua* ja sen paikkaansa pitävyyden tutkimista. Ihanteellisessa tilanteessa ratkaisija myös *perustelee* hypoteesinsa. Tämän jälkeen ideaalinen ratkaisija palaa takaisin alkuun ja rajaa ongelman uudella tavalla. Näin alkaa uusi kierros tässä mallissa.



Kuvio 2. Avoimen ongelmanratkaisun malli

Käytännössä ongelmanratkaisuprosessi ei kuitenkaan usein etene näin suoraviivaisesti, vaan ratkaisija joutuu palaamaan edeltävään vaiheeseen. Kuviosta 3 voidaan tarkastella yhden oppilasparin ratkaisuprosessien etenemistä. Kuviossa 3 yhtenäiset nuolet kuvaavat parin omatoimista siirtymistä ja katkoviivoin merkityt nuolet opettajan avustuksella tapahtunutta siirtymistä ratkaisuvaiheesta toiselle. Kuviosta 3 on havaittavissa esimerkki oppilasparin epälineaarisesta siirtymästä. Cecilia ja Carol siirtyivät Ratkaisun 3 perustelemisesta takaisin ratkaisun etsimis-vaiheeseen (Kuvio 3).



Kuvio 3. Cecilian ja Carolin ratkaisuprosessit

On myös mahdollista, että kaikki mallin vaiheet eivät sisälly ratkaisuprosessiin. Tässä tutkimuksessa havaittiin esimerkiksi, että kaikki työparit eivät perustelleet tai arvioineet ratkaisujaan. Kaikki työparit eivät myöskään rajanneet ongelmaa, vaan ryhtyivät suoraan yrittämään ratkaisun etsimistä. Joissakin tapauksissa myös ratkaisun etsimisvaihe näytti jäävän väliin: tällöin oppilaat keksivät hypoteesin suoraan ongelman rajaamisen jälkeen (ks. Kuvio 3).

Avoimen ongelmanratkaisun malli (Kuvio 2) ottaa Schoenfeldin (1985) ja Masonin ym. (1982) mallien tapaan huomioon strukturoimattoman ratkaisun etsinnän. Tämän mallin tavoitteena on kuvata ongelmanratkaisuprosessia tavallisella matematiikan oppitunnilla. Oppituntitilanteessa oppilaat eivät useinkaan tee eksplisiittistä ratkaisusuunnitelmaa ennalta, vaan heidän toimintansa on enemmän tai vähemmän spontaania. Niinpä malliin ei ole otettu mukaan suunnitelman teon vaihetta. Tässä suhteessa malli eroaa esimerkiksi Pólyan (1945) ja Schoenfeldin malleista. Myös Masonin ym. (1982) mallista puuttuu suunnitelman teon vaihe. Selkeä ero muihin edellä mainittuihin malleihin on kuitenkin se, että avoimen ongelmanratkaisun malli on kehitetty kuvaamaan nimenomaan erityisesti lähtötilanteen suhteen avoimen ongelmanratkaisuprosessin etenemistä.

Opettajan ohjauksella on erittäin tärkeä merkitys oppilaiden työskentelyn ohjauksessa käytettäessä avoimia ongelmia matematiikan oppitunnilla. Opettaja voi ohjata oppilaiden työskentelyä ongelmanratkaisuprosessin kaikissa avoimen ongelmanratkaisun mallin (Kuvio 2) vaiheissa ja myös siirtymissä vaiheesta toiseen. Tässä tutkimuksessa havaittiin, että opettaja saattoi esimerkiksi ohjata oppilaita palaamaan ongelman rajaamiseen siinä vaiheessa, kun näiden ratkaisun etsintä vaikutti satunnaiselta kokeilulta (esim. Mark ja Mary) tai ohjata heitä perustelemaan hypoteesiaan (ks. Kuvio 3). Joissakin tapauksissa oppilaat olivat jo etsimässä uutta ratkaisua, kun opettaja palautti heidät perustelemaan edellistä hypoteesia. Nämä esimerkit havainnollistavat opettajan opetuksen merkitystä oppilaiden työskentelyn ohjaamisessa matemaattisempaan suuntaan (vrt. Hähkiöniemi & Leppäaho, 2012).

Avoimen ongelmanratkaisun malli (Kuvio 2) on kehitetty erityisesti oppimisympäristöön, jossa käytetään dynaamista geometriasovellusta. Kuten jo aiemmissa tutkimuksissa on osoitettu, dynaamisen geometrian ohjelmien käyttö helpottaa ja nopeuttaa ratkaisun etsimistä ja hypoteesien muodostamista monin tavoin (Arzarello ym., 2002; Healy & Hoyles, 2001). Aiemmissa tutkimuksissa on myös tullut esiin opettajan merkitys oppilaiden ohjaamisessa ratkaisujen perustelemiseen käytettäessä dynaamisen geometrian ohjelmia (Christou ym., 2004; Jones, 2000; Lew & So, 2008). Nämä seikat korostuvat avoimen ongelmanratkaisun mallin ongelman etsimisen, hypoteesin muodostamisen ja hypoteesin perustelemisen tai tarkastelemisen vaiheissa.

Kehitettyä avoimen ongelmanratkaisun mallia on mahdollista käyttää viitekehyksenä tutkittaessa esimerkiksi oppilaiden ongelmanratkaisuprosessin etenemistä tai opettajan ohjauksen merkitystä tässä prosessissa. Mallia soveltaen voidaan tutkia myös teknologian merkitystä ongelmanratkaisuprosessin eri vaiheissa. Malli auttaa myös opettajaa käsitteellistämään avoimen ongelmanratkaisun prosesseja ja esimerkiksi teknologisten apuvälineiden merkitystä siinä. Siten se tarjoaa opettajalle työkalun valmistautua tehokkaalla tavalla oppilaiden ohjaamiseen avoimia ongelmia käytettäessä.

Tässä tutkimuksessa kehitetty avoimen ongelmanratkaisun malli perustuu opetusharjoittelijan pitämään tuntiin, jolla oppilaat tutustuivat ensimmäistä kertaa GeoGebra-ohjelmaan ja avoimeen ongelmanratkaisuun. Opettajan kokemattomuudesta ja uudesta tietokoneohjelmasta huolimatta oppitunti oli onnistunut monessa suhteessa: oppilaat olivat aktiivisia, pääsivät kokeilemaan luovaa matemaattista päättelyä ja tuntuivat viihtyvän oppitunnilla. Niinpä tätä oppituntia voidaankin pitää havainnollistavana esimerkkinä siitä, että jo ensimmäinen kokemus teknologia-avusteisesta avoimesta ongelmanratkaisusta voi olla hyvin

positiivinen niin oppilaille kuin opettajalle. Tapaustutkimuksemme tarjoaa hyvän lähtökohdan jatkotutkimuksille mallin yleistettävyydestä. Niissä olisi mielenkiintoista selvittää, miten mallia voidaan soveltaa muilla avoimen ongelmanratkaisun tunneilla ja miten oppilaiden ongelmanratkaisuprosessit muuttuvat heidän tottuessaan GeoGebran käyttöön. Vaikka tässä tutkimuksessa opettajana toimi opetusharjoittelija, niin mallia voi kuitenkin käyttää samaan tapaan analysoitaessa jo valmistuneiden opettajien toimintaa.

Lähteet

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., & Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practices in Cabri environments. *ZDM – International Reviews on Mathematics Education, 34*(3), 66–72.

Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., & Pitta-Pantazi, D. (2004). Proofs through exploration in dynamic geometry environments. *International Journal of Science and Mathematics Education, 3*(2), 339–352.

Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M. & Pitta-Pantazi, D. (2005). Problem Solving and Problem Posing in a Dynamic Geometry Environment. *The Montana Mathematics Enthusiast, 2*(2), 125–143.

Healy, L., & Hoyles, C. (2001). Software tools for geometrical problem solving: Potentials and pitfalls. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6*, 235–256.

Harri, R., Sironen, S., Hähkiöniemi M., & Viiri, J. (2012). Opetusharjoittelijoiden tutkivan matematiikan tunneilla esittämät kysymykset ja uskomukset niiden taustalla. Hyväksytty teokseen H. Krzywacki, K. Juuti & J. Lampiselkä (Toim.), *Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen ajankohtainen tutkimus*. Helsinki: Helsingin yliopisto.

Hähkiöniemi, M., & Leppäaho, H. (2012). Prospective mathematics teachers' ways of guiding high school students in GeoGebra-supported inquiry tasks. *The International Journal for Technology in Mathematics Education, 19*(2), 45–58.

Jones, K. (2000). Providing a foundation for deductive reasoning: Students' interpretations when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations. *Educational Studies in Mathematics, 44*(1-3), 55–85.

Lester, F. K., Jr. (1978). Mathematical problem solving in the elementary school. Some educational and psychological considerations. Teoksessa L. Hatfield & D. A. Bradbard (Toim.), *Mathematical problem solving: Papers from a research workshop* (s. 53–87). Columbus, Ohio: ERIC Center for science, Mathematics an Environmental Education.

Lew, H-C., & So, K-N. (2008). Two justification processes in solving algebraic problem using graphing technology. Teoksessa O. Figueras, J. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sepúlveda (Toim.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX, Vol. 3* (s. 313–320). Morelia, Mexico: PME.
Martino, A., & Maher, C. (1999). Teacher questioning to promote justification and generalization in mathematics: What research practice has taught us. *Journal of Mathematical Behavior, 18*(1), 53–78.
Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1982). *Thinking mathematically.* Bristol: Addison–Wesley.
Nohda, N. (2000). Teaching by open-approach method in Japanese mathematics classroom. Teoksessa T. Nakahara & M. Koyama (Toim.), *Proceedings of the 24th conference of the international group for the psychology of mathematics education,* Vol. 1, (s. 39–53). Hiroshima, Japan: PME.
Pehkonen, E. (1997). Introduction to the concept "open-ended problem". Teoksessa E. Pehkonen (Toim.), *Use of open-ended problems on mathematics classroom* (s. 7–11). Tutkimusraportti 176. Helsingin yliopiston opettajankoulutuslaitos. Helsinki.
Pólya, G. (1945). *How to solve it? A new aspect of mathematical method.* Princeton, NJ: Princeton University Press.
Pólya, G. (1965). *Mathematical discovery Volume II: On understanding, learning, and teaching problem solving.* New York: John Wiley and Sons Inc.
Sahin, A., & Kulm, G. (2006). Sixth grade mathematics teachers' intentions and use of probing, quiding, and factual questions. *Journal of mathematics teacher education 11*(3), 221–241.
Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving.* London: Academic Press.
Stein, M., Engle, R., Smith, M., & Hughes, E. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10*, 313–340.

Teachers' organization and representation of subject matter knowledge for teaching purposes: Biot-Savart and Ampère's law

SHARAREH MAJIDI AND TERHI MÄNTYLÄ

sharareh.majidi@helsinki.fi
University of Helsinki, Department of Physics

Abstract

The way teachers organize and transfer their subject matter knowledge plays a crucial role in science education. However, it seems more attention should be paid on the representation forms and knowledge organization of teachers that they apply in their instruction. Therefore, we studied teachers' knowledge organization and representation forms in case of Biot-Savart law and Ampère's law. We interviewed four teachers who teach introductory-level university physics using concept maps. Then we analyzed the concept maps and interviews using qualitative methods. The results show that teachers' knowledge organization was strongly connected in case of Biot-Savart law. Moreover, the results revealed that mathematical models were the most applied forms that teachers used for representing their knowledge. The possibility to recognize the differences in teachers' knowledge organization and representation forms is the first step towards developing more effective teaching and learning solutions.

Keywords

knowledge organization, representation forms, Biot-Savart law, Ampère's law.

Introduction

In science teacher education teachers' subject matter knowledge (SMK) is a key factor, on which pedagogically successful approaches are based. Of course, there are many equally important aspects, like paying attention on students' qualitative understanding, pre-conceptions, motivation and context of teaching (Duit et al., 2007) but it is very difficult to imagine successful and well-planned teaching, which does not pay attention to the organization of the subject content. However, taking into account the important role of SMK as starting point for didactical and pedagogical solutions, relatively little attention has been paid on how teachers organize and conceive the structure of the subject content.

Shulman has presented three categories of teacher's disciplinary knowledge, from which we concentrate on SMK and the relevant aspects of pedagogical content knowledge (PCK) that concerns our study. According to Shulman (1986), SMK can be described in terms of substantive knowledge and syntactic knowledge. Substantive knowledge concerns teachers' knowledge of concepts, principles, and facts in the disciplines as well as different ways of relating and organizing these concepts and facts. Syntactic knowledge, on the other hand, focuses on a set of rules that determine the knowledge of scientific inquiry such as recognizing a problem, and knowledge of science process such as control of variables.

Of the studies focusing on SMK, several are in physics. So far, most of the studies about physics teachers' SMK have handled other areas of physics and magnetism has got only little attention (Abell, 2007). Although SMK is a central theme in science education research, few studies have concentrated on the structure and organization of physics teachers' knowledge and on how the substantive knowledge becomes organized and arranged for the purposes of teaching. Studies on teachers' understanding of organization and relation between concepts in physics are "a largely unmapped field of study in the domain of SMK of teachers" (Abell, 2007, p. 1117).

On the contrary, a lot of research has been done in the domain of PCK. According to Shulman (1986), PCK includes teacher's knowledge of (a) representations such as analogies, examples, and explanations; (b) students' learning difficulties and also strategies to conquer those difficulties. However, from these, the focus of researchers has been on more on the latter (b) than the former aspect (a). In this study, we are interested in the former: teacher's representation of knowledge. Shulman (1986, 1987) stated that teachers should be able to represent their SMK that is pedagogically powerful and comprehensible for students. We concentrate on how the teacher organizes and represents his/her SMK for teaching purposes. Therefore the emphasis is on the interface between organization of teacher's SMK and the representation component of PCK, i. e. SMK modified towards PCK.

We examine the organization and representation of SMK for teaching purposes of four university physics teachers for the topics of Biot-Savart law and Ampère's law. This is done from the viewpoints of 1) teachers' forms of representation (the interface between SMK and PCK as discussed above), 2) teachers' knowledge organizations and structures (the substantive structure of SMK as discussed above), 3) possible relation between representation forms and knowledge organization.

Topics of study: Biot-Savart Law and Ampère's law

Understanding the structure of subject content is especially important in subject matter areas where knowledge is complex and students (and teachers) are known to struggle to form a picture of subject content. One area of this kind is magnetism. Therefore, two basic laws of magnetostatics – the Biot-Savart's law and Ampère's law – are studied as the context of this study.

The Biot-Savart's law is described in terms of either moving electric charges or current elements which are assumed as origin of magnetic fields. Biot-Savart law and thus magnetic fields obey the superposition principle. So it is quite feasible to calculate magnetic fields of any current distribution using superposition principle and Biot-Savart law. Usually the Biot-Savart law is applied in calculating the magnetic fields of long wire, current loop, and coil (Knight, 2008; Walker et al., 2008).

Ampère's law describes the relation between electric current enclosed by a closed loop and corresponding total magnetic flux through the loop. Ampère's law can be employed for calculating current distributions in symmetrical cases, such as magnetic field of solenoid, inside wire, and toroid (Knight, 2008; Walker et al., 2008).

Design of the study and research method

The goal of this research is to study how university teacher of introductory physics organizes and represents his SMK of for teaching purposes in case of Biot-Savart law and Ampère's law. In order to reach the goal, following research questions were formulated:

1. What is the representation forms (as a component of PCK) that teachers' use in representing and connecting their SMK of Biot-Savart law and Ampère's law?
2. What are the characteristics of the relational structures or organizations of the content elements (as a part of SMK) which construct the topics of Biot-Savart law and Ampère's law?
3. What is the relation between representation forms to their knowledge organization in case of Biot-Savart law and Ampère's law?

First question examines teachers' representation forms such as models and reasoning that they use to formulate and connect their content knowledge (the interface between SMK and PCK). Second question evaluates teachers' knowledge organization, which is part of the substantive knowledge in SMK and shows how different parts of teachers' knowledge are related. Third question combines the first two questions together and enables to examine the characteristics of teachers' SMK and its representation forms as a whole.

Concept cards and concept maps

The concepts of magnetostatics were chosen from introductory university physics textbooks (Knight, 2008; Walker et al., 2008) and they were written on concept cards (post-it notes). The way of choosing concepts is based on the previous study (Majidi & Mäntylä, 2010, 2011), where the corresponding content of the mentioned textbooks were analysed. There were also empty cards, so the interviewed teacher was free to add any concepts. The chosen concepts differed along several dimensions: concepts relating to sources of magnetic field (Current length element, Electric current, Charge); typical concepts related to Biot-Savart law and Ampère's law (Superposition principle, Magnetic field of long wire, Magnetic field of current in arc of wire, Magnetic field of solenoid, Magnetic field inside wire, Magnetic field outside wire, Ampèrian loop, Magnetic field of toroid, Magnetic dipole, Magnetic field line, Magnetic field of current loop); electrostatic concepts that could be used as analogies (Electric field, Gauss's law, Coulomb's law); advanced concepts and laws (Vector potential, Stokes theorem , Maxwell equations).

Since one of the purposes of this study is to investigate the structure and organization of teachers' knowledge, we need suitable portrayal tool for representing and analysing the structure. Previously, concept maps have been used successfully in some similarly oriented studies. For example, Ferry (1996) found concept maps as useful tools for examining teachers' SMK.

In the interview room of this study, there was a whiteboard, on which the concept maps were drawn. Teachers selected the concept cards and drew the lines between the concepts piece by piece. At the same time teachers explained and described the construction of the concept maps. In other words, teachers' concept maps consisted of concept cards as well as the connections (lines) between the concept cards. Teachers' explanations and reasons for connecting the concept cards were videotaped. The concept maps were redrawn in electronic format using CmapTools and the numbers reflecting the order of teachers' presentations were added to the concept boxes. The concept maps made by teachers and their explanations during the construction of concept map enabled us to identify the key features of teachers' ways to organize the SMK and, consequently, the key features of representation forms of SMK.

Interviews and Interviewees

The interviews of four male physics teachers were conducted in autumn 2010 The interviews were videotaped. As Table 1 shows, the duration of interviews varied from 40 to 45 minutes. All teachers had PhD in physics and they have taught the subject of magnetostatics for at least 5 semesters (Table 1).

Table 1. Information of interviewed teachers.

	David	John	Nigel	Chris
Degree of education	PhD in Physics	PhD in Physics	PhD in Physics	PhD in Physics
Graduation year	2000	1986	1998	1992
Teaching magnetostatics	8 semesters	12 semesters	12 semesters	5 semesters
Duration of interview	45´	40´	40´	45´

In the interviews, teachers were asked to make concept maps that depict the way and order how they present the selected topics in their teaching. In the beginning of the interview, the aims of this study were discussed and then the purpose and way of using concept maps was explained to the interviewees. During interviews, teachers simultaneously presented their SMK by means of selecting concept cards; connecting those concepts; and explaining the connections. Thus in the end of the interview there was a concept map on the white board with its construction and explanations videotaped.

The way of interviewing and posing questions were practised in advance in order to test the interview method. Teachers were asked to "think out loud" and verbalize their thinking during the interview. When necessary, the interviewer asked more detailed questions, otherwise the structure of the interview was quite open, though the interviewer attended to keep the interview in focus. The interviews were transcribed verbatim and the concepts in the concept maps were coded to the interview transcripts.

Analysis of data

The data consist of four videotaped interviews and four concept maps. First author transcribed the videotaped interviews and added the chronological order of the concepts into related concept maps.

First, in order to give structure to the analysis, the content of the transcripts were classified into four different domains: 1) introduction of Biot-Savart law, 2) applications of Biot-Savart law, 3) introduction of Ampère's law, and 4) applications of Ampère's law. The domains of introducing and applying concepts are adapted from Oser and Baeriswyl (2001).

Second, the categories of representation forms within the four domains were established. In this, both authors identified independently different representation forms from the structured interview transcripts and wrote descriptions of them. Then the descriptions were compared and the seven categories established, also a description sheet of the categories of representation forms were written. So the categories concerning representation forms of teachers were driven from the content analysis.

However, the forming of categories was inspired by representation forms that Shulman (1987) pointed out as the components of transformation of SMK into PCK. He argued that representation repertoire includes, e.g., analogies, metaphors, examples, explanation. In addition, the choice of models and experiments as representation forms was motivated by the notions that they are important in knowledge construction (Mäntylä, 2012): models and modelling have a prominent role to construct and justify the knowledge in science education (Koponen, 2007); experiments are important in physical knowledge construction and hold a generative role on teaching physics (Koponen & Mäntylä, 2006). Often models in physics are in mathematical form, which helps into construct representation of a physical process and reason about the process (Van Heuvelen, 1991). Analogies play a role in learning and teaching as mapping tools (Glynn & Takahashi, 1998) and visual models (e.g. figures and photos) are very capable of developing the visualization (Gilbert, 2005). Reasoning concerning successful knowledge encompasses comprehensive representation (Brachman & Levesque, 2004). In brief, categories were identified from content analysis of interviews, but the choice of selecting them were motivated by other studies.

Then, both authors categorized each statement of the structured transcripts in a parallel manner (Miles & Huberman, 1996). In this stage of comparison, consistency values of identified categories ranged from 75% to 80% for interviewed teachers. Although measured values suggested good reliability, in order to improve the reliability the identified categories were compared until authors reached to a consensus (Kvale, 1996).

Final, the characteristics of teacher's SMK were analyzed on the basis of organization within the four domains introduced above. Teachers' concept maps differed

in terms of connectedness of knowledge. Therefore, teachers' concept maps were classified in respect to the connectedness of their knowledge organizations.

Results

We studied teachers' SMK for the purposes of teaching. In this, we examined the representation forms of teachers and the organization of SMK and finally their relations.

Representation forms

The results concerning representation forms are summarized in Table 2.

Table 2. The different domains and frequencies of using representation forms in each domain (the number of cases is in the parentheses).

Category	Introduction of Biot-Savart law (N = 20)	Applications of Biot-Savart law (N= 11)	Introduction of Ampère's law (N= 21)	Application of Ampère's law (N= 17)
Experiment	15 % (3)	-	4 % (1)	11 % (2)
Analogy	5 % (1)	25 %(3)	4 % (1)	33 % (6)
Des- math model*	**30 % (6)**	-	19 % (4)	5 % (4)
Exp- math model*	15 % (3)	**58 % (7)**	4 % (1)	**38 % (4)**
Statement of fact	15 % (3)	-	19 % (4)	5 % (1)
Visual model	-	8 % (1)	14 % (3)	-
Reasoning	20 % (4)	-	**33 % (7)**	-

*Des: descriptive; Exp: explanatory

In first domain, different forms were quite evenly distributed (Table 2). The most applied form for introducing Biot-Savart law was descriptive mathematical model (30%). Visual model was not used in this domain.

In second domain, the forms were not homogenously distributed; instead they were rather accumulated to explanatory mathematical model (58%). Experiment, descriptive mathematical model, statement of fact, and reasoning were not applied in this domain.

For introducing Ampère's law (third domain), the forms were quite uniformly distributed. The leading form was reasoning (33%). Experiment, analogy, and explanatory math models were rarely used (4%).

The overall view of last domain shows that representation forms were not uniformly distributed. The most used form was explanatory mathematical model (38%). Visual model and reasoning were not employed.

Organization of subject matter knowledge

The concept maps make the structural and relational features of teachers' SMK explicit and the following three categories of connectedness (relational features) were formed:

- Strongly connected: There are many loops and cycles in teachers' concept maps and no dead-ended concepts.
- Moderately connected: In contrast to the strongly connected organization, there are fewer loops and cycles in teachers' concept maps. Moreover, there are only few dead-ended concepts.
- Loosely connected: There are limited number of loops and cycles in teachers' concept maps. Besides, there are many dead-ended concepts.

Knowledge organization of David: Fig. 1a shows how David organized his SMK concerning two studied topics. In the first step, he described the introduction of Biot-Savart law (first domain). In the second step, he introduced Ampère´s law (third domain). Then he explained the applications of Ampère's law (last domain) and Biot-Savart law (second domain), respectively. In the final step, he described the applications of electrostatics concepts to other concepts of the map. David switched from one topic to another topic; therefore, the organization was disordered.

An overall view of David's concept maps reveals that the concepts C8, C10, C13, C15, and C17 are dead-ended, which are not connected to other parts of the structure (Fig. 1a). However, his concept map has clear loops and cycles in his arrangement, which indicate the interconnectedness and integration between the concepts.

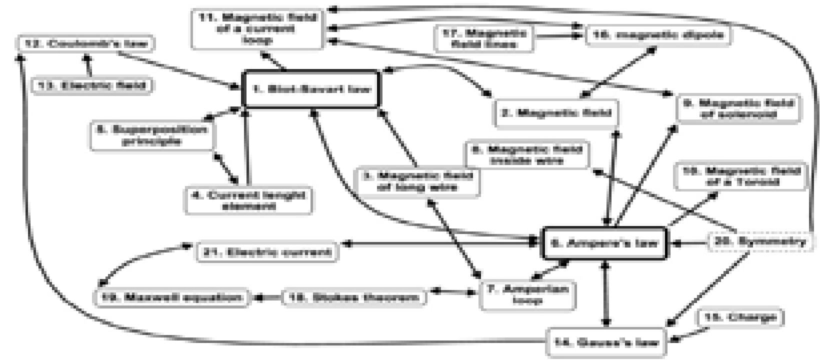


Figure 1a. David's map (numbers show the chronological order of the concepts). Dashed concepts were added by teacher.

In order to deepen the evaluation of David's knowledge organization, the structure of each domain is sketched individually in Fig. 1b.

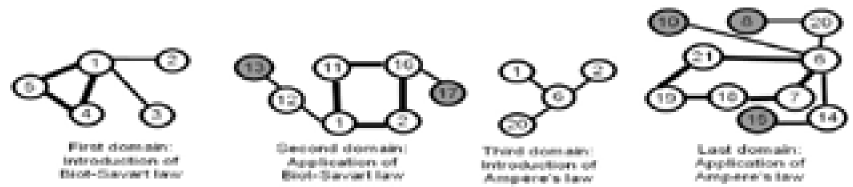


Figure 1b. Structural patterns of David (loops in thick lines, dead-ends in gray).

As Fig. 1b shows, the structure of first domain includes one loop no dead-ended concepts, so its structure is strongly connected. The organization of second domain includes one loop, but there are two dead-ended concepts that decrease the integration and coherency of the structure, consequently it is moderately connected. On one hand, third domain includes no loop; on the other hand it excludes dead-ended concepts, so its structure is moderately connected. Last domain includes one loop, but also three dead-ended concepts, so its structure is moderately connected. Altogether, David's overall knowledge organization is moderately connected.

Knowledge organization of John and Nigel: The knowledge organizations of John and Nigel are quite similar because they followed same steps to organize their SMK (Figures 2 and 3). Although John and Nigel organized their SMK in a similar way, they made different interconnections in their organizations.

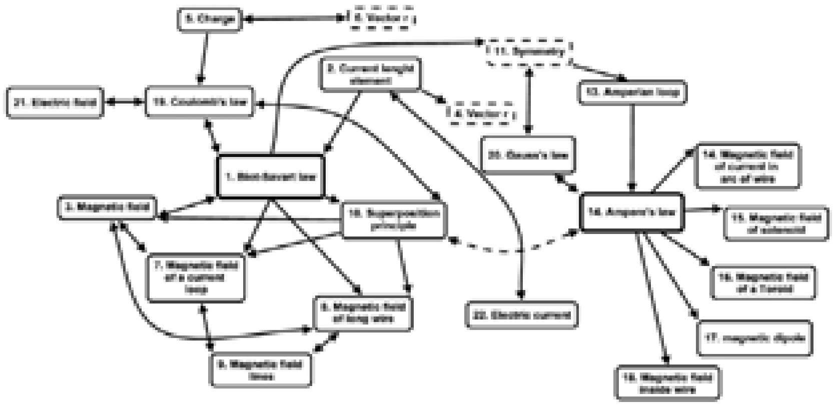


Figure 2a. John's map (numbers show the chronological order of concepts). Dashed concepts are added by teacher.

The concept map of John reveals that the concepts C4/C6, C14, C15, C16, C17, C18, C21, and C22 are dead-ended (Fig. 2a). However, his concept map has clear loops, which are strongly connected. In order to extent the analysis, the knowledge structure of John is drawn on the basis of domains (Fig. 2b).

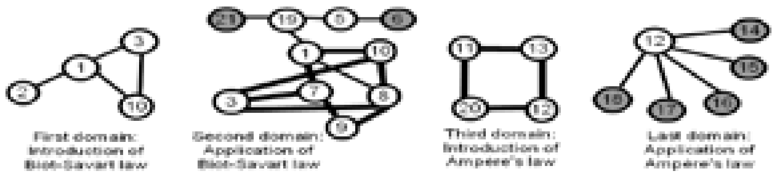


Figure 2b. Structural patterns of John (loops in thick lines, dead-ends in gray).

As Fig. 2b shows, the structure of the first domain includes no loops but is has no dead-ended concepts, so its structure is moderately connected. Although, the organization of second domain includes two dead-ended concepts, its structure contains many strongly connected loops, and therefore its structure is strongly connected. The structure of the third domain has one loop and no dead-ended

concepts; hence its structure is strongly connected. There are no loops or cycles within the last domain and nearly all concepts are dead-ended, thus its structure is loosely connected. In conclusion, John's overall knowledge organization is moderately connected.

Nigel's concept map (Fig. 3a) reveals that concepts C9, C11, C12, C16, and C17 are disjointed, which are not connected to other parts of the structure.

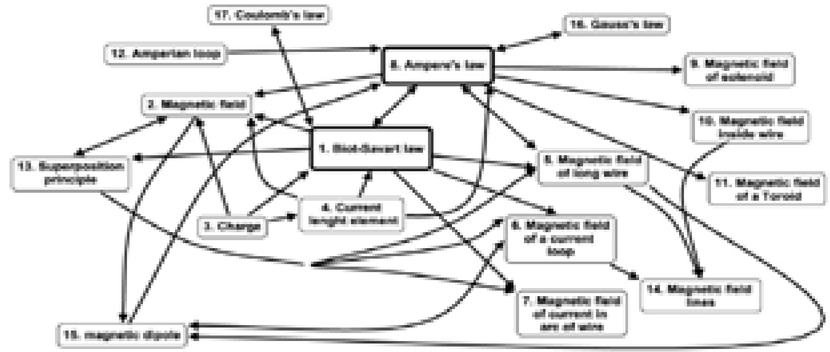


Figure 3a. Nigel's map (numbers show the chronological order of concepts).

In order to deepen the analysis, Fig. 3b was drawn.

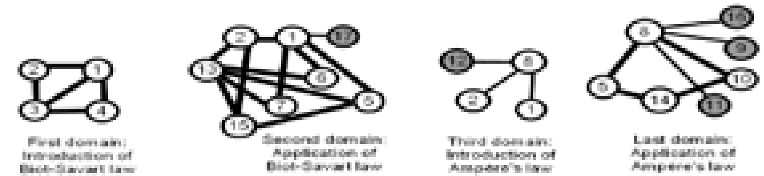


Figure 3b. Structural patterns of Nigel (loops in thick lines, dead-ends in gray).

As Fig. 3b shows, the structure of the first domain includes three loops and no dead-ended concepts, so its structure is strongly connected. The organization of second domain consists of many loops, and even though the structure contains one dead-ended concept, its organization is interpreted as strongly connected. The structure of third domain is loosely connected because it has no loop and contains one dead-end concept. Finally, the last domain includes one loop but there are some dead-end concepts, thus its structure is moderately connected. In conclusion, Nigel's overall knowledge organization is approximately moderately connected.

Knowledge organization of Chris: Unlike other teachers, Chris utilized the concept of electric current (C1) as a starting point. First, he completed the description of the subject of electrostatics and then he switched to magnetostatics. The concept map of Chris includes many cycles and excludes disjointed concepts. There are only two disjointed concepts (C19 and C23) in his concept map (Fig. 4a).

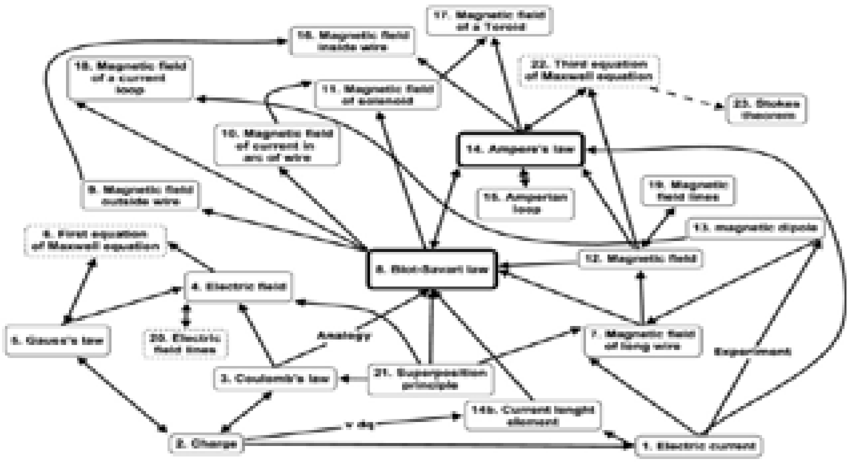


Figure 4a. Chris's map (numbers show the chronological order of the concepts). Dashed concepts were added by teacher.

Again, the structure of each domain is shown individually in Fig. 4b.

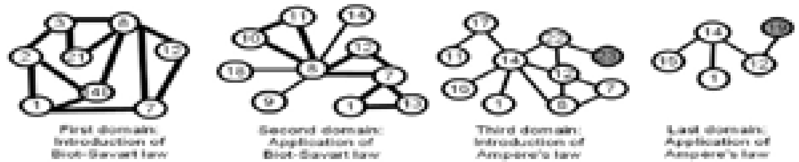


Figure 4b. Structural patterns of Chris (loops in thick lines, dead-ends in gray).

As Fig. 4b shows, first and second domains of the knowledge organization of Chris include many loops and no dead-end concepts, so they are strongly connected. The structure of third domain is moderately connected because it includes few loops and one dead-ended concept. Last domain has a loosely connected structure. The overall knowledge organization of Chris is moderately connected.

Relation of representation forms to knowledge organization

The results of this section show how representation forms are related to knowledge organization. The differences between different teachers in their use of representation forms and in their organization of their SMK are summarized in Table 3.

Table 3. Relation of representation forms to teachers' knowledge organization for each domain (numbers represent the frequency of using forms).

Domains	Representation forms	Knowledge organization
Introduction of Biot-Savart law	Descriptive math model 30 %	SC: David, Nigel, Chris MC: John
Application of Biot-Savart law	Explanatory math model 58 %	SC: Chris, John, Nigel MC: David
Introduction of Ampère's law	Reasoning 33 %	SC: John MC: David, Chris LC: Nigel
Application of Biot-Savart law	Explanatory math model 38 %	MC: David, Nigel LC: John, Chris

SC: Strongly Connected, MC: Moderately Connected, LC: Loosely Connected

Table 3 combines representation forms and knowledge organization to a whole. In the first domain, teachers' concepts are strongly connected. Thereby, teachers hold well-organized SMK. The most central representation form is descriptive mathematical model.

The second domain shows that teachers' knowledge organizations were strongly connected and explanatory mathematical model was the most crucial representation form. Teachers overall SMK was well-organized in introduction and applications of Biot-Savart law. The most applied representation forms were mathematical models. Hence, teachers can construct well-organized SMK using mathematical models for expressing the introduction and application of Biot-Savart law.

The third domain indicates that teachers' knowledge organizations are moderately connected. Interestingly, in contrast to other domains, the dominant representation form was reasoning.

The last domain shows that teachers' concepts were connected quite similarly than in third domain. The most governing form was explanatory mathematical model.

In summary, the overall SMK of teachers regarding Ampère's law were not as well structured as in the case of Biot-Savart law. In contrast to Biot-Savart law where mathematical models were the dominant representation forms, reasoning was a governing representation form in case of Ampère's law.

Discussion

This research put an effort to visualize the SMK of teachers with an emphasis on their knowledge organization. So far only few researchers have studied the SMK of teachers, concerning magnetostatics. On the other hand, scholars have focused on researching the understanding of physics concepts rather than investigating the organization of knowledge (Abell, 2007). In this study, we have investigated and compared the SMK of four physics university teachers from the viewpoint of teachers' representation forms, knowledge organizations and the relation of knowledge organization to representation forms.

The results show that teachers used seven different representation forms to connect and represent their SMK. The identified representation forms are: experiments, models (descriptive and explanatory mathematical model, visual model, and analogies), reasoning, and statement of fact

The results of using different representation forms indicate that teachers mostly used descriptive and explanatory mathematical models for describing Biot-Savart law. Since teachers' SMK of Biot-Savart law featured a well-organized structure, it is suggested that using mathematical models could lead to an integrated and well-connected SMK for the teaching purposes.

In case of Ampère's law teachers applied reasoning and mathematical models for introducing it. At the same time, teachers' knowledge organization was moderately connected, which means that where there were some dead-ended concepts which make the structure disconnected. The reason could be that Ampère's law is deduced from theory (Knight, 2008; Walker et al., 2008). In brief, it is expected that using more mathematical models could worked better here.

This study visualized the knowledge organization of teachers' SMK, which has been an unmapped field of study (see Abell, 2007). The concept maps were used as tools to contrast and evaluate the differences between teachers' knowledge organizations. Results showed that in some cases the knowledge organization of teachers were not well-connected, while in some other cases the structure of their SMK was highly connected. According to Shulman (1986), teachers should be able to organize their content elements. The results, when taken together, show that there are many similarities in the university teachers' ways to organize their SMK, but there are also clear differences. Nevertheless, the study shows that such similarities and differences can be detected using tools and methods introduced in this study, because they make explicit the representational components of SMK.

It appears that more studies should be conducted in order to investigate the impacts of mathematical models in teacher's knowledge organization. There might be some obstacles that teachers experience while they describe and organize their SMK especially in the case of Ampère's law. As a result, further studies are needed to be done in order to suggest appropriate approaches to overcome such obstacles.

Conclusions

We analysed teachers' representation forms, which they apply to formulate and connect their SMK for teaching purposes. The representation forms consist of seven different forms: descriptive and explanatory mathematical models, visual models, analogies, statement of facts, and experiments. Descriptive and explanatory mathematical models were the most applied representation forms in case of Biot-Savart law. In case of Ampère's law, explanatory mathematical model and reasoning were the dominant representation forms.

The knowledge organization of teachers in the topic of Biot-Savart law was strongly connected and moderately connected in the topic of Ampère's law. The results of the relations of representation forms and knowledge organization revealed, in case of Biot-Savart law, that employing mathematical models generates strongly connected knowledge. In conclusion, the possibility to recognize the differences in teachers' knowledge organization and representation forms could serve as a mean to develop more effective teaching and learning solutions and curriculum plans.

References

Abell, S. K. (2007). Research on Science Teacher Knowledge. In S. K. Abell & N. G. Lederman (Eds.), *Research on Science Education* (pp. 1103–1149). New York, NY: Routledge.

Brachman, R. J., & Levesque, H. J. (2004). *Knowledge representation and reasoning*. San Francisco, CA: Elsevier.

Duit, R., Niedderer, H., & Schecker, H. (2007). *Teaching Physics*. In S. K. Abell & N. G. Lederman (Eds.), *Research on Science Education* (pp. 599–629). New York, NY: Routledge.

Ferry, B. (1996). Probing Personal Knowledge: The use of a computer-based tool to help preservice teachers map subject matter knowledge. *Research in Science Education*, *26*, 233–245.

Gilbert, J. K. (2005). Visualization: A metacognitive skill in science and science education. In J. K. Gilbert (Ed.), *Visualization in Science Education* (pp. 9–27). Dordrecht: Springer.

Kvale, S. (1996). *InterViews. An introduction to qualitative research interviewing*. Thousand Oaks, CA: SAGE Publications

Knight, R. D. (2008). *Physics for Scientists and Engineers: A Strategic Approach with Modern Physics*. San Francisco, CA: Pearson Addison-Wesley.

Koponen, I. T. (2007). Models and modelling in physics education: a critical reanalysis of philosophical underpinnings and suggestions for revisions. *Science & Education, 16*, 751–773.

Koponen, I. T., & Mäntylä, T. (2006). Generative Role of Experiments in Physics and in Teaching Physics: A Suggestion for Epistemological Reconstruction, *Science & Education, 15*, 31–54.

Majidi, S., & Mäntylä, T. (2010). Knowledge Organization in University Textbooks. In H. Silfverberg & J. Joutsenlahti (Eds.), *Integrating Research into Mathematics and Science Education in the 2010s. Annual Symposium of the Finnish Mathematics and Science Education Research Association* (pp. 361–391). Tampere, Finland

Majidi, S. & Mäntylä, T. (2011). The knowledge organization in physics textbooks: A case study of magnetostatics. *Journal of Baltic Science Education*, *10*(4), 285–299.

Mäntylä, T. (2012). Didactical reconstruction of processes in knowledge construction: Pre-service physics teachers learning the law of electromagnetic induction. *Research in Science Education*, *42*(4), 791–812.

Miles, M. B., & Huberman, M. (1996). *Qualitative data analysis. An expanded sourcebook*. Thousand Oaks, CA: SAGE Publications.

Oser, F. K., & Baeriswyl, F. J. (2001). Choreographies of teaching: bridging instruction to learning. In V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (4th Ed., pp. 1031–1065). Washington, DC: American Educational Research Association.

Shulman, L. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*, 4–14.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, *57*, 1–22.

Van Heuvelen, A. (1991). Learning to think like a physicist: A review of research-based instructional strategies. *American Journal of Physics, 59,* 891–897.

Walker, J., Halliday, D., & Resnick, R. (2008). *Fundamentals of Physics*. Hoboken, NJ: Wiley.

Guided collaboration in making ordered concept maps in physics teacher education

TERHI MÄNTYLÄ

terhi.mantyla@helsinki.fi, terhi.mantyla@hkr.se
University of Helsinki, Department of Physics;
Kristianstad University, School of Education and Environment

Abstract

It is discussed how making ordered concept maps through guided collaboration help pre-service physics teachers to organize their knowledge about physics concepts. First students participated in the lecture, where aspects relating to temperature quantity were discussed. After the lecture, the students made ordered concept maps about the quantitative development of temperature quantity and then they developed the ordered concept maps further collaboratively in small groups in exercises. During the last part of the exercises, the instructor discussed one by one with these groups and guided groups by conversational questions. After exercises, students made the final ordered concept maps. The qualitative analysis of ordered concept maps and post interviews show that the collaboration of students alone is not enough; the guidance of an expert is needed when organized knowledge is pursued.

Keywords

guided collaboration, physics teacher education, ordered concept maps

Introduction

One important challenge of pre-service physics teacher education is to educate teachers that have in-depth, organized content knowledge of physics. For pursuing organized knowledge, ordered concept maps, which emphasizes the process aspects, were used, because it is known that teaching models, which support construction of knowledge structures, organizing principles and their visual representation, have proved to be effective (Van Heuvelen, 1991; Reif, 2010). The pre-service physics teachers also need opportunities and resources to reflect or to inspect their knowledge and experience about physics and physics education. In this, the value of collaborative learning in constructing concept maps has been recognized (Roth, 1994; Okebukala & Jegede, 1988).

Meta-analysis of Nesbit and Adesope (2006) showed that applying concept mapping in learning is more effective for knowledge retention and transfer than other learning activities. Analysis of collaborative concept mapping studies by Basque and Lavoie (2006) showed that the collaborative concept mapping has been more beneficial for learning than individual concept mapping or other forms of collaborative working. However, in some studies no significant differences were found (Basque & Lavoie, 2006); thereby the effect of collaborative concept mapping on learning seems to depend on the way how it is implemented in learning.

When designing instruction, the limitations of human cognitive architecture, especially the limited capacity of human's working memory, where all conscious processing of knowledge happens, have to be taken into account (Kirschner, Sweller & Clark, 2006). It is said that the working memory can handle seven plus minus two units of knowledge at a time, these units consist of the new knowledge to be learned and the retrieved knowledge from the unlimited long-term memory. Cognitive load theory describes these limitations through three different types of cognitive load: intrinsic, extraneous and germane cognitive load (e.g. Kirschner, 2002; Paas, Renkl, & Sweller, 2003).

Intrinsic cognitive load means the inherent difficulty of the topic to be learned. Learning of the topic means using and learning relevant elements and the more the elements are interconnected the higher is the intrinsic cognitive load (Paas et al., 2003). Usually, the intrinsic cognitive load is seen as immutable, but through segmenting or sequencing of information it can be reduced (Bannert, 2002).

Extraneous and germane cognitive load depends on the instructional design: how the topic to be learned is presented to the learners and what kind of activities is involved in the learning (Paas et al., 2004). According to cognitive load theory, an important goal of learning is schema construction ("chunking" of information) and automation of intellectual operations (Sweller, 1994), which are stored in the long-term memory. Working memory handles a schema as a single unit of information although a schema can consist of a large amount of information. Germane cognitive load is determined by the instructional design that aims at the schema construction and automation, whereas extraneous cognitive load is determined by instructional design that does not support schema construction and automation (Paas et al., 2003, 2004).

In learning, the cognitive load cannot be larger than the capacity of working memory (Paas et al., 2003). The extraneous cognitive load is unnecessary and does not support learning; therefore the instructional design should aim for reducing the extraneous cognitive load. At the same time, the freed working memory capacity should be directed to increasing germane cognitive load (schema construction and automation) so that relevant learning can occur. It is seen that schema construction and automation can free working memory by reducing intrinsic cognitive load (Paas et al., 2003, 2004). This iterative cycle of reducing extraneous cognitive load and increasing germane cognitive load makes possible to eventually acquire advanced knowledge and skills and the units of knowledge handled in working memory consist of large schemata (Paas et al., 2003).

Nesbit and Adesope (2006, p. 434) suggest that using concept maps in education help "lower extrinsic cognitive load by arranging nodes in two dimensional space to represent relatedness, consolidating all references to a concept in a single symbol, and explicitly labelling links to identify relationships". They also claim that the effect of concept mapping in resulting detailed knowledge is not only due to their way of reducing information (Nesbit & Adesope, 2006).

The cognitive load theory has its roots in cognitivist view of learning, whereas students' construction of concept maps have a clear relation to the constructivist view of learning (Valcke, 2002), which basic idea is that "learning is an active process in which learners are active sense makers who seek to build coherent and organized knowledge" (Mayer, 2004, p. 14). Valcke (2002) has discussed the relation between cognitive load theory and constructivist learning approaches and the above introduced idea of constructivism is in line with the goal of schema construction in cognitive load theory. Cognitive load theory also highlights the role of external representations in learning as do the social constructivism (Valcke, 2002). Although there are common ideas between these views, cognitive load theory help in pinpointing an important weakness in the practice of constructivist instruction: too often the idea of the learner's own active construction of knowledge or schemas has been interpreted as providing only minimal guidance to the learners during learning (Kirschner, Sweller & Clark, 2006; Mayer, 2004). Research has shown that this interpretation of constructivist instruction does not work or that better results are obtained through guidance (e.g., Mayer, 2004; Kirschner et al., 2006). An important aspect of active learning is to separate cognitively active learning from behaviourally active learning (Mayer, 2004), which means that e.g. the group discussions between peers do not guarantee that the students are actually learning while they are actively discussing with each other. Therefore, instead of the unguided discovery methods and the mere group discussions between peers, the teacher's guidance and structured methods of instruction are needed (Kirschner et al., 2006).

The goal of the constructivist view of learning is certainly worthwhile, but the ways of reaching this goal through teaching and instruction have to be considered. According to Mayer (2004), perhaps the best way of supporting the constructivist view of learning includes teaching methods that involve cognitive activity rather than behavioural activity, instructional guidance rather than pure discovery, and curricular focus rather than unstructured exploration. Thereby, the appropriate support for the learning process is offered and still enough freedom is retained, which makes learning rewarding and reflective.

In the previous study (Mäntylä & Koponen, 2007), the way quantifying experiments (and theoretical abstractions) build a concept network of quantities and laws was discussed. The idea was applied for designing a didactical reconstruction of temperature and then the reconstruction was evaluated on a basis of students' ordered concept maps (or network representations). In the didactical reconstruction, the historical cognitive processes in the development of temperature quantity were applied and modified for purposes of instruction. The evaluation showed that students learned to understand the role of quantifying experiments in constructing quantities and that the quantities have evolving meaning. They also learned to integrate quantities as part of a network. The results also showed that students could not learn new knowledge by using ordered concept maps; however, they recognized what there is still to be learned. Now the focus is on the classroom activities: the role of collaboration and the guidance of the teacher in students' learning. The research questions of this study are:

1. How students' ordered concept maps change during the learning process?
2. What is the role of collaboration and guidance during the learning process?

Design of the study and research methods

The temperature was selected as a topic of the teaching sequence. Temperature is one of the everyday quantities, which is easily measured using thermometers; therefore its measurement is taken quite self-evident. Nevertheless, this simple concept seems to pose many learning difficulties for university students (cf. Carlton, 2000; Taber, 2000; Cotignola et al., 2002; Meltzer, 2004), e.g. students tend to think that temperature can be reduced to mechanical quantities and do not know how temperature becomes measurable quantity. In previous study (Mäntylä & Koponen, 2007) the background of temperature is discussed in more detail.

Setting of the research and research participants

This study was conducted in a half-year course Conceptual Foundations of Physics, which is part of the pre-service physics teacher education program at the

Department of Physics. There were 24 students in the course, mainly third or fourth year students majoring in physics (7), mathematics (12) and chemistry (5). Half of the students were females. The students, pre-service physics teachers, had previously attended the introductory physics courses. Thereby all students had studied thermophysics at the university level before attending the course Conceptual Foundations of Physics.

Teaching sequence and data gathering

The teaching sequence started with a lecture (45 min) containing the aspects of thermometry and thermodynamics related to the temperature. Because the topics concerning temperature had been taught already in an introductory thermal physics course, the teaching during the lecture was more like a recap of what had been discussed in the previous courses. The development of the physical concepts and the role of experiments and models in it were discussed from the philosophical and epistemological points of view (for details, see Koponen & Mäntylä, 2006).

After the lecture, the students were asked to produce individually ordered concept maps about the quantitative development of temperature, and to recognise the essential experiments, models and theory needed in that development. They were free to use any material (e.g. textbooks, Internet) that they saw necessary. The students were familiar with making ordered concept maps (i.e. maps, which emphasize the processes of knowledge construction such as experimenting and modelling) and for instance they had earlier produced ordered concept maps about heat and energy. This means that they had experience of the rules applied in producing ordered concept maps and the technique of representing them, e.g. meaning of drawing concept boxes and directed lines between them. However, this was the first time, when they applied the technique representing the development of a single quantity.

Then students participated in exercises (90 min), where students were asked to discuss their initial ordered concept maps in small groups and begin to construct the final ordered concept maps on the basis of the initial ones. There were two parallel exercise sessions in order to have smaller amount of groups at a time. In the first session, there were nine students, who worked in three dyads and one triad (altogether four groups). In the second session, 15 students worked in five triads. The sessions were similar: they were organized in consecutive days at the same time, the instructor was the same, and the structure of the sessions was the same.

Students brought their initial ordered concept maps and the material they saw necessary to the exercises. First, during the first half of exercises, they constructed a joint ordered concept map in a group on the basis of the initial ordered concept maps and the study material they had brought with them. Second, during the last half of the exercises, the instructor circulated in the class between groups and guided them further through conversational questions.

The instructor was prepared for the instruction by reconstructing the quantitative development of temperature using the historical accounts and combining them with contemporary knowledge of the topic (for details, see Mäntylä & Koponen, 2007). This set the contents of the teaching sequence. The instructor had also familiarized herself with the curricula concerning temperature at upper secondary school and introductory university physics levels. In addition, the instructor was familiar with the student difficulties in learning temperature and related topics (e.g. Carlton, 2000; Taber, 2000).

The instructor guided students by asking conversational questions. These conversational questions often began by "how" or "why", e.g. "In your concept map you have thermal expansion; how it relates to the measurement of temperature?" or "Why do we need the concept of absolute temperature?" The starting point of guidance was student group's ordered concept map, e.g. "You have linked volume and temperature; could you explain how or why they are linked?" At the end of the exercises, there was a short instructor-led summary discussion.

After exercises, students completed the final ordered concept maps about the temperature quantity individually or in small groups as homework. Also in this, the students were allowed to use the material they saw necessary.

The data consists of 24 initial, 9 intermediate and 14 final ordered concept maps (altogether 47 ordered concept maps). From the intermediate ordered concept maps six were produced in a group of three students and three by a student pair and from the final ordered concept maps 8 were produced individually, four in a group of three students and two by a student pair. In previous study concerning the evaluation of the didactical reconstruction of temperature (Mäntylä & Koponen, 2007), only initial and final ordered concept maps were analysed.

Furthermore, five students were post-interviewed in order to confirm and deepen the analysis of 1) ordered concept maps and 2) the role of collaboration and teaching for the students learning. The students were chosen with the aim of obtaining a representative sample of the students: three had physics and two had mathematics as a major subject; three students were females. They were also representatives of different performance levels based on their previous performances (e.g. evaluated exercises) during the course. From the interviewed students, one had constructed the final map individually while the others had constructed their final maps in groups of two or three students. Two of the interviewed students were members of the same intermediate and final group.

The interviews were semi-structured and the original interview plan was finalized on the basis of experiences from a pilot interview. In the interviews, substantially the same questions were asked from all students. However, for purposes of clarifying or probing the students' responses deeper, spontaneous questions were asked. In the interview, students were asked to evaluate the role of different factors for their learning (e.g. lecture, group work, teaching and making ordered concept maps), to explain their ordered concept maps and to describe how the maps reflected their thoughts. Students were encouraged to think aloud these themes. The duration of interviews was about 45 minutes. The interviews were videotaped and the pertinent verbal and non-verbal events on the videos were transcribed verbatim.

Analysis of data

The ordered concept maps and the interviews were analysed and categorised by two researchers with a qualitative, interpretative method. Both researchers first established the categories independently and then compared the categories and discussed them until a consensus was reached. Then the responses were classified according to these categories.

First the changes in the content of ordered concept maps were analysed. The concepts in maps were classified into three main categories describing different levels of abstraction: level of qualities, level of quantities and laws, and level of structured theory. Then the concepts were further categorized into different subcategories. In this, the subject matter content knowledge of researchers and their interpretations of the concepts in the ordered concept maps guided the forming of sub-categories. Next, the overall structure of the ordered concept maps was analysed in order to see the structural changes in the ordered concept maps during the learning process. The ordered concept maps were categorised based on how temperature was presented in them and connected to other concepts. Four different categories of structure were formed: fragmented, centralised, mixed and hierarchical. Within a single category there are differences, e.g. in the number of concepts and links or the complexity of ordered concept maps, but on the whole, these categories represent the basic differences of structures between the ordered concept maps well. Sometimes in concept map analysis, the number of nodes and links are calculated in order to evaluate learning. However, in this case the interest was to evaluate how the students applied essential concepts in an organized way in order to present the quantitative development of temperature, thus the mere calculations of the number of links or nodes would not help in this. Then based on the analysis of ordered concept maps, the affect of collaboration and teacher's guidance were evaluated.

The interviews were used first to confirm and deepen the analysis of ordered concept maps. Also the role of collaboration and guidance were analysed. Both researchers interpreted these roles from the interviews and these interpretations were compared and these interpretations were convergent.

Results

In Figures 1-4 examples of students' ordered concept maps are shown. The ordered concept maps are redrawn and the words are translated into English. However, the organization of concepts and the shapes of nodes and arrows adapt the students' original ordered concept maps. In Figure 1, students Heikki (1.a) and Pirjo (1.b) initial ordered concept maps are shown. Heikki and Pirjo worked as a pair during exercises and their collaboratively produced intermediate ordered concept map is shown in Figure 2. Then after exercises Heikki made the final ordered concept map (shown in Figure 3) with Aulis and Pirjo made the final ordered concept map (shown in Figure 4) with Hannele. When comparing the initial ordered concept maps in Figure 1, it can be seen that Heikki had more concepts in his map and the structure of Heikki's map differs from the structure of Pirjo's map. Their shared intermediate ordered concept map (Figure 2) resembles more Heikki's initial map; however, the concept of pressure, which Pirjo had initially, has been added to the intermediate map. Both mention temperature scales in their initial ordered concept maps, Heikki in general (Temperature scale) and Pirjo mentions different scales (°C, F, K). In their intermediate map, they use Heikki's term, but they have thought on what basis different scales are defined (links [1] and [2] in ordered concept map). The rest of the differing concepts (e.g. radiation and power) in Pirjo's initial ordered concept map compared with Heikki's initial ordered concept map are not included in their intermediate map. From Heikki's initial map the concept of ideal gas is not included in Heikki's and Pirjo's intermediate map. They have added one new concept in the map: coefficient of thermal expansion. The intermediate map (Figure 2) was what Heikki and Pirjo produced together at the first half of the exercises on the basis of their initial ordered concept maps. Then they continued working together at the end of the exercises, but now they got guidance from the instructor. After exercises, they produced their final ordered concept maps, but now with other students

(Heikki with Aulis and Pirjo with Hannele). The final ordered concept maps look quite different than the initial and intermediate ordered concept maps (a lot of new concepts, progressive structure) and the main difference is that now from the final maps, it can be inferred how the temperature develops quantitatively, when the content as well as the structure of the maps is examined. Temperature is mentioned several times in final ordered concept maps when a new way to measure or define it is developed. Therefore in order to have an overall picture of the changes in all ordered concept maps, the content as well as the structure of the ordered concept maps was examined.

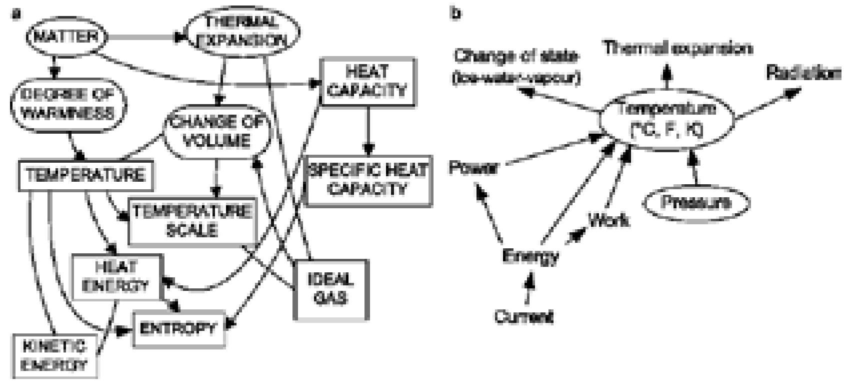


Figure 1. Initial ordered concept map of student a) Heikki and b) Pirjo.

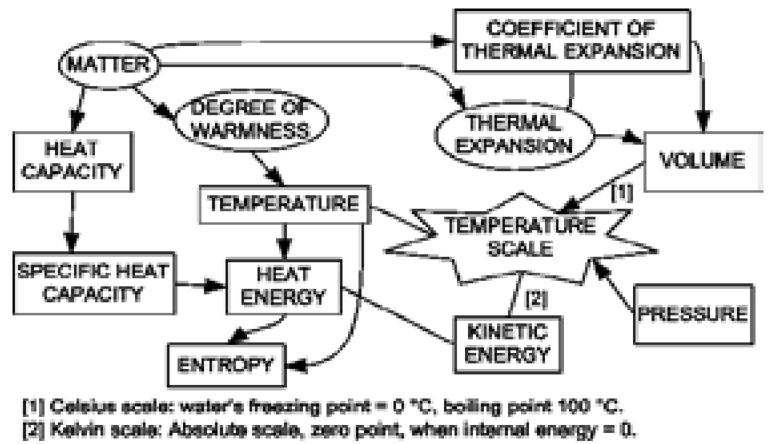


Figure 2. Intermediate ordered concept map of Heikki and Pirjo.

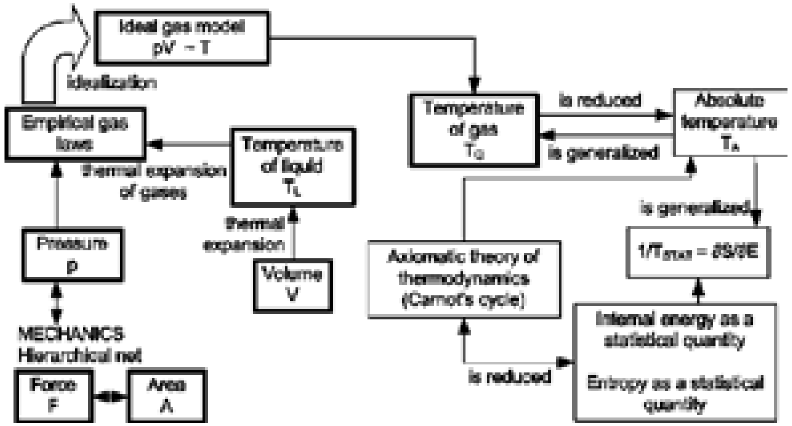


Figure 3. Final ordered concept map of Heikki and Aulis.

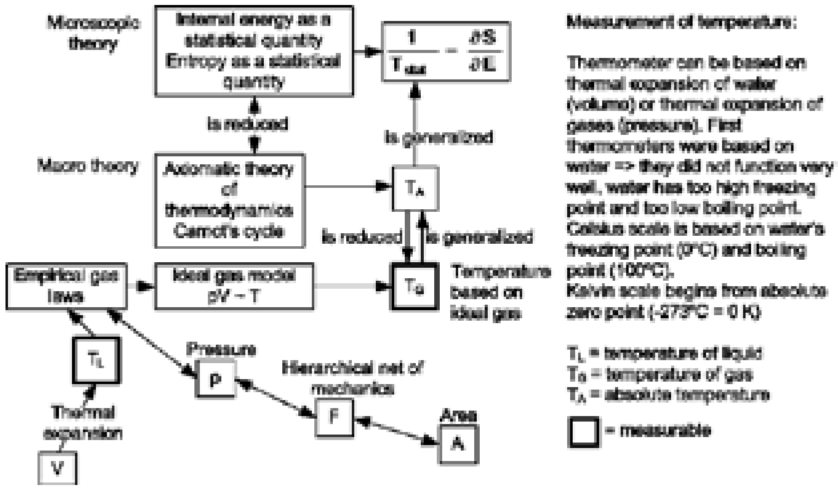


Figure 4. Final ordered concept map with included explations of Pirjo and Hannele.

Changes in ordered concept maps: content

First the different concepts in ordered concept maps were analysed and categorized and the categories are presented in Table 1. The comparison of percentages

in Table 1 shows that in case of the intermediate ordered concept maps, it is seen that their percentages resemble more initial ordered concept maps than final ordered concept maps, so there is no noteworthy development between the initial and intermediate ordered concept maps, this can be seen also from the example ordered concept maps in Figures 1-4. Sometimes the students have not managed to connect the concepts in the intermediate ordered concept maps in a meaningful way, which can be seen as an increase in the ambiguous use of concepts (volume and pressure). In the final ordered concept maps, the ambiguous use of quantities has disappeared, and instead quantities have found a specific and physically motivated role in the ordered concept maps. The most important result is that the quantitative development of temperature is well displayed in final ordered concept maps.

Table 1. Categories of concepts in students' initial (24), intermediate (9) and final (14) ordered concept maps in percentages; the number of ordered concept maps is in parentheses.

Category of concepts	*Initial*	*Intermediate*	*Final*
Ambiguous use of energy (heat, radiation)	46% (11)	78% (7)	-
Level of qualities			
Sensory experience of warmness	42% (10)	11% (1)	14% (2)
Temperature equilibrium	4% (1)	11% (1)	7% (1)
Changes in state	29% (7)	22% (2)	7% (1)
Thermal expansion phenomenon	67% (16)	44% (4)	93% (13)
Level of quantities and laws			
Thermal expansion of liquids or solids, T_{Liquid}	42% (10)	11% (1)	100% (14)
Empirical gas laws, T_{Gas}	17% (4)	22% (2)	100% (14)
Connection to the mechanical quantities	38% (9)	33% (3)	100% (14)
Ambiguous use of volume	29% (7)	89% (8)	-
Ambiguous use of pressure	58% (14)	89% (8)	-
Ambiguous use of temperature scale	33% (8)	44% (4)	7% (1)
Level of structured theory			
Ideal gas law, T_{Gas}	33% (8)	33% (3)	100% (14)
Macro theory, $T_{Absolute}$	13% (3)	22% (2)	86% (12)
Micro Theory, T_{Stat}	4% (1)	11% (1)	93% (13)
Ambiguous use of entropy	58% (14)	44% (4)	7% (1)

Changes in ordered concept maps: structure

Next the overall structure of the ordered concept maps was analysed and categorized on the basis of how the temperature was presented in the ordered concept maps and connected to other concepts. Four categories of structure were established and the schematic features of these categories are presented in Figure 5:

1. *Centralized.* Ordered concept maps (Figure 5.a) had a simple structure with the temperature at the centre. The way temperature develops as a measurable quantity is described in very vague in the ordered concept maps of this category.
2. *Fragmented.* Ordered concept maps (Figure 5.b) had no recognizable structure. Often the links were undirected, or the connection between the quantities was unphysical. Also in this category, there was no clear way to infer the quantitative development of temperature.
3. *Mixed*. Ordered concept maps' basic structure was similar to the structure of ordered concept maps in the fragmented or centralized categories, but now there are hints of a hierarchy and quantitative experiments.
4. *Hierarchical.* Ordered concept maps (Figure 5.c) had a clear organisation and progression in the structure. The quantitative experiments and their role in the development of temperature are clearly displayed.

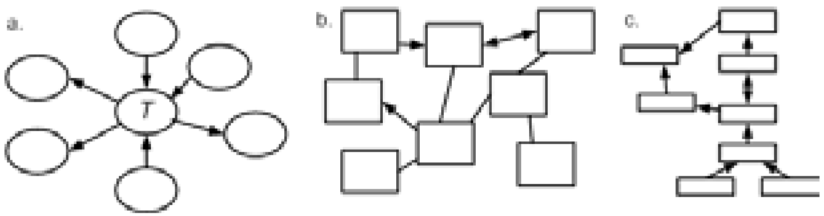


Figure 5. Schematic drawings of the typical structures of ordered concept maps (without details): a. Centralized, b. Fragmented, and c. Hierarchical.

From the examples of ordered concept maps shown above, the initial ordered concept map of Heikki (Figure 1.a) and the intermediate ordered concept map of Heikki and Pirjo (Figure 2) were categorized as fragmented, because there are a lot of relevant (also unrelevant) concepts connected to each other, but there is no way to infer how the temperature develops as a measurable quantity. The initial ordered concept map of Pirjo (Figure 1.b) was categorized as centralized, because almost all concepts are connected to temperature without a trace of its quantitative development. Both final ordered concept maps (Figures 3 and 4) were cate-

gorized as hierarchical; there is now clear progressive hierarchical development of temperature in those ordered concept maps.

The frequencies of categories of structure are presented in Table 2. The initial ordered concept maps were mostly centralised and intermediate ordered concept maps were mostly fragmented, which means that the structure of the ordered concept maps is more complex than in the most initial cases. The final ordered concept maps were hierarchical, which means that the quantitative development of temperature was recognizable in the final ordered concept maps.

Table 2. Categories of the ordered concept maps' structure in students' initial, intermediate and final ordered concept maps in percentages; the number of ordered concept maps is in parentheses.

Category of structure	*Initial (n=24)*	*Intermediate (n=9)*	*Final (n=14)*
Centralized	54% (13)	22% (2)	-
Fragmented	33% (8)	56% (5)	-
Mixed	13% (3)	22% (2)	14% (2)
Hierarchical	-	-	86% (12)

Role of collaboration and guidance during learning process

The role of collaboration and guidance on students' learning was evaluated first on the basis of the changes in students' ordered concept maps and then on the basis of the student interviews.

The topic was already went through in the lecture and previous physics courses, so the students had (or should have) the relevant knowledge, but the results of the initial ordered concept maps (the analysis of concepts and structure) show that they could not apply it themselves in the given task of presenting the quantitative development of temperature graphically. When students worked collaboratively in small groups, the ordered concept maps changed but did not improved (Tables 1 and 2). The factor that in this case seems to facilitate the improvement in ordered concept maps is the teacher's guidance of small groups.

In the interviews, students brought up that they value the (collaborative) construction of ordered concept maps:

> *Learning physics is like climbing step by step upwards, and every step is needed. This is useful* [making ordered concept maps] *because it organizes thinking and one recognizes easily in what step something is missing. It is possible to build a whole structure what one has learned.*

> *It is a kind of framework, I automatically start to think what concepts are interrelated… and in what order to represent things.*

This shows that making ordered concept maps helps students in their schema construction. In making these ordered concept maps, the collaborative activities are important for students:

> *It is good to have other perspectives.*

> *Three brains are better than just one.*

> *The group working gives the most when everyone is "forced"... to do these ordered concept maps in small groups.*

The guidance of the instructor and the available expert's knowledge is appreciated by students:

> *I have many times thought to myself that if you would study yourself without any guidance, it would lead to situation … that when a problem is encountered, there is no-one from whom to ask reliable knowledge or answer, this would be formed as a problem.*

However, the learning through the guided collaborative making of ordered concept maps is reflective and more for internalizing previous knowledge than learning new knowledge:

> *In the lectures there comes of course new things, well… you learn more in the exercises, or actually you don't learn anything new, but you internalize it* [the subject content to be learned] *better and it becomes your own.*

> *Maybe the exercise is per se good because you deal with the things that have been in the lectures earlier and in a way in the exercises finally you compile… recap the package. And then of course all the other things are made in there,*

> *I don't know why, but for some reason the atmosphere is more relaxed there than in the lectures.*

As the last excerpt above shows, the conversational questions and guidance of one group at a time makes the atmosphere of the classroom a non-threatening one.

Discussion

As the results above showed that although the students valued the collaboration, the mere collaborative making of ordered concept maps was not enough and the changes between the individual initial ordered concept maps and collaborative intermediate ordered concept maps were little. In many studies of the concept mapping the role of teacher is not explicitly discussed, but this study shows that at least in this type of concept maps, which tries to capture the process-based aspects of knowledge, the teacher's role in guiding students is important. Although Basque's and Lavoie's review of studies in collaborative concept mapping (2006) showed its benefits for learning, there were also cases of no significant learning results. In this case, if only the collaborative concept mapping of students without teacher's influence is examined, significant learning effects can not be seen. The difficulties of students in learning how the temperature evolves as a measurable quantity might partly be due to the intrinsic cognitive load of the topic, the inherent difficulty of temperature and the related quantities as the studies, for instance, of Carlton (2000) and Meltzer (2004) have showed. As Nesbit and Adesope (2006) has discussed, the concept mapping helps to reduce the extrinsic cognitive load, it is also the case here. However, at the same time the guidance of the teacher is needed, which is in accordance with the studies of Kirschner et al. (2006) and Mayer (2004). The increasing of germane cognitive load requires instruction methods that help in schema construction, so it is assumed that besides reducing the extrinsic cognitive load the concept maps also help in increasing the germane cognitive load, because they help to chunk knowledge. However, this is not an easy task for students to do by themselves; thereby the teacher's guidance on students' learning is needed.

Conclusions and implications

This study has indicated that when pursuing organized content knowledge of physics using ordered concept maps, an essential factor is the way the concept maps are applied in instruction. In this, the collaborative learning plays an important role, but alone it is not enough, the teacher's delicate guidance is needed to nurture the collaborative, cognitively active learning. The method of guided collaboration in making ordered concept maps is now frequently used in our pre-service physics teacher education and the student feedback is continuously gathered in order to maintain the proper balance between the ordered concept maps, collaboration and teacher's guidance.

Acknowledgements

This work was supported by the Academy of Finland through grant SA1133369.

References

Bannert, M. (2002). Managing cognitive load-recent trends in cognitive load theory. *Learning and Instruction*, *12*, 139–146

Basque, J., & Lavoie, M.-C. (2006). Collaborative concept mapping in education: Major research trends. In A. J. Cañas & J. D. Novak (Eds.), *Concept Maps: Theory, Methodology, Technology, Proc. of the Second Int. Conference on Concept Mapping.* San José, Costa Rica.

Carlton, K. (2000). Teaching about Heat and Temperature. *Physics Education, 35*, 101–105.

Cotignola, M. I., Bordogna C., Punte G., & Cappannini, O. M. (2002). Difficulties in Learning Thermodynamic Concepts: Are They Linked to the Historical Development of this Field? *Science & Education, 11*, 279–291.

Kirschner, P.A. (2002). Cognitive load theory: Implications of cognitive load theory on the design of learning. *Learning and Instruction, 12,* 1–10.

Kirschner, P.A., Sweller, J., & Clark R. E. (2006). Why Minimal Guidance During Instruction Does Not Work: An Analysis of the Failure of Constructivist, Discovery, Problem-Based, Experiential, and Inquiry-Based Teaching. *Educational Psychologist, 41*(2), 75–86.

Koponen, I. T., & Mäntylä, T. (2006). Generative role of experiments in physics and in teaching physics: A suggestion for epistemological reconstruction. *Science & Education, 15,* 31–54.

Mayer, R. E. (2004). Should there be a three-strikes rule against pure discovery learning? The case for guided methods of instruction. *American Psychologist, 59*(1), 14–19.

Meltzer, D. (2004). Investigation of Students' Reasoning Regarding Heat, Work, and the First Law of Thermodynamics in an Introductory Calculus-based General Physics Course. *American Journal of Physics, 73,* 1432–1446.

Mäntylä, T., & Koponen, I. T. (2007). Understanding the role of measurements in creating physical quantities: A case study of learning to quantify temperature in physics teacher education. *Science & Education, 16,* 291–311.

Nesbit, J., & Adesope, O. (2006). Learning with concept and knowledge maps: A meta-analysis. *Review of Educational Research, 76*(3), 413–448.

Okebukola, P. A., & Jegede, O. J. (1988). Cognitive Preference and Learning Mode as Determinants of Meaningful Learning Through Concept Mapping. *Science Education, 72*(4), 489–500.

Paas, F., Renkl, A., & Sweller, J. (2003). Cognitive load theory and instructional design: Recent developments. *Educational Psychologist, 38*(8), 1–4.

Paas, F., Renkl, A., & Sweller, J. (2004). Cognitive load theory: Instructional implications of the interaction between information structures and cognitive architecture. *Instructional Science, 32,* 1–8.

Reif, F. (2010). *Applying Cognitive Science to Education: Thinking and Learning in Scientific and Other Complex Domains*. MIT Press (MA).

Roth, W-M. (1994). Students views on collaborative concept mapping: An emancipator research project. *Science Education, 78,* 1–34.

Sweller, J. (1994). Cognitive load theory, learning difficulty, and instructional design. *Learning and Instruction, 4,* 295–312.

Taber, K. (2000). Finding the Optimum Level of Simplification: the Case of Teaching about Heat and Temperature. *Physics Education, 35,* 320–325.

Valcke, M. (2002). Cognitive load: updating the theory? *Learning and Instruction, 12,* 147–154.

Van Heuvelen, A. (1991). Learning to think like a physicist: A review of research-based instructional strategies. *American Journal of Physics, 59,* 891–897.

Erilaisia tapoja johdatella ongelmanratkaisutehtävään - esimerkkinä aritmagon-tehtävän ratkaiseminen alakoulun kolmannella luokalla

LIISA NÄVERI, MAIJA AHTEE, ANU LAINE, ERKKI PEHKONEN JA MARKKU S. HANNULA

liisa.naveri@helsinki.fi
Helsingin yliopisto, Opettajankoulutuslaitos

Tiivistelmä

Tutkimuksen tavoitteena on selvittää, minkälainen yhteys on opettajan toiminnan ja kolmasluokkalaisille uuden ja epätavanomaisen ongelman ratkaisujen välillä. Ongelmana on aritmagon-tehtävän ratkaiseminen, jolloin pitää löytää kolmion kärkiin sopivat luvut, kun niiden summat on annettu sivujen keskellä. Oppilaiden tehtävänä oli lisäksi keksiä menetelmä, millä aritmagon-tehtävän tietynlaisen erikoistapauksen voi aina ratkaista. Oppitunnit (8 luokkaa) videoitiin ja litteroitiin, oppilaiden (N=102) ratkaisut kerättiin ja tarkastettiin. Opettajan tehtävänannon luokittelussa käytetään lähtökohtana Polyan (1945) mallista kehitettyä opetusmallia.

Asiasanat

ongelmanratkaisu, aritmagon, tehtävänanto, alakoulu, matematiikka

Johdanto

Tämä tutkimus liittyy laajempaan tutkimukseen oppilaiden ja opettajien matemaattisen ymmärryksen ja toiminnan kehittymisestä käytettäessä avoimia ongelmanratkaisutehtäviä. Ongelmanratkaisutilanteessa tärkein ulkopuolinen vaikuttaja on opettaja (Pehkonen, 1991, s. 24-25). Oppilaan käyttäytymiseen vaikuttavat kokemukset matematiikasta, matemaattinen tietous, tarpeet ja motivaatio matematiikan oppijana ja uskomukset. Opettajan toimenpiteiden tulisi tähdätä matematiikan opiskelun ja oppimisen kannalta keskeiseen tavoitteeseen: oppilaiden ongelmanratkaisusitkeyden kehittämiseen. Tällaisia opettajan toimenpiteitä ovat esimerkiksi myönteisen ilmapiirin luominen, oppilaiden luovuuden ja tiedollisten valmiuksien kehittäminen kannustamalla oppilaita eri vaihtoehtojen kokeiluun ja uusien ratkaisutapojen etsimiseen. Tällöin ymmärtämisen merkitys vahvistuu. Tässä artikkelissa tarkastellaan tehtävänannon merkitystä oppilaille uuden, epätavanomaisen ongelman yhteydessä. Tavoitteena on löytää ongelmanratkaisun opettamisen ongelmakohtia tehtävänannossa. Aluksi käsitellään kolmea matematiikan opetuksen keskeistä teoreettista käsitettä: ongelmanratkaisu, epätavanomainen (non-standardi) ongelma ja matemaattinen ajattelu, jotka ovat merkityksellisiä tässä esitetyn empiirisen tutkimuksen kannalta. Tutkimukseen osallistui kahdeksan opettajaa ja heidän kolmasluokkalaisensa (N=102) maaliskuussa 2011. Aineisto perustuu videoituihin tunteihin, tunnilla tehtyihin havaintoihin, opettajapalavereihin ja oppilaiden suorituksiin.

Teoreettinen tausta

Matematiikan oppimisen tavoitteena on kaikissa ikäryhmissä matematiikan rakenteiden ymmärtäminen ja matemaattisen ajattelun kehittyminen, ei siis pelkästään mekaaninen laskeminen (Opetushallitus, 2004). Oikeiden oppimistapojen luomiseksi tämän tulisi olla tavoitteena jo alakoulusta lähtien. Ongelmanratkaisua pidetään kansainvälisesti keskeisenä matemaattiselle ajattelulle (esim. Mason, Burton & Stacey, 1982, Schoenfeld, 1985, Stanic & Kilpatrick, 1988). Peruskoulun opetussuunnitelma (Opetushallitus, 2004) antaa ongelmanratkaisun yhtenä kaikkia oppiaineita koskevana yleisenä tavoitteena.

Ongelmanratkaisu

Tässä artikkelissa tarkastelualueena on ongelmatehtävän käyttäminen matematiikan opetuksessa ja opettajan toiminnan merkitys tehtävänantovaiheessa sekä oppilaiden kyvykkyys ratkaista epätavanomaista tehtävää. Vaikka oppiminen on yksilöllinen tapahtuma, niin kouluympäristössä se tapahtuu aina vuorovaikutuksessa opettajan ja muiden oppilaiden kanssa. Opettajan omat käsitykset ja uskomukset matematiikasta sekä sen opettamisesta ja oppimisesta vaikuttavat opettajan tekemiin päätöksiin luokassa (esim. Pajares, 1992; Calderhead, 1996; Speer, 2008).

Modernin ongelmanratkaisututkimuksen arvioidaan alkavan George Polyasta, joka 1945 julkaisi kirjan ’How to Solve it’ (Polya, 1945). Tässä kirjassa hän esitti ns. Polyan mallin matemaattiselle ongelmanratkaisulle, johon perustuvia ongelmanratkaisumalleja on myöhemmin kehitetty useita. Tässä tukeudutaan seuraavaan laajasti kirjallisuudessa käytettyyn ongelman luonnehdintaan (esim. Kantowski, 1980): tehtävän sanotaan olevan *ongelma*, jos sen ratkaiseminen vaatii, että ratkaisijan on yhdisteltävä hänelle ennestään tuttua tietoa uudella tavalla. Jos ratkaisija voi heti tunnistaa ne toimenpiteet, jotka tarvitaan tehtävän ratkaisemiseen, niin kyseessä on hänelle *rutiinitehtävä* (tai standarditehtävä tai harjoitustehtävä).

Polya (1945) esitti kirjassaan jo yli 60 vuotta sitten ratkaisijalle neliportaisen ongelmaratkaisumallin, jonka vaiheet ovat: Ongelman ymmärtäminen, Ratkaisun suunnitteleminen, Ratkaisun toteuttaminen, Tarkastelu. Yhdistämällä siinä toinen ja kolmas vaihe saadaan selkeä malli ongelmanratkaisun opettamiselle (vrt. Laine ym., 2012), jota voidaan hyödyntää opettajan toimintaa tarkasteltaessa: Tehtävän antaminen, Oppilaiden ohjaus ja Tehtävän yhteenveto. Lisäksi malliin on lisätty 0. vaiheena Opetuksen suunnittelu. Tällöin Malli ongelmanratkaisun opettamiselle ja Polyan ongelmanratkaisumallin vaiheet limittyvät: Opetuksen suunnittelu, Tehtävän antaminen, Ongelman ymmärtäminen, Ratkaisun suunnitteleminen ja tekeminen, Oppilaiden ohjaus, Ratkaisujen tarkastelu ja Tehtävän yhteenveto. Tässä rajoitutaan opettajan toiminnan 1. osatekijään: tehtävän antamiseen ja tätä tarkastellaan oppitunnin eri vaiheissa.

Matemaattinen ajattelu ja ongelmanratkaisu

Opetussuunnitelmatekstin nojalla matematiikan opetuksen tehtävänä on mm. ”tarjota mahdollisuuksia matemaattisen ajattelun kehittämiseen” (Opetushallitus, 2004, s.158). Siitä mitä tämä matemaattinen ajattelu on ja minkälaiset periaatteet parhaiten edistävät sen oppimista, on erisuuntaisia näkemyksiä. Yleisesti opettajan käsitys matematiikasta ja siten myös matemaattisesta ajattelusta säätelee hänen toimintatapojaan. Esimerkiksi Bauersfeld (1995) kuvaa matematiikan luonnetta:

> *”Matematiikka on ennemminkin sosiaalisiin ja kulttuurisiin sopimuksiin pohjautuva kommunikoinnin muoto kuin ulkoisesti omaksuttu absoluuttisten totuuksien universaalinen kokoelma”.*

Lauseesta voi erottaa näkökulmat matematiikan luonteesta, matematiikasta välittävänä artefaktina ja matematiikan opettamisen perustan. Matematiikkaa opettavan tulisi olla selvillä matematiikan luonteesta ja pohtia, millaista matematiikkaa hän opettaa.

Mitä matemaattinen ajattelu on, on monenlaisia käsityksiä ja määrittelyjä. Opetussuunnitelmien perusteissa käytetään käsitettä ´ajattelun taidot´, mihin liitetään perustelujen ja päätelmien tekeminen. Vuoden 2004 perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden mukaan ei riitä, että oppilaat osaavat laskea mekaanisesti, vaan oppilaan tulisi myös pystyä tekemään perusteluja ja päätelmiä sekä selittämään toimintaansa suullisesti ja kirjallisesti (Opetushallitus, 2004). Tämä on kirjattu opetussuunnitelman (2004) perusteissa vuosiluokkien 1-2 matematiikan opetuksen ydintehtäväksi.

Opetussuunnitelmatekstissä on myös elementtejä matemaattisen tiedon (käsitteellinen, toiminnallinen ja strateginen) prosessointia korostavasta matemaattisesta ajattelusta. Joutsenlahti (2005, s. 68) toteaa matemaattisen ajattelun ilmenevän pääasiassa kahdessa prosessissa: ongelmanratkaisussa ja käsitteenmuodostuksessa. Näissä määritelmissä käsitteenmuodostuminen on prosessi stabiilin tilan sijaan. Ongelmanratkaisuprosessiin ja käsitteen muodostumiseen liittyy ymmärtävä komponentti.

Opettajan toiminta

Jokaisella opettajalla on oma käsityksensä matematiikasta ja sen opettamisesta. Siten myös ongelmanratkaisutilanteessa tärkein ulkopuolinen vaikuttaja on opettaja (Pehkonen, 1991, s. 24-25). Oppilaan käyttäytymiseen vaikuttavat hänen kokemuksensa matematiikasta, hänellä oleva matemaattinen tietous, tavoitteet ja motivaatio matematiikan oppijana sekä uskomukset. Opettajien toiminnalla on ollut vaikutusta hänen kokemuksiinsa. Opettajan toimintaan vaikuttavat hänen taustatekijänsä, kuten hänen opettamis- ja oppimiskokemuksensa, matemaattinen tietoutensa, tavoitteensa ja motivaationsa. Käsiteltäessä ongelmanratkaisutehtäviä on keskeistä matematiikan oppimisen kannalta oppilaiden ongelmanratkaisusitkeyden kehittäminen. Tällä tarkoitetaan sitä, että oppilaat oppivat yrittämään ongelman ratkaisemista, vaikka eivät heti keksikään oikeaa ratkaisumenetelmää. Tähän tähtääviä opettajan toimenpiteitä ovat esimerkiksi myönteisen ilmapiirin luominen, oppilaiden luovuuden ja tiedollisten valmiuksien kehittäminen sekä ongelmanratkaisuasenteiden parantaminen. Alkuun on suositeltavaa työskennellä yhdessä, jotta mahdollisuudet turvalliseen ja lämminhenkiseen työskentelyyn olisivat hyvät (Johnson & Rising, 1967, s. 23; Keranto, 1982, s. 46). Myöhemmin pari- ja ryhmätyöskentelyä kannattanee suosia, sillä myös se mahdollistaa keskustelun. Oppilaat oppivat näin vähitellen puhumaan ongelmanratkaisusta ja ratkaisuvaihtoehdoista sekä omista ajattelumalleistaan.

Mooren mallissa opettaja esittää ongelman ja varmistaa, että lähtökohdat on ymmärretty. Oppilaat ratkaisevat annettua tehtävää keskustellen ja opettajan ohjauksessa. Opettajalla tulisi olla taito arvioida, ymmärtää ja reagoida herkästi oppilaiden erilaisiin prosesseihin tehtävän ratkaisemiseksi (Weber, 2003).

Tutkimusongelmat

Tässä artikkelissa tavoitteena on selvittää, minkälainen yhteys on opettajan tekemien ratkaisujen ja oppilaiden suorituksien välillä. Tässä tutkimuksessa tarkastellaan oppitunnilla tapahtuvaa tehtävänantoa. Lisäksi tarkastetaan ja luokitellaan oppilaiden suoritukset ja vertaillaan näitä eri ryhmissä opettajien tehtävänannon suhteen. Siispä voidaan asettaa seuraavat kolme tutkimusongelmaa:

1. Miten oppilaat osaavat ratkaista epätavanomaisen ongelman?
2. Minkälaiset ovat opettajien tehtävänannot ongelmanratkaisutunnilla?
3. Mitkä tekijät tehtävänannon esittämisessä näyttävät olevan yhteydessä oppilaiden ratkaisuihin ja strategioiden kuvaamiseen?

Tutkimuksen toteutus

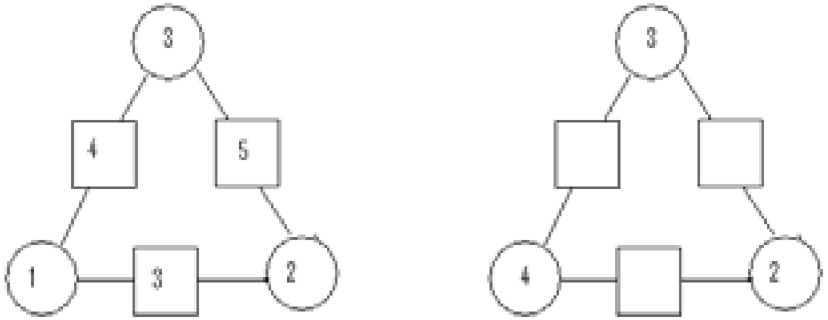
Tämä tutkimus on osa hanketta jossa Chilen ja Suomen opettajien erilaisia toimintatapoja ja oppilaiden ymmärtämisen ja suoritusten kehittymistä vertaillaan, kun kolmannelta luokalta lähtien käytetään kerran kuukaudessa ongelmanratkaisua. Käsiteltävänä oleva aritmagon-ongelma kuuluu näihin kokeilutehtäviin, joiden toteutuksesta on kerätty suomalaisista luokista monipuolista tietoa.

Koehenkilöt

Tutkimukseen osallistui kahdeksan kolmatta luokkaa, siis kahdeksan opettajaa ja heidän 102 kolmasluokkalaistaan. Tunneilla käsiteltiin samaa aritmagon-tehtävää. Oppitunnit toteutettiin eri aikaan, kuitenkin yhden kuukauden sisällä maaliskuussa 2011. Opettajista käytetään tässä tekstissä pseudonyymejä: Aino, Eeva, Heli, Ina, Jenni, Kaisa, Lotta ja Mari.

Aritmagon-tehtävä

Aritmagon on kolmio, jonka kärjissä olevien lukujen summa on kärkiä yhdistävällä sivulla (ks. esim. Brown & Reid, 2006). Kokeileville opettajille annetussa tehtäväpaperissa sanallisen määritelmän lisäksi on annettu rakennetta selventävä numeerinen esimerkki (Kuva 1), sekä varsinaisiin ongelmatehtäviin johdatteleva esimerkki, missä sivujen summat tuli ratkaista.



Kuva 1. a) Aritmagon-tehtävän rakenne ja b) johdatteleva esimerkki: Ratkaise sivuille tulevat summat.

Kolmasluokkalaisille annettiin luonnollisia lukuja sisältävä varsinainen aritmagon-tehtävä: löytää kolmion kärkiin sopivat luvut, kun niiden summat oli annettu sivujen keskellä. Tehtävää oli helpotettu siten, että summaluvuiksi oli annettu kaksi samaa lukua. Tämän jälkeen oppilaiden tuli miettiä menetelmä tällaisen helpotetun aritmagon-tehtävän ratkaisemiseksi. Eriyttävässä lisätehtävässä kaverille piti laatia aritmagon-tehtävä ja vastaavasti ratkaista kaverin antamat tehtävät.

Tutkimusaineiston hankinta

Aikaa kaikissa ryhmissä tehtävään käytettiin yksi matematiikan tunti. Ensimmäinen kirjoittaja (LN) oli mukana tunnilla ja videoi opettajan työskentelyä, jonka jälkeen video litteroitiin. Aritmagon-tehtävästä annettiin kokeilevien opettajien palaverissa ennen tuntikäsittelyä toteutusehdotus ja siitä keskusteltiin. Myöskin tunnin jälkeen keskusteltiin opettajapalaverissa kokemuksista aritmagon-tunnista. Molemmat opettajapalaverit videoitiin. Tunnin jälkeen oppilaiden ratkaisupaperit koottiin tutkijalle.

Oppilaiden suoritusten luokitteluperusteet ja analysointi on kuvattu luvussa ´Oppilaiden ratkaisut´ (Taulukko 1) ja tehtävänanto luvussa ´Tehtävänanto ja ohjaus ongelmanratkaisutunnilla´ (Taulukko 2). Aineiston rinnakkaisluokitteli kaksi ensinmainittua kirjoittajaa.

Tuloksista

Oppilaiden ratkaisut

Luokittelimme sekä oppilaiden löytämät ratkaisut varsinaiseen aritmagon-tehtävään että heidän kirjaamansa menetelmät ratkaisujen löytämiseksi. Varsinaisia aritmagon-tehtäviä tarkistettiin 73 oppilaalta. Vain neljällä oppilaalla vastaus puuttui tai oli väärin. Tehtäväpapereista ja oppitunnin videoinnista ei käy yksikäsitteisesti selväksi, mikä on opettajan osuus kahden varsinaisen aritmagon-tehtävän suorituksissa. Lisäksi kolme opettajaa, Heli, Ina ja Kaisa palauttivat oppilaiden suorituksina vain lisätehtäväosion, missä kaverille tehdään aritmagon-tehtäviä, joten emme päässeet tarkastamaan kaikkien oppilaiden vastauksia tehtäväpaperissa olleisiin varsinaisiin tehtäviin. Sen sijaan saimme kaikilta luokilta kavereille tehtyjä aritmagon-tehtäviä.

Oppilaiden suoritukset luokiteltiin kolmeen luokkaan sen perusteella, miten ratkaisut oli perusteltu ja miten varsinainen aritmagon-tehtävä oli huomioitu. Luokkaan X tulivat ne suoritukset, joissa oppilaalla oli sekä perustelu aritmagon-tehtävän ratkaisulle että ratkaistavissa olevia lisäaritmagon-tehtäviä, joissa sivuilla oli ainakin kaksi samaa summaa. Luokkaan Y kirjattiin ne suoritukset, joissa ei ollut minkäänlaista perustelua ratkaisulle, mutta joista löytyi lisäaritmagon-tehtäviä, joissa sivuilla oli ainakin kaksi samaa summaa. Luokkaan Z kirjattiin suoritukset, joissa ei ollut mukana yhtään lisäaritmagon-tehtävää, jonka sivuilla olisi ollut ainakin kaksi samaa summaa.

Lisäksi oppilaiden antamat perustelut ratkaisumenetelmän löytämiselle (ts. luokka X), kun aritmagon-tehtävässä oli annettu ”kaksi samaa summaa”, jaettiin kolmeen luokkaan sen mukaan, kuinka hyvin oppilaat olivat perustelut ilmaisseet. Luokkaan 1 sijoitetuista perusteluista ilmeni selvästi, miten oppilas otti huomioon sen, että aritmagon-tehtävässä oli kaksi yhtä suurta summaa tarkoittavaa lukua ja miten tätä saattoi hyödyntää ratkaisun etsimisessä. Luokkaan 2 sijoitetuista perusteluista ilmeni, että oppilas ymmärsi, että ratkaisu löytyi yhteenlaskun kautta. Luokkaan 3 sijoitettiin oppilaat, jotka olivat yrittäneet kirjoittaa jotakin perusteluksi. Taulukossa 1 on koottuna oppilaiden suoritusten luokittelu esimerkkeineen ja suoritusten jakautuminen eri kategorioihin.

Taulukko 1. Oppilaiden suoritusten jakautuminen eri luokkiin.

Kategoria		*Esimerkki*	*Oppilasmäärä*
X.1	Aritmagon-tehtävässä kaksi samaa summaa, joiden merkitys ymmärretty	Mietin, mikä +lasku tarvitaan ja laske aina samat luvut, esim. 1+1, 2+2 ja 4+4.	12
X.2	Aritmagon-tehtävässä kaksi samaa summaa ja ymmärretty, että on kyse yhteenlaskusta	Mä vaan laskin + laskuja.	11
X.3	Aritmagon-tehtävässä kaksi samaa summaa ja epämääräinen selitys	Mä vaan laskin. Lopulta mä vaan sen tajusin.	5
Y	Aritmagon-tehtävässä kaksi samaa summaa, ei perustelua	2 1 1, 4 9 9, 6 16 16, 200 500 500	35
Z	Aritmagon-tehtävässä kolme erilaista summaa, ei perustelua	8 4 6, 5 9 8, 11 17 14	39
Yht.			102

Koska luokkiin 2 ja 3 luokiteltuja perusteluja 'Mä vaan laskin +laskuja' ja 'Mä vaan laskin' ei voida pitää strategioina, tarkastellaan luvussa 'Tehtävänannon yhteys oppilaiden suorituksiin' opettajan toiminnan yhteyttä vain ratkaisustrategian sisältävän luokan X.1 suorituksiin.

Tehtävänanto ja ohjaus ongelmanratkaisutunnilla

Kaikilla Chile-Suomi -tutkimusprojektiin valituilla ongelmanratkaisutehtävillä on kullakin tietty tavoite. Aritmagon-tehtävälle asetettiin tehtäväpaperissa tavoitteeksi löytää ratkaisustrategia. Koska opettajat eivät olleet tehneet kirjallisia tuntisuunnitelmia, etukäteen asetetuista tunnin tavoitteista ei ole tietoa. Seurasimme heidän toimintaansa ongelmanratkaisutunnilla videoinneista. Kaksi tutkijaa katsoi alkuperäiset videot ja luki useaan kertaan litteroinnit sekä keskusteli yhdessä muodostaakseen mahdollisimman tarkan käsityksen tunnin kulusta. Näin he päätyivät lopulta luokittelemaan opettajien ongelmanratkaisutunnilla toteuttaman tehtävänannon kolmeen kategoriaan (Taulukko 2) sen mukaan, miten opettajat ottivat esille ratkaisustrategian löytämistä erityisesti, kun aritmagon-tehtävässä oli annettu kaksi samaa summaa.

Taulukko 2. Opettajien tehtävänantokategoriat

Kategoria	*Kuvailu*
A	Etsiä ratkaisustrategia aritmagon-tehtävän ratkaisemiseksi, kun aritmagon-tehtävässä on annettu kaksi samaa summaa.
B	Etsiä ratkaisu ja ratkaisustrategia aritmagon-tehtävään.
C	Tehtävänanto ratkaisustrategian etsimisestä vasta ohjausvaiheessa.

Opettajien sijoittuminen eri kategorioihin selitetään seuraavassa. Videointien perusteella saatuja otteita kaikkien kahdeksan opettajan ongelmanratkaisutuntien tehtävänantovaiheesta on tarvittaessa täydennetty ohjausvaiheeseen kuuluvilla katkelmilla.

Luokittelimme Ainon tunnin kategoriaan A, missä varsinaisten aritmagon-tehtävien ratkaisujen lisäksi korostetaan erityisesti ratkaisustrategian keksimistä, kun ratkaistavissa aritmagon-tehtävissä on annettuna kaksi yhtä suurta summaa. Aino ohjaa korostetusti oppilaita ratkaisustrategian löytämiseen. Hän oli myös laatinut paperin kääntöpuolelle oppilaille ennen varsinaisia tehtäviä yksilötyönä ratkaistavaksi kolme kaksi samaa summaa sisältävää lisäaritmagonia, joissa piti ratkaista kulmaluvut:

Aino

> *Kun sä löysit ratkaisun tänne* (näyttää ensimmäistä varsinaista aritmagon-tehtävää taululta), *niin sä todennäköisesti löysit ratkaisun myös tänne. Millaista ratkaisustrategiaa sä käytit? Miten sä löysit ne luvut? Nyt sun pitäisi se kirjoittaa. Jos siellä sivuilla on ne kaksi lukua, niin löysit sä, että ne aina ratkeaa jollain samalla tavalla? Eli pohdit nyt, että mitä sä näissä kaikissa teit samalla tavalla.*

Heli ja Eeva antoivat myös oppilaille tehtäväksi ratkaista aritmagon-tehtävät ja keksiä sääntö, kun ratkaistavissa aritmagon-tehtävissä oli kaksi samaa summaa, joten luokittelimme myös nämä tunnit kategoriaan A. Lisäksi Heli antoi samalla oppilaiden tehtäväksi keksiä lisäaritmagon-tehtäviä toisilleen. Hänen oppilaansa eivät malttaneet keskittyä strategian keksimiseen, vaan innostuivat tekemään kaverille aritmagon-tehtävää:

Heli

> *Huomaatteks te, tässä on nyt kaksi samaa lukua. Siinä onkin nyt vähän miettimistä, miten sen voi ratkaista aina. Eli se on nyt teidän tehtävä. Annan teille kohta paperit. Sitten teette vielä kaverille, yksi helppo ja yksi vaikeampi aritmagon-tehtävä.*

Heli antoi seuraavanlaisia ohjeita: ”Sitten saatte kertoa, miten ootte ratkaisseet nää kaks tehtävää, miten löysitte niihin oikean vastauksen? Sitten vaan hommiin.” Oppilas: ”Aika vaikee”. Opettaja: ”Ihan ite mietitte.”

Eeva

> (osoittaa toista varsinaista tehtävää). *Voit tästä aloittaa. Yksin mietit. Kun oot miettinny sen, niin mietit, että onks siinä joku sääntö, että millä tavalla voit tänmuotoisen aritmagon-tehtävän aina ratkaista, kun on kaksi samaa numeroa ja yksi eri numero. Et, mikä siinä voi olla se sääntö, millä ratkaistaan.*

Vasta kun oppilaat olivat antaneet opettajalle paperit, joihin he olivat tehneet varsinaiset aritmagon-tehtävät sääntöineen, Eeva antoi tehtäväksi tehdä kavereille aritmagon-tehtäviä.

Eeva antoi seuraavanlaisia ohjeita:”Kirjoita kans, miten sä sen ratkaisit, mistä sä sen aloitit?”,”Ynnäsin…En mä tiiä”, ”No kirjoita se sit.”

Ina korosti tehtävänannossaan omien aritmagon-tehtävien keksimistä. Hän luki tehtävän suoraan paperista.

Ina

> *Saatiin ratkaistua tää, mutta eihän tämä tähän jää ja nyt meidän pitäiskin ruveta miettimään, että miten näitä vois rakentaa itse? Ja samalla kun niitä mietitään ja rakennetaan, niin pitäis vielä miettiä että keksisiks sä jonkun ”menetelmän, jolla voi aina ratkaista aritmagon-tehtävän kulmissa olevat luvut, jos sivujen luvut on annettu ja sivuilla on kaksi samaa lukua”.*

Vaikka Ina luki tehtäväpaperista kohdan, jossa pyydetään ratkaisumenetelmää kahden saman summan tapauksessa. Hän ei ohjausvaiheessa korostanut erikoistapausta eikä palannut siihen myöhemminkään. Tästä syystä arvioimme Inan tehtävänannon luokkaan B:

Myös Jenniin tunnilla piti keksiä sääntö. Hän ei kiinnittänyt tehtävänannossa huomiota tehtäväpaperissa olevaan ohjeeseen, että summaluvuiksi oli annettu kaksi samaa lukua. Luokittelimme myös Jennin tehtävänannon kategoriaan B:

Jenni

> *Siinä on seuraavassa aritmagon-tehtävässä laitettu tulokset valmiiksi. Nyt sinun tehtäväsi on pohtia, vaikka yhdessä siinä kaverin kanssa ääneen, miten se tulos on saatu aikaan. Onks siihen olemassa joku tapa, millä niitä aritmagon-tehtäviä voidaan ratkaista tällä tavalla takaperin laskien. Sä voit kirjoittaa sinne vaikka, että minun mielestäni aritmagon-tehtävät ratkaistaan niin ja näin.*

Ohjausvaiheessa Jenni kysyi oppilaalta, mistä tämä sai varsinaisessa tehtävässä luvut alakulmiin.

> *Oppilas: Mä katoin vähän tost edellisest, se oli samantyyppinen.*
>
> *Jenni: Pystyyks sitä edellisen ratkaisua hyödyntämään tähän toiseen? Miten hyödynsit?*
>
> *Oppilas: No kun siinä oli kaks ja sit siinä oli kuitenkin sama luku, niin mä ajattelin, että tossa on.*
>
> *Jenni: Kuinka moni huomasi, että siellä alhaalla edellisessä aritmagon-tehtävässä oli alhaalla samat luvut kaks kertaa? Ja nyt tässä uudessa oli samat luvut alhaalla.*

Työskentelyn aikana toinen oppilas huomaa, että kaikki luvut eivät toimi aritmagon-tehtävässä. On muistettava, että kolmasluokkalaisille ovat vasta luonnolliset luvut tuttuja.

> *Jenni: Keksiikö joku, miksi jotkut luvut ei toimi aritmagon-tehtävässä? Minkälaiset luvut on hankalia aritmagon-tehtävässä? Kuinka monelta löytyy enemmän parillisia kuin parittomia?*

Säännöksi tuli, että parilliset luvut ovat helpompia.

Myös Kaisa korosti, että tehtävänä on löytää sääntö, millä aritmagon-tehtävä voidaan ratkaista. Kuten seuraavasta katkelmasta käy ilmi, hän ei kuitenkaan rajoittunut erikoistapaukseen ’kaksi samaa summaa’, vaan oppilaiden tehtäväksi tuli löytää sääntö yleiselle aritmagon-tehtävälle. Luokittelimme tämänkin tehtävänannon kategoriaan B:

Kaisa

Kaisa*: Seuraavassa tehtävässä nimittäin meiltä puuttuu kulmista luvut ja teidän tehtävä on nyt selvittää, että millä eri tavoin ne kulmien luvut voidaan selvittää ja teillä parin kanssa olisi tehtävänä keskustella, onko jokin yhteinen sääntö tai tapa, millä ne kulmien luvut aina pystyy selvittämään. Nii onko joku keino, että se pystytään ratkaisemaan? Onks pojat löytäneet jo ratkaisuja.*

Pojat*: Joo.*

Kaisa*: No, ootteko te keksineet jo syitä, perusteita, mikä toimii aina. Miten sä Pekka sen ratkaisit? Miten sä päättelit ne luvut?*

Pekka*: Alas kolmoset, koska 3+3 on 6.*

Kaisa: *Löysittekö te jonkin yhteisen jutun, miten nää on helppo ratkaista?*

Pojat*: Sama luku.*

Kaisa*: Pystyykö sellaisen selittämään, jos noi viereiset ei ookaan samat? Pystyykö niistä silloin saamaan toimivia aritmagon-tehtäviä? Kokeilkaa, saattekо te tehtyy semmosia, missä vierekkäiset luvut ei olekaan samat?*

Lotta antoi tehtäväpaperin oppilaille suoraan johdattelematta asiaa. Hän korosti, että lukekaa ääneen, kunnes ymmärrätte, mitä pitää tehdä. Ohjausvaiheessa hän kierteli ryhmästä toiseen neuvoen ja kysellen ja toi esille, että strategian keksiminen on tehtävän ”kluu”. Hän myös huomasi, etteivät oppilaat olleet kirjanneet ratkaisustrategiaansa, keskeytti oppilaiden työskentelyn ja otti asian yhteisesti esille. Koska hän korosti strategian miettimistä vasta ohjausvaiheessa, päädyimme kategoriaan C:

Lotta

Teemme tällä kertaa sillä lailla, että saat asian, jota et ole luultavasti nähnyt koskaan ennen ja se asia selitetään tässä paperissa. Yritä selvittää parin kanssa, mistä on kysymys ja lähde työskentelemään parin kanssa, kun keksit, mistä on kysymys. Jos on vaikeuksia selvittää, mistä on kysymys, niin nostakaa pari kätenne ylös, niin katsotaan yhdessä.

Jos oppilas ei päässyt tehtävän alkuun, Lotta ohjeisti kokeilemaan.

Lotta: *Ykkönen ja kolmonen ovat pujahtaneet tuohon ruutuun. Miten on pitänyt tehdä ykkösestä ja kolmosesta neljä?*

Oppilas: *Plussata.*

Lotta: *Oikein. Samalla tavalla näyttää syntyneen muut, mutta mikä on tuolla se ongelma? ... Okei, kysyn toisella tavalla. Mikä voisi esimerkiksi olla tuossa? No.… Sano joku esimerkki.*

Oppilas: *No nelonen.*

Lotta: *No laitetaan ihan haamuna, koska se on sitten helppo sitten ottaa pois. Mikä ongelma tulee, jos siihen laittaa nelosen?*

Kun tunnista oli kulunut noin kolmekymmentä minuuttia, Lotta totesi koko ryhmälle:

Otetaas välillä kuunteluvaihe ja katse tänne (dokumenttikameralle). *Nyt kaikilta puuttuu siitä paperista yksi hirveän tärkeä kohta ja se johtuu vaan siitä, että te ette ole tottunut sitä tekemään. Se tärkeä kohta on tässä keskellä. Voi ratkaista monin tavoin. Miten sinä? Kirjoita se tähän. Koeta kirjoittaa, miten sinä ajattelit. Se on tässä se tärkeä asia. Se on tässä oikeasti se tärkeä juttu, että miten ajattelit.*

Mari käytti runsaasti aikaa (yli 10 min) johdantovaiheeseen ja kävi myös ensimmäisen varsinaisen tehtävän opettajajohtoisesti läpi koko luokan kanssa. Tässä vaiheessa hän jakoi tehtäväpaperin oppilaille, jotka ryhtyivät innostuneesti ratkaisemaan toista aritmagon-tehtävää. Oppilaat alkoivat heti sen jälkeen myös tehdä omia tehtäviä kavereille. Koska Mari toi vasta ohjausvaiheessa esiin säännön, että aritmagon-tehtävässä on kaksi samaa summaa, luokittelumme on C:

Mari

Entä mites tämä (toinen varsinainen tehtävä) *kuvio? Miten lähtisit sitä miettimään? Nyt me tehdäänkin sillä tavalla, että tässä vaiheessa mä jaan teille jokaiselle oman paperin ja saatte lähteä tätä tehtävää yhdessä pohtimaan,* *että mitkä luvut tähän tulee. Joo ja sit täällä on vielä viimeisenä, että saa keksiä omia tällaisia aritmagon-tehtäviä ja sitten katsotaan kuinka kaveri osaa ratkaista sun tekemän tehtävän. Nyt jokainen saa oman aritmagon-tehtävän ja voitte lähteä niitä yhdessä tekemään.*

Kun Mari kierrellessään katsomassa oppilaiden työskentelyä huomasi, että oppilaat vain tekivät ja ratkoivat aritmagon-tehtäviä, hän keskeytti oppilaiden työskentelyn ja yhdessä päädyttiin sääntöön, että kolmannen summan on oltava parillinen.

Mari: Nyt tota mä keskeytän teidän työn hetkeks. Katsokaa kaikki tänne taululle päin. Nyt te ratkaisitte tämän. Huomasitteko mikä sääntö näissä kahdessa, et millä tavalla nää on samanlaisia? Huomaatteko siellä jonkun yhdenmukaisuuden tai jonkun säännön miten nää on toteutettu? Millä periaatteella tänne tuli yks ja yks ja tänne tuli kolme ja kolme. Huomasitteks te oliko siinä joku sääntö? Juha ja Jussi tekin huomasitte miks tänne tulee yks ja yks ja tänne kolme ja kolme.

Jussi*: Koska se on puolet.*

Mari*: Niin koska se on puolet siitä. Jos haluaa tehdä tällä säännöllä, niin millainen luku keskellä tulee olla?*

Jussi*: Parillinen.*

Mari*: Niin sen pitää olla parillinen luku, jos haluaa tällä säännöllä tehdä lisää ratkaisuja.*

Tästä keskustelusta näkee, että Jussi ymmärsi, miten alakulmiin saadaan luvut, jos aritmagon-tehtävässä on kaksi samaa kulmaa. Vaikka hän ei ollut ehtinyt kirjata sitä suorituspaperiinsa, otetaan se huomioon laskettaessa strategioiden perustelujen määrää.

Tehtävänannon yhteys oppilaiden suorituksiin

Tässä tarkastelemme, mitkä tekijät tehtävänannon esittämisessä näyttivät olevan yhteydessä oppilaiden korkeamman tason suorituksiin. Siis yhdistämme opettajan tehtävänannon tavan (Taulukko 2) ja oppilaiden suoritukset (Taulukko 1). Lisäksi Marin kohdalla on huomioitu yhden oppilaan suullisesti kertoma strategia. Sen sijaan Jennin yhtä oppilasta ei ole kirjattu luokkaan X.1, koska hänen strategiansa oli malli edellisestä tehtävästä. Suoritusten X.1 tarkoittaa luokkaa,

jossa aritmagon-tehtävässä kaksi samaa summaa, joiden merkitys strategialle on ymmärretty. X.2 tarkoittaa + laskua ja X.3 vain laskemista. Luokissa Y ja Z ei ollut perusteluja. Luokassa Y käytettiin varsinaisen tehtävän kahta samaa summalla sivuilla, sen sijaan Z-luokassa sivujen summat olivat kaikki eri suuria.

Taulukko 3. Tehtävänantojen (videosta päätelty) ja oppilaiden suoritusten luokittelu.

	Aino	Eeva	Heli	Ina	Jenni	Kaisa	Lotta	Mari	yht.
Tehtävänanto	A	A	A	B	B	C	C	C	
Suoritukset									
X.1	1	0	0	0	0	0	0	1	12
X.2	2	2	0	0	0	1	6	0	11
X.3	1	3	0	0	0	2	0	0	6
Y	1	2	7	8	8	3	2	3	34
Z	2	5	1	0	6	9	7	9	39
yht.	17	12	8	8	16	13	15	13	102

Aino suosi ryhmätyöskentelyä, vaikkakin oppilaat tekivät oman tehtäväpaperinsa. Myös rauhalliselle omalle pohdinnalle annettiin aikaa. Aino: ”Nyt henkilökohtaisesti tehtävän vaiheen aikana annetaan enemmän työrauhaa, koska nää on tällaisia pohdiskelua vaativia tehtäviä. ” Aino ohjasi oppilaiden ajattelua muokkaamalla tehtävään perehdyttämiskohtaa ryhmälle tutunnäköiseksi ’päivän pähkinäksi’. Hän ohjasi oppilaita etenemään vaihe kerrallaan, jolloin oppilaat malttoivat miettiä ja kirjoittaa käyttämänsä ratkaisustrategian. Ohjausta hän jatkoi, kunnes oppilas oli kirjoittanut strategian paperiinsa. Aino ohjaa korostetusti oppilaita ratkaisustrategian löytämiseen. Tämä käy ilmi hänen ohjausvaiheessa tekemistään kysymyksistä: ”Mistä sä aloitit?”, ”Mitä sä tässä teit?”, Oppilas:”Ynnäsin” Ope:”Riittääks se?” ”Nii, miten sä sen selität?”, ”Se on pluslasku.” ”Nii, mikä pluslasku”,”Nii, mitä lukuja ne silloin on?”, ”Vierekkäisiä vai mitä”,”Mitä sä huomaat noista kulmista?”,”Onko siellä samoja lukuja?” Vasta tämän jälkeen oppilailla oli lupa tehdä kavereille aritmagon-tehtäviä.

Heli antoi strategian miettimisen ja kaverille tekemisen samanaikaisesti, joten ensin annettu tehtävä jäi sivuun hauskemman aritmagon-tehtävän tekemisen kaverille tieltä. Inan, Jennin ja Kaisan tehtävänannossa korostui aritmagon-tehtävän ratkaiseminen. Jennin tunnilla ollut houkutteleva tilaisuus ohjata oppilas mallioppimisen tasolta ymmärtämään strategia jäi käyttämättä. Lotta antoi tehtäväpaperin oppilaille suoraan. Hän keskittyi ohjauksessa myös työskentelytavan ohjaamiseen. Videolta pääteltynä vaikuttaa siltä, että Lotan luokan oppilaat ovat tottuneet itsenäiseen parityöskentelyyn. Ohjausvaiheessa Lotta huomasi, että oppilaat olivat ohittaneet strategian kirjaamisen, jolloin hän kehotti oppilaita palaamaan siihen

Kokeiluluokkien oppilaista noin 12 % (12 oppilasta 102:sta oppilaasta) kirjoitti strategian (luokka X.1) ratkaisulleen ja antoi lisäaritmagon-tehtäviä, joissa sivuilla oli ainakin kaksi samaa lukua. Yhtä oppilasta lukuun ottamatta kaikki olivat Ainon ryhmästä. Noin 17 % kirjoitti perusteluksi 'Mä vaan laskin yhteen' tai 'mä vaan laskin'-tyyppisiä perusteluja, joita ei voida pitää vielä strategioina. Noin kolmannes (35 %) ei kirjoittanut minkäänlaista perustelua, mutta heidän lisäaritmagon-tehtävissään oli myös sellaisia, joissa kolmion sivuilla oli kaksi samaa lukua. Reilu kolmannes (39 %) ei näytä lisäaritmagon-tehtävien konstruoinnissa kiinnittäneen huomiota ratkaisujen löytämistä helpottavaan erikoisehtoon. Kun arvioidaan oppilaiden vastauksia, on otettava huomioon, että opettajat ohjasivat oppilaita eri tavoin ja korostivat työskentelyssään erilaisia asioita. Oppilaiden tulokset ovat siis tietyllä tavalla yhteismitattomia. Enemmänkin ne kuvastavat opettajan tavoitetta kyseiselle tunnille ja opettajan käsitystä tehtävästä. On selvää, että kun opettaja ohjaa oppilaita erityisesti tavoitteena löytää ratkaisustrategia, heillä on paremmat mahdollisuudet siinä onnistumiseen. Toisaalta on myös ymmärrettävää, että kun opettaja ei korosta ratkaisustrategian kirjoittamista, oppilaat mielellään ohittavat tämän vaiheen. Näin kävi esimerkiksi Helin luokassa, kun hänen oppilaansa eivät malttaneet keskittyä strategian keksimiseen, vaan innostuivat tekemään aritmagon-tehtäviä kaverille.

Pohdinta

Noin 40 % oppilaiden kirjoittamista vastauksista oli strategian kuvausta, 12 oppilaalla 27:stä oppilaasta (ks. Taulukko 3), lopuissa mainittiin vain, että tarvitaan yhteenlaskua tai ei edes sitä. Evens ja Houssart (2004) toteavat, että kyky esittää yleisiä matemaattisia väitteitä alkaa kehittyä vasta kolmannella ja neljännellä luokalla. Pehkosen (2000) tutkimuksessa valtaosa oppilaista osasi tehtävän, mutta perusteluissa oli puutteita. Suoritukseen todettiin tuossa tutkimuksessa olevan enemmän vaikutusta ryhmällä kuin iällä. Perustelujen esittäminen on kirjattu opetussuunnitelman (2004) perusteissa vuosiluokkien 1-2 matematiikan opetuksen ydintehtäväksi. Tutkimuksen johtopäätöksenä todetaan, että alaluokilta lähtien tulisi oppilaille antaa enemmän sellaisia tehtäviä, joissa he joutuisivat selittämään, miten he annettujen tietojen pohjalta ovat päätyneet tiettyyn johtopäätökseen ja selittämään ajatteluaan muille (ja opettajalle).

Opettajan tehtävä on olla tukena oppilaan ajattelun alkuvaiheessa uuden asian oppimisessa. Alkuun on suositeltavaa työskennellä yhdessä (Johnson & Rising, 1967, s. 23; Keranto, 1982, s. 46), kunnes oppilas on valmis itsenäiseen työskentelyyn. Oppilaiden taitojen kehittyessä pari- ja ryhmätyöskentelyä kannattaa suosia, sillä myös se mahdollistaa keskustelun. Parhaisiin tuloksiin päästiin hyvinkin vastakkaisilla tehtävänannoilla, jotka vaihtelivat etukäteen mietitystä ja tarkkaan ohjatusta tavasta menettelyyn, jossa oppilaiden tuli omatoimisesti lukea ja ymmärtää annettu tehtäväpaperi. Ongelmanratkaisua pidetään keskeisenä matemaattisen ajattelun kehittymisessä (mm. Mason, Burton & Stacey, 1982; Schoenfeld, 1985; Stanic & Kilpatrick, 1988). Kuitenkaan ongelmanratkaisu ei sinänsä auta tässä, vaan siihen tarvitaan ennen kaikkea ongelmanratkaisuun liittyvän ajattelun opetuksellista kehittämistä. Opettajan tulee antaa oppilailleen tilaisuuksia ajattelunsa kehittämiseen sekä ajatustensa ilmaisemiseen. Ongelmanratkaisutaitojen kehittyminen on myös oppimisprosessi, jota opettajan tulee tukea oppilaiden lähtötaso huomioiden. Tämä toteutui Ainon luokassa tehtävän jäsentämisen ja täsmällisten kysymysten avulla.

Weberin (2003) mukaan Mooren mallissa korostuvat tehtävänanto ja ohjaus. Tämän tutkimuksen mukaan se tarkoittaa tunnin tavoitteiden ja tehtävänannon selkeyttämistä, sekä opettajalta vaadittavaa kykyä arvioida, ymmärtää ja reagoida nopeasti oppilaiden erilaisiin prosesseihin tehtävän ratkaisemiseksi.

Kiitokset

Tutkimus on osa Suomen Akatemian rahoittamaa 3-vuotista (2010–13) tutkimusprojektia (projekti #135556).

Lähteet

Bauersfeld, H. (1995). The structuring of the structures: Development and function of mathematizing as a social practice. Teoksessa L. Steffe & J. Gale (Toim.), *Constructivism in education* (s. 137–158). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Brown, L., & Reid, D. A. (2006). Embodied cognition: somatic markers, purposes and emotional orientations. *Educational Studies in Mathematics*, 63, 179–192.

Calderhead, J. (1996). Teachers: Beliefs and knowledge. Teoksessa D. C. Berliner & R. C. Calfee (Toim.), *Handbook of Educational Psychology* (s. 709–725). New York, NY: Macmillan library. Reference: Simon & Schuster Macmillan, cop. 1996, 709–725.

Evens, H., & Houssart, J. (2004). Categorizing pupils' written answers to a mathematics test question: "I know but I can't explain". *Educational Research*, 46(3), 269–282.

Joutsenlahti, J. (2005). *Lukiolaisen tehtäväorientoituneen matemaattisen ajattelun piirteitä 1990-luvun pitkän matematiikan opiskelijoiden matemaattisen osaamisen ja uskomusten ilmentämänä*. Tampereen yliopisto. Acta Universitatis Tamperensis 1061.

Kaasila, R., Laine, A., & Pehkonen, E. (2004). Luokanopettajaksi opiskelevien matematiikkakuva ja sen muuttuminen. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (Toim.), *Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen* (s. 397–413). Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.

Kantowski, M.G. (1980). Some Thoughts on Teaching for Problem Solving. Teoksessa S. Krulik & R.E. Reys (Toim.), *Problem Solving in School Mathematics* (s. 195–203). NCTM Yearbook 1980. Reston, VA: Council.

Laine, A., Näveri, L., Pehkonen, E., Ahtee, M., Heinilä, L., & Hannula, M.S. (painossa). Third-graders' problem solving performance and teachers' actions. Teoksessa T. Bergqvist (Toim.), *Proceedings of the ProMath meeting in Umeå*. University of Umeå.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1985). *Thinking Mathematically* (2nd ed.). Bristol: Addison-Wesley.

Opetushallitus (2004). *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004*. http://www.oph.fi/ops/perusopetus/pops_web.pdf

Pajares, M.F. (1992). Teacher´s Beliefs and Educational Research: Cleaning up a Messy Construct. *Review of Educational Research*, *62*(3), 307–332.

Pehkonen, E. (1991). Developments in the understanding of problem solving. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *23*(2), 46–50.

Pehkonen, L. (2000). Written arguments in a conflicting mathematical situation. *Nordisk matematikkdidaktikk*, *1*, 2000, 23–33.

Polya, G. (1945). *How to solve it? A new aspect of mathematical method*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Schoenfeld, A.H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando, FL: Academic Press.

Speer, N.M. (2008). Connecting Beliefs and practices; A Fine-Grained Analysis of a College Mathematics Teacher´s Collections of Beliefs and their Relationship to his Instructional Practices. C*ognition and Instruction, 26*(2), 218–267.

Weber, K. (2003). *Students' difficulties with proof*. MAA Online: Research Sampler. http:/www.maa.org/t and l/sampler/rs 8.html.

"Matematiikka on värikäs matto" – matematiikan opettajiksi opiskelevien metaforia matematiikasta

PÄIVI PORTAANKORVA-KOIVISTO

paivi.portaankorva-koivisto@helsinki.fi
Helsingin Yliopisto, Opettajankoulutuslaitos

Tiivistelmä

Tässä tutkimuksessa tarkastellaan matematiikan aineenopettajaopiskelijoiden matematiikkauskomuksia käyttäen apuna metaforia, jotka opiskelijat kirjoittivat opintojensa aikana oman reflektointinsa tueksi. Opettajaopiskelijoiden matematiikkauskomuksia on tutkittu paljon sekä lomaketutkimuksin että haastatteluin. Tutkimuksen kohteena ovat usein olleet luokanopettajaopiskelijat, joille matematiikka, toisin kuin aineenopettajille, on yksi lukuisista opetettavista aineista ja saattaa näyttäytyä jopa vaikeana ja pelottavana. Tämän tutkimuksen tavoitteena on tarkastella, millaisilla metaforilla tulevat matematiikan opettajat (N = 50) pedagogisten opintojensa alussa kuvailevat matematiikkaa. Aineisto analysoitiin ja luokiteltiin aiemman tutkimustiedon mukaisesti viiteen pääluokkaan: matematiikka on ... rakenne, matka, työväline, peli tai kieli. Aineenopettajaopiskelijoiden metaforat matematiikasta sijoittuvat pääosin kolmeen luokkaan, matka, kieli ja rakenne, ja ne heijastelevat opiskelijoiden omia kokemuksia matematiikan oppimisesta.

Asiasanat

metafora, matematiikan opettajaopiskelija, matematiikkauskomus

Johdanto

Opettajaopiskelijoiden uskomukset matematiikasta, sen oppimisesta ja opettamisesta heijastuvat voimakkaasti heidän tuleviin opetuskäytänteisiinsä (Kagan, 1992; Lerman, 2002; Wilson & Cooney, 2002). Opettajan ammatillisen kehittymisen kannalta onkin tärkeää, että hän tarkastelee aika ajoin omia matematiikkauskomuksiaan. Opettajien uskomuksia käsittelevistä tutkimuksista monet ovat kohdistuneet luokanopettajaopiskelijoihin (mm. Hannula, Kaasila, Laine & Pehkonen, 2005, 2006; Allen, 2010). Luokanopettajien matematiikkauskomukset saattavat olla kuitenkin hyvin erilaisia kuin matematiikan aineenopettajien uskomukset. Luokanopettajille matematiikka, toisin kuin aineenopettajille, on yksi lukuisista opetettavista aineista ja se saattaa näyttäytyä jopa vaikeana ja pelottavana. Esimerkiksi Pietilän (2002) tutkimuksessa (N= 80) luokanopettajaopiskelijoista 31% piti matematiikkaa vaikeana, epämiellyttävänä ja jopa pelottavana. Toisaalta 20% opiskelijoista piti matematiikkaa vain yhtenä oppiaineena muiden oppiaineiden joukossa. Matematiikan aineenopettajien uskomukset matematiikasta eivät varmastikaan vastaa näitä. On siis tärkeää tutkia, miten matematiikan aineenopettajaksi opiskelevat kuvailevat matematiikkaa ja millaisia uskomuksia heillä on. Eräs keino tutkia näitä uskomuksia on käyttää apuna metaforia.

Metaforista matematiikkauskomusten avaajina

Nimitys metafora tulee kreikan verbistä *metapherein*, joka voidaan suomentaa sanalla siirtää. Metaforan tarkoituksena onkin, että sanan tai kuvan merkitys 'siirretään' uuteen yhteyteen. Metaforat kohdistuvat samankaltaisuuksiin ja niiden avulla voidaan kuvata kahden asian välistä suhdetta. Metaforien avulla voidaan ilmaista jo vakiintuneita käsityksiä matematiikan luonteesta, mutta yhtälailla ne voivat auttaa huomaamaan uusia yhteyksiä ja yhtäläisyyksiä (Sterenberg, 2008). Lakoff and Núñez (2000) kuvaavat tätä:

> *Metaphors do not just map preexisting elements of the source domain onto preexisting elements of the target domain. They can also introduce new elements into the target domain.*

Metaforien tarkoituksena ei siis ole vain kaunistella asioita, vaan niiden avulla voimme yhdistää abstraktin ja konkreetin keskenään. Metaforateoriaa kehittäneiden Lakoffin ja Johnsonin (1980) perusajatuksena on, että metaforat perustuvat yhteyksiin, joita näemme eri käsitteiden välillä. Metaforat ovat siis keskeisiä merkitysten luomisessa ja niiden avulla voimme järjestää kokemuksiamme. Metaforassa tuttua käsitettä käyttäen pyritään selventämään uutta, abstraktia asiaa samankaltaisuuksien avulla. Metaforan avulla voimme ymmärtää johonkin asiaan liittyvän kokemuksen aivan toisessa asiayhteydessä (Lakoff, 1993).

Metaforat antavat opiskelijoille mahdollisuuden ymmärtää ja ilmaista abstrakteja asioita konkreettisilla tavoilla (Sam, 1999). Metaforien avulla nostetaan esiin myös kehittymässä olevia uskomuksia, jotka voivat myöhemmin johtaa muutokseen kehittyvän opettajan diskursseissa ja käytännöissä (Noyes, 2006). Pescin (2003) mukaan metaforia on käytetty matematiikan opetuksen tutkimuksessa jo 80-luvulta asti opettajan ammatillisen kehittymisen tutkimuksessa ja matemaattisten käsitteiden merkitysten luomisessa ja visualisoinnissa. Metaforien avulla on voitu tukea matemaattisten käsitteiden haltuun ottamista arjen esimerkkejä,

kuvia, liikkeitä ja eleitä avuksi käyttäen (ks. Presmeg, 1992). Kuten Hersh (1986) sen kiteyttää:

> *One's conception of what mathematics is affects one's conception of how it should be presented. One's manner of presenting it is an indication of what one believes to be most essential in it. The issue, then, is not, "What is the best way to teach?" but "What is mathematics really all about?*

Matematiikkauskomukset voidaan Furinghettin ja Pehkosen (2002) mukaan jaotella julkisiin, yhteisön hyväksymiin ja henkilön persoonallisiin uskomuksiin. Niissä voi olla sekä affektiivisia että tiedollisia osa-alueita, ja henkilön itsensä on usein vaikea eritellä, mistä aineksista hänen uskomuksensa ovat lähtöisin. Uskomuksia voidaankin hyvin lähestyä metaforia tai muita avoimia tehtävänantoja käyttäen.

Metaforien tai muiden avoimien tehtävänasettelujen avulla on tutkittu muun muassa 9. – 10. -luokkalaisten (Schinck, Neale, Pugalee & Cifarelli, 2008) ja aikuisten matematiikkauskomuksia (Sam & Ernest, 1999). Opettajatutkimusten kohorttina ovat olleet luokanopettajat (Allen, 2010; Sterenberg, 2008; Stipek, Givvin, Salmon & MacGyvers, 2001), luokanopettajaopiskelijat (Liljedahl, Rösken & Rolka, 2007), matematiikkaan erikoistuneet luokanopettajaopiskelijat (Eaton & O'Reilly, 2010; Eaton, Oldham & O'Reilly, 2011) ja matematiikan opettajaopiskelijat (Noyes, 2006).

Matematiikkametaforien luokittelua

Seuraavaksi esitellään kuusi eri tavoin suuntautunutta metaforaluokkaa, jotka on muodostettu tutkimuskirjallisuudessa esiteltyjen erilaisten luokittelujen pohjalta. Ensimmäinen näistä on matematiikkaan tieteenalana liittyvä luokka. Tämä esiintyy Schinckin, Nealen, Pugaleen ja Cifarellin (2008), Eatonin, Oldhamin & O'Reillyn (2011) ja Noyesin (2006) tutkimuksissa. Schinck et al. (2008) käyttivät tästä nimitystä "*Math as Structure*" ja sijoittivat 82% havainnoistaan tähän luokkaan (vrt. Eaton ym., 2011). Luokka jakautui kahteen alaluokkaan, joista ensimmäinen oli sisäiseen rakenteeseen liittyvät metaforat kuten palapeli, Rubikin kuutio tai korttitalo, joissa matematiikka nähtiin koostuvan palasista. Toisen alaluokan eli hierarkkisen rakenteen luokan muodostivat ne metaforat, joissa kuvattiin videopelin tasoja, talon rakentamista tai kasvavaa puuta. Yhteistä näille metaforille on, että matematiikassa täytyy ensin hallita perustaidot ja vasta sitten siirtyä seuraavalle tasolle. Noyesin (2006) tutkimuksessa matematiikan rakennetta kuvaava luokka sisälsi metaforat, jotka kertovat matematiikasta haaroittuneena tieteenalana, matematiikan hierarkkisesta rakenteesta ja ne, jotka kuvailevat matematiikan verkkomaista rakennetta.

Useissa luokitteluissa on noussut esiin luokka, joka liittyy matematiikan oppimisprosessiin: matematiikka on kuin matka, ”*Math as Journey*”. Tähän luokkaan sijoittui useissa tutkimuksissa noin kolmannes metaforista (Schinck ym., 2008; vrt. Sam & Ernest, 1999; Allen & Shiu, 1997; Sterenberg, 2008). Myös tämä luokka jakautui kahteen alaluokkaan: haastaviin ja palkitseviin matkametaforiin kuten vaeltaminen, sekä raskaisiin ja epävarmoihin matkoihin kuten kelluminen valtameressä tai kiipeäminen tuntemattomalle vuorelle. Noyesin (2006) luokittelussa tähän luokkaan kuuluivat myös oppimiskokemuksia kuvaavat metaforat tutkimusmatkasta tai kilpailusta ja metaforat, jotka kuvailivat tasolta toiselle siirtymistä kuten tikkaat.

Kolmas tutkimuksissa tyypillisesti esiintyvä metaforaluokka kuvastaa matematiikan välinearvoa. Schinck ym. (2008) nimesivät sen ”*Math as a Tool*” – luokaksi, johon sijoittui 38% metaforista. Työkalumetaforiin kuuluivat esimerkiksi kynä, käyttöohje ja ilmastointiteippi. Yhteisenä piirteenä oli, että tutkittavat pitivät matematiikkaa tarpeellisena, hyödyllisenä ja yhteiskunnassa tai arkielämässä tarvittavana taitona. Tämän luokan Sam ja Ernest (1999) jakoivat kahdeksi alaluokaksi hiukan eri perustein. Ensimmäistä alaluokkaa he kutsuivat nimellä ”*Mathematics as a skill*”, matemaattinen taito ja luokittelivat siihen matematiikan hyötyarvoa korostavia metaforia kuten ”*pyörällä ajaminen – kun sen kerran opit, se ei unohdu koskaan*”. Toisen alaluokan he nimesivät ”*Mathematics as a daily life experience*”, arjen kokemus. Tähän luokkaan he sijoittivat metaforia, jotka kuvasivat päänsärkyä, hampaanpoistoa tai virkistävää kylmää suihkua. Nämä metaforat kuvasivat välttämättömiä arjen tapahtumia. Noyes (2006) sisällytti tähän luokkaan ne metaforat, jotka kuvasivat matematiikan hyödyllisyyttä, matematiikan hyödyntämistä arjessa ja ongelmanratkaisua eli uuden työkalun haltuun ottamista (vrt. Eaton ym., 2011).

Neljäs usein käytetty luokka sisältää metaforat liittyen oppilaan aktiiviseen rooliin ”*Active Student Role*”, johon 29% metaforista voidaan sijoittaa (Schinck ym., 2008). Tämän luokan metaforille keskeistä on, että oppilaan tulee itse olla aktiivinen oppiakseen matematiikkaa. Sam ja Ernest (1999) ovat muodostaneet erillisen ongelmanratkaisuun liittyvän luokan, jota he kutsuivat ”*Mathematics as a game or puzzle*”, matematiikka pelinä tai palapelinä. Noyes (2006) ei käyttänyt tätä luokkaa, vaan sisällytti ongelmanratkaisua kuvaavat metaforat työkalumetaforiin.

Viides luokka, joka Schinckin et al. (2008) tutkimuksessa jäi puuttumaan, liittyy matematiikan luonteeseen. Heidän tutkimuksensa kohteina olivat 9. ja 10. luokan oppilaat, ja kuten Kloosterman (2002) toteaa, oppilaat harvoin ajattelevat matematiikan luonnetta, eivätkä osaa erottaa sitä tuntityöskentelystä ja itse oppimisprosessista. Tämä luokka tulee kuitenkin esille matematiikkaan erikoistuviin luokanopettajiin ja matematiikan opettajaopiskelijoihin suunnatuissa tutkimuksissa. Sterenbergin (2008) tutkimuksessa tämä luokka nimettiin ”*Mathematics is a language*”, matematiikka kielenä (vrt. Eaton ym., 2011). Myös Noyes (2006) luokittelee osan tutkimuksensa metaforista samannimiseen luokkaan. Hän sisällyttää siihen metaforat, jotka kuvaavat matematiikan ilmaisullisia ja kielellisiä piirteitä kuten loogisuutta, eleganttiutta, universaalisuutta, tiiveyttä ja kauneutta (vrt. Wakefield, 2000).

Kuudes ja yleisin luokka oli Schinckin et al. (2008) tutkimuksessa ”*Perseverance*”, sinnikkyys tai sitkeys, johon sijoittui peräti 91% metaforista. Sterenberg (2008) kuvaa tätä nimellä ”*Mathematics is a battle*”. Tutkimukseen osallistuneet luokanopettajat kertoivat metaforakeskusteluissa matematiikkaan kohdistuvista peloistaan ja ponnisteluistaan.

Vastaavanlaisia luokitteluja on tehty myös tutkimuksissa, joissa ei ole käytetty metaforia, vaan muita avoimia tehtävänantoja. Esimerkiksi Liljedahl, Rösken ja Rolka (2007) keräsivät aineiston, jossa opettajaopiskelijat kirjoittivat reflektiivisiä kirjoitelmia, joissa kuvasivat käsityksiään matematiikasta, sen oppimisesta ja opettamisesta. Kirjoitelmat luokiteltiin neljään luokkaan: matematiikan työkalunomaisuutta kuvaaviin ”*Toolbox aspect*”, matematiikan rakenteeseen liittyviin ”*System aspect*”, matematiikan käyttöarvoa painottaviin ”*Utility aspect*” ja oppilaiden aktiivista toimintaa kuvaaviin ”*Process aspect*” kirjoitelmiin.

Luokanopettajiin kohdistuneissa tutkimuksissa on aineistonhankintatavasta riippumatta esiintynyt kuudetta metaforaluokkaa (*Perseverance)* vastaava luokka. Esimerkiksi Allen (2010) kartoitti luokanopettajien käsityksiä matematiikasta avoimella kysymyksellä ”Matematiikka on ...”. Tutkimuksen yleisimmän kategorian muodostivat affektiiviset vastaukset, esimerkiksi kuvaukset ”matematiikka on hauskaa / vaikeaa”, johon sijoittui 38 % vastauksista. Kategoria liittyen matematiikkaan osana arkielämää sisälsi 26 % vastauksista, esimerkiksi ”matematiikkaa on kaikkialla”, ”matematiikkaa tarvitaan” ja ”matematiikka on arjen taito”. Kuvauksia, jotka liittyivät matematiikkaan oppiaineena, kuten matematiikka on lukuja/ ongelmanratkaisua, oli 24 %. Matemaattisiin yhteyksiin liittyviä vastauksia, esimerkiksi ”Matematiikka on linkkejä/ yhteyksiä/ malleja”, oli 12 %.

Vastaavasti matematiikkaan erikoistuvien luokanopettajaopiskelijoiden narratiiveja jostakin matematiikkaan liittyvästä kokemuksesta luokitelleet Eaton ja O'Reilly (2010) löysivät kolme keskeistä luokkaa: matematiikan haasteellisuuteen liittyvä näkökulma, matematiikan käytännöllisyyteen liittyvä näkökulma ja matematiikan ainutlaatuisuuteen liittyvä näkökulma.

Tässä tutkimuksessa matematiikkametaforat pyrittiin aluksi luokittelemaan aineistolähtöisesti kukin metafora vain yhteen luokkaan (ks. Taulukko 1). Kun luokittelu osoittautui toimimattomaksi, päädyttiin teorialähtöiseen luokitteluun, jossa käytettiin esiteltyjä viittä ensimmäistä metaforaluokkaa. Koska tämän tutkimuksen kohteena olivat matematiikan aineenopettajaopiskelijat, joiden käsitys matematiikasta on varsin positiivinen, negatiivisten tunneilmausten tai taistelua kuvaavien metaforien luokka jäi tyhjäksi. Vaikka tutkimusaineistossa oli mukana matematiikan ponnisteluun liittyviä metaforia, niiden selitysosa oli aina positiivinen ja ponnistelu päättyi onnistumiseen. Analyysissä metaforat luokiteltiin viiteen luokkaan: rakenne, matka, työväline, peli ja kieli. Tutkimuskysymyksenä on, millaisilla metaforilla matematiikan aineenopettajaopiskelijat kuvailevat matematiikkaa.

Tutkimusmenetelmä

Aineistona tutkimuksessa on käytetty matemaattisten aineiden opettajaopiskelijoiden (N = 50) opintojen alussa teetettyä ennakkotehtävää, jossa heidän tuli kirjoittaa metafora "Matematiikka on ..." ja täydentää sitä selitysosalla. Kaikki vastaukset täyttivät tehtävänannon ja ne muodostivat tutkimusaineiston.

Aineiston analyysi aloitettiin aineistolähtöisesti luokittelemalla jokainen metafora vain yhteen ainoaan luokkaan. Tämä eksklusiivinen luokittelu osoittautui kuitenkin ongelmalliseksi. Esimerkiksi metafora

> *Matematiikka on kuin kertomus. Jos hyppää pitkästyttävien vaiheiden yli, ei voi ymmärtää loppuratkaisua.*

luokiteltiin luokkaan "Rakenne", sillä se kertoo matematiikan hierarkkisesta rakenteesta. Toisaalta se olisi voitu luokitella myös luokkaan kieli, sillä selitysosa olisi voitu tulkita myös niin, että kertomuksella kuvattiin matemaattisen kielen lineaarisuutta. Joskus metafora, joka kuvasi esimerkiksi matematiikan luonnetta, saattoi selitysosassa muuttuakin kuvaamaan prosessia (vrt. Ashton, 1994). Suurin osa metaforista oli sellaisia, jotka kuuluivat yhtä aikaa kahteen tai useampaan luokkaan (vrt. Sam, 1999).

Taulukko 1. Opettajaopiskelijoiden metaforat matematiikasta, eksklusiivinen luokittelu

Metafora	*Frekvenssi*	*Prosenttia*
Rakenne	10	20
Ponnistelua	8	16
Hyöty	6	12
Taitolaji	6	12
Matematiikan kauneus	5	10
Ristiriitaisia tunteita	4	8
Kaikkialla	3	6
Matka	3	6
Kieli	2	4
Luovuus	2	4
Kehittyvä tiede	1	2
YHTEENSÄ	50	100

Näin ollen analyysin toisessa vaiheessa metaforat luokiteltiin teorialähtöisesti viiteen luokkaan. Luokittelussa ei yksikään aineiston metafora sijoittunut aiemmissa tutkimuksissa yleiseksi havaittuun kuudenteen luokkaan "Perseverance/ Maths as a battle", mikä ei ollut yllättävää, kun tutkimuksen kohteena olivat aineenopettajaopiskelijat. Lopullisessa analyysissä käytettiin siis seuraavaa luokitusta: 1) tieteenalaa kuvaava luokka RAKENNE (haaroittuva, hierarkkisesti rakentuva, verkkomainen), 2) oppimisprosessia kuvaava MATKA (seikkailu, järjestelmällisesti etenevä, ponnistelua edellyttävä); 3) välinearvoa korostava TYÖVÄLINE (käyttö, hyöty), 4) ongelmanratkaisua painottava PELI ja 5) matematiikan luonnetta valottava KIELI (loogisuus, kauneus). Tuloksissa erottuvat viisi luokkaa ja niiden alle sijoittuvat yksilöidymmät kuvaukset.

Tulokset

Matematiikan aineenopettajaopiskelijoiden kirjoittamat matematiikkametaforat kuuluivat yhteen tai useampaan, jopa neljään metaforaluokkaan. Taulukossa 2 ovat mukana kaikki metaforatulkinnat (N = 87), joita 50 metaforan aineistosta tehtiin. Prosenttiosuudet on laskettu tehdyistä tulkinnoista.

Taulukko 2. Opettajaopiskelijoiden metaforatulkinnat matematiikasta luokiteltuna viiteen luokkaan

Luokka	*Frekvenssi*	*Prosenttia*	*Metaforinen kuvaus*	*Frekvenssi*	*Prosenttia*
Rakenne	20	23,0	Haaroittuva	3	3,5
			Hierarkkisesti rakentuva	8	9,2
			Verkkomainen	9	10,3
Matka	24	27,6	Seikkailu	10	11,5
			Järjestelmällisesti etenevä	1	1,15
			Ponnistelua edellyttävä	13	14,9
Työväline	13	14,9	Käyttö	1	1,15
			Hyöty	12	13,8
Peli	8	9,2	Ongelmanratkaisua painottava	8	9,2
Kieli	22	25,3	Loogisuus	10	11,5
			Kauneus	12	13,8
YHTEENSÄ	87	100		87	100

Matematiikan aineenopettajaopiskelijat kuvailivat matematiikkaa eri tavoin. Peräti 45 metaforassa matematiikkaa kuvattiin jollakin substantiivilla (90 %). Vain viisi metaforaa ilmensi matematiikkaa jonkinlaisena toimintana kuten ruoanlaittona (10 %). Luokittelussa painottui kolme luokkaa, matka, kieli ja rakenne, mutta kaikki viisi luokkaa olivat kuitenkin edustettuina. Eniten matematiikkaa kuvattiin matkaksi (27,6 %) ja varsinkin matematiikan oppimiseen liittyvä ponnistelu (14,9 %) tuli hyvin esille. Seuraavaksi eniten metaforat kuvailivat matematiikan loogisuutta, kauneutta (25,3 %) ja rakennetta (23,0 %). Matematiikan hyödyllisyyttä kuvasi 13,8 % metaforista. Yllättävästi jopa kahdeksan metaforaa (16%) viittasi siihen, että kaikki eivät ehkä opi matematiikkaa.

Seuraavaksi tarkastellaan jokaista luokkaa tarkemmin.

Rakenne

Matematiikan rakenteeseen kuuluivat metaforat (23,0%), jotka kuvasivat rakennetta haaroittuneena kuten dekkari.

> *Matematiikka on kuin hyvä dekkari. Pitkän etsimisen ja puurtamisen jälkeen lopuksi keksii syyllisen ja se tuntuu juoneen sopivalta ja loogiselta.*

Rakenne-metaforia olivat myös matematiikan hierarkkisuuteen liittyvät kuvaukset matematiikasta rakennuksena, johon kootaan edellisten kerrosten päälle uutta. Tässä aineistossa tällaisia olivat metaforat, jotka kuvasivat järjestettyä huonetta, tiilitaloa, korttitaloja tai palapelejä.

> *Matematiikka on kuin hyvin järjestetty huone. Kaikki on paikoillaan, helposti löydettävissä. Tuon järjestyksen aikaansaaminen on kuitenkin vaatinut aikaa ja vaivaa, useita työtunteja.*

> *Matematiikka on kuin korttitalo. Rakennus pysyy pystyssä vain, jos alimmat kerrokset on kasattu huolella, ja pienikin virhe perustuksissa voi kaataa koko talon.*

Matematiikan rakenteeseen kuuluvat lisäksi matematiikan verkkomaisuutta kuvaavat metaforat kuten matematiikka ristisanatehtävänä tai Lontoon metroverkostona.

> *Matematiikka on kuin Lontoon metroverkosto. Aluksi eksyt kaiken aikaa, mutta lopulta sukkulointi on nautinnollisen helppoa.*

Tähän luokkaan kuuluvat aineenopettajaopiskelijoiden metaforat kertovat matematiikan moninaisuudesta ja siitä, miten matematiikka voidaan ottaa haltuun. Lukuisille matematiikan tunneilla opituille anekdooteilta tuntuville yksityiskohdille löytyi opiskelijoiden tulkinnoissa lopulta paikkansa. Tulevia opettajia myös mietitytti, miten opettaja osaa opastaa oppilaitaan kokonaisuuden haltuun ottamisessa.

> *Matematiikka on kuin tiilitalo. Sen oppiminen tapahtuu pikku hiljaa vaihe vaiheelta, mutta oppiminen voi horjua, jos perustukset eivät ole kunnossa.*

Matka

Matkaan liittyviin metaforiin (27,6%) kuuluivat sellaiset metaforat, jotka kertoivat matematiikan oppimisesta seikkailumaisesti, ikään kuin tutkimusmatkana. Tässä aineistossa sellaisia olivat vertaukset ruoanlaittoon, labyrintissa seikkailemiseen ja moottorin kasaamiseen.

> *Matematiikka on kuin ruuanlaittamista. Eri ihmiset päätyvät samoilla aineksilla samaan lopputulokseen eri tavoin.*

> *Matematiikka on kuin moottori – jokaista osaa voi käyttää johonkin hyvällä mielikuvituksella, useimmiten väärin, mutta vasta, kun oivaltaa, mihin mikäkin osanen kuuluu ja saa koko aparaatin kasaan alkavat asiat rullaamaan.*

Näistä moottori-metafora voitiin luokitella useampaankin luokkaan. Matkaluokkaan kuuluivat metaforat, joissa kuvattiin ponnistelua ja kiipeämistä tasolta toiselle. Tällaisia olivat kengännauhojen solmiminen, aavikolla vaeltaminen, lumilautailun opetteleminen, sipulin pilkkominen, villapaidan neulominen ja painonpudotus.

> *Matematiikka on kuin kengännauhojen solmiminen. Jos sitä ei vaivaudu opettelemaan, saattaa eteneminen mennä kompuroinnin puolelle.*

> *Matematiikka on kuin lumilautailu. Se voin tuntua ensin hankalalta, mutta kun sen oppii, se on hauskaa ja siinä voi aina kehittyä lisää.*

> *Matematiikka on kuin sipuli. Sitä pilkkoessa voi tulla itku silmään, mutta lopulta se tuo paljon makua.*

Opettajaopiskelijoiden matkaa kuvaavat metaforat luotaavat matematiikasta kuvaa työläänä ja joskus jopa tuskastuttavana työskentelynä, joka kuitenkin useimmiten tuottaa mielihyvää ja onnistumisen kokemuksia. Matematiikan aineenopettajaopiskelijat ilmaisevat toiveikkuutta, mikä eroaa luokanopettajaopiskelijoiden uskomuksista (vrt. Pietilä, 2002).

Työväline

Metaforat, jotka luotasivat matematiikan välineellistä arvoa (14,9%) kuvasivat esimerkiksi matematiikkaa hyvänä ystävänä, kahvina, yleisavaimena, työkalupakkina, kaikuluotaimena tai mikroskooppikaukoputkena.

> *Matematiikka on kuin kahvi, sitä ilman ei voi pärjätä kokonaista päivää.*

> *Matematiikka on kuin yleisavain, jolla päästään uusien ovien taakse.*

> *Matematiikka on kuin työkalupakki, josta voi valita kuhunkin tilanteeseen sopivan työkalun.*

> *Matematiikka on kuin kaikuluotain joka antaa meille käsitystä tuntemattomasta, abstraktin valtamerestä.*

Matematiikan välinearvoa kuvaavista metaforista voidaan erottaa ne, joissa matematiikka nähdään osana arkea ja kansalaistaitoja ja ne, joissa matematiikka on työkalu tai joukko työkaluja, joilla ratkaista arjen ongelmia.

Peli

Neljännen luokan muodostivat matemaattiseen ongelmanratkaisuun liittyvät metaforat. Tähän luokkaan sijoittui vain kahdeksan metaforaa (9,2%), joissa matematiikkaa verrattiin muun muassa lukkoihin, lumihangessa kulkemiseen tai perhosen pyydystämiseen. Näitä metaforia yhdistävät oikeat tekniikat ja ongelmanratkaisumallit.

> *Matematiikka on kuin lukko. Se aukeaa helposti oikealla avaimella.*

> *Matematiikka on kuin lumihanki. Kannattaa kulkea valaistua polkua eikä eksyä umpihankeen.*

> *Matematiikka on kuin perhonen. Sitä ei voi pyydystää haavilla, jossa on reikä.*

Yhteistä näille metaforille oli, että matematiikka nähtiin eräänlaisena taitolajina, jota kaikki eivät edes voi ymmärtää.

Kieli

Jos matematiikkaa tarkastellaan matemaattisen ilmaisun ja siihen liittyvien piirteiden näkökulmasta, niin esiin nousevat loogisuus ja kauneus. Loogisuuteen ja kauneuteen tulkittavissa olevia metaforia oli aineistossa melko paljon (25,3%). Esimerkkinä matematiikasta loogisena ilmiönä oli ilmaisu, jossa matematiikka rinnastettiin hieroglyfeihin. Lisäksi aineistossa oli kaksi metaforaa, jossa matematiikkaa kuvattiin universaalina tai vieraana kielenä.

Matematiikka on kuin hieroglyfit, alkuun täysin käsittämättömiä, avautuessaan mielenkiintoinen maailma.

Matematiikka on kuin universaali kieli. Se millä kielellä siitä puhutaan ja sitä opiskellaan, ei vaikuta sen ymmärtämiseen.

Matematiikka on kuin vieras kieli: se koostuu omasta kieliopistaan ja lauserakenteestaan, mutta sitä opiskelemalla voi ymmärtää huomattavasti suuremman ihmisjoukon puhetta.

Matematiikan kauneuteen oli 12 viittausta (13,8 %). Näiden metaforien mukaan matematiikka on kuin kukka, tähtitaivas, maailmankaikkeus, periskooppi ja värikäs matto.

Matematiikka on kuin kukka. Sen kauneuteen ei voi olla ihastumatta.

Matematiikka on kuin maailmankaikkeus - yhtä ääretön, järjestelmällinen, kaunis ja tuntematon.

Matematiikka on kuin periskooppi. Se mahdollistaa erikoisia näkymiä, mutta tarjoaa samalla kuitenkin vain yhden erityisen tavan tutkailla maailmaa.

Matematiikka on kuin värikäs matto; sen osa-alueet punoutuvat toisiinsa kuin eriväriset langat luoden kauniin, laajan, monitahoisen pinnan.

Näille metaforille on yhteistä, että matematiikan katsotaan olevan valmis kokonaisuus, kaunis sellaisenaan, ja katseltavaksi tarkoitettu. Sam ja Ernest (1999) tunnistavat näissä absolutistisen näkökulman (vrt. Ernest, 1989, 2009). Näistä metaforista useimmat luokiteltiin kuuluvaksi kuitenkin myös muihin metaforaluokkiin.

Pohdinta

Tämän tutkimuksen perusteella matematiikan aineenopettajaopiskelijat kuvaavat matematiikkaa matkana, kielenä tai rakenteena. Heidän metaforissaan matematiikka näyttäytyy erityisesti ponnistelua edellyttävänä, kauniina seikkailuna. Näin oli myös Noyesin (2006) tutkimuksessa englantilaisten opiskelijoiden uskomuksista, jossa työkaluihin (*toolkit*) ja kieleen (*language)* liittyvät metaforat olivat eniten edustettuina. Samin ja Ernestin (1999) sekä Samin (1999) tutkimuksissa englantilaisten aikuisten matematiikkauskomuksista matkaan liittyvät metaforat (*journey*) olivat yleisimpiä.

Suomalaiset matematiikan aineenopettajaopiskelijat erosivat metaforavalinnoissaan englantilaisista ja esimerkiksi irlantilaisista kohderyhmistä siinä, että metaforavalinnoista vain 14,9 % tarkasteli matematiikan hyötynäkökulmia. Esimerkiksi Eatonin ja O'Reillyn (2010) ja Eatonin, Oldhamin ja O'Reillyn (2011) tutkimusten irlantilaiset matematiikkaan erikoistuneet luokanopettajat kuvailivat vastauksissaan erityisesti matematiikan käytettävyyttä (*practical nature*).

Tässä aineistossa mielenkiintoista oli, että negatiivisia kuvauksia matematiikasta ei juuri ollut. Negatiivisia sävyjä sen sijaan aineistossa esiintyi osana selitysosaa, jolloin ne kuvasivat eräänlaista oppimisen tai rakenteen haurautta. Ilmeistä kuitenkin on, että matematiikan aineenopettajiksi pitävät matematiikasta ja ovat siinä taitavia eikä luokanopettajaopiskelijoihin kohdistuneissa tutkimuksissa esiin nousseita metaforia uupumisesta, taistelusta tai ahdistuneisuudesta esiintynyt lainkaan (vrt. Pietilä, 2002). Pohdinnat ponnisteluistakin päättyivät yleensä onnistumiseen.

Tutkimus osoitti, että matematiikan aineenopettajaopiskelijoiden metaforat matematiikasta liittyivät pääosin matematiikan oppimisprosessiin, matematiikan luonteeseen ja näkemyksiin matematiikasta tieteenalana. Opettajaopintojen alkaessa tehty tutkimus kuvastaakin paremmin matematiikan aineenopettajien omia matematiikan oppimiskokemuksia kuin vielä matematiikan opettamisen kautta saatuja kokemuksia. Tätä vahvistavat myös ne kahdeksan metaforaa, jotka viittasivat siihen, että kaikki eivät opi matematiikkaa. Näin pienessä aineistossa niiden määrä oli yllättävä ja kertoo ehkä osaltaan opiskelijoiden omista koulukokemuksista.

Tuottaessaan metaforia tulevat matematiikan opettajat käsittelevät huomaamattaan myös uskomuksiaan (vrt. Sam, 1999). Opettajaopinnoissa metaforatyöskentely onkin keino saada tulevia opettajia tietoisiksi omista uskomuksistaan. Jos matematiikka on opettajaopiskelijan silmissä staattinen, valmis konstruktio, voi hänen mahdollisesti vaikea tulevaisuudessa antaa oppilaittensa tutkia, kokeilla ja erehtyä. Perustaako tämä tuleva opettaja opetuksensa lasku-urakoille ja runsaalle muistiinpanojen tekemiselle? Jos opettajaopiskelija kuvailee matematiikkaa perustuksista harjaan kohoavana tiilitalona, hän saattaa olla vaikea irrottautua tarkkaan rajatusta järjestyksestä ja edetä oppilaiden kiinnostuksen mukaan aiheessa pidemmälle.

Voidaan myös pohtia sitä, miten usein metaforat kuvaavat affektiivisia osa-alueita, epäonnistumisen ja onnistumisen tunteita ja miten usein niissä heijastellaan yleisiä yhteisön hyväksymiä näkemyksiä matematiikasta. Opiskelijat eivät aina metaforaa kirjoittaessaan erota omia näkemyksiään ulkoapäin omaksutuista (vrt. Furinghetti & Pehkonen, 2002).

Tämä aineisto kerättiin opettajaopintojen alussa, eikä sen vuoksi vielä sisällä opiskelijoiden käsityksiä matematiikan opettamisesta. Olisikin mielenkiintoista tutkia jatkossa, miten samat opiskelijat kuvaavat matematiikan opettamista harjoitteluiden jälkeen ja millä metaforalla he kuvailisivat matematiikan opettajaa opettajaopintojensa päätteeksi. Jos tutkimusta haluaa laajentaa matematiikan opetukseen, niin mielenkiintoista olisi jakaa matematiikkakäsityksiä kolmeen luokkaan, kuten Ernest (1989, 2009): matematiikka absolutistisena tieteenä, fallibilistisena tieteenä tai ongelmanratkaisuna, ja tutkia, miten moni tuleva opettaja toteuttaa opetustaan viimeisen näkökulman mukaisesti – tehokkaimmin, Ernestiä mukaillen.

Lähteet

Allen, B. (2010). The primary mathematics specialists – What do they think about teaching and learning mathematics? Teoksessa M. Joubert & P. Andrews (Toim.), *Proceedings of the British Congress for Mathematics Education April 2010* (ss. 9–16).

Allen, B., & Shiu, C. (1997). 'Learning mathematics is like ...' – Views of tutors and students beginning a distance-taught undergraduate course. Teoksessa *Proceedings of the BSRLMDay Conferences held at University of Nottingham and at University of Oxford* (ss. 8–11). Nottingham, Britain: British Society for Research into Learning Mathematics (BSRLM).

Ashton, E. (1994). Metaphor in context: An examination of the significance of metaphor for reflection and communication. *Educational Studies*, *20*(3), 357–366.

Eaton, P., & O'Reilly, M. (2010). What is mathematics and why do we study it? The views of student teachers. Paper presented at the 35th Annual ATEE Conference, Budapest, 26-30 August 2010. http://staff.spd.dcu.ie/oreillym/download/mathed/Budapest%20final.doc.

Eaton, P., Oldham, E., & O'Reilly, M. (2011). *Nature and nurture: An analysis of mathematical identity of distinct cohorts of prospective teachers.* http://www.ppf.lu.lv/pn/files/articles/Eaton%20Oldham%20OReilly.doc

Ernest, P. (1989). *The Impact of Beliefs on the Teaching of Mathematics.* http://people.exeter.ac.uk/PErnest/.

Ernest, P. (2009). What is first philosophy in mathematics education? Teoksessa M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & H. Sakonidis (Toim.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (ss. 25–42). Greece, Thessaloniki: PME 1.

Furinghetti, F., & Pehkonen, E. (2002). Rethinking characterizations of belief. Teoksessa G. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (Toim.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (ss. 39–57). Dordrecht: Kluwer.

Kagan, D. M. (1992). Implications of research on teacher belief. *Educational Psychologist*, *27*(1), 65–90.

Hannula, M.S., Kaasila, R., Laine, A., & Pehkonen, E. (2005). Structure and typical profiles of elementary teacher students' view of mathematics. Teoksessa H. L. Chick & J. L. Vincent (Toim.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol 3 (ss. 41–48). Melbourne: PME.

Hannula, M. S., Kaasila, R., Laine, A., & Pehkonen, E. (2006). The structure of student teacher's view of mathematics at the beginning of their studies. Teoksessa M. Bosch (Toim.), *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. Sant Feliu de Guíxols, Spain 17-21 February 2005* (ss. 205–214). Fundemi IQS Universitat Ramon Llull.

Hersh, R. (1986). Some proposals for revising the philosophy of mathematics. Teoksessa T. Tymocxko (Toim.), *New directions in the philosophy of mathematics* (ss. 9–28). Boston: Birkhauser.

Kloosterman, P. (2002). Beliefs about mathematics and mathematics learning in the secondary school: Measurement and implications for motivation. Teoksessa G. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (Toim.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (ss. 247–269). Dordrecht: Kluwer.

Lakoff, G. (1993). The contemporary theory of metaphor. Teoksessa A. Ortony (Toim.), *Metaphor and thought* (2. painos, ss. 202–251). Cambridge: University Press.

Lakoff, G., & Núñez, R. E. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being*. New York, NY: Basic Books.

Lakoff, G., & Johnson, M. (1980). *Metaphors we live by*. Chicago, IL: University of Chicago Press.

Lakoff, G., & Johnson, M. (1999). *Philosophy in the Flesh: The embodied mind and its challenge to western thought.* New York, NY: Basic Books.

Lerman, S. (2002). Situating research on mathematics teachers' beliefs and on change. Teoksessa G. C. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (Toim.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education* (ss. 233–243). Dordrecht: Kluwer.

Liljedahl, P., Rösken, B., & Rolka, K. (2007). Analyzing the changing mathematical beliefs of preservice elementary school teachers. Teoksessa K. Hoskonen & M. S. Hannula (Toim.), *Current State of Research on Mathematical Beliefs XII. Proceedings of the MAVI-7 Workshop May 25–28, 2006.* (ss. 71–82). Helsinki: Yliopistopaino.

Noyes, A. (2006). Using metaphor in mathematics teacher preparation. *Teaching and Teacher Education, 22,* 898–909.

Pehkonen, E. (1998). On the concept ''mathematical belief''. Teoksessa E. Pehkonen & G. Törner (Toim.), *The state-of-art in mathematics-related belief research. Results of the MAVI activities* (ss. 37–72). Research report 195. University of Helsinki. Department of Teacher Education.

Pesci, A. (2003). Could metaphorical discourse be useful for analysing and transforming individuals' relationship with mathematics? *The Mathematics Education into the 21st Century Project Proceedings of the International Conference The Decidable and the Undecidable in Mathematics Education, September 2003* (ss. 224–230). Brno, Czech Republic.

Pietilä, A. (2002). *Luokanopettajaopiskelijoiden matematiikkakuva, Matematiikkakokemukset matematiikkakuvan muodostajina. Akateeminen väitöskirja. Tutkimuksia 238.* Helsinki: Yliopistopaino.

Presmeg, N. C. (1992). Prototypes, metaphors, metonymies, and imaginative rationality in high school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 23*, 595–610.

Sam, L. C. (1999). Using metaphor analysis to explore adults' images ofmathematics. *Philosophy of Mathematics Education Journal 12*. http://people.exeter.ac.uk/PErnest/.

Sam, L. C., & Ernest, P. (1999). Public images of mathematics. *Philosophy of Mathematics Education Journal 11*. http://people.exeter.ac.uk/PErnest/.

Schinck A. G., Neale, H. W., Jr., Pugalee, D. K., & Cifarelli, V. V. (2008). Using metaphors to unpack student beliefs about mathematics. *School Science and Mathematics, 108*(7), 326–333.

Sterenberg, G. (2008). Investigating teachers' images of mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education, 11,* 89–105.

Stipek, D. J., Givvin, K. B., Salmon, J. M., & MacGyvers, V. L. (2001). Teachers' beliefs and practices related to mathematics instruction. *Teaching and Teacher Education, 17*, 213–226.

Wakefield, D. V. (2000). Math as a Second Language. *Educational Forum, 64*(3), 272-279.

Wilson, M. S., & Cooney, T. J. (2002). Mathematics teacher change and development. Teoksessa G. C. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (Toim.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education* (ss. 127–147). Dordrecht: Kluwer.

Opettajaopiskelijoiden käsityksiä tutkimalla oppimisesta esi- ja alkuopetuksessa

LIISA SUOMELA

liisa.suomela@helsinki.fi
Helsingin yliopisto, Opettajankoulutuslaitos

Tiivistelmä

Luonnontieteiden opettamiseen yhdistetään usein konkreettista tutkimista, demonstraatioita, kokeita ja kokeiluja, joiden avulla pyritään edistämään oppilaiden luonnontieteiden oppimista. Näiden luonnontieteille ominaisten tiedonhankinnan tapojen ja taitojen harjoittelua sekä syy-seuraussuhteiden pohtimista on korostettu valtakunnallisissa esiopetuksen ja perusopetuksen opetussuunnitelmien perusteissa. Artikkelissani tarkastelen, miten 49 esi- ja alkuopetuksen opiskelijaa sekä 68 esi- ja alkuopetuksen täydennyskoulutukseen osallistunutta luonnehtivat kirjallisesti tutkimisen ympäristö- ja luonnontiedon opetuksen yhteydessä. Luonnehdinnat luokittelin noudattaen laadullisen sisällönanalyysin periaatteita. Suurin osa vastaajista tulkitsee tutkimisen/ tutkimalla oppimisen tarkoittavan havaintojen tekemistä. Kolmasosa tuo esille käsitteen kokeilu, mutta vain muutamat kuvaavat tutkimalla oppimista syy-seuraussuhteita selittäväksi tai lasten kysymyksistä lähteväksi tutkimusprosessiksi. Lastentarhanopettajankoulutuksessa on siis syytä korostaa luonnontieteellisen tiedonhankinnan prosessia.

Asiasanat

tutkimalla oppiminen, esi- ja alkuopetus

Johdanto

Useat luonnontieteiden opettamista ja oppimista käsittelevät tutkimusartikkelit ja oppaat tuovat esille oppilaiden ajattelua aktivoivien ja konkreettista toimintaa sisältävien opetusmenetelmien positiiviset vaikutukset oppilaiden osaamiseen (Harlen, 2000; Jarvis, 1991; Johnston, 2005; Minner, Levy & Century, 2010; Kärnä, Hakonen & Kuusela, 2012). Toisaalta yliopistossa opiskelevien opiskelijoiden olemassa olevat käsitykset ja uskomukset hyvän opetuksen ja oppimisen välisistä kytkennöistä voivat erota huomattavasti toisistaan (Kember, Jenkins & Ng, 2003).

Lisäksi nämä käsitykset hyvästä opettamisesta ja oppimisesta voivat olla hitaasti muuttuvia (Entwistle & Peterson, 2004). Esimerkiksi Helsingin yliopiston biotieteiden laitoksella toteutetussa tutkimuksessa laitoksen ensimmäisen vuoden opiskelijat ja joukko laitoksen opetushenkilökuntaa vastasi opetusta ja oppimista koskevaan kyselyyn (Virtanen & Lindblom-Ylänne, 2010). Heidän tutkimuksensa mukaan opiskelijat määrittelivät opettamisen tietopainotteisesti ja oppimisen pääasiassa tietojen lisääntymiseksi ja muistamiseksi. Tutkimukseen osallistuneiden yliopiston opettajien käsitykset opettamisesta ja oppimisesta poikkesivat selvästi opiskelijoiden käsityksistä. Henkilökunnan käsitys oppimisesta oli lähempänä konstruktivistisen oppimiskäsityksen mukaista käsitystä oppimisesta kuin opiskelijoiden.

Sanotaan, että pienet lapset ovat innokkaita tutkijoita. Lapsia kiinnostavat erilaiset ympäristön ilmiöt ja niihin liittyvät muutokset. Nämä käsitykset tulevat esille muun muassa esiopetuksen valtakunnallisessa opetussuunnitelmassa 2000 ja sen 2010 osittain uudistetussa versiossa. Lisäksi perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden vuosiluokkien 1. – 4. ympäristö- ja luonnontiedon yhdeksi tavoitteeksi on asetettu se, että ”oppilas oppii tekemään yksinkertaisia luonnontieteellisiä kokeita” sekä hankkimaan tietoa muun muassa tutkimalla (Opetushallitus 2000, 2004, 2010). Edellä mainituissa Esiopetuksen opetussuunnitelman perusteissa korostetaan lasten omien tutkimusten merkitystä ja syy- sekä seuraussuhteiden pohtimista. Lapset ovat aktiivisia kokeilijoita ja näiden kokeilujen kautta heille voi alkaa hahmottua erilaisiin ilmiöihin vaikuttavien muuttujien merkitys. Opettajan tehtävänä on ohjata ja tukea lasten konkreettisia kokeiluja ja aktiivista osallistumista (Opetushallitus, 2010). Ympäristö- ja luonnontiedon sisältöalueen kohdalla (mts. 15) tämä lähestymistapa kuvataan induktiivisen, havainnoista lähtevän toiminnan avulla ja lisäksi mainitaan kokeellisesti hankittu tieto.

Tutkimisen käsite on suomenkielessä laaja, monimerkityksinen ja kontekstisidonnainen. Opetuksen ja oppimisen yhteydessä se on viime vuosina usein liitetty konstruktivistiseen tutkivan oppimisen käsitteeseen (Uusikylä & Atjonen, 2000; Aho, Havu-Nuutinen & Järvinen, 2003; Hakkarainen, Lonka & Lipponen, 1999, 2004; Lipponen, 2011). Tutkivassa oppimisessa korostetaan tiedon hankkimista olemassa olevista lähteistä ja yhteisöllistä tiedon rakentumista. Tätä yhteisöllistä oppimisen tapaa voidaan kutsua sosiokonstruktivistiseksi (Cantell, 2001). Lehto (2005) pitää kuitenkin ongelmallisena sitä, että suomenkielisissä teksteissä tutkivan oppimisen esimerkit liittyvät pääsääntöisesti aikuisten oppimisen tutkimiseen.

Luonnontieteiden opetuksen yhteydessä tutkiminen on liitetty osaksi niin kutsuttuja prosessitaitoja. Näillä taidoilla tarkoitetaan kykyä kysyä ja ihmetellä, tehdä oletuksia, kerätä informaatiota ja suunnitella sekä toteuttaa luotettavia kokeita tai tutkimuksia informaation ja vastausten saamiseksi. Prosessitaitoihin liittyvät myös tulosten tulkinnan ja kommunikoinnin taidot (Harlen, 2000, 1985). Nuorimpien lasten luonnontieteiden opettamisen ja oppimisen yhteydessä käytetään englannin kielessä primary science education käsitettä ja tämän yhteydessä kokeilujen tai tutkimisen käsitteen eri muotoja, kuten experiments tai explorations, (esim. Brunton & Thornton, 2010; Johnston, 2005; Frost, J. 1997), investigations (Jarvis 1991) ja inquiry learning (Abd-El-Khalick ym., 2004). Johnston (2005) avaa tutkimisen käsitettä (exploration) tuomalla siihen vahvasti mukaan lasten innostuneen, aktiivisen toiminnan inspiraatiosta sekä luovuutta pursuavasta keksimisestä kokeilevaan oppimiseen.

Vuonna 2011 ilmestyneessä Varhaiskasvatuksen käsikirjassa sekä Lipponen että Turja kirjoittavat tutkivasta oppimisesta. Lipponen (2011) kuvaa tutkivaa oppimista pääasiassa yleisenä oppimiseen liittyvänä konstruktivistisena lähestymistapana. Luonnontieteisiin hän viittaa mainitessaan mahdollisuuden tehdä kokeita. Esimerkkinä Lipponen kertoo kasvin siirtämisen pimeään ja kasvin seuraamisen havainnoimalla sitä. Turja puolestaan (2011) käyttää tiedekasvatuksen ja tutkivan toiminnan käsitteitä. Turja toteaa kuitenkin, ettei tiedekasvatuksen käsite ole vakiintunut suomalaiseen varhaiskasvatuksen termistöön. Tiedekasvatuksen käsite vaikuttaa haastavalta esi- ja alkuopetusikäisten parissa työskenneltäessä.

Kosonen (1994) käyttää tutkimalla oppimisen käsitettä. Hänen mukaansa tutkimalla oppimisessa on kysymys erilaisista kokeellista ja ongelmanratkaisua sisältävistä opetusmenetelmistä opettajajohtoisesta demonstraatioista ongelmaperustaiseen luonnontieteelliseen tutkimiseen. Kososen käyttämisissä tutkimusesimerkeissä on lähtökohtana selkeä luonnontieteille tyypillinen muuttujien kontrollointi. Tutkimalla oppimisen tai tutkivan toiminnan käsitteet korostavat kokeilemista ja lasten aktiivista toimintaa sekä tekemällä oppimista. Ahon, Havu-Nuutisen ja Järvisen (2003) kirjassa luonnontieteiden opetuksesta ja oppimisesta on samankaltaisia esimerkkejä. Aho ym. käyttävät tutkivan oppimisen käsitettä, mutta he määrittelevät sen tiedon syvälliseksi ymmärtämiseksi kontekstisidonnaisen opiskelun ja kriittistä ajattelua vaativan työskentelyn tuloksena. Tässä määrittelyssä kokeellinen, tutkimalla oppimisen näkökulma jää maininnaksi erilaisten selittämiseen ja ymmärtämiseen tähtäävien opiskeluprosessien joukossa (mts. 52 -53).

Valtakunnallisissa opetussuunnitelmien perusteiden teksteissä (Opetushallitus, 2000, 2004, 2010) korostuu lasten aktiivinen kokeileva toiminta. Edellä mainituissa Ahon & ym. (2003) ja Lipposen (2011) tutkivan oppimisen määritelmissä korostuu konstruktivistinen tiedon prosessointi. Kuitenkin esi- ja alkuopetusikäisiä lapsia motivoi ennen kaikkea konkreettinen tekeminen ja kokeileminen (Siraj -Blatchford & MacLeod -Brudenell, 1999; Jarvis & Pell, 2002). Tutkimalla oppimiseen liittyy induktiivinen havaintoihin perustuva käsitteiden haltuunotto ja syy- seuraussuhteiden ymmärtämiseen tähtäävä toiminta luonnontieteellisten kokeiden ja tutkimusten avulla. Tutkimalla oppimisen/ tutkimisen käsitteiden kontekstisidonnaisten määritelmien haastavuus ja opetussuunnitelmien perusteisiin sisältyvä tavoite luonnontieteellisten prosessitaitojen harjoittelemisesta esi- ja alkuopetuksessa ovat tämän tutkimuksen tekemisen taustalla. Tutkimuskysymys on: Mitä esi- ja alkuopettajiksi opiskelevat ajattelevat tutkimisen/ tutkimalla oppimisen tarkoittavan esi- ja alkuopetuksen ympäristö- ja luonnontiedon yhteydessä?

Aineisto ja menetelmät

Helsingin yliopiston opettajankoulutuslaitoksella voi valita sivuaineekseen esi- ja alkuopetuksen 25 opintopistettä. Syksyllä 2011 tämän sivuaineen opintoihinsa sisällyttäneistä 49 osallistui ympäristö- ja luonnontiedon didaktiikan (3 op) ensimmäiselle ryhmäkerralle. Opiskelijoista 14 opiskelee luokanopettajiksi ja 35 lastentarhanopettajiksi ja useimmat heistä olivat aloittaneet sivuaineen opiskelun kolmantena opiskeluvuotenaan. Nämä opiskelijat saivat vastakseen avoimen kysymyksen ”Mitä mielestäsi tarkoittaa tutkimalla oppiminen/ tutkiminen esi- ja alkuopetusikäisten kanssa”? Tämän kysymyksen lisäksi opiskelijat kirjoittivat tutkimalla oppimista koskevista omista kokemuksistaan tai havainnoistaan. Tämän lisätehtävän avulla oli tarkoitus saada vahvistusta varsinaisen tutkimuskysymyksen ymmärtämisestä.

Tutkimuksen toinen vastaajaryhmä oli 2010 ja 2011 täydennyskoulutuskeskus Palmenian Lahden yksikön järjestämän esi- ja alkuopetuksen 25 opintopisteen opintoja suorittaneet. Vuonna 2010 34 kurssilaista vastasi heille sähköisesti lähetetyn e-lomakkeen kysymyksiin. Seuraavana keväänä 2011 vastaajia oli 44. Heille lähetettiin linkki kyselyyn ennen ympäristö- ja luonnontiedon didaktiikan kontaktiopetuksen alkua ja tutkimalla oppimista koskeva avoin kysymys esitettiin muodossa ”Jatka lausetta: Tutkiminen esi- ja alkuopetuksen ympäristö- ja luonnontiedossa tarkoittaa mielestäni”. Kaikki vastaajat eivät jatkaneet lausetta, sillä sain 68 määritelmää tutkimiselle esi- ja alkuopetusikäisten kanssa (87 % täydennyskoulutuksen opiskelijoista). Lisäksi lomakkeessa oli mahdollisuus täydentää kohta ”Olen tutkinut lasten kanssa”. Kyselyjen vastauksia käytettiin kurssin osallistujien ajattelun suuntaamiseen kohti kurssin keskeistä tavoitetta, joka liittyi

tutkimalla oppimisen ohjaamiseen ja tiedon saamiseen heidän käsityksistään ja kokemuksistaan tutkimalla oppimisesta.

Molemmissa ryhmissä kaikki vastaajat olivat naisia ja osalla heistä oli erittäin vähän kokemusta esi- tai alkuopetusikäisten kanssa työskentelystä.

Aineiston käsittelyssä olen käyttänyt kvalitatiivista sisällönanalyysiä (Hirsjärvi, Remes & Sajavaara, 2010). Aineiston analyysi alkaa jo aineiston keräysvaiheessa ja aineiston analyysin edellytys on sen hyvä tuntemus sekä tutkijan kriittinen ajattelu ja pohdinta. Koko tutkimusprosessin ajan luin aiheeseen liittyvää kirjallisuutta, joka on Syrjäläisen (1994) mukaan edellytys sille, että analyyttinen ote aineistoon vahvistuu.

Aineiston analyysiä voi luonnehtia Hirsjärven, Remeksen ja Sajavaaran (2010) kuvailemaksi ymmärtämiseen pyrkiväksi lähestymistavaksi. Aineistolähtöisen sisällönanalyysin tavoitteena oli aineiston pelkistämisen kautta löytää siitä samankaltaisuuksia ja eroja. Samoja elementtejä sisältävät vastaukset ryhmittelin luokiksi ja nimesin kyseisen luokan sisältöä kuvaavalla käsitteellä. Tätä nimeämistä ohjasivat tutkimuksen suunnitteluvaiheessa keskeisiksi havaitut käsitteet kuten havaintojen tekeminen ja kokeileminen.

Analyysin kuluessa ryhmittelin opiskelijoiden tutkimalla oppimisen luonnehdinnat kolmeen luokkaan: A ”havaintojen tekeminen” ja B ”toimintaa ja kokeilua” sekä C ”yleiset opetukseen ja kasvatukseen liittyvät huomiot”.

Luokitusta kuvaavissa esimerkeissä käytän vastaajista seuraavia lyhenteitä: ltoo tarkoittaa lastentarhanopettajaksi ja loo luokanopettajaksi opiskelevaa sekä tk täydennyskoulutukseen osallistunutta henkilöä. Ryhmitellyt vastaajat on lisäksi numeroitu satunnaisessa järjestyksessä.

Esittelen seuraavaksi millaisia luonnehdintoja tutkimalla oppimisen/ tutkimisen käsiteestä esi- ja alkuopetuksen opiskelijat kirjoittivat.

Tulokset

Eri vastaajaryhmissä vastaukset jakautuvat muodostamiini luokkiin taulukon 1. mukaisesti. Luokkaan A sijoitetuissa vastauksissa tutkimalla oppiminen/ tutkiminen kuvataan lasten havaintojen tekemiseksi. Luokan B vastauksissa on käytetty kokeilun tai tutkimisen käsitteitä siten, että lasten aktiivinen tekeminen ja kokeellinen toiminta on pääteltävissä. Luokkaan C sijoittamissani vastauksissa ei ole mainintaa havaintojen teosta tai kokeiluista. Sensijaan niissä korostettiin yleisiä kasvatuksellisia näkökulmia. Pääluokkien A ja B alaluokat muodostin siten, että lasten aktiivisuuden aste on muuttujana. Luokittelun perusteena käytin lisäksi vastaajien kirjoittamia esimerkkejä, sillä kokeilun käsite voi liittyä myös havaintojen tekemiseen koskettamalla.

A. Havaintojen tekeminen

Tähän luokkaan sijoitetuissa vastauksissa kuvataan tutkimalla oppimista/ tutkimista esi- ja alkuopetuksen ympäristö- ja luonnontiedossa havaintojen tekemiseksi ja niistä keskustelemiseksi. Alaluokkia muodostui kolme. Seuraavassa on esimerkkejä eri alaluokkiin sijoitetuista vastauksista.

A.1 Havaintojen tekeminen kaikilla aisteilla

Tähän alaluokkaan sijoitettujen vastausten sisällöissä korostuvat havaintojen passiivinen tekeminen. Kuvailu on melko yleisellä tasolla. Osa vastaajista mainitsee kaikki aistit sekä havaintojen dokumentoinnin.

> *Tutkiminen on lapselle luonnollinen tapa toimia päivittäin. Hän tekee havaintoja päiväkodin pihassa, lähimetsässä, lastenkirjallisuudesta, opetushetkillä/ toimintatuokioilla. (Tk 19)*

Havaintojen tekemisen yhteydessä muutama vastaaja toi esille tietojen etsinnän tärkeyden:

> *Itse kokeilemalla oppimista. Käytetään erilaisia havaintovälineitä, joiden avulla opitaan uutta. Tiedon etsimistä itse erilaisista lähteistä. Opettaja ei anna vastauksia suoraan, vaan oppilas saa itse löytää ne. Konkreettista tekemistä (haistellaan, tunnustellaan, katsellaan, maistellaan), käytetään eri aisteja. Esimerkki: oppilaat luonnossa tutustuvat aluskasvillisuuteen, kasvikirjojen avulla he selvittävät, mitä kasveja ovat havainneet. (Loo 1)*

A.2 Havaintojen teon lisäksi ihmettelyä ja pohtimista

Tähän alaluokkaan sijoitettujen vastausten yhteinen piirre on ympäristön ilmiöiden havainnoiminen ja pohtiminen lasten kanssa. Esimerkiksi:

> *Tutkiminen esi- ja alkuopetusikäisten kanssa on liikkumista erilaisissa ympäristöissä eri vuodenaikoina. Eri materiaalien käyttöä, havaintojen tekemistä ympäröivästä maailmasta. Lasten kuuntelua, yhdessä pohtimista. Esimerkkinä ko. opiskelija kirjoittaa: Veden olomuodot pohdituttivat ja mietittiin, mitä vedelle tapahtuu kiukaassa – talvella/ kylmässä jne. – kasvien kasvattamista kasvimaalla… (Ltoo18)*

> *Ei lähdetä teoreettisten käsitteiden kautta, vaan etsimällä, tarkastelemalla, oivaltamalla itse. Vasta tämän jälkeen saadut havainnot yhdistetään teoreettisiin käsitteisiin. Tällä tavalla annetaan tilaa oppilaiden omille ajatuksille eikä lähdetä niitä heti aluksi rajaamaan tai anneta valmiita vastauksia. Esimerkki: Miten lehtipuut eroavat havupuista? – tarkastellaan lehtiä, oksia ym. – miten syksy/ talvi vaikuttaa puihin… (Loo 8)*

Taulukko 1. Vastausten jakautuminen luokkiin eri vastaajaryhmissä

Luokka	*Täydennys-koulutuksen opiskelijat*[1]	*Lastentarhan-opettaja-opiskelijat*[2]	*Luokan-opettaja-opiskelijat*[3]
A.1 Havainnointia kaikilla aisteilla	14	3	3
A.2 Havainnointia, ihmettelyä, pohdintaa	20	12	6
A.3 Lasten kysymyksistä ja ennakko käsityksistä lähtevää havainnointia	3	10	4
B. 1 Havainnointia ja kokeiluja (esimerkeissä)	16	5	0
B. 2 Kokeiluja ja tekemistä (lapset aktiivisia toimijoita)	7	5	0
B.3 Luonnontieteellisen koeasetelman mukaista toimintaa	0	0	1
C. Yleiset opetukseen ja kasvatukseen liittyvät huomiot	8	0	0

Huom. 1) N=68; 2) N=35; 3) N= 14

A.3 Havaintojen tekemiseen liittyvät lasten esittämät kysymykset tai ennakkokäsitykset

Tämän alaluokan vastauksissa korostuvat lapsilähtöinen ihmettely ja lasten kysymykset. Tutkiminen on liitetty havaintojen tekemiseen ja lasten oivalluksiin. Esimerkissä Loo 2 on itse otsikoinut vastauksensa tutkivaksi oppimiseksi.

> *Tarkempaa perehtymistä johonkin asiaan, ilmiöön tai tapahtumaan. Aihe voi olla lapsen kiinnostuksen kohde tai opettajan asettama. Aihetta lähestytään lapsiryhmän tietojen pohjalta. Opettajan tehtävä ohjata havaintojen tekemistä. Lapsella on aktiivinen rooli tutkijana. Tarkoituksena ei ole antaa valmiita vastauksia, vaan auttaa lasta tekemään havaintoja, muodostamaan käsitteitä, päättelemään ym. (Tk 10)*

> *Mitä on tutkiva oppiminen? Tutkimalla oppiminen on mielestäni sitä, että lähdetään liikkeelle oppijan nykytilanteesta ja hän itse osallistumalla ja tekemällä kerää uutta tietoa, jonka konstruoi aikaisempien tietojen suhteen. Esim. lapselle halutaan opettaa eri puulajit. Lähdetään aluksi kartoittamaan, mitä lapsi jo tietää, sen jälkeen mennään metsään havainnoimaan. Tämän jälkeen lapsi voi esim. piirtää havaintonsa ja niistä keskustellaan. Annetaan lapselle tilaa ajatella, mutta ohjataan myös hänen ajatteluaan uutta kohti. Näin hän haluaa yleensä tietää lisää, mutta se tapahtuu kuin sivutuotteena tekemisen ohella. (Loo 2)*

B. Tutkimalla oppimiseen liittyy toimintaa, kokeilua

Tähän kategoriaan luokittelin ne vastaukset, joissa tulee esille oppilaiden kokeilut, tutkiva toiminta, tekeminen. Alaluokkia muodostui kolme siten, että ensimmäiseen B.1 kuuluvat ne vastaukset, joissa käsitteen määritelmässä painottuu havaintojen teko, mutta kokeilut on mainittu esimerkeissä, toisessa alaluokassa B.2 kokeileminen ja tekeminen ovat selkeästi mukana jo tutkimalla oppimisen määritelmässä ja kolmas alaluokka B.3 koostuu yhdestä vastauksesta, jossa on esitelty selkeä luonnontieteellinen koeasetelma.

B.1 Tutkimalla oppiminen on havainnointia sekä kokeiluja

Tähän alaluokkaan sijoitin vastaukset, joissa tutkimisista/ tutkimalla oppimista kuvattiin pääasiassa havaintojen tekemisen muodossa, mutta esimerkissä on selvästi kokeilevaa toimintaa. Useimmat vastaajien esimerkeistä liittyvät veteen ja sen olomuotojen muutoksiin. Näistä vastauksista ei saa varmaa käsitystä lasten aktiivisuudesta: esimerkiksi kuka on jäädyttänyt vettä tai muokannut puron virtausta:

> *Tutustutaan erilaisten kohteiden ja elementtien ominaisuuksiin ja tehdään omin aistein havaintoja sekä kokeita. Esim. otetaan talvella lunta sisälle ja seurataan sen sulamista vedeksi. (Tk 1)*

> *Esiopetusikäisillä korostuu toiminnallisuus ja tutkimalla konkreettisesti asioita opitaan uutta. Tutkimalla ja kokeilemalla eri aisteilla, tunnustellaan, ihaillaan, kosketetaan, haistetaan, leikkimällä myös tutkitaan. Vastaajan esimerkki: Puroa tutkittu, miten saadaan vesi virtaamaan jonnekin tiettyyn paikkaan? (Ltoo 27)*

B.2 Tutkimalla oppiminen on lasten kokeiluja ja tekemistä

Vastaukset sisältävät tutkimalla oppimisen määritelmässä ajatuksen kokeilevista ja suunnitelmallisista lapsista. Lapsia ohjataan tekemään kokeiluja ja pieniä tutkimuksia. Määrittelyssä on käytetty sanaa ”kokeilu” ja erona edellä oleviin luokkiin on se, että vastauksessa tulee esille lasten aktiivinen toiminta.

> *Lapsista lähteviä ideoita, joita lähdetään tutkimaan ja selvittämään… Yhdessä kokeilua, erilaisilla välineillä tutkimista. Esimerkki: 1.luokan oppilaiden tutkimuksen aiheena oli, mikä kelluu vedessä ja mikä siihen voisi vaikuttaa kelluko vai ei. (Ltoo 2)*

> *(Tutkiminen tarkoittaa sitä) että ollaan lähellä ja tuttuja lähiympäristön kanssa. Tutkitaan lähiympäristöä, tehdään kokeita, testataan, seurataan kasvua jne. annetaan mahdollisuus leikkiin, omaehtoiseen toimintaan. jne. (Tk 64)*

B.3 Tutkimalla oppimisella tarkoitetaan luonnontieteelliseen, kontrolloituun koeasetelmaan tukeutuvaa toimintaa.

Tähän luokkaan löytyi vain yksi vastaus:

> *Tutkimalla oppiminen on konkreettista ja käytännöllistä. Opettaja ei sanele vastauksia oppilaille etukäteen (ei opeta asioita perinteisellä tyylillä), vaan oppilaat perehtyvät uuteen asiaan itse konkreettisin välinein ja kokeiluin. Opettaja on toiminnan ohjaajana, järjestää puitteet ja välineet ja auttaa oppilaita tarvittaessa. Oppilaat pyrkivät itse löytämään ratkaisun/ ratkaisuja ko. ilmiöön (miten jokin asia toimii). Tästä esimerkkinä voisi olla vaikka jon-*

> *kin kasvin kasvatus erilaisissa olosuhteissa. oppilaat istuttavat kolme siementä, kukin erilaisiin kasvuolosuhteisiin. Oppilaat tutkivat, mitä kasveille tapahtuu. Tästä tullaan päätelmiin: mitä kasvi tarvitsee kasvaakseen. – opettaja ei sanele(opeta) suoraan, oppilaat oppivat itse tutkimalla ja havainnoimalla. (Loo 7)*

C. Yleiset opetukseen ja kasvatukselliseen liittyvät huomiot

Muutama täydennyskoulutukseen osallistunut vastasi tutkimisen esi- ja alkuopetusikäisten kanssa ympäristö- ja luonnontiedon yhteydessä tarkoittavan esimerkiksi:

> *Tärkeää leikkiminen metsässä, luonnonmateriaalien käyttö rakentelussa ym. (Tk 38)*

> *Ekologisen elämäntavan opettelua luonnollisena osana elämää. (Tk 33)*

> *tai*

> *lasten työskentelyä pareittain tai pienissä ryhmissä opettajan antamien ohjeiden mukaan. (Tk 35)*

Näiden vastaajien antamat esimerkitkään tutkimisesta lasten kanssa eivät mahdollistaneet vastausten sijoittamista A- tai B- kategorioihin, joten päädyin luokittelemaan kyseisen kaltaiset joko ympäristökasvatukseen tai yleisiin opetustuokioiden toteutuksiin liittyvät vastaukset ryhmään C.

Johtopäätöksiä ja pohdintaa

Tämän tutkimuksen aineisto muodostui esi- ja alkuopetuksesta kiinnostuneiden opiskelijoiden ennakkokäsityksistä. Vastaaminen tapahtui joko esi- ja alkuopetuksen ympäristö- ja luonnontiedon kurssin ensimmäisellä ryhmäkerralla opettajankoulutuslaitoksen kurssisalissa tai täydennyskoulutukseen osallistujilla tietokoneen avulla. Ennakkokäsitysten kirjoittaminen kuvaa vastaajan mieleen ensimmäiseksi nousseita aiheeseen liittyviä teemoja. Vastaajan omat kokemukset lasten parissa työskentelystä ja luonnontieteellisten opintojen määrä saattavat osaltaan vaikuttaa näihin ennakkokäsityksiin. Kun pyysin vastaukset nimettöminä, ei yksittäisten vastaajien taustatietoja koulutustaustaa lukuun ottamatta ole käytettävissä. Kuitenkin Taulukossa 1 näkyvät eri vastaajaryhmien väliset erot saavat pohtimaan koulutuksen ja toisaalta lasten kanssa työskentelyn vaikutuksia käsityksiin tutkimalla oppimisesta. Esimerkiksi luokkaan B.1 sijoittui

neljännes (24 %) täydennyskoulutukseen osallistuneiden vastauksista, kun vain 14 % lastentarhanopiskelijoiden vastauksista oli sijoitettavissa tähän luokkaan. Luokanopettajaopiskelijoiden ennakkokäsityksissä ei ollut kokeilemiseen liittyviä mainintoja.

Muutamat lastentarhanopettajaksi opiskelevat toivat vastauksessaan esimerkkinä esille heille opintojen yhteydessä aiemmin näytetyn videon. Kyseisessä tallenteessa lapset havainnoivat mehiläisiä.

> *Videotallenne esikouluryhmän teemasta mehiläisestä (ampiaisesta?) hedelmään: ensin keskusteltiin, sitten vierailtiin mehiläisfarmilla. Piirrettiin, tutkittiin hunajakennoja: keskusteltiin mehiläisvahasta ja hunajasta, tutkittiin suurennuslasilla kennoa ja kuolleita mehiläisiä. Alettiin tuoda mukaan keskustelua kukista ja siitepölystä ja miten mehiläinen kuljettaa siitepölyä kukasta toiseen… jne. (Ltoo 29)*

Yllä oleva esimerkki kertoo esiopetusryhmän toteuttamasta projektista. Luokittelin kyseisen vastaajan Ltoo 29 käsityksen tutkimalla oppimisesta kuuluvaksi luokkaan A.3. Videotallenne tuo selkeästi esille havaintojen tekemisen ja niiden dokumentoinnin sekä keskustelun osana toimintaa, mutta siinä ei ole luonnontieteelliseen kokeilevaan tutkimiseen liittyvää ainesta. Opiskelijoille koulutuksen yhteydessä esitetyllä videomateriaalilla on näin ollen ollut vaikutusta siihen, miten tutkimalla oppiminen/ tutkiminen on ymmärretty. Forbes (2011) tuo esille laajassa artikkelissaan sekä luonnontieteiden opetuksessa käytettävien materiaalien sekä opettajien omien reflektiivisten kokemusten merkityksen ammatilliselle kehittymiselle.

Tutkimalla oppiminen / tutkiminen esi- ja alkuopetuksen ympäristö- ja luonnontieteessä on saamieni vastausten perusteella ymmärretty pääosin havaintojen tekemiseksi. Vain noin kolmasosa vastaajista toi esille kokeilevan toiminnan joko määritellessään tutkimalla oppimista tai sitten antamissaan esimerkeissä. Kyseessä ovat vastaajien ennakkokäsitykset, mutta toisaalta kaikilla vastaajista on taustallaan yleisen kasvatustieteen opintoja. Osassa vastauksista on selkeästi tutkivan oppimisen piirteitä. Konstruktiivisuus, tietojen liittäminen jo olemassa oleviin on mukana varsinkin alaluokkaan A.3 sijoittamissani vastauksissa. Induktio, havainnoista lähtevä käsitteiden muodostus tulee esille muutamissa vastauksissa:

> *Ei lähdetä teoreettisten käsitteiden kautta, vaan etsimällä, tarkastelemalla, oivaltamalla itse. Vasta tämän jälkeen saadut havainnot yhdistetään teoreettisiin käsitteisiin. Tällä tavalla annetaan tilaa oppilaiden omille ajatuksille*

eikä lähdetä niitä heti aluksi rajaamaan tai anneta valmiita vastauksia. Esimerkki: Miten lehtipuut eroavat havupuista? – tarkastellaan lehtiä, oksia ym. – miten syksy/ talvi vaikuttaa puihin… (Loo 8)

Esi- ja alkuopetusiässä luonnontieteiden oppimiseen innostava kokeileva tutkiminen ei näytä tulleen tutuksi tähän tutkimukseen osallistuneille heidän omana kouluaikanaan tai aikaisemmissa opinnoissaan. Tutkimisen, tutkivan oppimisen, tutkimalla oppimisen ja tutkivan toiminnan käsitteet kaipaavat selventämistä. Luonnontieteiden opetukseen ja oppimiseen liittyvät käsitteet kokeilu, kontrolloitu koe tai tutkimus vaikuttavat olevan myös vastaajille vieraita. Vastaava käsitteiden hallinnan haasteellisuus tulee esille ruotsalaisessa Gyllenpalmin ja Wickmanin (2011) tutkimuksessa, jossa luonnontieteiden aineenopettajiksi opiskelevien opiskelijoiden ryhmähaastattelut paljastivat, että sekä kontrolloidun kokeen että laboroinnin käsitteiden sisältö ja merkitys eivät olleet haastatteluihin osallistuneille tuttuja. Ruotsin valtakunnallisessa peruskoulun opetussuunnitelmassa (Skolverket 2008) on vastaavalla tavalla kuin meillä Suomessa käytetty kokeilun ja luonnontieteellisen tutkimisen käsitteitä luonnontieteiden opetuksen ja oppimisen yhteydessä.

Esi- ja alkuopetusikäiset ovat innokkaita kokeilijoita ja tutkijoita, jos heille vain annetaan siihen mahdollisuus. Maassamme on tällä hetkellä tarjolla vähän esi- ja alkuopetuksen ympäristö- ja luonnontiedon oppimateriaaleja verrattuna esimerkiksi esi- ja alkuopetusikäisille suunnattuihin matematiikan materiaaleihin. Tulevaisuudessa olisi kiinnostavaa tutkia, kuinka esi- ja alkuopetuksen ympäristö- ja luonnontiedon didaktiikan kurssin osana toteutettavissa opiskelijoiden ohjaamissa tutkimalla oppimisen kokeiluissa esiopetusryhmissä toteutuu lasten havaintojen tekeminen ja aktiivinen kokeilu eli miten opiskelijat toteuttavat tutkimalla oppimista.

Lähteet

Abd-El-Khalick, F., Boujaoude, S., Duschl, R., Lederman, N.G., Mamlok-Naaman, R. Hofstein, A., Niaz, M., Treagust, D., & Tuan, H.-L. (2004). Inquiry in science education: international perpectives. *Science Education, 88*, 397–419.

Aho, L., Havu-Nuutinen, S., & Järvinen, H. (2003). *Opetus, opiskelu ja oppiminen ympäristö- ja luonnontiedossa*. Porvoo: WSOY.

Brunton, P., & Thornton, L. (2010). *Science in the early years. Building firm foundations from birth to five*. London: Sage.

Cantell, H. (2001). *Oppimis- ja opettamiskäsitykset maantieteen opetuksen ja aineenopettajankoulutuksen kehittämisen lähtökohtana.* Helsingin yliopiston opettajankoulutuslaitos, tutkimuksia 228. Helsinki: Hakapaino.

Entwistle, N., & Peterson, E.R. (2004). Conceptions of learning and knowledge in higher education: relationships with study behaviour and influences of learning environments. *International Journal of Educational Research, 41*, 407–428.

Forbes, C.T. (2011). Preservice Elementary Teachers' Adaptation of Science Curriculum Materials for Inquiry-Based Elementary Science. *Science Education, 95*, 927–955.

Frost, J. (1997). *Creativity in primary science*. Buckingham: Open University Press.

Gyllenpalm, J., & Wickman, P.-O. (2011)."Experiments" and the Inquiry Emphasis Conflation in Science Teacher Education. *Science Education, 95*, 908–926.

Hakkarainen, K., Lonka, K., & Lipponen, L. (1999). *Tutkiva oppiminen – älykkään toiminnan rajat ja niiden ylittäminen*. Helsinki: WSOY.

Hakkarainen, K., Lonka, K., & Lipponen, L. (2004). *Tutkiva oppiminen – järki, tunteet ja kulttuuri oppimisen sytyttäjinä.* Helsinki: WSOY.

Harlen, W. (2000). *The teaching of science in primary schools*. London: David Fulton.

Harlen, W. (1985). Introduction: Why science? What science? Teoksessa W. Harlen (Toim.), *Primary science, taking the plunge* (s. 1–8). Oxford: Heinemann.

Hirsjärvi, S., & Hurme, H. (1988). *Teemahaastattelu*. Helsinki: Yliopistopaino.

Hirsjärvi, S., Remes, P., & Sajavaara, P. (2010). *Tutki ja kirjoita* (15.-16. painos). Helsinki: Tammi.

Jarvis, T. (1991). *Children and primary science*. London: Casell.

Jarvis, T., & Pell, A. (2002). Changes in primary boys' and girls' attitudes to school and science during a two-year science in-service programme. *The Curriculum Journal, 13*(1), 43–69.

Johnston, J. (2005). *Early explorations in science*. Buckingham: Open University Press.

Kember,D., Jenkins, W., & Ng, K. (2003). Adult students' perceptions of good teaching as a function of their conceptions of learning – Part I Influencing the development of self-determination. *Studies in Continuing Education, 25*(2), 240–251.

Kosonen, M. (1994). *Tutki ja tuumaile*. Opetushallitus. Helsinki: Hakapaino.

Kärnä, P., Hakonen, R., & Kuusela, J. (2012). Luonnontieteellinen osaaminen perusopetuksen 9. luokalla 2011. *Koulutuksen seurantaraportit 2012:2*. Opetushallitus. Tampere: Juvenes Print.

Lehto, J. E. (2005). Konstruktivismi peruskoulun didaktiikan ohjenuoraksi? Kriittinen katsaus eräisiin suomalaisiin sovellutuksiin. *Kasvatus, 36*(1), 7 – 19.

Lipponen, L. (2011). Tutkiva oppiminen varhaispedagogiikassa. Teoksessa E. Hujala & L. Turja (Toim.), *Varhaiskasvatuksen käsikirja* (s. 31–38). Juva: Bookwell.

Minner, D., Levy, A. J., & Century, J. (2010). Inquiry-Based Science Instruction – What Is It and Does It Matter? Results from a research synthesis years 1984 to 2002. *Journal of research in science teaching*, *47*, 474–496.

Opetushallitus (2000/2010). *Esiopetuksen opetussuunnitelman perusteet*. Helsinki: Opetushallitus ja Yliopistopaino.

Opetushallitus (2004). *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet*. Vammala: Opetushallitus ja Vammalan kirjapaino.

Siraj-Blatchford, J., & MacLeod-Brudenell, I. (1999). *Supporting Science, Design and Technology in the Early Years.* Buckingham: Open University Press.

Skolverket (2008). *Kursplaner och betygskriterier grundskolan 2000* (reviderad version 2008). Västerås: Skolverket och Fritzes.

Syrjäläinen, E. (1994) Etnografisen opetuksen tutkimus: kouluetnografia. Teoksessa L. Syrjälä, S. Ahonen, E. Syrjäläinen & S. Saari (Toim.), *Laadullisen tutkimuksen työtapoja*. Helsinki: Kirjayhtymä.

Tuomi, J., & Sarajärvi, A. (2003). *Laadullinen tutkimus ja sisällönanalyysi*. Jyväskylä: Gummerus.

Turja, L. (2011). Tiedekasvatus ja lapsen tutkiva toiminta. Teoksessa E. Hujala & L. Turja (Toim.), *Varhaiskasvatuksen käsikirja* (s. 179–194). Juva: Bookwell.

Uusikylä, K., & Atjonen, P. (2000). *Didaktiikan perusteet*. Helsinki: WSOY.

Virtanen, V., & Lindblom-Ylänne, S. (2010). University students' and teachers' conceptions of teaching and learning in the biosciences. *Instructional Sciences, 38*, 355–370.

Aloittavien matematiikan pää- ja sivuaineopiskelijoiden uskomuksia matematiikasta

ANTTI VIHOLAINEN, MERVI ASIKAINEN JA PEKKA E. HIRVONEN

antti.viholainen@uef.fi
Itä-Suomen yliopisto, Fysiikan ja matematiikan laitos

Tiivistelmä

Tässä tutkimuksessa tarkastellaan Itä-Suomen yliopistossa opintojaan aloittavien matematiikan pää- ja sivuaineopiskelijoiden (N=93) matematiikkauskomuksia. Aineisto kerättiin kansainvälisessä MT21-tutkimuksessa käytetyn testin avulla. Testissä matematiikkauskomukset on jaettu neljään kategoriaan: formalismi-, skeema-, prosessi- ja sovellusorientaatio. Tutkimuksen tulosten perusteella vaikuttaa siltä, että useiden muiden maiden opiskelijoihin verrattuna opintojen alussa suomalaisilla opiskelijoilla skeemaorientaatio on voimakkaampi ja prosessiorientaatio heikompi. Prosessiorientaatio oli matematiikan sivuaineopiskelijoilla merkitsevästi heikompi kuin pääaineopiskelijoilla ($p < .01$). Konstruktivistisen oppimisnäkemyksen näkökulmasta katsottuna erityisesti opettajaopiskelijoiden näkemysten tulisi muuttua yliopisto-opintojen aikana prosessiorientaation suuntaan.

Asiasanat

matematiikka, matematiikkauskomukset, opettajankoulutus, yliopisto-opinnot

Johdanto

Matematiikan olemuksesta, sen oppimisesta ja opettamisesta on monenlaisia uskomuksia (Pehkonen, 2004). Yleensä näitä uskomuksia ei voida yksiselitteisesti pitää oikeina eikä väärinä. Kuitenkin ne vaikuttavat siihen, miten yksilö suhtautuu matematiikkaan ja mitä asioita hän pitää tärkeänä matematiikan oppimisessa. Erityisen tärkeä merkitys on sillä, millaisia uskomuksia on matematiikan opettajalla, koska ne vaikuttavat olennaisesti opettajan pedagogisiin valintoihin matematiikan opetuksessa. Yleensä opettaja myös välittää omia uskomuksiaan oppilaille joko suoraan tai epäsuorasti. Uskomukset muodostuvat tavallisesti pitkän ajan kuluessa.

Tämän tutkimuksen tavoitteena on selvittää yliopistossa matematiikan opintojaan aloittavien opiskelijoiden uskomuksia matematiikasta. Mukana ovat sekä matematiikan pää- että sivuaineopiskelijat. Erityinen huomio tutkimuksessa kohdistetaan opettajaksi aikoviin opiskelijoihin. Tuloksia verrataan myös muissa maissa tehtyihin vastaaviin tutkimuksiin. Opintojen aloitusvaiheessa opiskelijoiden matematiikkauskomusten voidaan olettaa perustuvan koulumatematiikkaan. Myöhemmin matematiikan yliopisto-opinnot ja opettajiksi aikovilla opettajan pedagogiset opinnot muovaavat uskomuksia. Tutkimuksessa verrataan opettajaksi aikovien opiskelijoiden uskomuksia konstruktivistisen oppimiskäsityksen mukaisiin näkemyksiin ja tämän pohjalta pyritään arvioimaan opettajankoulutuksen tarvetta muuttaa tulevien opettajien matematiikkauskomuksia.

Uskomukset toiminnan perustana

Teoreettisen tiedon ajatellaan ohjaavan yksilön toimintaa ainoastaan, mikäli se on liitetty osaksi yksilön uskomusjärjestelmää (Weinert, 2001). Tieto määritellään usein puhtaasti kognitiiviseksi konstruktioksi, mutta uskomuksiin sisältyy kognitiivisen komponentin lisäksi affektiivinen ja motivationaalinen komponentti (Felbrich, Müller & Blömeke, 2008). Toisaalta uskomusten ja tiedon voidaan ajatella olevan saman kategorian olioita; on asioita, jotka vain ”uskomme” (uskomukset) ja asioita, jotka tiedämme (tieto) (Leatham, 2006).

Yksilön uskomukset muodostuvat hänen omaksuessaan ympäröivän kulttuurin vaatimuksia sosialisaatioprosessissa: uskomukset voivat muodostua sattumalta, kokemuksen kautta tai tapahtumaketjun seurauksena (Pajares, 1992). Yksilön ajatellaan reagoivan uusiin tilanteisiin aiempien uskomustensa ja kokemustensa kautta, esimerkiksi vastavalmistuneen opettajan tapauksessa aiempi kouluhistoria ja sen perusteella muodostetut uskomukset luovat taustan toimimiselle opettajana (Kagan, 1992).

Opettajien uskomuksia on tutkittu runsaasti, vaikkakaan niille ei ole olemassa selkeää ja yksikäsitteistä määritelmää. Uskomuskäsite on myös kehittynyt ajan myötä. Uskomustutkimusten alkuaikoina 1980-luvulla uskomukset lähes rinnastettiin ns. virhekäsityksiin (Rösken, Pepin, & Törner, 2011). Nykyisin uskomusten olennainen merkitys ihmisen toiminnan taustalla tunnustetaan ja opettamiseen ja oppimiseen liittyvien uskomusten ajatellaan ohjaavan ja määrittelevän opettajan toimintaa (Staub & Stern, 2002).

Eräs matematiikan opettajankoulutuksen yleinen tavoite on, että koulutuksen päätyttyä opettajaopiskelijan uskomukset opettamisesta, oppimisesta ja opettajan roolista ovat jäsentyneitä ja vahvoja, jolloin hän pystyy paremmin toimimaan omien näkemystensä mukaisesti opettajana eivätkä hänen näkemyksensä todennäköisesti muutu luokan ja koulun sosialisaatiopaineiden vaikutuksesta (Hawkey, 1996). Tällainen nuori opettaja pystyy toteuttamaan valitsemansa käytänteet ja tehokkaammin ratkaisemaan opetustilanteissa ilmenevät ristiriidat. Noviisi opettaja joutuu kohtaamaan tilanteita, joissa esimerkiksi opettajakollegoiden antamat oppilaslähtöiseen opetukseen kannustavat neuvot ja ohjeet saattavat poiketa koulun yleisestä, oppikirjakeskeisestä opetustavasta (Prescott & Cavanagh, 2008).

Tutkimusten mukaan opettajaksi valmistuvat usein hylkäävät opettajankoulutuksessa omaksumansa nykyaikaiset opetusmallit koulun sosialisaatiopaineiden alla ja alkavat toteuttaa koulun kulttuurin mukaista opetusta tai omien kouluaikojensa opetustapaa (ks. Korthagen, 1992; Handal, 2003). Ilmiö voidaan tulkita siten, että opettajalle opettajankoulutuksen aikana muodostunut näkemys itsestä opettajana on heikko, joten tältä osin opettajankoulutus ei ole täysin onnistunut.

Uskomusten on todettu olevan pysyviä: esimerkiksi opettajien oppiaineeseen liittyvät uskomukset estävät heitä omaksumasta uskomusten kanssa ristiriidassa olevia opetuskäytänteitä (esim. Schoenfeld, 1998). Chinnin ja Brewerin (1993) mukaan todellinen uskomuksen muuttaminen on vain yksi vaihtoehto ”helpompien” vaihtoehtojen joukossa. Opettajaopiskelijoiden uskomuksia oppiaineesta ovat muokanneet lukuisat vuodet oppilaana ja opiskelijana, joten he ovat erityisen herkkiä tarttumaan näihin helpompiin vaihtoehtoihin. Usein vastavalmistuneet opettajat menevät opettajan työhön peruskoulu- ja lukioaikaisten uskomustensa kanssa (esim. Borko & Putnam, 1996).

Pajaresin (1992) mukaan uskomukset toimivat suodattimena sille mitä opettajat havaitsevat. Jos opettaja esimerkiksi uskoo, että opetuksen pitää olla hauskaa ja sisältää ulkoisia oppimisen kannustimia, voi hän poimia opetusreformeista juuri ne elementit, joista oppilaat pitävät. Tutkimuksissa on myös havaittu, että uudenlaisten opetustapojen käyttöönotto ei onnistu, mikäli oppiaineeseen liittyvissä opettajan uskomuksissa ei myös tapahdu muutosta. (esim. Gill, Ashton & Algina, 2004). Schoenfeldin (1992) mukaan opetusreformien toteutuksen ensiaskel on opettajien tiedon luonteeseen ja opetukseen ja oppimiseen liittyvien uskomusten muuttaminen.

Matematiikkauskomukset

Matematiikkauskomuksia on tarkasteltu ja analysoitu useista näkökulmista (mm. Furinghetti & Pehkonen, 2002; Pehkonen, 2004; Rösken, Pepin, & Törner, 2011). Matematiikkaa koskevilla uskomuksilla tarkoitetaan yleisesti matematiikan luonteeseen ja sen opettamiseen ja oppimiseen liittyviä uskomuksia (Handal, 2002; Ernest, 1989). Matematiikan ja matemaattisen tiedon luonnetta koskevia uskomuksia kutsutaan *epistemologisiksi uskomuksiksi* ja opettamista ja oppimista koskevia uskomuksia *pedagogisiksi uskomuksiksi* (mm. Ertmer, 2005). Tässä tutkimuksessa keskitytään epistemologisiin uskomuksiin. Epistemologiset uskomukset kuitenkin vaikuttavat pedagogisiin uskomuksiin ja sitä kautta opettajan valitsemiin opetuskäytänteisiin. Niinpä käsittelemme aluksi lyhyesti myös pedagogisia uskomuksia ja niiden merkitystä.

Pedagogiset uskomukset matematiikasta

Matematiikan opettamista ja oppimista koskevat pedagogiset uskomukset jaetaan usein perinteisiin ja sosio-konstruktivistisiin uskomuksiin. Perinteisellä uskomuksella tarkoitetaan näkemystä matematiikan opetuksesta tiedonsiirtämisenä, jossa kaavoilla, proseduureilla, harjoittelulla ja lopputuloksilla on iso merkitys (Handal, 2003). Oppiminen tapahtuu itsenäisesti ja toisista oppijoista riippumattomasti, menetelmät ovat yleensä yksisuuntaisia ja puhdas, abstrakti matematiikka suosittua (Handal, 2002; McGinnis, Shama, Graeber & Watanabe, 1997). Sosio-konstruktivistisen matematiikan opetuksen näkemyksen mukaan oppiminen on tiedon henkilökohtaista konstruointia sosiaalisessa ympäristössä ja opetuksessa tulee suosia ongelmaratkaisua, reflektointia ja tutkivaa oppimista sekä ryhmätyötapoja, keskustelua ja vaihtoehtoisia ajatusmalleja (Handal, 2003).

Matematiikan opettajaopiskelijoiden uskomusten on todettu olevan pikemminkin perinteisiä kuin nykyaikaista oppimiskäsitystä vastaavia (Handal, 2003; Foss & Kleinsasser, 1996; Nisbert & Warren, 2000). Handal selittää tätä siten, että konservatiivisen luonteensa vuoksi opettajankoulutus tukee perinteisten uskomusten muodostumista. Matematiikanopettajan uskomukset muodostuvat osaltaan opiskelijoiden omien koulu- ja opettajakokemusten pohjalta eivätkä ne välttämättä muutu opettajankoulutuksen aikana (esim. Kagan, 1992; Borko & Putnam, 1996). Toisaalta Pehkosen (2004) mukaan useat tutkimukset ovat osoittaneet, että työssä olevien opettajien uskomukset muuttuvat hyvin hitaasti ja että tätä muutosprosessia on erittäin vaikea nopeuttaa. Niinpä opettajankoulutuksella on ratkaiseva asema opettajien uskomusten muovaamisessa.

Opettajien pedagogisten matematiikkauskomusten ja opetuskäytänteiden välistä yhteyttä on tutkittu runsaasti. Esimerkiksi Stipek, Givvin, Salmon ja McGyvers (2001) selvittivät alakoulun opettajien uskomusten koherenssia ja niiden kytkeytymistä havaittuihin opetuskäytänteisiin ja opettajien tekemiin itsearviointeihin yhden kouluvuoden aikana. Tutkijat havaitsivat, että opettajat, joiden uskomukset matematiikan opettamisesta ja oppimisesta olivat perinteisiä, opettivat pe-

rinteisellä tavalla. Nämä opettajat arvioivat varmuutensa opettaa matematiikkaa matalaksi ja nauttivat vähemmän matematiikan opettamisesta kuin opettajat, jotka edustivat uskomuksiltaan konstruktivistista kantaa. Sen sijaan vastavalmistuneiden opettajien uskomukset ja käytänteet eivät välttämättä ole yhteneviä. Simmons, Emery ja Carter (1999) raportoivat tuloksistaan, joiden mukaan aloittelevien luonnontieteen ja matematiikan opettajien uskomukset ja kuvailemat matematiikan opettamisen käytänteet olivat oppilaskeskeisiä, mutta heidän opetuksensa havaittiin olevan opettajakeskeistä.

Opettajan pedagogisten matematiikkauskomusten ja matematiikan oppimistulosten välillä on joissakin tutkimuksissa havaittu yhteyksiä. Esimerkiksi Staub ja Stern (2002) havaitsivat, että konstruktivistista opetus- ja oppimisnäkemystä edustavien opettajien luokkien 2 ja 3 oppilaat olivat parempia sanallisissa matematiikan tehtävissä. Näiden opettajien oppilaat eivät kuitenkaan olleet yhtään parempia laskutaitoa mittaavissa tehtävissä kuin sellaisten opettajien oppilaat, joiden näkemys matematiikan opettamisesta ja oppimisesta oli ns. tiedon siirtonäkemys. Lienee yleisesti hyväksytty tosiasia, että ymmärtämiseen painottuvalla opetuksella oppilaiden käsitteellinen ymmärrys, mitä esimerkiksi sanallisten tehtävien ratkaisemisessa tarvitaan, kehittyy tehokkaammin kuin faktoja painottavalla opetuksella.

Epistemologiset uskomukset matematiikasta

Epistemologiset uskomukset tarkoittavat yleisessä merkityksessä käsityksiä tiedon rakenteesta ja tiedon muodostumisesta. Tällaisia ovat esimerkiksi käsitykset siitä, onko tieto staattista vai dynaamista tai siitä, että saavutetaanko uutta tietoa löytämällä jotain aiemmin tuntematonta, mutta olemassa olevaa, vai konstruoimalla uusia tietorakenteita.

Ernest (1989) on erotellut kolme erilaista epistemologisiin uskomuksiin perustuvaa matematiikkanäkemystä: *Instrumentaalisen näkemyksen* mukaan matematiikka on kokoelma pääasiassa toisiinsa liittymättömiä faktoja, sääntöjä ja menetelmiä, joita voidaan hyödyntää sovelluksissa. *Platonistisen näkemyksen* mukaan matematiikka on objektiivinen, staattinen ja yhtenäinen järjestelmä, josta saadaan tietoa matemaattisen tutkimuksen avulla. Sen sijaan *ongelmanratkaisunäkemyksen* mukaan matematiikka on dynaaminen, jatkuvasti laajeneva ja muuttuva kulttuurillinen tuote. Ernest asettaa nämä matematiikkanäkemykset ”paremmuusjärjestykseen” siten, että instrumentaalinen näkemys sijoittuu alimmalle tasolle, sen jälkeen tulee platonistinen näkemys, ja tavoiteltavimpana Ernest pitää ongelmanratkaisunäkemystä.

Pohjautuen Ernestin luokitteluun Beswick (2005) on aiempien tutkimusten pohjalta koonnut seuraavia yhteyksiä opettajan epistemologisten uskomusten ja matematiikan oppimiseen ja opettamiseen liittyvien uskomusten välillä:

1. Instrumentaalisesta matematiikkanäkemyksestä seuraa, että matematiikan oppiminen nähdään erilaisten tietojen ja taitojen omaksumisena. Opetus nähdään sisältöpainotteisena, jossa pääpaino on suoritusten oppimisessa.
2. Platonistisen näkemyksen mukaan matematiikan oppiminen tarkoittaa olemassa olevan tiedon ymmärtämistä. Niinpä opetuksen tulee olla sisältöpainotteista, jossa painotetaan annettujen asioiden ja niiden välisten yhteyksien ymmärtämistä.
3. Ongelmanratkaisunäkemyksessä matematiikan oppiminen nähdään autonomisena tutkimisena, jota ohjaavat oppijan omat int-ressit. Niinpä opetuksen tulee tämän näkemyksen mukaan olla oppijakeskeistä sisältöpainotteisuuden sijaan.

Beswickin mukaan ongelmanratkaisunäkemys ja sen mukaiset käsitykset matematiikan oppimisesta ja opettamisesta vastaavat parhaiten konstruktivistisen oppimisnäkemyksen periaatteita.

Instrumentaalinen matematiikkanäkemys on ongelmallinen, koska pelkästään siihen perustuvassa opetuksessa syvällistä ymmärtämistä, tiedon rakentumisprosessia ja oppilaiden aktiivista roolia ei painoteta. Lisäksi matematiikka nähdään ensisijaisesti työkaluna, joka ei itsessään ole mielenkiintoinen. Platonistisen matematiikkanäkemyksen mukaan matemaattiset objektit nähdään ihmisestä riippumattomina (Brown, 2005). Niinpä myös matemaattisilla väitteillä on tämän näkemyksen mukaan objektiivinen, ihmisestä riippumaton totuusarvo. Matemaattinen tieto nähdään myös ei-empiirisenä, joka ei missään määrin perustu aistihavaintoihin. Matemaattiset käsitteet voidaan sen sijaan havaita mielikuvituksen avulla (ibid.). Tällaiseen *ontologiseen objektivismiin* perustuva matematiikkanäkemys johtaa helposti siihen, että oppimistilanteessa opettaja nähdään "ainoan ja oikean" tiedon välittäjänä ja oppiminen opettajan tarjoaman tiedon omaksumisena.

Grigutsch, Ratz ja Törner (1998) kehittivät vastaavanlaisen jaon matematiikkauskomuksille tutkiessaan saksalaisten matematiikanopettajien uskomuksia. Heidän tutkimuksensa aineisto koottiin kyselyllä, joka koostui 75 matematiikan luonnetta ja sen oppimista ja opettamista koskevasta väittämästä. 310 saksalaista peruskoulussa tai lukiossa toimivaa opettajaa otti kantaa näihin väittämiin käyttäen viisiportaista likert-asteikkoa. Tähän aineistoon perustuen tutkijat löysivät neljä

erityyppistä matematiikkaorientaatiota (ks. myös Felbrich, Müller ja Blömeke, 2008):

1. *Formalismiorientaatio:* Matematiikka nähdään eksaktina tieteenä, joka pohjautuu aksiomaattiseen järjestelmään ja deduktioon.
2. *Skeemaorientaatio:* Matematiikka nähdään käsitteiden ja laskusääntöjen kokoelmana, työkalupakkina.
3. *Prosessiorientaatio:* Matematiikka nähdään tieteenä, joka pääasiassa koostuu ongelmanratkaisuprosesseista ja uusien asioiden (mm. säännönmukaisuuksien, yhteyksien ja tulosten) löytämisestä.
4. *Sovellusorientaatio:* Matematiikka ja sen merkitys nähdään sovellusten kautta, ts. matematiikka nähdään tieteenä, jota tarvitaan yhteiskunnassa ja arkielämässä.

Grigutsch ym. (1998) havaitsivat, että formalismi- ja skeemaorientaatiot ja vastaavasti prosessi- ja sovellusorientaatiot korreloivat keskenään. Tämän perusteella he jakoivat näkemykset kahteen ryhmään: formalismi- ja skeema-orientaatiot edustavat heidän mukaansa staattista matematiikkanäkemystä ja prosessi- ja sovellusorientaatiot dynaamista kuvaa matematiikasta.

Verrattaessa Grigutschin ja muiden (1998) luokittelua Ernestin (1989) luokitteluun voidaan todeta, että skeemaorientaatio vastaa instrumentaalista matematiikkanäkemystä ja prosessiorientaatio ongelmanratkaisunäkemystä. Formalismiorientaatiolla ja platonistisella näkemyksellä on yhteistä se, että molemmissa matematiikka nähdään staattisena järjestelmänä. Sen sijaan platonistiseen näkemykseen olennaisesti kuuluvaan tiedon objektiiviseen luonteeseen Grigutsch ym. eivät suoraan viittaa formalismiorientaatiota määritellessään.

Ernestin luokittelussa instrumentaalista ja platonista matematiikkanäkemystä voidaan pitää staattisina, koska niissä molemmissa matematiikka nähdään muuttumattomana. Sen sijaan ongelmanratkaisunäkemys pitää olennaisesti sisällään ajatuksen matematiikan dynaamisesta luonteesta. Sillä, että näkeekö opettaja matematiikan staattisena vai dynaamisena, on selkeä yhteys myös siihen, millaisena opettaja näkee matematiikan oppimisen ja opettamisen. Edellä esitetyt Beswickin kokoamat tulokset kertovat tästä aika paljon. Lisäksi mm. Kaiser, Schwarz ja Krackowitz (2007) ovat tutkineet matematiikkaan liittyvien epistemologisten uskomusten vaikutusta matematiikan oppimiseen ja opettamiseen liittyviin uskomuksiin soveltaen Grigutschin ja muiden viitekehystä. He haastattelivat tapaustutkimuksessaan kahta saksalaista matematiikanopettajaopiskelijaa ja havaitsivat, että toisella opiskelijoista, Annalla, oli selkeästi staattinen kuva matematiikasta, kun taas toisen haastatellun opiskelijan, Benin, ajattelua hallitsivat dynaamiset käsitykset. Annan käsityksissä tuli vahvasti esiin oppiminen tiedon vastaanottamisena, kun taas Benin mukaan matematiikan oppiminen on aktiivinen prosessi, jossa tulee lähteä jokapäiväisen elämän ongelmista ja kysymyksistä

Grigutschin ja muiden esittämä jako neljään matematiikkaorientaatioon on toiminut viitekehyksenä kuuden maan (Bulgaria, Etelä-Korea, Meksiko, Saksa, Taiwan ja USA) opettajankoulutusta vertailevassa MT21-tutkimuksessa, jossa eräänä osa-alueena on ollut matematiikanopettajaopiskelijoiden epistemologiset uskomukset matematiikan luonteesta (Schmidt, Blömeke & Tatto, 2011). MT21-tutkimuksessa käytettiin lyhennettyä 20 väittämästä koostuvaa versiota Grigutschin ja muiden kyselystä. Vastausasteikko oli kuusiportainen siten, että vastausvaihtoehto ”1” tarkoitti ”vahvasti eri mieltä” ja vastausvaihtoehto ”6” tarkoitti ”vahvasti samaa mieltä”. MT21-tutkimukseen osallistuneet opiskelijat olivat opintojensa loppuvaiheessa, joten tulokset kertovat, millaisia näkemyksiä eri maiden matematiikanopettajankoulutusohjelmista valmistuvilla opiskelijoilla on. Taulukossa 1 on esitettynä MT21-tutkimuksen antamat kunkin maan tulosten keskiarvot.

Taulukko 1. MT21-tutkimuksen maakohtaiset keskiarvot eri matematiikkanäkemyksille (Schmidt, Blömeke & Tatto, 2011, s. 169).

	Formalismi-orientaatio	*Skeema-orientaatio*	*Prosessi-orientaatio*	*Sovellus-orientaatio*
Bulgaria	4,8	4,2	4,6	4,9
Etelä-Korea	4,7	4,3	4,9	4,3
Meksiko	4,1	3,5	5,4	5,5
Saksa	4,3	3,3	5,1	4,7
Taiwan	5,1	4,3	5,1	4,9
USA	4,0	4,0	5,2	5,2

Kaikissa kuudessa tutkitussa maassa dynaamisiksi luokitellut matematiikkanäkemykset (prosessi- ja sovellusorientaatioita) olivat vahvoja opiskelijoiden keskuudessa. Formalismi- ja skeemaorientaatioiden tasot olivat merkitsevästi matalampia. Meksikossa dynaamiset matematiikkanäkemykset olivat kaikkein voimakkaimpia. Sen sijaan Taiwanissa erityisesti formalismiorientaatio oli voimakas. Saksassa ja Meksikossa skeemaorientaation taso oli selvästi matalampi kuin muissa neljässä tutkimukseen osallistuneessa maassa. Lähes kaikki Taulukon 1 keskiarvot sijoittuvat käytetyn asteikon 1-6 yläpäähän.

Tutkimusmenetelmät

Tässä tutkimuksessa tavoitteena oli saada kokoava yleiskäsitys siitä, kuinka vahvoja eri orientaatiot aloittavien matematiikan opiskelijoiden keskuudessa ovat. Tarkoituksena oli käyttää valmiiksi kehitettyä ja testattua mittaria. Niinpä tutkimuksen aineistonkeruussa käytettiin MT21-tutkimuksen suomeksi käännettyä 20 väittämän kyselylomaketta. Tämän kyselylomakkeen valinta mahdollistaa myös tulosten vertaamisen Taulukossa 1 esitettyihin kansainvälisiin tuloksiin. Vastausasteikko oli myös samanlainen kuin MT21 tutkimuksessa.

Kysely toteutettiin Itä-Suomen yliopiston Joensuun kampuksella Fysiikan ja matematiikan laitoksen järjestämän Matematiikan peruskurssi a:n ensimmäisellä luennolla syksyllä 2011. Kyseinen kurssi on pakollinen kaikille matematiikan pää- ja sivuaineopiskelijoille. Kyselyyn vastattiin kirjallisesti ja itsenäisesti valvotuissa olosuhteissa. Kysely sisälsi matematiikkanäkemystestin lisäksi väittämiä matematiikan oppimisesta ja opettamisesta sekä todistamisesta ja perustelemisesta. Lisäksi mukana oli viisi avointa kysymystä näihin teemoihin liittyen. Taustatietoina opiskelijoilta kysyttiin mm. pääainetta, suuntautumisvaihtoehtoa sekä tietoja lukiossa suoritetuista matematiikan opinnoista. Vastausaikaa kyselyyn kokonaisuudessaan oli käytettävissä 60 minuuttia. Tässä artikkelissa käsitellään ainoastaan matematiikkanäkemystestin tuloksia.

Kyselyyn vastasi yhteensä 97 opiskelijaa, joista 38 oli matematiikan pääaineopiskelijoita. Vastanneista matematiikan pääaineopiskelijoista 19 tavoitteena on valmistua opettajaksi. Loput joko ajattelivat valita matemaatikon suuntautumisvaihtoehdon tai olivat vielä epävarmoja suuntautumisvaihtoehdostaan. Kaikki matematiikan pääaineopiskelijat olivat käyneet suomalaisen lukion ja suorittaneet matematiikasta pitkän oppimäärän. Yhtä lukuun ottamatta kaikki olivat myös suorittaneet ylioppilaskirjoituksissa matematiikan pitkän oppimäärän kokeen. Sivuaineopiskelijoista 13 aikoi opettajiksi pääaineena fysiikka tai kemia. Heillä matematiikka tulee olemaan todennäköinen sivuaine. Mukana oli myös 12 luokanopettajaopiskelijaa. Muut sivuaineopiskelijat olivat pääasiassa fysiikan, kemian ja tietojenkäsittelytieteen pääaineopiskelijoita. Nämä opiskelijat joko eivät aikoneet opettajiksi tai olivat epävarmoja suuntautumisvaihtoehdostaan.

Tulokset

Taulukosta 2 havaitaan, että eri orientaatiot saivat melko tasaisen vahvaa kannatusta opiskelijoiden keskuudessa. Kuten MT21-tutkimuksessakin, keskiarvot sijoittuivat asteikon yläpäähän. Sovellus-orientaation kohdalla hajonta oli kaikkein suurinta. Eri näkemyksiä kuvaavat tunnusluvut eivät välttämättä ole suoraan verrattavissa toisiinsa.

Taulukko 2. Matematiikan pää- ja sivuaineopiskelijoiden eri matematiikkanäkemyksiä kuvaavien tunnuslukujen keskiarvot ja keskihajonnat.

Koulutusohjelma	*Formalismi-orientaatio*	*Skeema-orientaatio*	*Prosessi-orientaatio*	*Sovellus-orientaatio*
Matematiikan aineenopettaja (n=19)	4,48 (0,84)	4,43 (0,46)	4,63 (0,67)	4,66 (1,01)
Matematiikka muut (n=19)	4,71 (0,84)	4,13 (0,89)	4,62 (0,81)	4,61 (1,05)
Fysiikan tai kemian aineenopettaja (n=13)	4,82 (0,70)	4,58 (0,54)	3,91 (0,51)	4,52 (0,91)
Luokanopettaja (n=12)	4,45 (0,62)	4,54 (0,57)	4,24 (0,75)	4,85 (0,53)
Muut (n=34)	4,63 (0,61)	4,51 (0,59)	4,35 (0,76)	4,69 (0,78)
Kaikki (n=97)	4,62 (0,72)	4,43 (0,64)	4,38 (0,74)	4,66 (0,87)

Eri orientaatiot saivat melko tasaisen vahvaa kannatusta. Kuten MT21-tutkimuksessakin, keskiarvot sijoittuivat asteikon yläpäähän. Sovellus-orientaation kohdalla hajonta oli kaikkein suurinta. Eri näkemyksiä kuvaavat tunnusluvut eivät välttämättä ole suoraan verrattavissa toisiinsa. Eri koulutusohjelmien välisiä eroja tarkasteltiin soveltaen Kruskal-Wallisin yksisuuntaista varianssianalyysiä. Ainoastaan prosessiorientaation kohdalla erot osoittautuivat tilastollisesti merkitseviksi ($p=.023$). Verrattaessa edelleen Mann-Whitneyn U-testillä matematiikan pääaineopiskelijoita sivuaineopiskelijoihin havaittiin, että matematiikan pääaineopiskelijoiden keskuudessa prosessiorientaatio oli merkitsevästi voimakkaampaa kuin sivuaineopiskelijoilla ($p=.006$). Huomionarvoista on erityisesti fysiikan tai kemian aineenopettajaopiskelijoiden matala prosessiorientaation taso. Sen sijaan verrattaessa opettajaksi aikovia opiskelijoita muihin opiskelijoihin tilastollisesti merkitsevää eroa ei löydetty.

Itä-Suomen yliopiston aloittavien opiskelijoiden keskuudessa skeemaorientaation kannatus näyttäisi olevan keskimäärin vahvempaa ja vastaavasti prosessiorientaation heikompaa kuin MT21-tutkimukseen osallistuneiden maiden opintojen loppuvaiheessa olevien opiskelijoiden keskuudessa. Erityisesti tutkimukseen osallistuneiden matematiikan sivuaineopiskelijoiden prosessiorientaation taso oli selvästi MT21-tutkimuksesta saatuja arvoja matalampaa. Formalismiorientaation kohdalla Itä-Suomen yliopiston opiskelijat eivät sijoittuneet kumpaankaan ääripäähän verrattaessa MT21-tutkimuksen tuloksiin. Sovellusorientaation kannatus oli ainoastaan Etelä-Koreassa matalampaa kuin Suomessa.

Tutkiessaan opintojaan aloittavien saksalaisten matematiikan opettajaopiskelijoiden uskomuksia matematiikasta Blömeke, Müller, Felbrich ja Kaiser (2008, viitattu artikkelissa Felbrich, Müller & Blömeke, 2008) käyttivät 13 väittämän testiä, joka oli edelleen lyhennetty versio MT21-tutkimuksessa käytetystä testistä. Näistä väittämistä kolme edusti formalismiorientaatiota, kolme skeemaorientaatiota, neljä prosessiorientaatiota ja kolme sovellusorientaatiota. Laskimme myös tämän tutkimuksen aineistosta tutkimukseen osallistuneille opiskelijoille eri matematiikkanäkemysten tunnusluvut käyttäen ainoastaan näitä 13 väittämää. Näin saimme yhdenmukaisen mittarin saksalaisen tutkimuksen kanssa. 13 väittämän testiin perustuvat tunnusluvut ja vertailu saksalaisen tutkimuksen tuloksiin on esitetty Taulukossa 3.

Taulukko 3. Itä-Suomen yliopiston matematiikan opintojaan aloittavien opiskelijoiden ja saksalaisten opintojensa alkuvaiheessa olevien opettajaopiskelijoiden matematiikkanäkemysten vertailu perustuen 13 väittämän testiin. Taulukossa on esitetty eri näkemyksiä kuvaavien tunnuslukujen keskiarvot ja keskihajonnat.

	Formalismi-orientaatio	*Skeema-orientaatio*	*Prosessi-orientaatio*	*Sovellus-orientaatio*
Suomi, matematiikan opettajan ko (n=19)	4,5 (0,93)	5,0 (0,52)	4,6 (0,77)	4,5 (1,21)
Suomi, fysiikan tai kemian opettajan ko (n=13)	4,7 (0,72)	5,0 (0,57)	4,1 (0,62)	4,6 (0,93)
Suomi, luokanopettajan ko (n=12)	4,6 (0,81)	4,9 (0,61)	4,1 (0,79)	4,8 (0,52)
Suomi, matematiikka, ei opettajan ko (n=19)	4,8 (0,96)	4,6 (0,91)	4,7 (0,88)	4,6 (1,14)
Suomi, muut (n=34)	4,7 (0,75)	4,9 (0,66)	4,3 (0,87)	4,8 (0,78)
Suomi, kaikki (n=97)	4,7 (0,82)	4,9 (0,68)	4,4 (0,83)	4,7 (0,94)
Saksa, matematiikan opettajan ko (n=368)	4,1 (0,98)	3,9 (0,99)	4,8 (0,82)	4,5 (1,02)

Taulukosta 3 havaitaan, että Itä-Suomen yliopiston matematiikan opintojaan aloittavien opiskelijoiden keskuudessa skeemaorientaation kannatus oli huomattavasti voimakkaampaa kuin saksalaisten opintojensa alkuvaiheessa olevien matematiikan opettajaopiskelijoiden keskuudessa. Myös formalismiorientaation kannatus oli voimakkaampaa suomalaisten kuin saksalaisten keskuudessa, mutta sen sijaan prosessiorientaation kannatus oli jonkun verran matalampaa. Sovellusorientaatiossa ei ollut suurta eroa. Niinpä vaikuttaa siltä, että matematiikan opintojen alkuvaiheessa suomalaisilla opiskelijoilla on staattisempi kuva matematiikasta kuin saksalaisilla opiskelijoilla.

Johtopäätökset

Tämän tutkimuksen tulosten mukaan Itä-Suomen yliopistossa matematiikan opintojaan aloittavien yliopisto-opiskelijoiden keskuudessa skeemaorientaatio vaikutti olevan voimakkaampaa ja prosessiorientaatio heikompaa kuin aiemmin muissa maissa opettajaopiskelijoille tehdyissä vastaavissa tutkimuksissa. Mielenkiintoiseksi tämän tuloksen tekee se, että skeemaorientaatio viittaa vahvasti Ernestin (1989) määrittelemään instrumentaaliseen matematiikkanäkemykseen ja prosessiorientaatio puolestaan ongelmanratkaisunäkemykseen. Hieman yksinkertaistaen voidaan sanoa, että mikäli opettajankoulutuksen tavoitteena on kouluttaa nimenomaan konstruktivistisen oppimisnäkemyksen omaavia matematiikan opettajia, tulisi skeemaorientaation mukaiset uskomukset olla valmistuvilla opettajilla heikkoja, ja prosessiorientaation puolestaan tulisi dominoida heidän ajatteluaan. Ero MT21-tutkimuksen tuloksiin voitaisiin selittää opettajankoulutuksen vaikutuksella: MT21-tutkimukseen osallistuneet opiskelijat olivat pääosin suorittaneet opettajankoulutukseen kuuluvat opintonsa. Kuitenkin myös verrattaessa tämän tutkimuksen tuloksia saksalaisten opintojaan aloittavien opiskelijoiden keskuudessa suoritettuun vastaavaan tutkimuksen tuloksiin ero erityisesti skeemaorientaation kohdalla vaikuttaa melko selvältä (vrt. Taulukko 3). Koulumatematiikalla on varsin merkittävä rooli yliopistossa opintojaan aloittavien opiskelijoiden matematiikkaan liittyvien uskomusten muodostumisessa. Tulokset herättävät kysymyksen siitä, että korostuvatko skeemaorientaation mukaiset näkemykset suomalaisessa koulumatematiikassa jotenkin erityisellä tavalla.

Prosessiorientaation mukaiset näkemykset olivat vahvimpia matematiikan pääaineopiskelijoiden keskuudessa. Sen sijaan aikomus suorittaa opettajan pedagogisia opintoja ei näyttänyt olevan erottava tekijä minkään näkemyksen suhteen. Pääainevalintaa voitaneen perustellusti pitää jonkinasteisena motivaation mittarina: on ymmärrettävää, että matematiikan pääaineekseen valinneet opiskelijat ovat enemmän kiinnostuneita matematiikasta itsenäisenä oppiaineena, kun taas monille sivuaineopiskelijoille matematiikka saattaa merkitä ennen kaikkea apuvälinettä, jota tarvitaan jonkun muun oppiaineen yhteydessä. Tämä selittäisi sen, että skeemaorientaatio, johon sisältyy matematiikan näkeminen taitojen ja tietojen ”työkalupakkina” (Törner, 1998), olisi voimakkaampaa nimenomaan sivuaineopiskelijoiden keskuudessa. Sen sijaan eroa prosessiorientaation suhteen tämä ei suoraan selitä. Skeema- ja prosessiorientaatioita voidaan kuitenkin jossain määrin pitää toistensa ”vastakohtina”: Felbrichin ym. (2008) tutkimuksessa niiden havaittiin korreloivan negatiivisesti merkitsevyystasolla $p < .05$ opintojaan aloittavien opiskelijoiden keskuudessa.

Blömeke ym. (2008, ks. myös Felbrich ym., 2008) vertasivat saksalaisten opintojen alkuvaiheessa olevien matematiikanopettajaopiskelijoiden näkemyksiä opintojen loppuvaiheessa olevien matematiikanopettajaopiskelijoiden näkemyksiin. He havaitsivat, että opintojen loppuvaiheessa olevilla opiskelijoilla erityisesti prosessi- mutta myös sovellusorientaation mukaiset uskomukset olivat voimakkaampia kuin opintojen alkuvaiheen opiskelijoilla. Sen sijaan skeemaorientaatio oli heikompi opintojen loppuvaiheessa olevilla opiskelijoilla. Formalismiorientaation suhteen ei havaittu eroa. Saksalaisten opiskelijoiden skeemaorientaatio näyttäisi siis heikentyvän ja prosessi- ja sovellusorientaatiot vahvistuvan opintojen aikana. Konstruktivistisesta oppimiskäsityksen näkökulmasta katsottuna tätä voidaan pitää suotuisana kehityksenä, ja olisi toivottavaa, että myös suomalaisella opettajankoulutuksella olisi vastaava vaikutus. Tämän tutkimuksen tulosten perusteella suomalaisten matematiikanopettajaopiskelijoiden lähtötaso opintojen alussa vaikuttaa tämän tavoitteen suhteen olevan kauempana kuin saksalaisten. Niinpä on tärkeää, että matematiikanopettajankoulutukseen sisältyvissä opinnoissa korostetaan matematiikan dynaamisuutta ja prosessiluonnetta.

Koulumatematiikkaa on usein pidetty mekaanisia laskutaitoja korostavana. Yliopistossa matematiikan opinnot vaativat vastaavasti selvästi enemmän itsenäistä ajattelua minkä voisi ajatella edistävän dynaamisten matematiikkanäkemysten syntymistä. Toisaalta perinteinen matematiikan opetus nojaa edelleen useissa yliopistoissa vahvasti matematiikan aksiomaattiseen perustaan ja formaalin todistamisen harjoitteluun, mikä voi osaltaan jopa vahvistaa sekä Ernestin (1989) luokittelussa esiintyviä instrumentaalista ja platonista matematiikkanäkemyksiä että myös Grigutschin ym. (1998) formalismi- ja skeemaorientaatioita. Tämä voi johtaa ristiriitaan, kun tarkastellaan perinteistä formaalia yliopistomatematiikan opetusta ja opettajankoulutuksen tavoitteita. Näennäisesti syntyvää ristiriitaa voitaneen lieventää matematiikan sisällöistä tinkimättä ottamalla käyttöön sellaisia opetusmenetelmiä, joissa tiedon omaksumisen prosessiluonne ja dynaamisuus korostuvat. Aksioomien ja formaalien todistustekniikoiden ulkoa oppimisen sijaan painopistettä voidaan oppijakeskeisillä opetusmenetelmillä siirtää ymmärtämistä ja ajattelua korostavaan suuntaan.

Itä-Suomen yliopistossa aloitetaan syksyllä 2012 laaja matematiikan opetussuunnitelman uudistusprosessi, joka pitää sisällään sekä sisällön ydinainesanalyysin että myös entistä oppijakeskeisempien opetusmenetelmien käyttöönoton. Opetussuunnitelmatyö vaikuttaa opiskelijoiden osaamiseen monilla eri tavoin ja yhdeksi seurannan osa-alueeksi olemme valinneet tässä artikkelissa esiintyvät opiskelijoiden näkemykset. Raportoitua tutkimusta jatketaan pitkittäistutkimuksena siten, että siihen nyt osallistuneiden opiskelijoiden näkemyksiä mitataan opintojen eri vaiheissa. Tutkimusta täydennetään myös laadullisella aineistolla.

Lähteet

Beswick, K. (2005). The beliefs/practice connection in broadly defined contexts. *Mathematics Education Research Journal, 17*(2), 39–68.

Blömeke, S., Müller, C., Felbrich, A., & Kaiser, G. (2008). Entwicklung des erziehungswissenschaftlichen Wissens und der professionellen Überzeugungen in der Lehrerausbildung. Teoksessa S. Blömeke, G. Kaiser & R. Lehmann (Toim.), *Professionelle Kompetenz angehender Lehrerinnen und Lehrer. Wissen, Überzeugungen und Lerngelegenheiten deutscher Mathematik-Studierender und –Referendare-erste Ergebnisse zur Wirksamkeit der Lehrerausbildung* (ss. 303–326). Münster: Waxmann.

Borko, H., & Putnam, R. (1996). Learning to teach. Teoksessa D. Berliner & R. Calfee (Toim.), *Handbook of educational psychology* (ss. 673–708). New York, NY: Macmillan.

Brown, J. R. (2005). Naturalism, pictures, and platonic intuitions. Teoksessa P. Mancosu, K. F. Jørgensen & S. A. Pedersen (Toim.), *Visualization, explanation and reasoning styles in mathematics* (ss. 57–73). Dordrecht: Springer.

Chinn, C. A., & Brewer, W. F. (1998). Theories of knowledge acquisition. Teoksessa B. J. Fraser & K. G. Tobin (Toim.), *International handbook of science education, 1*(1), (ss. 197–113). London: Kluwer Academic Publishers.

Ernest, P. (1989). The impact of beliefs on the teaching of mathematics. Teoksessa P. Ernest (Toim.), *Mathematics teaching: the state of the art* (ss. 249–253). New York, NY: Falmer.

Ertmer, P. A. (2005). Teacher pedagogical beliefs: the final frontier in our quest for technology integration? *ETR&D 53*(4), 25–39.

Felbrich, A., Müller, C., & Blömeke, S. (2008). Epistemological beliefs concerning the nature of mathematics among teacher educators and teacher education students in mathematics. *ZDM Mathematics Education, 40*, 763–776.

Foss, D. H., & Kleinsasser, R. C. (1996). Preservice elementary teachers' views of pedagogical and mathematical content knowledge. *Teaching & Teacher Education, 12*(4), 429–442.

Furinghetti, F., & Pehkonen, E. (2003). Rethinking characterizations of beliefs. Teoksessa G. C. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (Toim.), *Beliefs: a hidden variable in mathematics education?* (ss. 39–57). Secaurus, NJ, USA: Kluwer Academic Publisher.

Gill, M. G., Ashton, P. T., & Algina, J. (2004). Changing preservice teachers' epistemological beliefs about teaching and learning in mathematics: An intervention study. *Contemporary Educational Psychology, 29*, 164–185.

Grigutsch, S., Ratz, U., & Törner, G. (1998). Einstellungen gegenüber Mathematik bei Mathematiklehrern. *Journal für Mathematikdidaktik, 19*, 3–45.

Handal, B. (2002). Teachers' mathematical beliefs and gender, faculty position, teaching socio-economic area, teaching experience and academic qualifications. Esitelmä konferenssissa *Self-Concept Research: Driving International Research Agendas,* Sydney, 6–8 August, 2002.

Handal, B. (2003). Teachers' mathematical beliefs: a review. *The Mathematics Educator, 13*(2), 47–57.

Hawkey, K. (1996). Image and the pressure to conform in learning to teach. *Teaching & Teacher Education, 12*(1), 99–108.

Kagan, D. M. (1992). Professional growth among preservice and beginning teachers. *Review of Educational Research*, *62*(2), 129–169.

Kaiser, G., Schwarz, B., & Krackowitz, S. (2007). The role of beliefs on future teacher's professional knowledge. *The Montana Mathematics Enthusiast, Monograph 3,* 99–116.

Korthagen, F. A. J. (1992). Two modes of reflection. *Teaching and Teacher Education, 9*(3), 317–326.

Leatham, K. R. (2006). Viewing mathematics teachers' beliefs as sensible systems. *Journal of Mathematics Teacher Education, 9*, 91–102.

McGinnis, J.R., Shama, G., Graeber, A., & Watanabe, T. (1997). The assessment of elementary/middle level candidates' attitudes and beliefs about the nature of and the teaching of mathematics and science. Esitelmä konferenssissa *American Educational Research Association,* Chicago, IL, March, 1997.

Nisbert, S., & Warren, E. (2000). Primary school teachers' beliefs relating to mathematics, teaching and assessing mathematics and factors that influence these beliefs. *Mathematics Teacher Education and Development, 2,* 34–47.

Pajares, M. F. (1992). Teachers' beliefs and educational research: cleaning up a messy construct. *Review of Educational Research, 62*(3), 307–332.

Pehkonen, E. (2004). State-of-the-art in mathematical beliefs research. Teoksessa M. Niss (Toim.), *Proceedings of the 10th International Congress on Mathematical Education.* Roskilde, Denmark: Roskilde University.

Prescott, A., & Cavanagh, M. (2008). A sociocultural perspective on the first year of teaching secondary mathematics. Teoksessa O. Figueras, J. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sepúlveda (Toim.), *Proceedings of the 32nd Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4* (ss. 129–136). Morelia, México: Program Committee.

Rösken, B., Pepin, B., & Törner, G. (2011). Beliefs and beyond: affect and the teaching and learning of mathematics. *ZDM Mathematics Education, 43*, 451–455.

Schmidt, W. H., Blömeke, S., & Tatto, M. T. (2011). *Teacher education matters: a study of middle school mathematics teacher preparation in six countries.* New York, NY: Teacher College Press.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. Teoksessa D. Grouws (Toim.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (ss. 334–370). New York, NY: MacMillan.

Schoenfeld, A. H. (1998). Toward a theory of teaching-in-context. *Issues in Education, 4*(1)*,* 1–94.

Simmons, P. E., Emery, A., Carter, T. et al. (1999). Beginning teachers: beliefs and classroom actions. *Journal of Research in Science Teaching, 36*(8), 930–954.

Staub, F. C., & Stern E. (2002). The nature of teachers' pedagogical content beliefs matters for students' achievement gains: quasi-experimental evidence from elementary mathematics. *Journal of Educational Psychology, 94*(2), 344–355.

Stipek, D. J., Givvin, K. B., Salmon, J. M., & MacGyvers, V. L. (2001). Teachers' beliefs and practices related to mathematics instruction. *Teaching and Teacher Education, 17*, 213–226.

Törner, G. (1998). Self-estimating teachers' views on mathematics teaching – modifying Dionne's approach. Teoksessa S. Berenson, K. Dawkins, M. Blanton, W. Coulombe, J. Kolb, K. Norwood & L. Stiff (Toim.), *Proceedings of the Twentieth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2,* (ss. 627–634). Columbus, OH, USA.

Weinert, F. E. (2001). Concept of competence: A conceptual clarification. Teoksessa D. S. Rychen & L. H. Salganik (Toim.), *Defining and selecting key competencies* (ss. 45–66). Göttingen: Hogrefe.

OPPILAS, OPISKELU JA OPPIMINEN

Developing an instrument to measure students' situational motivation

JUSSI HELAAKOSKI AND JOUNI VIIRI

jussi.helaakoski@jyu.fi
University of Jyväskylä, Department of Physics

Abstract

Students' affective characteristics, such as motivation, have correlated significantly with content-related performance in large-scale assessments such as PISA. However, most educational research deals with considerably more limited subject domains than these large international assessments. A different approach to investigating motivation is therefore clearly needed. Our goal has been to develop an instrument to assess students' situational motivation at the lesson level. The instrument is based on two influential theories on motivation: self-determination theory and expectancy-value theory. In this article, we first provide a brief overview of our theoretical framework of motivation. We then describe the development process of the instrument and present the pilot study data on the internal consistency of the scales as well as the overall factor structure of the instrument. Finally, the results from the viewpoint of the theoretical background and implications for further research are discussed.

Keywords

motivation, self-determination theory, expectancy-value theory, attitude

Introduction

Motivation is an essential concept in discussing human behaviour. When we do things, our motivation determines what level of resources we dedicate to the task at hand. Motivation is, therefore, a crucial concept with regard to learning in a school setting, and the links between student achievement and motivation have been demonstrated, for example, by large-scale international assessments (e.g., OECD, 2007; Reinikainen, 2007). Despite the intuitive clarity of the concept, a precise definition of motivation is, however, difficult to provide. In a broad sense, motivation can be described in terms of two key aspects: direction and intensity (Ruohotie, 1998). The first aspect relates to the directions in which our attention is naturally drawn or in which we most readily invest our attention. Some people have a key interest in cars, while others are drawn to social media, for example. The latter aspect relates to the qualitative characteristics of our actions. Whenever we engage in an activity, we do so at varying levels of investment, ranging from the use of our maximum attention and resources, to minimal use of our potential.

Motivation is an intuitively clear concept, and yet there are numerous different theories of motivation (see e.g., Alexander, 2000), several of which are backed by empirical evidence. The researcher is faced with the difficulty of choosing the theory or theories with which to establish the framework of the study. There has long been a call for a more universal definition and operationalisation of motivation (e.g., Murphy & Alexander, 2000). There is, therefore, a clear need to combine the numerous existing motivational theories into a more global theoretical framework.

In our previous research we found that students' positive or negative attitude (Ajzen, 2001) towards introductory physics lab work could be explained both qualitatively and quantitatively by using an integrated model of two well-known motivational theories: self-determination theory (e.g. Deci & Ryan, 2000) and expectancy-value theory (e.g. Wigfield & Eccles, 2000). (Helaakoski, 2007) Since these theories are based on relatively different views of motivation, the finding supports the notion that it is possible to combine different motivational theories into broader motivational frameworks, as called for by Murphy and Alexander (2000). However, in our previous study, we used relatively few items in the motivational instrument and, therefore, it was neither possible to carry out detailed statistical analysis of the quality of the instrument nor to test the hypothesized model using confirmatory factor analysis. Consequently, the main aim of this study is to develop a reliable instrument to assess student motivation by using the two above-mentioned motivational theories, which could be used to study further the possible connections between self-determination theory and expectancy-value theory.

Another typical aspect of motivational research in addition to several existing theoretical backgrounds is that motivation is usually considered and investigated as a global construct related to a specific school subject (e.g. Nurmi & Aunola, 2005). This is inconsistent with the fact that most educational research deals with smaller instructional units consisting of one or a few lessons. In such research, typical motivational instruments cannot be used as such, since there is no guarantee that motivation towards a single topic within a specific school subject would be the same as towards that school subject in general. On the other hand, there is, naturally, a strong connection between these two different levels of motivation.

Vallerand (1997) argued that more general levels of motivation have an impact on situational motivation (top-down effect) and that also the reverse holds true, especially in larger time scales (bottom-up effect). There is some evidence to support this kind of hierarchical model of motivation (see e.g., Guay et al., 2003).

We are currently engaged in a research project examining lower secondary level students' learning of a specific physics topic: the connection between electrical energy and power (Neumann et al., 2010). Double lessons on this topic were videotaped in more than 100 classes in Finland, Germany, and Switzerland. Afterwards, students' motivation towards the videotaped lessons was investigated in order to control its affect on student learning gains. We decided, therefore, to integrate our earlier results and the ideas of existing motivational theories and their combination, as discussed above, into this new research project with the explicit aim of developing an instrument to study students' situational (lesson-level) motivation, using self-determination theory and expectancy-value theory as the theoretical frameworks.

In the following, we present a brief overview of the main features of self-determination theory and expectancy-value theory. We then discuss the potential for and possible concerns of combining these theories into a single instrument and the use of the theories in studying situational motivation. The methods section provides an overview of the study sample and the instrument development process. After presenting the results of the statistical analysis of the developed instrument, we summarize the main findings in the discussion together with suggestions for further studies.

Self-determination theory

Self-determination theory has emerged as a counterforce to behaviourist ideas in the late 1960s and early 1970s and has been developed thereafter by numerous survey studies and experimental laboratory studies. In the early phase, much of the work in self-determination theory was done in educational settings (see Ryan & Deci, 2000, for a review).

The key concepts of self-determination theory are the three basic needs – competence, autonomy, and relatedness – along with the continuum of self-determination. The three basic needs are considered to be universal, so that everybody, irrespective of culture or life stage, needs to feel (a) competent in whatever they are doing, (b) that they have personal agency (autonomous choice over their actions), and (c) connected to others. When these three conditions are fulfilled a person can be motivated to a high degree of 'quality'. The importance of these three basic needs in an overall motivational sequence has been shown in later studies (e.g. Grouzet et al., 2004) (Figure 1).

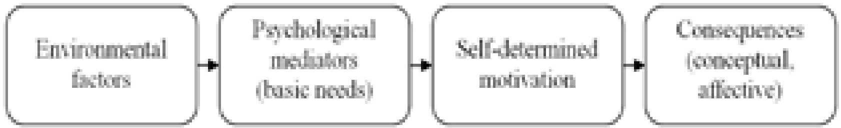


Figure 1. Motivational sequence based on self-determination theory (Grouzet et al., 2004).

In self-determination theory, motivation is not viewed as a one-dimensional concept that may or may not exist. Rather, self-determined motivation is one of the central concepts of self-determination theory (e.g. Ryan & Deci, 2000). More specifically, this implies that motivation consists of multiple aspects as opposed to being a single global concept. It is typically referred as the 'why of behaviour' (Deci & Ryan, 2000). According to self-determination theory, a person can be motivated in different ways along the continuum of self-determination (Figure 2).

At the *amotivation* level, the lowest level of motivation, a person is not motivated at all and is likely to discontinue the activity if possible (*'I don't even know why I'm doing this'*). The next motivational level is *external regulation*, where a person does the activity due to external reward or coercion (*'I'm doing this just for the payback / just to keep out of trouble'*). The third kind of motivation is *introjected regulation* in which the activity is done in order to avoid guilt or to feel proud about something (*'I'm doing this because otherwise I'd feel bad about myself' / 'I'm doing this because I want to look good'*). The fourth type of motivation is *identified regulation*. In this case, an activity is done because it is seen to be personally important (*'I'm doing this because it is useful / important to me'*). The fifth type of motivation is *intrinsic motivation*, in which the pleasure of the activity is the main reason for engaging in it (*'I'm doing this because it's fun'*).

The different qualities of motivation are typically hypothesized as being arranged on a continuum as shown in Figure 2, as presented, for example, by Ryan & Connell (1989). More important with respect to the present project, however, is the impact that these above-mentioned types of motivation have on student learning, as has been noted by number of studies (e.g. Ryan & Connell, 1989). While a class of students may be observed as being equally motivated, more externally regulated types of motivation are nevertheless associated with poorer learning

outcomes and, in particular, faster unlearning of learned material (Grolnick & Ryan, 1987).

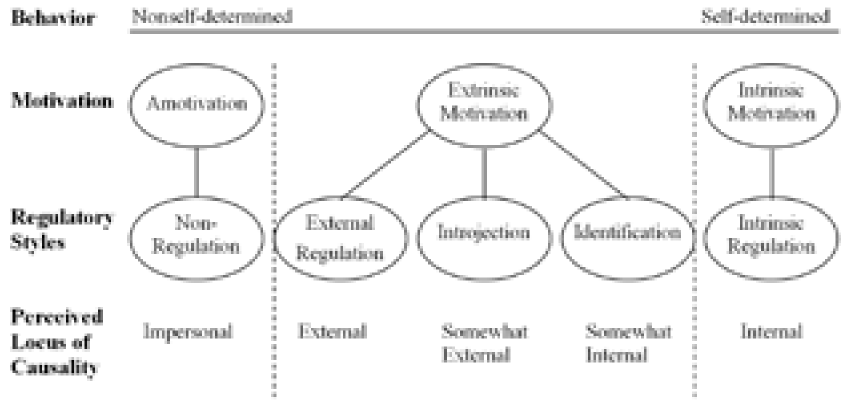


Figure 2. The self-determination continuum showing different types of motivation (modified from Ryan & Deci, 2000, p. 61).

Expectancy-value theory

Expectancy-value theory has its roots in the field of achievement motivation research, which can be traced back to at least the 1950s. The modern version of the theory (e.g. Wigfield & Eccles, 2000; Eccles & Wigfield, 2002) has incorporated into itself other concepts, so that today expectancy-value theory is a mixture of self-efficacy beliefs, achievement motives (attainment values), and specific values related to the activity under examination.

In overall, the expectancy-value theory framework includes a large set of aspects, for example the cultural milieu. In Figure 3, only those aspects of the model which are directly related to action-related choices are presented. People's choices and performance are affected by ability beliefs and expectations of success (referred to here as efficacy beliefs) as well as subjective task values. Ability beliefs are comprised of the individual's perception of his or her current competence in the activity (e.g. *'How good are you at physics?'*[1]). Expectancies refer to the same, but in the future perspective (e.g. *'How well do you expect to do in physics this year?'*). These two concepts are empirically highly correlating and theoretically very similar to those used in self-efficacy theory (Bandura, 1993).

[1] This and the following sample items are modified from Wigfield and Eccles (2000, p. 70).

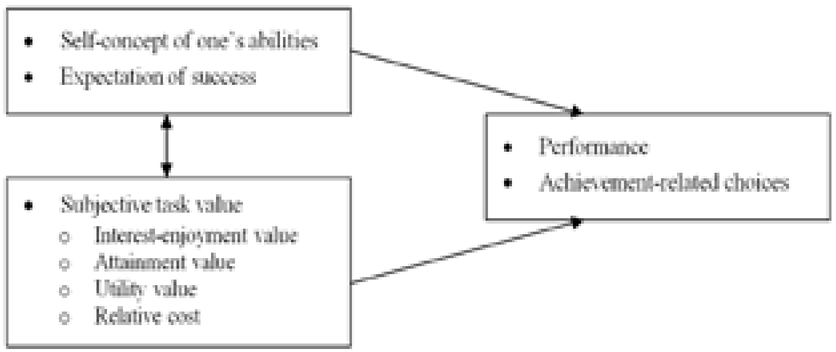


Figure 3. Simplified model of motivational features in expectancy-value theory (modified from Eccles, 2005, p. 106).

Subjective task values specifically include the values of interest-enjoyment, attainment, utility, and the concept of relative cost (Eccles, 2005). Interest-enjoyment value represents the enjoyment one gains from doing the activity (e.g. *'How much do you like doing physics?'*). Attainment value refers to the personal importance placed on doing well at an activity (e.g. *'For me, being good at physics is not at all important / very important'*). Utility value, or usefulness, refers to how a task an individual's future plans (e.g. *'Compared to most of your other activities, how useful is what you learn in physics?'*). Cost, for its part, refers to how the activity limits access to other (pleasant) activities, the effort needed to accomplish the activity, and the emotional costs caused by the activity. The concept of cost has not typically been operationalised in previous research, although it is an integral part of the theory.

The main results of expectancy-value research with regard to predicting student performance are that ability beliefs and expectancy of success are the strongest predictors of subsequent grades – even stronger than previous grades or achievement values (Wigfield & Eccles, 2000). On the other hand, subjective task values are the strongest predictors of students' later subject choices (ibid.).

Discussion about the theoretical framework of the study

It is true that self-determination theory and expectancy-value theory have very different approaches to human motivation. When two relatively different theories are planned to be used in a single instrument, as in our study, one might doubt whether this can be done without compromising the validity of the instrument

and, furthermore, whether this kind of approach would give any additional value in comparison to merely using one theory. The former is based on the view that basic needs form the starting point of the motivational state, whereas the latter has a more cognitive viewpoint based on conscious valuation of different aspects of the activity. Partly because of this difference of approach, the theories can, in our opinion, be seen as complementing each other rather than conflicting or contradicting. Additionally, according to our previous preliminary findings (Helaakoski, 2007), it is possible and plausible to make a model in which students' attitude is connected to the different motivational beliefs of expectancy-value theory and the strength of the connections is moderated by the different regulatory styles from self-determination theory. If these findings can be replicated in further studies, important links between so-called affective (attitude), conative (basic needs and motivational states) and cognitive (conscious beliefs and values) aspects of human consciousness (see Snow et al., 1996) would be established.

Another possible point of concern is the use of these two motivational theories in the context of situational motivation. The differentiation between global and situational aspects of mental constructs is applied probably most widely in the context of interest research (see, e.g., Krapp, 2002). Additionally, also in self-determination research there is a relatively strong background of using the theory at several different levels of generality. Vallerand (1997) made an explicit theoretical formulation for applying different levels of generality, situational, contextual and global, in self-determination theory, and these ideas also have experimental support (see Guay et al., 2003). On the other hand, in expectancy-value theory there is no explicit discussion on using the ideas at different levels of generality. The theory is typically used in a relatively broad sense at the level of school subjects, such as reading or mathematics (Nurmi & Aunola, 2005). However, in the authors' opinion, there is nothing that would explicitly prevent the use of expectancy-value theory in more situational contexts, such as a lesson related to a certain topic, as in our study. Furthermore, Eccles (2005) stated that an individual's 'beliefs are shaped over time by the individual's experiences with the subject matter and by his or her subjective interpretation of those experiences' (p. 106), which is a corresponding idea to that used in self-determination theory regarding different generality levels and their interactions, as discussed above.

Sample and methods

Based on the theoretical background, we constructed a questionnaire which includes all five motivational characteristics from self-determination theory (see Figure 2) as well as certain aspects from expectancy-value theory, namely, interest-enjoyment value, utility value, and relative cost. Additionally, we included items related to students' ability beliefs. However, since expectancy-value theory is focused towards broader level conceptions of ability, and our focus is at a situational level, our items relate theoretically more closely to self-efficacy theory (e.g. Bandura, 1993) than expectancy-value theory. Moreover, the items are formulated to inquire more about students' beliefs than their values. Therefore, although the expectancy-value theory was used as a theoretical framework, we call the corresponding scales interest beliefs (cf. interest-enjoyment value), utility beliefs (cf. utility value), cost beliefs (cf. relative cost), and efficacy beliefs (cf. ability beliefs and expectation of success). Finally, we also included in our instruments items on attitude in accordance with the theoretical framework discussed in the introduction. Attitude, in its broadest sense, describes the orientation (positive or negative) of an individual towards different psychological objects (Ajzen, 2001). Appendix 1 presents sample items from the different scales of the questionnaire.

We used items from existing instruments as a starting point for our instrument. These items were then compared to the theoretical background. If certain theoretical aspects were not addressed sufficiently by the existing items, additional items were created for these aspects. A total of 25 items relating to self-determination theory were included, of which 12 items were adapted and modified from the Academic Self-Regulation Questionnaire (SRQ-A; Ryan & Connell, 1989), five items from the Situational Motivation Scale (Guay et al., 2000), and four items from the student questionnaire of the IPN Video study (Rimmele et al., 2005). Four items were self-formulated. A total of 20 items relating to expectancy-value theory were included, of which seven were adapted and modified from Rimmele et al. (2005) and one from Guay et al. (2000). An additional 12 items, together with all five items related to attitude, were formulated by the authors.

Two pilot tests of the developed questionnaire on student situational motivation were conducted. In the first pilot test a 7-point Likert scale was used for the motivational items. Attitude was investigated by using identical items on a 7-point Likert scale on one hand and with semantic differentials on the other. The questionnaire included four pages and 55 items in total. Items related to self-determination theory were presented on one page, items related to expectancy-value theory and attitude together on one page, and items on attitude formulated with semantic differentials on the last page of the questionnaire. The items were arranged so that the items belonging to a specific scale were not placed next to each other. The first page of the questionnaire consisted of instructions to students and background questions about themselves and their school. The students filled out the questionnaire anonymously. The sample for the first pilot test included 328 students (153 boys, 175 girls), of which 192 were from grade 9 and 136 from grade 8. The student samples were taken from five schools, mostly located in Central

Finland. In some classes the corresponding author carried out the data collection. In others the questionnaires were posted to the teachers, who gave them to their students 10 minutes before the end of a physics or chemistry lesson. The completed questionnaires were then returned by mail.

Based on the results of the first pilot test (see Results), we modified the instrument and carried out another pilot test. In the second pilot test we changed the items to a 6-point Likert scale and shortened the questionnaire from 55 to 38 items. The organisation of the instrument was otherwise similar to the first pilot test. The sample of the second pilot test was 195 students (90 boys and 103 girls[2]), of which 160 were from grade 8 and 35 from grade 9. Data collection was conducted in a similar way to the first pilot test. Table 1 shows the scales of the motivational instrument together with the number of items per scale in both the first and second pilot test.

Table 1. Scales included in the new instrument for measuring situational motivation and the number of items per scale in the first and second pilot tests.

Theoretical framework	*Scale*	*Amount of items (pilot test 1)*	*Amount of items (pilot test 2)*
Self-determination theory	-amotivation	5	4
	-external regulation	5	4
	- introjected regulation	5	6
	- identified regulation	5	3
	- intrinsic motivation	5	3
Expectancy-value theory	-cost beliefs	5	4
	-efficacy beliefs	5	4
	-utility beliefs	5	4
	-interest beliefs	5	3
Attitude	(with Likert-scaled items)	5	3
	(with semantic differentials)	5	-

[2] Data on the gender of two students was missing.

Results

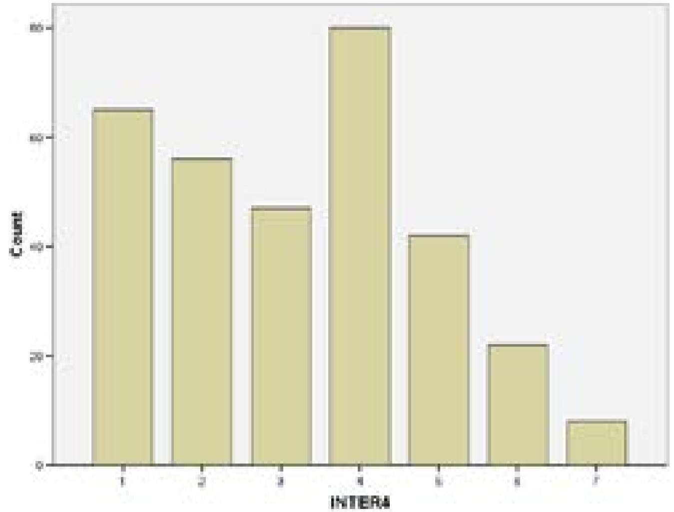
The data from both of the pilot tests was coded into SPSS for further analysis. Multiple methods were used to analyse the quality of the different scales and individual items of the questionnaire. First, we analysed the bar charts of the individual items to determine the overall distribution of student responses. Secondly, we calculated Cronbach's alphas for all of the scales in order to determine their internal consistency. Next, we carried out an exploratory factor analysis to determine whether the theoretical constructs can be identified in the collected data. Finally, we also used Rasch modelling (Bond & Fox, 2001) with Winsteps[3] software to analyse the individual items of each scale in more detail. In addition to statistical methods, we also revisited the theoretical background when interpreting the results and drew on aspects of the theoretical framework when deciding how to further develop problematic items.

Results of the first pilot test

The bar charts of the first pilot test data revealed that some of the items needed to be modified or removed. Figure 4 illustrates two examples of problematic items. Firstly, in Figure 4a the students have tended to choose the neutral point more frequently than expected. The same occurred also with certain other items. As a result, we decided to change the scale to a 6-point Likert scale in the second pilot test. Secondly, with certain other items the opposite occurred: they were agreed or disagreed with strongly by the vast majority of students (see Figure 4b). Those items were either removed from the instrument or reformulated.

The problem illustrated in Figure 4a could also be identified by using the results of the Rasch modelling. Figure 5 shows on the horizontal axis the overall interest of the students (based on all 5 items) and on the vertical axis the scale of the individual item. The smooth curve represents the expected score for students having a certain measure of overall interest belief. The data points represent the actual responses of groups of students having approximately the same level of interest belief. The data shows that some student groups having rather low levels of interest belief have chosen the neutral category for this individual item. Moreover, the figure also clearly shows the tendency of the students near to the expected neutral point to choose this point somewhat more often than expected. Finally, at the upper end of the expected curve there is a rather strong deviation between expected and observed interest belief. Based on these problems, this and some other items were removed from the instrument.

[3] http://www.winsteps.com



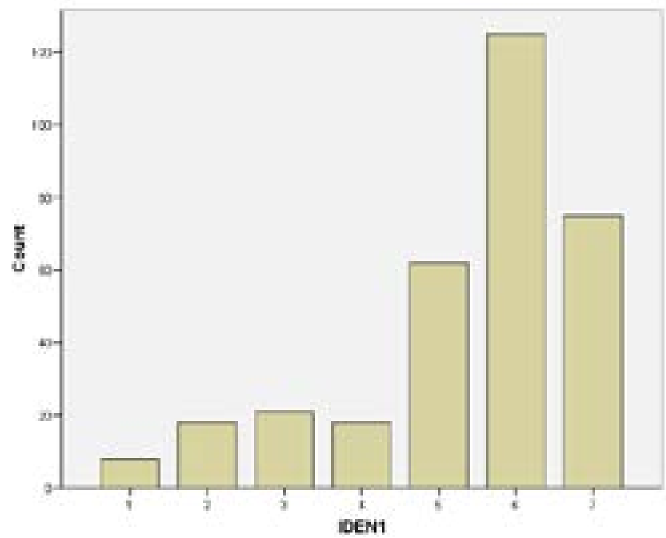


Figure 4. a) In item INTER4 students have chosen the neutral point more often than would have been expected. b) In item IDEN1 students have agreed very strongly with the item.

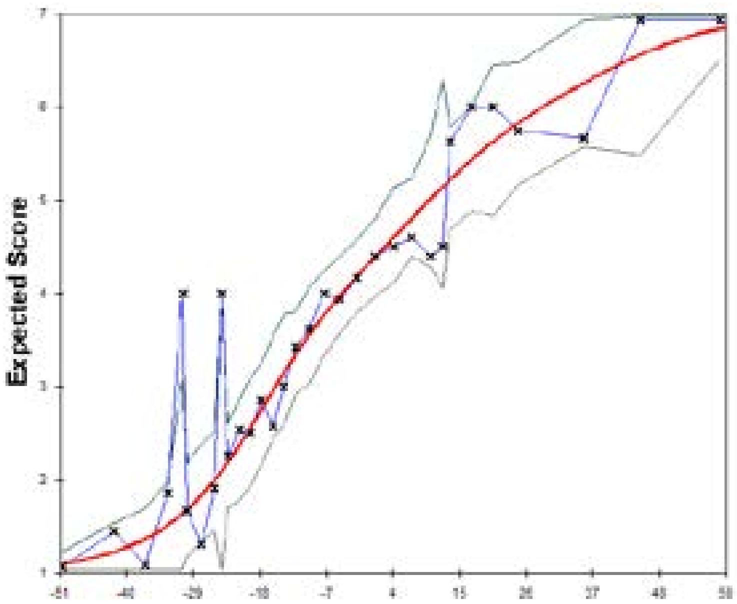


Figure 5. Results from Rasch modelling: observed scores of groups of students (data points) and mathematically expected response curve (smooth curve) in case of item INTER4 (from the interest beliefs scale).

The internal consistency of the scales was adequate when Cronbach's alphas were calculated (see Table 2). In some scales the internal consistency was very high and we were consequently able to shorten these for the second pilot test. An exploratory factor analysis was also carried out on the data using the maximum likelihood method together with oblique rotation. Nine factors had an eigenvalue greater than one. Six factors could be easily explained from the theoretical background. Additionally, one factor consisting of items having either a strong positive or negative answering tendency was termed the 'extreme factor'. Two remaining factors had somewhat low loadings by items already loaded on other factors. The only notable problem seemed to be with the introjected regulation scale, whose items were not grouped as a single factor. Based on more detailed analysis of the data, the scale – and also the theoretical construct – seemed to be formed out of two different aspects. As Ryan and Deci (2000) describe, a person with introjected regulation acts 'in order to avoid guilt or anxiety or to attain ego-enhancements or pride' (p.62). It was therefore decided that the second pilot test of the instrument would include three items for both of these aspects. This

enabled us to see whether they appeared as separate factors in the data or whether introjected regulation could be considered as a uniform construct.

Second pilot test of the questionnaire

The results of the second pilot test of the situational motivation questionnaire were overall very satisfactory. When the bar charts of the individual items were considered, only two items seemed to be problematic. An additional analysis based on Rasch modelling revealed only small deficiencies in a couple of the items.

Table 2 shows the internal consistencies of the scales together with the number of items per scale in pilot tests 1 and 2. The Cronbach's alphas for all of the scales are above 0.6 and therefore sufficiently high. Although the second version of the instrument is somewhat shorter than the first, there was no clear reduction in internal consistency.

Finally, we also analysed the factor structure of the second pilot test data with exploratory factor analysis using the maximum likelihood method together with oblique rotation. This time, there were seven factors with an eigenvalue greater than one (see Appendix 2). All of the factors could be easily explained based on the theoretical background. In the second pilot test data the 'seeking pride' aspect of introjected regulation also formed one distinct factor. The only problematic issue was the 'avoiding guilt or shame' part of the same construct. Those items were not loaded clearly on any factor.

Based on the statistical analysis and observed problems, six items were modified after the second pilot test. None of the items were excluded, so the final version of the instrument has 38 items which are divided into different scales according to the right-hand column of Table 2.

Table 2. Internal consistencies of the scales of the situational motivation questionnaire in pilot tests 1 and 2.

	First pilot test (N = 328)		*Second pilot test (N = 195)*	
Scale	*Number of items*	*Cronbach's alpha*	*Number of items*	*Cronbach's alpha*
Amotivation	5	0.707	4	0.752
External regulation	5	0.782	4	0.780
Introjected regulation	5	0.609	6	0.704
Identified regulation	5	0.857	3	0.823
Intrinsic motivation	5	0.919	3	0.872
Cost beliefs	5	0.759	4	0.808
Efficacy beliefs	5	0.853	4	0.872
Utility beliefs	5	0.850	4	0.794
Interest beliefs	5	0.915	3	0.870
Attitude	5	0.910	3	0.874

Discussion

This paper describes the development process of a new instrument for measuring students' situational motivation in school lessons. The instrument is based on two influential theories on motivation, self-determination theory (e.g. Deci & Ryan, 2000) and expectancy-value theory (e.g. Wigfield & Eccles, 2000). Items on student attitude were also included (see Ajzen, 2001). These theoretical frameworks were chosen because they were observed to be linked in our previous research both by qualitative and quantitative data (Helaakoski, 2007). This new instrument was developed to investigate further these previous, preliminary findings.

Our new instrument for situational motivation was pilot tested twice. After each pilot phase, the data was analysed using numerous statistical methods and problematic items were further developed by using the statistical findings and by revisiting the theoretical background. The second pilot test showed that the scales of the instrument have sufficient internal consistency and that the factor structure of the instrument is very good. Therefore, we can conclude that the new instrument shows good reliability and validity and is ready to be used in other educational research projects investigating students' situational motivation at the lesson level. In other research, the concept of situational motivation is typically used for even more local, for example task-based, situations (e.g. Guay et al., 2000). Our instrument can be easily adapted for such uses through slight modifications of the wording of the items.

Detailed examination of the results of the factor analysis of the pilot test data reveals some interesting overlaps between constructs based on different motivational theories. For example, items on attitude, interest beliefs, and intrinsic motivation were loaded on a single factor, although the formulation of the items was made as distinct as possible. There are also clear overlaps between the conceptualisations of the different theoretical frameworks. For example, interest-enjoyment value in expectancy-value theory (Eccles, 2005) has very similar characteristics to intrinsic motivation in self-determination theory (Deci & Ryan, 2000). Moreover, theories on interest also share very similar ideas (see Krapp, 2002). In our view, the items used in operationalising these theories are also very close to each other – and in some cases even fit better with theoretical frameworks other than those on which they were initially based. These observed overlaps are a potential area for further investigation using the instrument developed in the present study. Previous research has focussed solely on contrasting existing theories with each other (e.g., Vansteenkiste et al., 2005). In the future, seeking for determining common aspects and formulating joint, more extensive models of motivation would be welcome.

One of the most important potential uses of the new instrument in future research is in studying the relationships of the different theoretical backgrounds used in the instrument. The most interesting aspect in this respect is the hypothesized interplay between attitude, self-determination theory, and expectancy-value theory suggested by Helaakoski (2007). Another potential avenue would be to compare the framework of Helaakoski (2007) to the similar framework suggested by Hagger and colleagues (2003), who linked self-determination theory and theory of planned behaviour (Ajzen, 2001) and to compare the two frameworks statistically by using experimental data. We suggest that in the future use of this new instrument some open-ended items could also be added, especially in relation to the items dealing with attitude, similarly as to framework of Helaakoski (2007). This would bring the advantages of mixed methods research (Creswell & Plano Clark, 2011) to the challenging task of studying the relationships between multiple motivational theories.

Although our new instrument is focused on and pilot tested in physics and chemistry lessons, the items of the instrument are not subject specific. We therefore consider the instrument to be also applicable in research projects dealing with other subjects. In addition, although our sample data consisted of students from grades 8 and 9, we believe that the instrument could be used throughout the lower and upper secondary levels. As the student questionnaire takes just from five to ten minutes to complete, it can be easily done at the end of the lesson or directly afterwards during break time. The questionnaire could bring additional value to any educational research focusing on the situational aspects of student learning. Since motivation is a key influencing factor in student achievement (e.g. Reinikainen, 2007), we believe that its role in research findings should be controlled much more often than at present. This new instrument offers one possible method of doing so, especially in quantitatively oriented research.

Acknowledgements

The authors are thankful to Kari Törmäkangas from the Institute of Educational Research of the University of Jyväskylä for his help and advice in Rasch modelling and to Vesa Moate for his assistance in language editing this paper. We would also like to thank the Finnish Graduate School for Mathematics, Physics and Chemistry Education for funding this research project.

References

Ajzen, I. (2001). Nature and operation of attitudes. *Annual Review of Psychology, 52*(1), 27–58.

Alexander, P. A. (Ed.). (2000). Humble beginnings, ambitious ends: Special issue on motivation and the educational process. *Contemporary Educational Psychology, 25*(1).

Bandura, A. (1993). Perceived self-efficacy in cognitive development and functioning. *Educational Psychologist, 28*(2), 117–148.

Bond, T. G., & Fox, C. M. (2001). *Applying the Rasch model: Fundamental measurement in the human sciences.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Creswell, J. W., & Piano Clark, V. L. (2011). *Designing and conducting mixed methods research* (2nd ed.). Los Angeles: Sage.

Deci, E. L., & Ryan, R. M. (2000). The "what" and "why" of goal pursuits: Human needs and the self-determination of behavior. *Psychological Inquiry, 11*(4), 227–268.

Eccles, J. S. (2005). Subjective task value and the Eccles et al. model of achievement-related choices. In A. J. Elliot & C. S. Dweck (Eds.), *Handbook of Competence and Motivation* (pp. 105–121). New York, NY: Guilford Press.

Eccles, J. S., & Wigfield, A. (2002). Motivational beliefs, values, and goals. *Annual Review of Psychology, 53*(1), 109–132.

Grolnick, W. S., & Ryan, R. M. (1987). Autonomy in children's learning: an experimental and individual difference investigation. *Journal of Personality and Social Psychology, 52*(5), 890–898.

Grouzet, F. M. E., Vallerand, R. J., Thill, E. E., & Provencher, P. J. (2004). From environmental factors to outcomes: A test of an integrated motivational sequence. *Motivation and Emotion, 28*(4), 331–346.

Guay, F., Mageau, G. A., & Vallerand, R. J. (2003). On the hierarchical structure of self-determined motivation: A test of top-down, bottom-up, reciprocal, and horizontal effects. *Personality and Social Psychology Bulletin, 29*(8), 992–1004.

Guay, F., Vallerand, R. J., & Blanchard, C. (2000). On the assessment of situational intrinsic and extrinsic motivation: The Situational Motivation Scale (SIMS). *Motivation and Emotion, 24*(3), 175–213.

Hagger, M., Chatzisarantis, N., Culverhouse, T., & Biddle, S. (2003). The processes by which perceived autonomy support in physical education promotes leisure-time physical activity intentions and behavior: a trans-contextual model. *Journal of Educational Psychology, 95*(4), 784–795.

Helaakoski, J. (2007). Connections between attitude and motivational factors in introductory physics laboratory education. [*Proceedings of the 6th International ESERA Conference in Malmö, Sweden, August 2007.*] Retrieved August 10, 2012. http://195.178.227.107/esera/Files/807.doc.

Krapp, A. (2002). Structural and dynamic aspects of interest development: Theoretical considerations from an ontogenetic perspective. *Learning and Instruction, 12*(4), 383–409.

Murphy, P. K., & Alexander. P. A. (2000). A motivated exploration of motivation terminology. *Contemporary Educational Psychology, 25*(1), 3–53.

Neumann, K., Geller, C., Helaakoski, J., Keller, M., Olszewski, J., Fischer, H. E., & Viiri, J. (2010). What can we learn from classroom videos? Physics instruction in Finland, Germany, and Switzerland compared. *Symposium at the NARST 2010 Conference in Philadelphia*, PA, March 2010.

Nurmi, J.-E. & Aunola, K. (2005). Task-motivation during the first school years: A person-oriented approach to longitudinal data. *Learning and Instruction 15*(2), 103–122.

OECD (2007). *PISA 2006: Science Competencies for Tomorrow's World,* Volume 1 - Analysis. Paris: OECD.

Reinikainen, P. (2007). *Sequential explanatory study of factors connected with science achievement in six countries: Finland, England, Hungary, Japan, Latvia, and Russia. Study based on TIMSS 1999*. University of Jyväskylä. Institute for Educational Research. Research Reports 22.

Rimmele, R., Seidel, T., Knierim, B., Kobarg, M., Dalehefte, I., Schwindt, K., & Meyer, L. (2005). Scale documentation – Student questionnaire. In. T. Seidel, M. Prenzel & M. Kobarg (Eds.), *How to run a video study. Technical report of the IPN Video Study* (pp. 224–281). Münster: Waxmann.

Ruohotie, P. (1998). *Motivaatio, tahto ja oppiminen*. Helsinki: Edita.

Ryan, R. M., & Connell, J. P. (1989). Perceived locus of causality and internalization: Examining reasons for acting in two domains. *Journal of Personality and Social Psychology, 57*(5), 749–761.

Ryan, R. M., & Deci, E. L. (2000). Intrinsic and extrinsic motivations: classic definitions and new directions. *Contemporary Educational Psychology, 25*(1), 54–67.

Snow, R., Corno, L., & Jackson, D. (1996). Individual differences in affective and conative functions. In D. Berliner & R. Calfee (Eds.), *Handbook of educational psychology* (pp. 243–310). New York, NY: Macmillan.

SRQ-A. *Academic Self-Regulation Questionnaire*. Retrieved Aug 10, 2012. http://selfdeterminationtheory.org/questionnaires/10-questionnaires/48.

Vallerand, R. J. (1997). Toward a hierarchical model of intrinsic and extrinsic motivation. In M. P. Zanna (Ed.), *Advances in experimental social psychology* (pp. 271–360). San Diego, CA: Academic Press.

Vansteenkiste, M., Lens, W., De Witte, H., & Feather, N. (2005). Understanding unemployed people's job search behaviour, unemployment experience and wellbeing: A comparison of expectancy-value theory and self-determination theory. *British Journal of Social Psychology, 44*, 269–287.

Wigfield, A., & Eccles, J. S. (2000). Expectancy–value theory of achievement motivation. *Contemporary Educational Psychology, 25*(1), 68–81.

Appendix 1. Sample items from the second pilot version of the questionnaire on students' situational motivation.

Tämän oppitunnin aikana...	täysin eri mieltä	melko eri mieltä	hieman eri mieltä	hieman samaa mieltä	melko samaa mieltä	täysin samaa mieltä
... olin mukana tunnilla, vaikka olenkin täysin varma, ettei se ollut sen vaivan arvoista[A]						
... otin osaa opetukseen vain siksi, että sitä edellytettiin minulta[B]						
... osallistuin opetukseen, koska halusin opettajan ajattelevan, että olen hyvä oppilas[C]						
... osallistuin opetukseen, koska uskon, että näiden asioiden oppiminen on minulle hyväksi[D]						
... osallistuin opetukseen innokkaasti, koska nautin tästä tunnista[E]						

A = amotivation (item adapted and modified from Guay et al., 2000)

B = external regulation (item adapted and modified from SRQ-A)

C = introjected regulation (item adapted and modified from SRQ-A)

D = identified regulation (item adapted and modified from Guay et al., 2000)

E = intrinsic motivation (item adapted and modified from SRQ-A)

Vastaa seuraaviin kohtiin omien tuntemustesi mukaisesti.	täysin eri mieltä	melko eri mieltä	hieman eri mieltä	hieman samaa mieltä	melko samaa mieltä	täysin samaa mieltä
Uskoisin, että tällä tunnilla opetettujen asioiden oppiminen veisi minulta liikaa vapaa-aikaani.[A]						
Minusta tuntui siltä, että pystyin seuraamaan tunnin opetusta ilman vaikeuksia.[B]						
Minä uskoisin, että tämän tunnin sisällöt ovat tärkeitä myös oman arkielämäni kannalta.[C]						
Minun mielestäni tämän tunnin asiasisällöt olivat mielenkiintoisia.[D]						
Minun mielestäni tämä tunti oli juuri sellainen, josta pidin.[E]						

A = cost beliefs (self-made item)

B = efficacy beliefs (item adapted and modified from Rimmele et al., 2005)

C = utility beliefs (item adapted and modified from Rimmele et al., 2005)

D = interest beliefs (item adapted and modified from Guay et al., 2000)

E = attitude (self-made item)

Appendix 2. Factor structure of the second pilot test version of the situational motivation questionnaire.

Pattern Matrix[a]

	Factor						
	1	2	3	4	5	6	7
ATT2	,873						
ATT3	,811						
ATT1	,725						
IMOT3	,723						
INTER2	,656						
IMOT2	,656						
INTER1	,553						
INTER3	,410		,420				
IMOT1	,357					,305	
COST4		,918					
COST1		,670					
COST2		,637					
COST3		,450					
USE4			,813				
USE3			,736				
USE1			,519				
USE2			,447				
EFF4				,889			
EFF2				,744			
EFF3				,699			
EFF1				,693			
EXT2					,737		
EXT1					,628		
EXT3					,529		
EXT4					,418		
AMOT2					,408		
AMOT1					,407		
AMOT4					,348		,310
AMOT3							
IJECT1						,700	
IJECT5						,445	-,326
IJECT3						,420	
IJECT6	,330						
IJECT4							
IJECT2							-,414
IDEN2			,301	,302			-,518
IDEN1							-,433
IDEN3							-,546

Extraction Method: Maximum Likelihood.
Rotation Method: Oblimin with Kaiser Normalization.

Koulutulokkaat pituuden mittaajina

KAUKO HIHNALA

kauko.hihnala@jyu.fi
Jyväskylän yliopisto, Opettajankoulutuslaitos

Tiivistelmä

Mittaaminen on niitä perustoimintoja, joiden kautta lapsi tutustuu suhteellisuuden käsitteeseen. Perinteisesti on ajateltu, että mittayksikkö ja mittaluku riittävät koko mittaustapahtuman kuvaamiseen. Saraman ja Clementsin (2009) teorian mukaan mittaamisen eri vaiheissa nousee esiin kahdeksan käsitettä. Tehdyssä työssä tutkittiin erään keskisuomalaisen koulun ensimmäisen luokan oppilaita, jotka olivat juuri aloittaneet koulutyönsä. Oppilaille (N = 18) tehtiin 15-20 min mittainen yksilöllinen testi, jossa oli laskutehtäviä ja erilaisia mittauksia. Tapahtumat videoitiin ja dokumentoitiin kirjallisesti. Havaittiin, että kolmannes koehenkilöistä osasi mitata esineen pituuden toisen esineen avulla ilman tarkentavia ohjeita. Puolelle oppilaista mittavälineen siirtäminen ja siihen liittyvä tasajaon periaate olivat tuntemattomia käsitteitä. Mittaustuloksen ilmoittaminen tuotti myös ongelmia ja monet kaipasivat metrijärjestelmän yksiköitä. Tehty pilottitutkimus antaa viitteitä jatkotutkimukselle.

Avainsanat

koulutulokkaat, pituuden mittaaminen, suhteellisuus

Johdanto

Sillä mitä lapset ymmärtävät mittaamisella on juurensa esikouluvuosissa (Clements & Stephan, 2004). Nuoret lapset kohtaavat määriä ja keskustelevat niistä (Seo & Ginsburg, 2004). Ensin he oppivat käyttämään sanoja, jotka edustavat tietyn ominaisuuden määrää tai suuruutta. Sitten he vertaavat kahta kohdetta suoraan ja tiedostavat niiden yhtäsuuruuden tai erisuuruuden (Boulton-Lewis, Wilss & Mutch, 1996). Tässä vaiheessa he ovat valmiita oppimaan mittaamisen, ts. yhdistämään luvun määrään (Clements & Stephan, 2004, s. 300). Suomessa koulutulokkaiden käsitykset mittaamisesta voivat perustua varsin erilaisiin taustavaikuttajiin, kuten perhepäivähoidon, lastentarhan tai esikoulun tarjoamiin virikkeisiin.

Mittaamisen hallintaa voidaan pitää yhtenä suhteellisuusajattelun ensimmäisistä askelista (ks. myös POPS 2004). Mittaamisessa verrataan aina kahta tai useampaa kohdetta keskenään. Tulos ilmoittaa jollakin tavalla kohteiden välisen suuruussuhteen. Hihnalan (2009, 2011, s. 104) mukaan lähes puolet 6. luokkien oppilaista (N=201) ymmärsi suhteellisuuden merkityksen konkreeteissa tilanteissa, joihin liittyvää matematiikkaa ei ollut heille vielä opetettu. Voidaan ajatella, että suhteellisuuden käsite kehittyy (kenties opetuksesta riippumatta) eräänlaisena juonteena lapsen matemaattisessa ajattelussa (Hihnala, 2010, s. 52). Clements ja Sarama (2008) puhuvat ydinkäsitteistä (*focal concepts*) ja Fuson (2004, s. 132) puolestaan käsitteellisistä lohkoista (*conceptual chunks*). Myös heillä on tavoitteena matematiikan osa-alueiden yhdistäminen.

Opetussuunnitelman (Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004, lyh. POPS 2004) mukaan ensimmäisen ja toisen luokan matematiikan oppisisältöihin kuuluu muun muassa ympäröivän tilan avaruudellisten suhteiden arviointi, mittaamisen periaate ja mittaustuloksen arviointi. Koulumatematiikassa ja fysiikassa esitetään yleensä mittaamisen periaate siten, että suure on asia, joka voidaan mitata tai ainakin ajatella mitatuksi (esim. Erkinjuntti, Hihnala, Juntunen, Järvinen, Kytölä & Laine, 1994, s. 29). Edelleen määritellään, että *suure = mittaluku x mittayksikkö.* Sarama ja Clements (2009) muotoilevat saman lähtökohdan seuraavasti. Mittaaminen koostuu kahdesta osa-alueesta (*aspects*), mittayksikön valinnasta (*identifying*) ja kohteen jakamisesta osiin mittayksikön avulla, asettamalla mitta monta kertaa perätysten yli kohteen (*iterating*). Osiin jakaminen ja mitan kuljettaminen ovat kuitenkin mutkikkaita ajatustoimintoja, jotka usein sivuutetaan perinteisissä opetussuunnitelmissa ja mittaamisen opettamisessa. (Sarama & Clements, 2009, s. 275.)

Mittaaminen alkuopetuksen opetussuunnitelmassa

Vuosiluokkien 1-2 matematiikan opetuksen ydintehtävänä ovat opetussuunnitelman (POPS 2004) mukaan matemaattisen ajattelun kehittäminen, keskittymisen, kuuntelemisen ja kommunikoinnin harjaannuttaminen sekä kokemusten hankkiminen matemaattisten käsitteiden ja rakenteiden muodostumisen perustaksi. (POPS 2004, s.158)

Geometrian keskeisiin sisältöihin kuuluu muun muassa ”ympäröivän tilan avaruudellisten suhteiden havainnointi ja kuvailu” sekä ”geometriset peruskäsitteet, kuten piste, jana, murtoviiva, puolisuora, suora ja kulma” (POPS 2004). Mittaamisen sisältöihin kuuluvat puolestaan ”mittaamisen periaate, pituus, massa, pinta-ala, tilavuus, aika ja hinta” sekä ”tärkeimpien mittayksiköiden käyttö ja vertailu” ja ”mittaustuloksen arviointi”. (POPS 2004, s.159)

Opetussuunnitelman toisen luokan päättymiseen liittyvissä ”hyvän osaamisen kriteereissä” viitataan myös mittaamistapahtumaan. Kyseisten kriteerien mukaan ajattelun ja työskentelyn taitoihin kuuluu, että ”osaa tehdä vertailua, mm. pituusvertailua”. Mittaamisessa oppilas osaa ”mitata yksinkertaisilla mittavälineillä ja tuntee keskeisimmät suureet, kuten pituus, massa, tilavuus ja aika”. (POPS 2004, s. 160.)

Ginsburg ja Amit (2008) esittävät tilanteesta varsin kärkevän arvion. Heidän mukaansa nykyiset painotukset ja vaatimukset ovat aiheuttaneet melkoista epävarmuutta pienten lasten kouluttajille. Näiden odotetaan opettavan jotakin, mitä he eivät koskaan luulleet opettavansa tai eivät ainakaan halunneet opettaa. He tarvitsevat opastusta siinä, mitä pienten lasten matematiikan opetus sisältää. Mitä tarkoittaa se, että lapsille pitää opettaa ikäkauteen sopivaa matematiikkaa. (Ginsburg & Amit, 2008, s. 275.) Suomessa opetus ja opettajankoulutus ovat sen sijaan linjassa OPS:n tavoitteiden kanssa.

Lapset ja mittaaminen

Lukujen ja mittaamisen välinen yhteys hahmottuu vähitellen. Lasten tärkein kokemus alakoulun matematiikassa on usein esineiden (*objects e.g. blocks*) laskeminen. Tämän tyyppisen laskemisen ajatellaan olevan diskreettien yksiköiden mittaamista (Clements ym., 2004). Clements (2004, ss. 53-55) kuvailee 7-vuotiaiden mittaamiseen liittyviä kehityspiirteitä. Hänen mukaansa 7-vuotias (1-luokkalainen) nimeää, erottaa ja järjestää objekteja niiden ominaisuuksien (mm. pituuden) perusteella ja on myös tietoinen mittayksikön vaikutuksesta mittaustulokseen. Toisaalta Fusonin (2004) mielestä vasta 8-vuotiaan (2-luokkalaisen) tarvitsee osata esimerkiksi mitata pituutta senttimetreissä.

Oppilaiden täytyy organisoida käsityksensä kohteista uudelleen, kun he mittaavat jatkuvia kohteita. Sen takia ei ole yllättävää, että laskeminen korostuu mittaamiseen liittyvien käsitteiden kehittymisessä (Clements, ym., 2004, s. 303). Esimerkiksi Inhelder, Sinclair & Bovet (1974) näyttivät lapsille kahta tulitikkuriviä. Toisessa rivissä oli pitempiä ja toisessa lyhyempiä tikkuja siten, että rivit olivat yhtä pitkiä. Kuitenkin monien lasten mielestä se rivi oli pitempi, jossa oli lyhyempiä tikkuja, koska niitä oli enemmän. Mittayksikön ja mittaluvun välinen yhteys täytyy ymmärtää toisin kuin diskreettejä kohteita laskiessa. Mittausolosuhteet voivat poiketa diskreettien kohteiden laskemisesta toisellakin tavalla. Esimerkiksi viivoittimella mitatessa jokaista osaa ei välttämättä tarvitse laskea. Toisaalta mitat voidaan laskea epäjärjestyksessä, kunhan ne yhdessä muodostavat mitattavan kohteen pituuden (Sarama & Clements, 2009, s. 277).

Mittaamiseen liittyy kaksi piirrettä, jotka edellyttävät mitan säilymisen ja transitiivisuuden ymmärtämistä, nimittäin (a) mitä suurempi mittayksikkö sitä pienempi mittaluku (*inverse relation*) ja (b) yhtä suurten mittayksiköiden käyttäminen mittaamisessa. (Clements ym., 2004, s. 300.) Toinen lainalaisuus, joka lasten on opittava, on mittausten suhteellisuus (*proportionality*). Erityisesti mittayksikön ja mittaluvun välillä on käänteinen suhde (*inverse*): mitä isompi mittayksikkö sitä pienempi mittaluku ja päinvastoin (Sarama & Clements, 2009, s. 277).

Pituuden mittaamiseen liittyvät käsitteet

Pituus on objektin ominaisuus, joka selviää mittaamalla, kuinka pitkä matka on objektin päästä toiseen. Etäisyyttä käytetään usein ilmaisemaan, kuinka kaukana kaksi pistettä on toisistaan. Tässä vaiheessa on oleellista keskustella myös lukusuorasta, koska juuri sitä käytetään pituuden mittaamisessa. (Clements & Sarama, 2009, s. 275.)

Useat käsitteet (taulukko 1) tukevat lasten oppimista pituuden mittaamisessa. Voimme käyttää näitä käsitteitä ymmärtääksemme, kuinka oppilaat ajattelevat tilasta tehdessään mittaamiseen liittyviä fysikaalisia toimintoja. Nämä käsitteet ovat Clementsin ja Stephanin (2004) mukaan: osittaminen (*partitioning*), toistaminen (*iteration*), transitiivisuus (*transitivity*), säilyminen (*conservation*), etäisyyden kasaantuminen (*accumulation*) ja yhteys lukuihin (*relation to number*). (Clements & Stephan, 2004, ss. 300-301.) Myöhemmin lisättiin vielä kaksi käsitettä perusominaisuus (*attribute*) ja aloituspiste (*origin*) (Sarama & Clements, 2009, ss. 275-277).

Taulukossa 1 esitetään neljä erilaista näkemystä pituuden mittaamiseen liittyvistä käsitteistä. Clementsin ja Saraman (2009) esittämä malli sisältää peräti kahdeksan eri käsitettä. Barnbyn, Bilsboroughin, Harriesin ja Higginsin (2009) mallissa puolestaan on eroteltu käsitteet ja prosessit. Yhteisenä piirteenä näyttävät esiintyvän transitiivisuus ja säilyminen. Dudgeon (2008, s. 103) katsoo, että Haylockin käsitteistössä korostuu arviointi (*approximation*) ja että Piaget taas pitää säilymistä avaintekijänä, kun arvioidaan sitä, miten lapsi on käsittänyt mittaamisen. Pituuden perusluonteen ymmärtäminen sisältää sen, että pituudet käsittävät kiinteitä etäisyyksiä (”Euklidisia” pikemmin kuin ”topologisia” käsitteitä Piaget´n formuloinnissa) (Sarama & Clements, 2009, s. 275).

Osittaminen on ajattelutoiminto objektin viipaloimisesta samankokoisiin osiin. Tämä idea ei ole lapsille itsestään selvä. Tarvitaan näkemys jostakin, joka voidaan jakaa osiin tai leikata pois, jo ennen fysikaalista toimintaa. Kun oppilaat alkavat ymmärtää, että myös mittayksiköt voidaan jakaa osiin, he joutuvat tekemisiin pituuden jatkuvuuden idean kanssa. (Clements & Stephan, 2004, s. 301). Kysymällä oppilailta, mitä viivaimen lukuisat merkkiviivat tarkoittavat, paljastaa kuinka he ymmärtävät pituuden osittamisen. Jotkut ymmärtävät, että ”viisi” on yksittäinen merkki, eikä tila, joka on jaettu viiteen yhtä suureen yksikköön (Sarama & Clements, 2009, s. 276).

Taulukko 1. Pituuden mittaamiseen liittyvät käsitteet ja prosessit (p).

Peruskoulu (OPS 2004)	*Clements & Sarama (2009)*	*Haylock (2006)*	*Barmby ym. (2009)*
Comparison	-	Comparison & ordering	Comparing objects (p)
Units of measurement	-	Non-standard & standard units	Structure of the system of units (p)
Assesment of measurement results	-	Approximation	Estimation (p)
Quantitative expressions	Attribute	-	-
-	Partitioning	-	-
-	Unit iteration	-	-
-	Transitivity	Transitivity	Transitivity
-	Conservation	Conservation	Concervation
-	Accumulation	-	Concatenation of units(p)
-	Origin	Meaning of zero	-
-	Relation to number	Context for developing number concept	Assigning numbers to properties
-	-	-	Use of measuring instruments (p)

Mitan siirtäminen edellyttää kykyä nähdä pienen yksikön pituus palana mitattavan kohteen pituudesta. Näitä palasia asetellaan sitten perätysten koko kohteen pituudelta siten, ettei jää aukkoja eivätkä palat mene päällekkäin (Kamii & Clark, 1997; Steffe, 1991). On myös tärkeää, että mittaaminen etenee koko ajan mitattavan kohteen suuntaisesti ja että mitta asetetaan tarkasti aloituskohtaan (Dudgeon, 2008, s. 105-107). Samalla lasketaan palasten lukumäärä. Tällainen tilan täyttäminen edellyttää osittamista, mikä ei ole vakiintunut nuorilla oppilailla, joiden täytyy myös nähdä tasajaon tarve ja tarve käyttää samoja yksiköitä eri kohteita mitatessa. (Sarama & Clements, 2009, s. 276.)

Oppilaat saattavat asettaa viivaimen luvun 1 lähtöpisteeseen luvun 0 asemasta. Tai he eivät huomaa, että 0-piste ei ole aivan viivaimen alussa (Dudgeon, 2008, s. 107). Edelleen, oppilaat aloittavat usein laskemisen ”luvusta 1” viivaimella tai askelilla mitatessaan. He siis aloittavat laskemisen samalla, kun lähtevät liikkeelle. Todennäköisesti he eivät ajattele, että mittaamalla pitäisi peittää koko alue. Pikemminkin viivaimen luvut ilmoittavat, milloin aloittaa laskeminen, eikä sitä, mikä osa tilasta on jo peitetty. Monet oppilaat myös lopettavat mittaamisen, ennen kuin mitta on ylittänyt kohteen loppupään.

Transitiivisuus tarkoittaa sen asian ymmärtämistä, että jos kohde X on yhtä pitkä kuin kohde Y, joka puolestaan on yhtä pitkä kuin kohde Z, niin kohde X on yhtä pitkä kuin kohde Z (Sarama & Clements, 2009, p. 276). Kun lapsi ymmärtää tämän, hän osaa ottaa avuksi kolmannen (tikun tai muun esineen) kahden muun pituuden vertaamiseen. (Clements & Stephan, 2004, ss. 301-302)

Pituuden säilyminen tarkoittaa sitä, että kun kappaletta liikutellaan, sen pituus ei muutu. Jos esimerkiksi lapsille näytetään vierekkäin kahta samanmittaista keppiä, he sanovat, että keppien pituudet ovat yhtä suuret. Mutta jos kepit asetetaan niin, että toinen työntyy esiin toisen takaa, 4-, 5- ja 6-vuotiaat saattavat sanoa, että takaa esiin työntyvä keppi on pitempi. Monet 5-7-vuotiaista epäröivät tai ovat kahden vaiheilla. Nimittäin he vastaisivat välittömästi, jos asia olisi täysin selvä. (Sarama & Clements, 2009, s. 276).

Etäisyyden kasaantuminen merkitsee sitä, että kun mittaa siirretään pitkin mitattavaa kohdetta ja lasketaan toistojen määrää, lukusanat kuvaavat sitä tilaa, joka on peitetty kaikilla luetelluilla mitoilla aina päätepisteeseen saakka. Toisin sanoen tila, joka peittyy kolmella yksiköllä, sisältyy tilaan, joka peittyy neljällä yksiköllä. (Clements & Stephan, 2004; Sarama & Clements 2009, s. 277). Additiivisuus tarkoittaa sitä, että pituus voidaan hajottaa tai yhdistää siten, että kahden pisteen välimatka on yhtä suuri kuin minkä tahansa osavälimatkojen summa, joka on saatu jakamalla pisteitä yhdistävä jana osiin. (Sarama & Clements, 2009,

ss. 276-277). Huomattakoon, että em. kirjoittajat eivät kuitenkaan ole esittäneet additiivisuutta omana mittaukseen liittyvänä käsitteenään (taulukko 1). Aloituspiste merkitsee mittaamisen yhteydessä sitä, että mitä tahansa välimatka-asteikon pistettä voidaan käyttää lähtöpisteenä. Esimerkiksi välimatka 45:stä 50:een on sama kuin välimatka 100:sta 105:een.

Tutkijat kiistelevät em. käsitteiden kehittymisjärjestyksestä ja siitä, missä iässä ne kehittyvät. Ilmeisesti opettamisella ja kokemuksella on kummallakin huomattava osuutensa tässä kehityksessä. Tutkijat hyväksyvät laajasti, että nämä periaatteet luovat perustan mittaamisen eri osa-alueille. Perinteinen mittaamisen opettaminen ei kuitenkaan riittävästi auta näiden käsitteiden muodostamisessa. (Sarama & Clements, 2009, s. 277).

Pituuden mittaamisen opettaminen

Tutkimukset ovat Osanan ja Raynerin (2010) mukaan osoittaneet, että matemaattinen tieto lisääntyy itsestään. Tämän lisäksi oppimisolosuhteiden merkitykseen on alettu uskoa yhä enemmän. Toisaalta on havaittu, että aikuiset eivät käytä kovin paljon aikaa laskutehtävien tekemiseen lasten kanssa kotona tai esikoulussa. Tilanne huolestuttaa varsinkin sen takia, että varsin nuoret lapset ovat kykeneviä luovaan matemaattiseen ajatteluun ja ovat kiinnostuneita erilaisista matemaattisista tehtävistä. Vaikka lapset jätettäisiin näissä asioissa vaille huomiota, he perehtyvät leikeissään moniin matemaattisiin asioihin, kuten suuruuteen (*magnitude*), lukujen luettelemiseen ja käyttämiseen eri yhteyksissä (*enumeration*) sekä avaruudellisiin suhteisiin (*spatial relations*). (Seo & Ginsburg, 2004, ss. 95-96; Osana & Rayner, 2010, s. 2.)

Perinteisesti mittaamisen opettamisessa on ollut tavoitteena auttaa oppilaita oppimaan niitä taitoja, joita tarvitaan viivaimella mitatessa. Tutkimus ja viimeaikaiset opetussuunnitelmauudistukset kehottavat muodostamaan sellaisia käsitekokonaisuuksia, jotka johtavat harkitsevaan arviointiin ja mittaamiseen. Erilaisia yrityksiä on tehty näihin tavoitteisiin pääsemiseksi. (Clements & Stephan, 2004, s. 304.)

Kamii ja Clark (1997) korostavat (Saraman & Clementsin, 2009 mukaan), että pituuksien vertaaminen on ydintehtävä säilymisen, transitiivisuuden ja toistamisen kehittämisessä. Kuitenkaan useimmissa oppikirjoissa ei ole tämän tyyppisiä tehtäviä. Oppikirjoissa on pikemminkin sellaisia kysymyksiä kuin ”Kuinka monen paperiliittimen mittainen kynä on?” kuin että ”Kuinka paljon pitempi sininen kynä on kuin punainen?” (Sarama & Clements, 2009, s. 284.)

Viimeisimmät opetussuunnitelmat ohjaavat opettamaan seuraavassa järjestyksessä: pituuksien vertaaminen, mittaaminen epästandardeilla mittayksiköillä, yhdistettynä tavanomaisiin standardeihin yksiköihin ja mittaamaan viivaimella (Clements, 1999). Tämä järjestys perustuu Piaget´n ym. (1960) kehitysteoriaan mittaamisesta. Taustalla on se, että kyseinen lähestymistapa motivoi oppilaita näkemään tarpeen standardien mittayksiköiden käyttöön. (Clements & Stephan, 2004, s. 304) Ginsburgin (2009) mukaan matemaattisen ajattelun kehittymistä voidaan seurata formatiivisin arvioinnein, joita tarvitessa tuetaan kliinisin haastatteluin.

Clements (1999) ehdottaa seuraavaa järjestystä opettamiseen. Oppilaille pitäisi järjestää erilaisia kokemuksia esineiden kokojen vertaamiseen (esim. etsi luokasta kaikki esineet, jotka ovat pitempiä kuin kyynärvartesi). Seuraavaksi tulisivat kokemukset, joissa oppilaat voivat yhdistää luvun pituuteen. Opettajan pitäisi antaa oppilaille sekä tavanomainen viivain että määrämittaisia esineitä, kuten kuutiosenttimetrin kokoisia kuutioita. Kokeilu näillä työvälineillä kehittää mittauksen toistamisen ideaa, suoraan riviin asettamista (viivaimen avulla) ja nollapisteen käsitettä.

Mittaamisen apuvälineet

Leikkiessään lapset oppivat vertailemaan lukumääriä, muotoja, pituuksia ja tilavuuksia, ilman mitään tietoista mittaamisen tarkoitusta. Arvokkain oppiminen tapahtuu silloin, kun oppilaat aktiivisesti itse rakentavat omaa matemaattista ymmärrystään, mikä usein tapahtuu konkreetteja apuvälineitä käyttäen (Boggan ym., 2010, s. 2). Apuvälineet voivat olla hyvin erityyppisiä ja ne määritellään usein ”fysikaalisiksi objekteiksi, joita käytetään opetusvälineinä, kun halutaan panna oppilaat opiskelemaan matematiikkaa omin käsin”. Kun oppilaat työskentelevät konkretiavälineillä, he ottavat ensimmäisiä askelia matematiikan prosessien ymmärtämiseen (Boggan ym., 2010, s. 4).

Lasten ajattelu ei ole pelkästään ”konkreettia”, kuten Piaget:a on virheellisesti tulkittu, vaan varsin nuoret lapset pystyvät jossakin määrin ajattelemaan abstraktisti (Ginsburg & Amit, 2008, s. 275). Formaalin matematiikan opiskelun tärkein tavoite on oppia sen abstraktiot. Lapset kehittävät arkipäivän matematiikkaa koulun ulkopuolella, usein ilman aikuisten apua. Koulutus on suunniteltu auttamaan heitä seuraavien abstraktien symboleilla tehtävien askelten ottamiseen. Tämä on myös kehitystason mukaista, ainakin jos se on tehty hyvin. Tietenkin formaalin matematiikan tulisi olla oppilaalle merkityksellistä ja liittyä arkipäivän matematiikkaan, mutta siinä täytyy olla määritelmiä, jotka sisältävät abstraktioita ja symbolien käyttöä. (Ginsburg & Amit, 2008, s. 284.)

Erityisesti oppimisympäristön pitäisi sisältää toimintoja, jotka edistävät sellaisten käsitteiden kuin määrän ja lukumäärän, lukujen luettelemisen sekä yhteen- ja vähennyslaskun oppimista. Ajatteleminen matematiikassa sisältää kuitenkin myös prosesseihin liittyviä piirteitä, kuten käsitteiden ymmärtämisen ja prosessien sujuvuuden, joita Kilpatrick, Swafford ja Findell (2001) pitävät keskeisinä matemaattisen taitavuuden (*mathematical proficiency*) kriteereinä. (Osana & Rayner, 2011, s. 2.)

Kasvatustieteellisissä tutkimuksissa on havaittu, että arvokkainta oppimista tapahtuu silloin, kun oppilaat rakentavat aktiivisesti omaa matemaattista ymmärrystään, joka usein toteutuu henkilökohtaisia havaintovälineitä käyttäen (Boggan, Harper & Whitmire, 2010, s. 2). Havaintovälineiden täytyy olla lapsen matemaattiselle kykytasolle sopivia, muutoin ne ovat hyödyttömiä.

Menetelmä

Aiemmissa tutkimuksissa (mm. Hihnala 2005, 2011) on havaittu, että suhteellisuuden periaate liittyy oleellisesti moniin peruskoulumatematiikan käsitteisiin, kuten kerto- ja jakolaskuun, murtolukuihin, mittaamiseen, mittakaavaan, prosenttilaskuun, suoraan ja kääntäen verrannollisuuteen. Näitä yhteyksiä on aiemmin todennettu lähinnä luokkien 6-9 matematiikassa (esim. Hihnala, 2005, 2011). Nyt haluttiin selvittää, millaisia suhteellisuuden käsitteeseen liittyviä valmiuksia on koulutulokkailla. Erityisesti valittiin tarkastelun kohteeksi pituuden mittaamiseen liittyvä toiminta.

Tehdyssä työssä tutkittiin erään keskisuomalaisen koulun ensimmäisen luokan oppilaita, jotka olivat juuri aloittaneet koulutyönsä. Oppilaille (N = 18) tehtiin 15–20 minuutin mittainen yksilöllinen testi, jossa oli laskutehtäviä ja erilaisia mittauksia. Tapahtumat videoitiin ja dokumentoitiin kirjallisesti. Heille esitettiin suullisesti lukujonoihin ja peruslaskutoimituksiin liittyviä tehtäviä. Lisäksi heitä pyydettiin suorittamaan pituuden, tilavuuden, massan ja ajan arviointia. Erityisesti pituuden osalta mukana oli myös mittaamistehtävä. Oppilaan oli mitattava lyhyellä kynällä vesiväripensselin pituus. Mitat oli tarkoituksella valittu niin, ettei tullut tasatulosta. Tavoitteena oli saada yleiskuva koulutulokkaan matemaattisesta ajattelusta ja toiminnasta erilaisissa mittaustilanteissa. Kuitenkin tässä raportoinnissa tarkastellaan vain pensselin pituuden mittaamista.

Tutkimus on luonteeltaan eksploratiivinen epästandardien mittayksiköiden käyttöä kartoittava tapaustutkimus. Saatuja tuloksia verrataan Clementsin ja Saraman (2009) esittämään kahdeksan käsitteen muodostamaan kehykseen. Tutkimuskysymys muotoiltiin seuraavasti: Millaista on koulutulokkaiden pituuden mittaaminen epästandardia mittayksikköä käyttäen?

Tulokset ja pohdinta

Tehdyssä tutkimuksessa koehenkilöiden vastaukset kirjattiin vastauslomakkeisiin. Kerätystä videomateriaalista haettiin sitten tarkennuksia ja lisäyksiä oppilaiden toiminnan ja ajattelun kuvailuun. Taulukkoon 2 on koottu tärkeimmät havainnot määrällisesti ilmaistuna.

Suoritetussa testissä mitattiin kohdetta, joka oli pitempi kuin mitta. Erityisen tarkkailun kohteena oli se, millä tavoin koehenkilö siirtää mittavälinettä, kun se ei kerralla kata mitattavaa matkaa. Katsottiin, että oppilas ymmärtää mittaamisen additiivisen luonteen, jos hän mittaa siirtäessään pitää sormea merkkinä. Huomattiin, että puolet oppilaista ei pitänyt sormea merkkinä (Dudgeon, 2008). Mitattavan matkan osittaminen ja peittäminen perättäisillä mittavälineen siirroilla jäivät tällöin hatariksi. Hataruus näkyi myös mittaustuloksen ilmoittamisessa siten, että seitsemän oppilasta ilmoitti tuloksen olevan tasan 3 tai 4, vaikka visuaalinen havainto viittasi lukujen puoliväliin. Epätarkkuuksista huolimatta koulutulokkaat ymmärsivät toistamisen mittaamisen peruslähtökohtana, niin kuin Clements (2004) esittää 7-vuotiaiden kehityspiirteitä kuvatessaan.

Taulukko 2. Pensselin pituuden mittaaminen kynällä (N = 18)

Toiminnan kuvailu	*Frekvenssi*	*Toiminnan tarkennus*
Ei pitänyt sormea merkkinä	8	Heistä kahdella oikea tulos
Liu´utti kynää	4	
Tulos tasan, joista	7	
tasan 3	1	
tasan 4	6	
Oikea tulos, kolme ja puoli (3 ½), tulos heti tai tarkentavan vihjeen jälkeen	7	Heistä viidellä sormi merkkinä
Metrijärjestelmän käyttö(yritys)	4	
Pitää tietää kynän pituus, kynässä ei ole numeroita, ei voi mitata	2	
Osasi mitata ilman tarkentavaa ohjetta	6	

Kolmanneksella oppilaista näytti olevan kokemusta viivaimen ja metrijärjestelmän käytöstä. Heidän ensimmäiset arvionsa olivat sellaisia, ettei mittausta voi suorittaa välineellä, jossa ei ole metriasteikkoa tai vastaavaa. Havainto tukee Boulton-Lewisin ym. (1996) käsitystä siitä, että lapset, jotka eivät osaa käyttää epästandardia mittavälinettä, ovat saattaneet aiemmin käyttää onnistuneesti standardeja mittavälineitä.

Esimerkkejä oppilaiden vastauksista

Haastattelija näyttää oppilaalle vesiväripensseliä ja hetkeä myöhemmin lyhyttä kynän pätkää sekä ohjaa oppilaan toimintaa kysymyksillä. Oppilaan toimintaa kuvaava selitys on merkitty sulkeisiin.

Oppilas 1

Haastattelija: Mikä tämä on?

Oppilas: Pensseli.

Haastattelija: Joo, osaatko mitata tällä kynällä pensselin pituuden?

Oppilas: En osaa.

Haastattelija: Tee näin, käytä kynää mittana! Laita kynä alkuun, siirrä kynää ja katso, kuinka monta kynän mittaa tarvitaan!

Oppilas: 22 (siirsi kynää liu´uttaen).

Oppilas 2

Haastattelija: Mikä tämä on?

Oppilas: Pensseli.

Haastattelija: Osaatko mitata tällä kynällä pensselin pituuden?

Oppilas: En osaa, kynässä ei ole numeroita.

Haastattelija: Kokeile, käytä kynää mittana!

Oppilas: Luultavasti 3 (ei käytä sormea merkkinä).

Oppilas 3

Haastattelija: Mikä tämä on?

Oppilas: Pensseli.

Haastattelija: Joo, osaatko mitata tällä kynällä pensselin pituuden?

Oppilas: (Laskee sormen leveydellä, siirtää kynää), 29.

Haastattelija: Mitä 29?

Oppilas: 29 metriä.

Haastattelija: Entä kynä mittana?

Oppilas: 10 (siirsi sormea kynää pitkin).

Näyttää siltä, että koulutulokkailla on ennakkokäsityksiä siitä, mitä mittaaminen on ja mitä välineitä siihen tarvitaan. Standardeista mittayksiköistä metri esiintyy muutamien oppilaiden kommenteissa. Keskusteluista käy kuitenkin ilmi, ettei metri ole heille todellinen suhdekäsite (Hihnala 2009), vaan pikemminkin mittaustapahtumaan liitetty nimitys. Standardien mittayksiköiden käyttö epästandardien ohella vahvistaa sitä tietoa ja kokemusta, mikä oppilailla on ennestään esimerkiksi metrijärjestelmästä. Merkittävä piirre epästandardien yksiköiden käytössä on mm. se, että tällöin oppilaat itse tuottavat mittaluvun, sen sijaan, että he katsoisivat sen viivaimen asteikolta. Clementsin ym. (2004) mukaan tutkimukset eivät kuitenkaan tue ajatusta, että kannattaisi käyttää useampaa kuin yhtä epästandardia mittayksikköä kerrallaan. Sen sijaan epästandardin yksikön yhdistämistä viivaimen käyttöön suositellaan.

Tehdyssä tutkimuksessa tarkkailtiin vain oppilaan ”tavanomaista” toimintaa. Tutkijoiden (Clements ym., 2009; Haylock 2006) esittämiä käsitteitä, kuten mitan säilymistä tai transitiivisuutta, ei testattu lainkaan. Näiden lisäksi kiinnostava alue jatkotutkimukselle on selvittää, miten mittaamisen käsitteet (8 kappaletta) tulevat esiin eri ikäkausina, esimerkiksi lastentarhasta 2. luokan loppuun. Tällainen mittaamisen käsitteisiin liittyvä tieto olisi yksi lisätyökalu esi- ja alkuopetuksen matematiikan valmiuksien arviointiin. Mielenkiintoista on myös verrata erikokoisten kuutioiden tilavuuden arviointia, jota myös testattiin alustavasti. Onko esimerkiksi tilavuuksien arviointikyky suorassa suhteessa pituuksien arviointikykyyn?

Lähteet

Barmby, P., Bilsborough, L., Harries, T., & Higgins, S. (2009). *Primary mathematics: Teaching for understanding*. Open University Press. McGraw-Hill Education.

Boggan, M., Harper, S., & Whitmire, A. (2010). Using manipulatives to teach elementary mathematics. *Journal of Instructional Pedagogies*. Tulostettu 8.12.2010 osoitteesta: http://www.aabri.com/manuscripts/10451.pdf

Boulton-Lewis, G. M., Wilss, L. A., & Mutch, S. L. (1996). An analysis of young children´s strategies and use of devices of length measurement. *Journal of Mathematical Behavior, 15,* 329–347.

Clements, D. H. (1999). Teaching length measurement: Research challenges. *School Science and Mathematics, 99*(1), 5–11.

Clements, D. H. (2004). Major themes and recommendations. Teoksessa D. H. Clements & J. Sarama (Toim.), *Engaging Young Children in Mathematics* (ss. 7–72). London: LEA.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2008). Curriculum focal points for prekindergarten through grade 8 mathematics. *Teaching Children Mathematics,* February 2008, 361–365.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2009). *Learning and Teaching Early Math. The Learning Trajectories Approach.* New York, NY: Routledge.

Clements, D. H., & Stephan, M. (2004). Measurement in Pre-K to Grade 2 Mathematics. Teoksessa D. H. Clements & J. Sarama (Toim.), *Engaging Young Children in Mathematics* (ss. 299–317). London: LEA.

Dudgeon, J. (2008). Measures. Teoksessa A. Hansen (Toim.), *Childrens Errors in Mathematics* (ss. 103–126). UK: Learning Matters.

Erkinjuntti, R., Hihnala, K., Juntunen, A., Järvinen, M., Kytölä, R., & Laine, S. (1994). *Luvut ja kuviot. Yläasteen matematiikka 1.* Espoo: Weilin+Göös.

Fuson, K. C. (2004). Pre-K to Grade 2 Goals and Standards: Achieving 21st Century Mastery for All. Teoksessa D. H. Clements & J. Sarama (Toim.), *Engaging Young Children in Mathematics* (ss. 299–317). London: LEA.

Ginsburg, H.P. (2009). The challenge of formative assessment in mathematics education: Children´s minds, teachers´ minds. *Human Development, 52,* 109–128.

Ginsburg, H. P., & Amit, M. (2008). What is teaching mathematics to young children? A theoretical perspective and case study. *Journal of Applied Developmental Psychology, 29*, 274–285.

Hihnala, K. (2009). Suhteellisuus matemaattisena ajatusmallina peruskoulussa. Teoksessa A. Kallioniemi (Toim.), *Uudistuva ja kehittyvä ainedidaktiikka. Ainedidaktiikan symposiumi 8.2.2008 Helsingissä, osa 2* (ss. 531–546). Helsingin yliopisto. Tutkimuksia 299.

Hihnala, K. (2010). Suhteellisuuden käsite tulevien luokanopettajien ja erityisopettajien matemaattisessa ajattelussa. Teoksessa E. Ropo, H. Silfverberg & T. Soini (Toim.), *Toisensa kohtaavat ainedidaktiikat* (ss. 49–64). Tampere: Tampereen yliopiston opettajankoulutuslaitoksen julkaisusarja A31.

Hihnala, K. (2011). Some aspects of comprehensive school mathematics; A follow-up study. Teoksessa L. Burman, O. Björkqvist & A-S. Röj-Lindberg (Toim.), *Long-term Research in the Didactics of Mathematics and Science. Proceedings of the FMSERA annual symposium in Vaasa, October 27-28, 2006* (ss. 96–106). Report 31/2011.

Inhelder, B., Sinclair, H., & Bovet, M. (1974). *Learning and the development of cognition.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics.* Washington, DC: National Academy Press.

Opetushallitus (2004). *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004*. Tulostettu 22.2.2011 osoitteesta http://www.oph.fi/english/publications/2009/national_core_curriculum_for_basic_education

Osana, H. P., & Rayner, V. (2010). Developing numeracy: Promoting a rich learning environment for young children. *Encyclopedia of Language and Literacy Development*. London, ON: Canadian Language and Literacy Research Network. Osoitteesta http://www.literacyencyclopedia.ca/pdfs/topic.php?topId=286

Sarama, J., & Clements, D.H. (2009). *Early Childhood Mathematics Education Research. Learning Trajectories for Young Children*. New York & London: Routledge.

Seo, K. H. & Ginsburg, H. P. (2004). What is developmentally appropriate in early childhood mathematics education? Lessons from new research. Teoksessa D. H. Clements, J. Sarama & A. M. DiBiase (Toim.), *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education* (ss. 91-104). Hillsdale, NJ: LEA.

Steffe, L. P. (1991). Operations that generate quantity. *Learning and Individual Differences, 3,* 61–82.

Matematiikka kouluaineena – yläkoulun oppilaiden tekemien oppiainevertailujen paljastamia matematiikkakäsityksiä

PÄIVI PORTAANKORVA-KOIVISTO[1] JA HARRY SILFVERBERG[2]

paivi.portaankorva-koivisto@helsinki.fi
[1] Helsingin Yliopisto, Opettajankoulutuslaitos
[2] Tampereen yliopisto, Kasvatustieteiden yksikkö

Tiivistelmä

Tutkimuksessamme selvitimme, millaiseksi 7.-, 8.- ja 9.-luokkalaiset oppilaat kuvailevat matematiikan, sen oppimisen ja opiskelun vertailutilanteessa, jossa heitä pyydetään vapaamuotoisesti kuvaamaan matematiikan ja toisen vapaasti valitsemansa koulun oppiaineen eroja ja yhtäläisyyksiä. Vapaamuotoiset kirjoitelmat, jotka saimme 123 tytöltä ja 124 pojalta, analysoimme aineistolähtöisesti. Kirjoitelmissa esiin nousseita tyypillisimpiä matematiikkakäsityksiä vertaamme aikaisemmissa tutkimuksissa todettuihin oppilaiden matematiikkakäsityksiin. Metodisesti kiinnostavaa on, tuoko vastaajalähtöinen tutkimusotteemme esiin vain jo yleisesti tunnettuja matematiikkakäsityksiä vai saadaanko soveltamallamme metodilla paljastettua myös uusia piirteitä matematiikasta kouluaineena. Selvityksemme osoittaa, että valtaosa oppilaiden esiin tuomista matematiikkakäsityksistä on vanhastaan tunnettuja. Osaa käsityksistä emme olisi kuitenkaan saaneet etukäteen muotoiluilla kysymyksillä näkyviin. Avoimia lähestymistapoja on tarpeen kehittää muita menetelmiä täydentäviksi työkaluiksi käsitystutkimukseen.

Asiasanat

matematiikkakäsitys, matematiikka kouluaineena

Johdanto

Oppilaiden käsitykset matematiikasta ja sen oppimisesta vaikuttavat merkittävästi siihen, miten he matematiikasta kiinnostuvat, nauttivat ja miten he motivoituvat sen opiskeluun (Kloosterman, 2002). Toisaalta käsitykset matematiikasta ovat myös yhteydessä matemaattiseen ongelmanratkaisuun (Kloosterman & Stage, 1992) ja matematiikan osaamiseen yleisemminkin (mm. Kislenko, 2005;

Stage & Kloosterman, 1995). Pedagogiikan kannalta on siis tärkeää selvittää, millaisia käsityksiä oppilailla on matematiikasta.

Oppilaiden käsityksiä matematiikasta kouluaineena on tutkittu laajasti. Aineistoja on kerätty lomaketutkimuksin (mm. Kislenko, 2007; Pehkonen, 1994) ja haastatteluilla (mm. Presmeg, 2002) sekä näitä yhdistelemällä (mm. Wedege & Skott, 2007). Käsityksiä luotaavat kysymykset ovat valikoituneet vankan teoreettisen viitekehyksen ohjaamina. Tässä tutkimuksessa pyrimme lähestymään aihetta toisella tavalla, epäsuoremmin huomioimalla koulun opiskelukulttuuri. Tavoitteenamme on selvittää, miten oppilaat kuvaavat matematiikkaa, kun vertailevat sitä toiseen, valitsemaansa oppiaineeseen nostaen esiin yhtäläisyyksiä ja eroja, mutta muuten vapaasti näkökulman valiten. Metodisesti kiinnostavaa on, paljastaako vastaajalähtöinen tutkimusotteemme vain jo yleisesti tunnettuja oppilaiden matematiikkakäsityksiä vai rikastaako käyttämämme metodi kuvaa matematiikasta kouluaineena.

Käsitykset ja uskomukset matematiikassa

Oppilaiden käsityksiä ja uskomuksia matematiikasta on tutkittu yli 30 vuotta (ks. Leder, Pehkonen & Törner, 2002). Arkikielessä käsitteitä käsitys, uskomus ja näkemys käytetään usein lähes synonyymeina. Wedegen ja Skottin (2007) mukaan kuitenkin uskomukset, käsitykset, näkemykset, asenteet, mielikuvat ja tunteet voidaan erottaa toisistaan kahden dimension, pysyvyyden ja intensiteetin suhteen. Uskomukset ovat pysyviä ja vähemmän intensiivisiä, tunteet taas intensiivisiä, mutta vähemmän pysyviä. Asenteet, näkemykset, käsitykset ja mielikuvat sijoittuvat näiden ääripäiden välille. (vrt. myös McLeod & McLeod, 2002). Furinghetti ja Pehkonen (2002) erottelevat uskomukset edelleen objektiivisiin ja subjektiivisiin uskomuksiin. Objektiivisia uskomuksia ovat julkiset ja viralliset yhteisön hyväksymät uskomukset ja subjektiivisia yksilön henkilökohtaiset uskomukset. Oppilaiden henkilökohtaisia käsityksiä matematiikasta ja sen opetuksesta värittävät aina osaltaan yhteisön yleisesti omaksumat käsitykset matematiikan kouluaineesta. Uskomusten katsotaan muodostavan ryppäitä, jotka sisältävät sekä affektiivisia että tiedollisia osa-alueita. Jos henkilön mielestä matematiikka on tylsä oppiaine ja pelkkä sääntöjen luettelo, hän ei todennäköisesti nauti matematiikasta, eikä opi sitä helposti. Jos hän taas ei koe osaavansa matematiikkaa, niin hänelle ei välttämättä synny riittävää itseluottamusta opiskellakaan sitä. (Furinghetti & Pehkonen, 2002; Pehkonen & Pietilä, 2003).

Matematiikan uskomusvarantoon kuuluvat uskomukset matematiikasta oppiaineena ja sen oppimisesta ja opiskelusta. Uskomusvarantoa ovat myös oppilaan uskomukset itsestään ja pystyvyydestään matematiikan oppijana, oppimisen

säätelystään sekä tehtävään tai tavoitteeseen suuntautumisestaan (Malmivuori, 2001). Uskomusvarantoon kuuluvat myös luokan sosiaalisiin ja sosio-matemaattisiin normeihin liittyvät uskomukset (Yackel & Cobb, 1996) sekä opettajan rooliin ja toimintaan kohdistuvat uskomukset. (Op't Eynde, De Corte & Verschaffel, 2002; Op't Eynde & DeCorte, 2004.) Uskomukset matematiikasta tieteenä (Underhill, 1988) ja vastaavasti kouluaineena (Pehkonen, 1994) voivat luonnollisesti suurestikin poiketa toisistaan.

On syytä todeta, että tämän tutkimuksen toteutustapa ja aineisto eivät anna mahdollisuutta arvioida sitä, ovatko oppilaiden luonnehdinnat matematiikasta kouluaineena ensisijassa uskomuksia, käsityksiä, näkemyksiä vai asenteita. Jatkossa kutsumme aineistoomme sisältyviä oppilaiden luonnehdintoja tästä syystä käsityksiksi pyrkimättä tässä yhteydessä tarkempaan käsiteanalyysiin.

Oppilaiden matematiikkakäsityksiä ja niiden luokittelua

Tässä tutkimuksessa kokeilimme uudentyyppistä tiedonkeruuntapaa, jossa oppilas saa vapaasti valita piirteet, joiden avulla matematiikkaa kouluaineena kuvaa. Seuraavaksi tarkastelemme väitteitä ja luonnehdintoja, joita on käytetty aiemmassa teorialähtöisessä tutkimuksessa matematiikkakäsityksiä tarkasteltaessa. Tutkimuksissa kohderyhminä ovat olleet niin peruskouluikäiset oppilaat kuin lukioikäiset opiskelijat. Jaottelemme piirteet kolmeen kategoriaan: (1) käsitykset oppiaineesta, sen opettamisesta ja oppimisesta, (2) käsitykset oppijasta itsestään matematiikan opiskelijana, ja (3) käsitykset opettajasta, hänen toiminnastaan ja oppimiskäytänteistä.

Oppilaiden ja opiskelijoiden käsityksiä matematiikasta oppiaineena, sen opettamisesta ja oppimisesta on tutkittu muun muassa antamalla oppilaiden arvioida seuraavanlaisia väitteitä:

1. ”matematiikka ei muutu” (Amirali, 2010)
2. ”matematiikka on aksiomaattinen järjestelmä”, ”matematiikka on kaavoja lauseita ja laskemista” (Mapolelo, 2009; Schinck, Neale, Pugalee & Cifarelli, 2008)
3. ”matematiikka on ongelmanratkaisua” (Amirali, 2010; Schinck ym., 2008)
4. ”matematiikka on eräs opetussuunnitelman oppiaine” (Mapolelo, 2009)
5. ”matematiikka on tärkeää ja sitä tarvitaan arkielämässä” (Kislenko, Grevholm & Lepik, 2007), ”matematiikka on hyödyllistä ja auttaa tulevaisuudessa saamaan hyvän ammatin” (Kislenko, 2007; Amirali, 2010; Berkaliev & Kloosterman, 2009)

6. ”matematiikka on helppoa ja mielenkiintoista” tai ”matematiikka on vaikeaa, eikä kovin kiinnostavaa” (Ottelin, 1998; Amirali, 2010; Mapolelo, 2009)
7. ”matematiikka on tylsää” (Kislenko ym., 2007; Kislenko, 2007, Berkaliev & Kloosterman, 2009)
8. ”matematiikka on työlästä ja tehtävien tekeminen vaatii aikaa ja sitkeyttä” (Kislenko, 2007; Mapolelo, 2009; Schinck ym., 2008)
9. ”matematiikan tehtävissä on vain yksi oikea ratkaisu ja siihen päästään tietyllä menetelmällä (Kislenko, Breiteig, & Grevholm, 2005)

Näiden väitteiden avulla on kartoitettu erityisesti käsityksiä matematiikan luonteesta (väitteet 1-3), matematiikan merkityksestä (väitteet 4 ja 5) ja matematiikan oppimisesta (väitteet 6-9).

Oppilaan käsitystä itsestään matematiikan oppijana on puolestaan luodattu pyytämällä oppilaita ottamaan kantaa muun muassa seuraaviin väittämiin:

1. ”matematiikka vaatii hyvää muistia” (Amirali, 2010; Mapolelo, 2009)
2. ”luotan itseeni matematiikan oppijana” (Amirali, 2010; Mapolelo, 2009; Berkaliev & Kloosterman, 2009)
3. ”nautin matematiikan oppimisesta” (Amirali, 2010; Schinck ym., 2008; Berkaliev & Kloosterman, 2009)
4. ”matematiikka on vaikeaa, mutta haluan yrittää menestyä” (Ottelin, 1998; Kislenko ym., 2007), ”matematiikka on vaikeaa ja sopii vain älykkäille” (Mapolelo, 2009), ”matematiikka on turhauttavaa” (Berkaliev & Kloosterman, 2009)
5. ”haluan oppia vain käytännön matematiikkaa” (Ottelin, 1998)

Väitteiden avulla on selvitetty muun muassa oppilaan minäpystyvyyteen liittyviä uskomuksia (väitteet 1 ja 2), oppilaan affektiivisia uskomuksia (väitteet 3 ja 4) ja uskomuksia oppiaineen hyödyllisyydestä oppilaalle itselleen (väite 5).

Matematiikan opetukseen ja opiskeluun liittyviä käsityksiä on puolestaan tutkittu väitteillä:

1. ”matematiikan opetus on huonoa” tai ”matematiikan opetus on hyvää” (Mapolelo, 2009)
2. ”matematiikka on yksinäistä ahertamista ja vaatii ponnistelua” (Mapolelo, 2009)
3. ”matematiikkaa opetetaan opettajajohtoisesti ja opitaan harjoittelemalla” (Mapolelo, 2009)

On selvää, että edellä listatut väitteet kattavat laajasti ne piirteet, joka tavanomaisesti liitetään matematiikan olemukseen kouluaineena. Kyselylomaketutkimuksissa ja joskus myös haastattelutilanteissa tutkimushenkilö ilmaisee kantansa esitettyihin kysymyksiin ja teemoihin, huolimatta siitä, onko hän niitä spontaanisti ajatellut vai ei. Tämä voi muuttaa tutkimuksella saatua kuvaa matematiikkakäsityksistä.

Tutkimuskysymys, metodi ja aineisto

Tutkimuksen tavoitteena oli selvittää oppilaiden käsityksiä matematiikasta kouluaineena, kun tehtävän oli verrata matematiikkaa johonkin toiseen vastaajan itsensä valitsemaan oppiaineeseen. Tutkimuskysymyksemme oli, millaisia matematiikkaan, sen opiskeluun ja oppimiseen liittyviä käsityksiä oppilaat tällaisessa vertailutilanteessa nostavat esiin.

Tutkimuksen kohteena olivat yhden yläkoulun 7., 8. ja 9. luokkien oppilaat. Oppilaat laativat lyhyehkön kirjoitelman, jossa he vertailivat matematiikkaa ja toista vapaasti valitemaansa oppiainetta keskenään nostaen esiin yhtäläisyyksiä ja eroja. Tehtävänanto oli pyritty laatimaan siten, että oppilaat jaksaisivat keskittyä tehtävään. Kirjoitelmien laatiminen ei vienyt liikaa aikaa ja oli näin toteutettavissa luokanohjaajantuokiolla, jolloin oppilaat laativat kirjoitelmat tutun opettajan ohjauksessa. Tehtävänanto oli seuraava:

> *Vertaa matematiikan ja jonkin toisen valitsemasi oppiaineen opiskelua toinen toisiinsa. Keksi ainakin 5 yhtäläisyyttä ja 5 eroavaisuutta. Kirjoita niin, että lukija tietää, kumpaa ainetta kulloinkin kuvailet.*

Tässä raportoitava tutkimusaineisto perustuu 247 yläluokan oppilaan vastaukseen. Aineistoon hyväksyttyjä vastauksia oli 96 (7. lk), 85 (8. lk) ja 66 (9. lk) oppilaalta. Vastaajista 123 oli tyttöjä ja 124 poikia. Kyselyyn vastasivat tutkittavan yläkoulun kaikki läsnäolleet oppilaat. Yhdeksän vastausta hylättin, sillä ne eivät olleet ohjeen mukaisia. Vastaukset analysoitiin aineistolähtöisesti poimien niistä ensin yksittäiset maininnat ja kategorisoimalla ne tämän jälkeen laajemmiksi temaattisiksi kokonaisuuksiksi. Yksittäisiä luonnehdintoja löytyi aineistosta kaikkiaan 550 kappaletta. Tavoitteena oli muodostaa dimensioita, joiden suhteen oppilaat vertailua tekivät. Analyysin alkuvaiheessa käytettiin luotettavuuden lisäämiseksi rinnakkaisluokittelua, jonka jälkeen kategorioiden luonnehdintoja tarkennettiin ja lopulliset dimensiot muodostettiin. Dimensioiden nimeäminen perustui aineistosta poimittuihin ilmaisuihin, joten varsinaista yläkategorioiden muodostamista ei analyysin tässä vaiheessa tehty. Esimerkiksi dimensio ”Yksinään opiskelu – yhdessä oppiminen oppiaineessa” konstruoitiin ilmauksista:

”Molemmissa paljon yksin tekemistä”, ”Molemmissa tehdään yhdessä”, “Matematiikassa enemmän yksin tekemistä” ja “Matematiikassa vähemmän yksin tekemistä”.

Lopuksi aineistolle tehtiin määrällinen analyysi dimensioittain. Useimmat oppilaiden vastauksista luokiteltiin vähintään kahteen eri dimensioon. Kuten yläkoulun oppilaille on tavallista, jotkut vastauksista olivat erittäin niukkoja, vain muutaman sanan mittaisia, jotkut runsaita ja rönsyileviä. Kuviossa 1 on esitetty esimerkki eräästä poikkeuksellisen hyvin jäsennellystä vastauksesta, johon sisältyneet luonnehdinnat sisällytettiin neljään eri dimensioon.

Kuvio 1. Tytön (8. lk.) vastaus (vertailuoppiaineena fysiikka)

Useimmat vastauksista eivät olleet niin jäsenneltyjä kuin yllä oleva esimerkki. Niissä oli useimmiten listattu hajanaisesti matematiikan ja valitun vertailuaineen yhteisiä piirteitä ja eroja.

Tulokset

Tuloksissa yllättävää oli, että oppilaat valitsivat niin useita eri oppiaineita vertailukohdakseen. Ainoastaan uskontoa ja elämänkatsomustietoa ei valittu vertailtavaksi oppiaineeksi. Myös joitakin valinnaisia aineita mainittiin kuten teknologia ja tietotekniikka. Useimmiten matematiikkaa verrattiin kuvataiteeseen (34 oppilasta), fysiikkaan (33 oppilasta), äidinkieleen (30 oppilasta) ja englantiin (28 oppilasta). Liikuntaan matematiikkaa verrattiin 23 vastauksessa ja kotitalouteen

22 kertaa. Biologian, maantiedon tai historian oli valinnut vertailuaineekseen 28 oppilasta. Kemiaan matematiikkaa verrattiin 16 vastauksessa.

Useimmista vastauksista pystyi toteamaan, valittiinko toinen oppiaine ensisijaisesti yhtäläisyyksien vai eroavaisuuksien perusteella. Joskus oppilaat valitsivat vertailtavaksi oppiaineeksi sen, joka oli heidän mielestään täydellinen vastakohta matematiikalle. Joskus valinnan perustana oli selkeä yhtäläisyys oppiaineiden kesken, esimerkiksi ”*kummassakin ratkotaan ongelmia* ...” (aineina matematiikka ja fysiikka, poika 7. lk.). Joskus yhtäläisyyksiä löytyi oppiaineiden opiskeluun liittyen kuten ”*molemmissa hyvä ope, molemmissa pitää osata, molemmissa pitää olla vähän tarkka* ...”, (aineina matematiikka ja kuvataide, tyttö 7. lk.). Joillakin valintaan vaikutti, että kumpaakin oppiainetta opetti sama opettaja. Valinnan saattoi ratkaista myös opetuksen rakenne ja toimintatavat, esimerkiksi ”lukuaineita, *muistiinpanoja, kokeita, pistoja*” (aineina matematiikka ja historia, tyttö 8. lk.).

Taulukossa 1 on esitetty matematiikkaa kouluaineena koskevat yksittäiset luonnehdinnat dimensioittain.

Taulukko 1. Dimensiot, joille yleisimmät oppilaiden esiin nostamat matematiikkakäsitykset ryhmittyivät.

	Dimensio	*f*	*f[%]*
1.	Oppiaineen mukavuus – tylsyys	132	53,4
2.	Oppiaine sisältää laskemista – ei sisällä laskemista	91	36,8
3.	Oppiaineen vaikeus – helppous	69	27,9
4.	Oppiaineen tuntityöskentelyn rentous – tiukkuus	63	25,5
5.	Oppiaineen työläys – vähätöisyys	50	20,2
6.	Vihkotyön määrä oppiaineessa: suuri – vähäinen	44	17,8
7.	Kokemus oppiaineesta tärkeänä – turhana	35	14,2
8.	Tarkkaavaisen kuuntelemisen määrä ja tarpeellisuus oppiaineissa: suuri – vähäinen	29	11,7
9.	Yksinään opiskelu – yhdessä oppiminen oppiaineessa	20	8,1
10.	Oppiaineessa työskentelyn luovuus – luovuuden puute	17	6,9

Seuraavassa tarkastelemme dimensioita tarkemmin. Nostamme esiin näkökulmia, joita käytetyllä tutkimusmetodilla paljastuu sen sijaan, että kuvaisimme kyseistä kohorttia ja dimension yleisyyttä siinä.

Dimensio 1: Oppiaineen mukavuus – tylsyys

Useimmiten oppilaat olivat valinneet vertailukohdakseen oppiaineen, jonka avulla he saattoivat verrata oppiaineiden mukavuutta ja tylsyyttä. Tässä dimensiossa tyttöjen ja poikien välinen ero oli poikkeuksellinen verrattuna muihin dimensioihin. Matematiikkaa piti vertailuainetta tylsempänä tai sen kanssa yhtä tylsänä 38 tyttöä (30,9 %) ja 60 poikaa (48,4 %). Yhtä kivana tai kivempana 18 tyttöä (14,5 %) ja 16 poikaa (12,2 %). Mukavuuden ja tylsyyden suhteen matematiikkaa verrattiin useimmiten kuvataiteeseen (18 oppilasta, joista 12 tyttöä), äidinkieleen (17 oppilasta, joista 11 tyttöä) ja fysiikkaan (16 oppilasta, joista 12 poikaa).

> *Tunnit yhtä pitkiä. Kummatkin yhtä tylsiä. (aineina matematiikka ja äidinkieli, poika 8. lk.)*

> *Matematiikka: …hauskaa ja kehittävää. Äidinkieli: …ei niin hauskaa ja kehittävää. (aineina matematiikka ja äidinkieli, poika 7. lk.)*

> *Matikka on liian tylsää ja pitkästyttävää, kun pitää koko ajan istua hiljaa ja tehdä tehtäviä. Köksä on vapaampaa ja käytännöllisempää. (aineina matematiikka ja kotitalous, poika 7. lk.)*

Dimensio 2: Oppiaine sisältää laskemista – ei sisällä laskemista

Joskus oppiaineita yhdistivät yhteiset sisällöt (36,8 %) kuten ”*molemmissa pitää ymmärtää murtolukuja...*” (aineina matematiikka ja kotitalous, tyttö 9. lk.), ”*numeroita, koordinaatit, asteita*” (aineina matematiikka ja maantieto, poika 7. lk.) Joskus yhtäläisyys laskemiseen syntyi toisen oppiaineen kautta ”*yhteistä: liittyy fysiikkaa ...*” (aineina matematiikka ja liikunta, poika 8. lk.). Yhteistä näille vastauksille oli, että monet oppilaat kokivat työskentelyn matematiikassa olevan ensisijaisesti laskemista. Tässä suhteessa samantyyppisinä oppiaineina he mainitsivat useimmiten fysiikan (17 mainintaa), kotitalouden (11 mainintaa) ja kemian (5 mainintaa), mutta jotkut myös esimerkiksi historian (3 mainintaa).

> *Kummassakin luetaan muodollisesti kirjasta. Kummassakin on hyvä ja pitää muistaa asioita. Biologiassa on hyötyä käydä ulkona. Biologiassa ei paljon lasketa ja asiat yleensä liittyvät luontoon. Matikassa tehdään laskuja vihkoon. Matikassa ei lueta pitkää tekstiä. (aineina matematiikka ja biologia, tyttö 8. lk.)*

Dimensio 3: Oppiaineen vaikeus – helppous

Niistä 69 oppilaasta (27,9 %), jotka vertasivat aineiden vaikeutta/ helppoutta, 39 (56,5 %) piti matematiikkaa vaikeana oppiaineena ja 30 (43,5 %) helppona tai ainakin helpompana aineena kuin vertailuaine. Yleisimmin vertailuaineena mainittiin tällöin fysiikka (18 mainintaa).

> *Fysiikassa ei aina lasketa. Fysiikassa käsitellään muutakin kuin matikkaa. Fysiikan tunteja on vähemmän, eri opettaja [ja] fysiikka on vaikeampaa. (aineina matematiikka ja fysiikka, tyttö 9. lk.)*

Joistakin vastauksista oli vaikeaa tulkita, kokeeko oppilas koulun tarjoamat haasteet oppilaalle liian vähäisinä vai ylivoimaisina.

> *Kaikissa oppiaineissa vaan istun tunnilla ja ennen koetta ehkä vilkasen kirjaa. (aineina matematiikka ja äidinkieli, poika 9. lk.)*

Dimensio 4: Oppiaineen tuntityöskentelyn rentous – tiukkuus

Matematiikan tuntityöskentelyyn kiinnitti huomiota 25,5 % vastaajista. Matematiikan tuntityöskentelyä pidettiin tiukempana verrattuna esimerkiksi työskentelyyn kuvaamataidossa (18 mainintaa) ja kotitaloudessa (10 mainintaa).

> *Kuvaamataidossa on letkeämpää, helpompaa, rennompaa, iloisempaa ja vapauttavampaa. (aineina matematiikka ja kuvataide, tyttö 8. lk.)*

Matematiikkaa ”tiukemmat” aineet mainittiin lähinnä yksittäisissä vastauksissa ja näissä opettajan rooli ja toiminta nousivat keskiöön.

> *Äidinkieli: Projektit vie yöunet. Matikka: Ei stressiä, itsenäistä opiskelua (aineina matematiikka ja äidinkieli, tyttö 9. lk.)*

> *Matikan tunneilla on suht rentoa. Englannin tunneilla tehdään töitä raskaimmin ottein. Englannin tunneilla on lähes hiljaista kun opettaja puhuu. Matikan ei. (aineina matematiikka ja englanti, tyttö 9.lk.)*

> *Englannin tunneilla kuri pysyy osittain pelon avulla. Englannin tunneilla läksyt tehdään, koska pelätään seurauksia. Matematiikan tunneilla on ylei-*

semmin mukavaa. Matematiikan opettaja on läheisempi ja kertoo enemmän itsestään. (aineina matematiikka ja englanti, tyttö 9. lk.)

Molemmissa oppiaineissa lasketaan, kirjoitetaan, kuunnellaan, luetaan, matematiikassa ei tehdä testejä, matematiikka on tylsempää ja tiukempaa. (aineina matematiikka ja fysiikka, tyttö 7. lk.)

Dimensio 5: Oppiaineen työläys – vähätöisyys

Vastaajista 20,2 % valitsi vertailuaineensa oppiaineen työläyden perusteella. Oppilaista 27 piti matematiikkaa yhtä työläänä tai työläämpänä kuin vertaamaansa ainetta. Lähes yhtä monta oppilasta (22 mainintaa) piti kuitenkin matematiikkaa erityisesti kieliin (äidinkieli, ruotsi, englanti) ja fysiikkaan verrattuna vähemmän työläänä.

[Molemmissa] tehdään paljon tehtäviä, kerrataan paljon ja läksyä melkein aina. Englannissa puhutaan paljon ja mielenkiintoisemmat tehtävät. (aineina matematiikka ja englanti, tyttö 7. lk.)

Dimensio 6: Vihkotyön määrä oppiaineessa: suuri – vähäinen

Noin joka kuudes oppilas (17,8 %) kiinnitti huomiota vihkotyöhön osana tuntityöskentelyä. Erityisesti äidinkieli ja kemia mainittiin vertailuaineina, joissa muistiinpanoja tehdään paljon.

Yhtäläisyydet: Tunnin jälkeen ranne kipeä kirjoittamisesta. (aineina matematiikka ja äidinkieli, poika 8. lk.)

[matematiikka ja kemia] ovat matemaattisia aineita, lasketaan laskuja [ja] kummassakin käydään taululla kirjoittamassa. Matikassa joudutaan tekemään enemmän, tulee enemmän läksyjä, jotka on tylsiä, niihin ei voi etsiä vastauksia kirjasta. (aineina matematiikka ja kemia, tyttö 7. lk.)

Dimensio 7: Kokemus oppiaineesta tärkeänä – turhana

Oppiaineen tärkeyteen tai turhuuteen liittyvän vertailun teki oppilaista 14,2 %. Matematiikka piti tärkeänä oppiaineena 23 oppilasta, mutta vastaavasti 11 oppilasta oli sitä mieltä, että matematiikan opiskelu oli ennemminkin turhaa.

Molempien opiskelu on mukavaa, innostavaa ja tärkeää (aineina matematiikka ja äidinkieli, tyttö 9. lk.)

[Sekä historia että matematiikka] ovat mukavia aineita, kummastakin tulee paljon läksyä, kummatkin ovat helppoja, kummassakin on vaikeat kokeet. Matikka on tarpeellista, historia ei. (aineina matematiikka ja historia, tyttö 7. lk.)

Molemmat ovat oppiaineita, molempia tarvitaan jonkin verran elämässä, molemmat vaativat työtä, molemmat on kivoja, molemmat ovat mielenkiintoisia. Yhteiskuntaopin asiat ovat yleissivistäviä, ne jäävät muistiin, koska siinä opiskellaan suuria kokonaisuuksia, eikä pikkutarkkoja sääntöjä, jotka unohtuvat kokeen jälkeen. Yhteiskuntaoppia on paljon vähemmän kuin matematiikkaa peruskoulussa. (aineina matematiikka ja yhteiskuntaoppi, tyttö 9. lk.)

Dimensio 8: Tarkkaavaisen kuuntelemisen määrä ja tarpeellisuus oppiaineissa suuri – vähäinen

Oppilaista 11,7 % vertaili aineita niiden edellyttämän tarkkaavaisen kuuntelemisen perusteella. He totesivat, että tunnilla on keskityttävä kuuntelemaan opetusta, mutta passiivisen roolinkin voi tietoisesti ottaa.

Yhtäläisyyksiä: - on tärkeä olla tosi tarkka tunneilla. (aineina matematiikka ja historia, tyttö 7.lk)

Matikassa pitää laskea, kuunnella/keskittyä, olla hiljaa, piirtää. (aineina matematiikka ja fysiikka, tyttö 7.lk)

Dimensio 9: Yksinään opiskelu – yhdessä oppiminen oppiaineessa

Joillekin oppilaille matematiikan opiskelu näyttäytyi edelleen yksin puurtamisena (14 mainintaa). Tähän dimensioon vastauksista voitiin luokitella 8,1 %. Ilmeisesti työskentely on hyvin erilaista eri opetusryhmissä, sillä myös yhdessä tekeminen nostettiin esiin.

…molemmissa pojat riehuu ja meuhkaa paljon. Matikka: Paljon yksintekemistä, ei saa juurikaan keskustella, … (aineina matematiikka ja kotitalous, tyttö 7.lk.)

Matikka: pitää istua paikoillaan. Liikunta: saa pelata joukkueessa. (aineina matematiikka ja liikunta, poika 7. lk.)

Matikassa istutaan ryhmissä (joka on kivempaa!) kun taas fysiikassa pareittain. (aineina matematiikka ja fysiikka, tyttö 8. lk.)

Molemmissa tehdään töitä koko tunti itsenäisesti. (aineina matematiikka ja ruotsi, tyttö 9. lk.)

Yhtäläisyyttä: Luennointia (aineina matematiikka ja musiikki, poika 9. lk.)

Dimensio 10: Oppiaineessa työskentelyn luovuus – luovuuden puute

Oppilaista 17 (6,9 %) vertaili oppiaineita luovuuden kannalta. Heistä 11 totesi, ettei matematiikka tarjoa tilaa luovuudelle ainakaan samassa määrin kuin vertailuaineina käytetyt kuvaamataito (6), kotitalous (2), liikunta (2) ja musiikki (1).

Kuvataiteessa saa olla luova, matikassa ei. Kuvis on kivaa, matikka ei. Kuviksessa voi tehdä omanlaisia päätöksiä, matikassa ei. (aineina matematiikka ja kuvataide, tyttö 7. lk.)

…molemmissa saa olla luova (matikassa omia pohdintoja) (aineina matematiikka ja kuvataide, tyttö 7. lk., samasta ryhmästä kuin edellinen)

Matikka: ei aina kiinnosta, liian rajoitettua työskentelyä, ei saa toteuttaa itseään, vaaditaan liikaa. Kuvis: vapaata työskentelyä, saa tehdä mitä haluaa, ei niin tarkkoja sääntöjä, jaksaa kun saa ottaa rennommin, ei vaadita koko ajan niin paljon. (aineina matematiikka ja kuvataide, tyttö 7. lk.)

Miten oppilaat tällaisessa vertailutilanteessa kuvaavat matematiikkaa, sen opiskelua ja oppimista?

Kun ensimmäinen aineistolähtöinen analyysi oli tehty, dimensiot voitiin ryhmitellä pääkategorioihin, mitkä aiempi alan tutkimus on nostanut esiin: (1) käsitykset oppiaineesta, sen opettamisesta ja oppimisesta, (2) käsitykset oppijasta itsestään matematiikan aiemman tutkimuksen mukaan opiskelijana, ja (3) käsitykset opettajasta, hänen toiminnastaan ja oppimiskäytänteistä. Taulukossa 2 on esitelty kategoriat ja niihin sisällytetyt dimensiot.

Suurin osa vastauksista (56,0 %) sijoittui dimensioille, jotka kertoivat matematiikan luonteesta, sen opettamisesta ja oppimisesta. Yleisesti ottaen matematiikkaa vaikuttaa oppiaineelta, joka jakaa selvästi oppilaiden mielipiteet. Joillekin se näyttäytyy tylsänä, turhana ja vaikeana, toisille puolestaan mukavana, hyödyllisenä ja helppona. Lisäksi matematiikkaa pidettiin kumuloituvana oppiaineena, jota oppiakseen on oltava tarkkaavainen.

Taulukko 2. Kolme pääkategoriat ja niihin sisällytetyt dimensiot.

	Kategoria	*Dimensio*	*f*	*f[%]*
1.	Käsitys oppiaineesta, opettamisesta ja oppimisesta	Oppiaineen mukavuus – tylsyys	308	56,0
		Oppiaine sisältää – ei sisällä laskemista		
		Oppiaineen työläys – vähätöisyys		
		Kokemus oppiaineesta tärkeänä – turhana		
2.	Käsitys itsestä oppijana	Oppiaineen vaikeus – helppous	69	12,5
3.	Käsitys opettajasta, hänen toiminnastaan ja oppimiskäytänteistä	Oppiaineen tuntityöskentelyn rentous – tiukkuus	173	31,5
		Vihkotyön määrä oppiaineessa: suuri – vähäinen		
		Tarkkaavaisen kuuntelemisen määrä ja tarpeellisuus oppiaineissa: suuri – vähäinen		
		Yksinään opiskelu – yhdessä oppiminen oppiaineessa		
		Oppiaineessa työskentelyn luovuus – luovuuden puute		

[Sekä kotitaloudessa, että matematiikassa] on laskemista, uutta asiaa tulee vanhan päälle ja opettaja selittää asiat. Kotitaloudessa on enemmän itse tekemistä, matikassa kirjan tehtäviä. Kotitalous on vapaampaa. (aineina matematiikka ja kotitalous, tyttö 8. lk.)

matematiikka vaatii keskittymistä ja on liian totista puuhaa (aineina matematiikka ja liikunta, tyttö 7. lk.)

Matematiikkaa kuvattiin tiiviisti esitettynä ja tekniikoita ja kaavoja sisältävänä oppiaineena *"Matikan kirjassa kaikki on lyhyemmin kerrottuja, mutta silti opettajalta menee kauan selittää se."* (aineina matematiikka ja fysiikka, poika 7. lk.)

Matematiikan opiskelu oppilaiden luonnehdintojen mukaan vaatii paljon työtä, kekseliäisyyttä ja tarkkuutta. Matematiikassa menestyminen vaatii älyä, päättelykykyä ja luovaa toimintaa. Rutiineja ei opi ilman harjoittelua, mutta ponnistelemalla matematiikassa voi kehittyä hyväksi.

> *Liikunnassa harjoitellaan kehon käyttöä, kun taas matikassa harjoitellaan aivojen käyttöä. Liikunta on fyysisempää kuin matematiikka. Kummassakin tulee nälkä. Kummatkin ovat rankkoja. Kummatkin ovat vaikeita. Joutuu käyttämään järkeä. Ei pärjää ilman välineitä. (aineina matematiikka ja liikunta, poika 8. lk.)*

Yllättävää oli, että oppilaaseen itseensä matematiikan oppijana liittyviä luonnehdintoja löytyi aineistosta vain 12,5 % ja nämäkin liittyivät siihen, kuinka vaikeaksi tai helpoksi matematiikka koetaan. Useista vastauksista kävi kuitenkin ilmi, että oppilaan tuntemukset itsestään matematiikan oppijana ovat tärkeitä oppilaan minäpystyvyyttä tutkittaessa. Esimerkiksi vastaus "oltiin erityisopetuksessa molemmissa" (aineina matematiikka ja englanti, poika 9. lk.) kertoo oppiaineen haasteista ja oppilaan valmiuksista.

Vastaukset osoittivat myös, miten merkittävässä roolissa opettaja on oppilaan matematiikkakäsitysten muodostumisessa.

> *Jos biologian tunnilta myöhästyy 10 min ei saa jälki-istuntoa, mutta jos matikan tunnilta myöhästyy 10 min saa 75 min istumista. Biologiassa on rennompi opettaja kuin matikassa. Matikan ope on näsäviisas, biologian ei. (aineina matematiikka ja biologia, tyttö 7. lk.)*

Matematiikan oppimisen katsottiin vaativan myös itseluottamusta.

> *Yhtäläisyydet: tarvitaan matikkaa, tarvitaan päättelykykyä, itseluottamus, luovuus, ryhmä ja itsenäisyys. (aineina matematiikka ja kotitalous, tyttö 9. lk.)*

Oppilaiden luonnehdinnoista 31,5 % käsitteli työskentelyä oppitunnilla. Matematiikan oppituntia leimaa joidenkin vastaajien mielestä se, että tunnilla pitää istua paikoillaan, ei saa liikkua ja tulee olla hiljaa. Tunnit ovat rutiiinimaisia, tehtävät ovat tarkkaan määrättyjä ja tunneilla on tiukka kuri.

> *Matematiikassa pitää olla hiljaa, on tyhmä istumajärjestys ja kireetä. (aineina matematiikka ja biologia, tyttö 7. lk.)*

Opettajan edellyttämät keskittymisen ja kuuntelemisen vaatimukset aiheuttivat joissakin vastaajissa ärtymystä.

> *[Kuvataiteessa] on hauskaa, monipuolisempaa tekemistä, välillä saa tehdä mitä haluaa, pääsee pihalle, saa kuunnella musiikkia, rentoa. [Matematiikassa on] tylsää, aina vaan lasketaan, määrätyt tehtävät, sisällä aina, ei musiikkia, ei rentoa. (aineina matematiikka ja kuvataide, tyttö 7. lk.)*

Matematiikan oppimiskäytänteitä kuvailtiin vihkoon kirjoittamisena ja laskemisena, ja monia oppilaita huoletti vihkotyön suuri määrä. Jotkut oppilaista mainitsivat, että matematiikan tunneilla on aina vanhan kertaamista. Matematiikan tuntityötä kuitenkin kuvattiin siten, että tunneilla opitaan jatkuvasti uusia asioita, joidenkin vastaajien mielestä liiankin nopeasti.

> *Matikassa mennään nopeammin kuin biologiassa, mikä on huono juttu, koska matikassa ei ymmärrä mitään. (aineina matematiikka ja biologia, tyttö 7. lk.)*

Vaikka matematiikan tunneilla aineiston perusteella tehdään edelleen paljon tehtäviä, toisinaan käytetään myös tietokoneita ja matematiikan tunnin lopussa saadaan paljon läksyjä.

> *Matematiikassa lasketaan, on numeroita, koordinaatit, asteita, tehtäviä läksynä, paljon tehtäviä, ei ryhmätöitä, kivaa, käytetään tietokonetta ja vähän kokeita. (aineina matematiikka ja maantieto, poika 7. lk.)*

Vaikka monet vastaajista kertoivat, että matematiikan opiskelu sisältää suunnittelemista, pohtimista, miettimistä ja aktiivista tekemistä, aineiston perusteella sai vahvasti sen käsityksen, että monille oppilaille matematiikka sosiokonstruktivistisista tavoitteista huolimatta on edelleen säännöillä tiukasti rajattu yksilölaji.

Pohdinta

Tässä raportoidussa tutkimuksessa hyödynnettiin tutkimusmenetelmää, jossa käsityksiä matematiikasta oppiaineena lähestyttiin kvalitatiivisella otteella. Vaikka oppilaat saivatkin valita näkökulmansa vapaammin kuin esimerkiksi lomakekyselynä toteutetuissa tutkimuksissa, soveltavamme tiedonkeruutapa suuntaa sekin vertailuasetelmansa vuoksi sitä, millaiset matematiikkakäsitykset nousevat esiin. On vaikea arvioida, miten vastaajat ovat valinneet vertailtavan oppiaineen, kun tehtävänä on vertailla kahden oppiaineen yhtäläisyyksiä ja eroja.

Tutkimuksemme vahvistaa, että monet perinteisissä kyselylomaketutkimuksissa esiintyneet matematiikkakäsityksiin liittyvät näkökulmat nousevat esiin myös oppilaiden vertaillessa matematiikkaa toiseen kouluaineeseen. Vastauksista on erotettavissa sekä objektiivisia että subjektiivisia uskomuksia (vrt. Furinghetti & Pehkonen, 2002). Lisäksi uskomusvarannon eri aspektit näyttäytyivät aineistossa (vrt. Op't Eynde ym., 2002; Op't Eynde & DeCorte, 2004). Yllättävää sen sijaan oli, että oppijaan itseensä kohdistuvien luonnehdintoja oli vähän. Toisin kuin esimerkiksi Amiralin (2010) tutkimuksessa, tämän aineiston vastaajista huomattavan moni (56,5 %) piti matematiikkaa vaikeampana kuin valitsemaansa vertailuainetta. Amiralin tutkimuksessa pakistanilaisista 8-luokkalaisista 70 % nautti matematiikasta ja koki luottavansa itseensä, 59 % oppilaista kertoi oppivansa sitä helposti. Käyttämämme tehtävänanto näytti siis houkuttelevan pikemminkin oppimiskulttuurin reflektoimiseen kuin oman opiskelun ja oppimisen reflektointiin.

Käyttämämme metodi toi kuitenkin matematiikkaan kohdistuneista käsityksistä esille myös dimensioita, jotka aikaisemmassa tutkimuksessa eivät ole painottuneet. Vihkotyön määrä mainittiin 17,8 % vastauksista ja tarkkaavaisen kuuntelemisen välttämättömyyteen viitattiin 11,7 % vastauksista.

Jatkossa on syytä pohtia, miten tutkimusmenetelmää tulisi kehittää ja kokeilla esimerkiksi vastaajajoukon jakamista kahteen osaan, joista toinen pohtisi oppiaineiden yhtäläisyyksiä ja toinen oppiaineiden eroja. Vertailtavan oppiaineen voisi myös antaa tehtävänannossa, mikä lisäisi yksittäisten vastausten vertailtavuutta. Samalla se kuitenkin kaventaisi oppilaiden mahdollisuuksia tehdä vertailut omaan kokemusmaailmaansa parhaiten sopivalla tavalla. Joka tapauksessa näkemyksemme on, että avoimia ja vastaajalähtöisiä lähestymistapoja on tarpeen kehittää muita menetelmiä täydentäviksi työkaluiksi matematiikkakäsitysten tutkimukseen.

Lähteet

Amirali, M. (2010). Students' Conceptions of the Nature of Mathematics and Attitudes towards Mathematics Learning. *Journal of Research and Reflections in Education*, *4*(1), 27–41.

Berkaliev, Z., & Kloosterman, P. (2009). Undergraduate Engineering Majors' Beliefs About Mathematics. *School Science and Mathematics*, *109*(3), 175–182.

Furinghetti, F. & Pehkonen, E. (2002) Rethinking Characterizations of Belief. Teoksessa G. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (Toim.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (ss. 39–57). Dordrecht: Kluwer.

Kislenko, K., Breiteig, T., & Grevholm, B. (2005). Beliefs and attitudes in mathematics teaching and learning. Teoksessa I. M. Stedøy (Toim.), *Vurdering i matematikk – Hvorfor og hvordan? Fra småskole til voksenopplæring. Rapport fra Nordisk Konferanse i Matematikkdidaktikk ved NTNU 15.-16. November 2004* (ss. 129-137). Trondheim: Nasjonalt Senter for Matematikk i Opplæringen.

Kislenko, K. (2005). Student's beliefs and attitudes towards Mathematics teaching and learning – an introduction to the reasearch. Teoksessa B. Hudson & J. Fragner (Toim.), *Researching the teaching and learning of Mathematics II* (ss. 239-252). Nucleus: Pädagogische Akademie des Bundes in Oberösterreich.

Kislenko, K., Grevholm, B., & Lepik, M. (2007). "Mathematics is important but boring": students' beliefs and attitudes towards mathematics. Teoksessa C. Bergsten, B. Grevholm, H. Strømskag Måsoval and F. Rønning (Toim.), *Proceedings of NORMA05, Fourth Nordic Conference on Mathematics Education: Relating Practice and Research in Mathematics Education* (ss. 349-360). Trondheim: Tapir Academic Press.

Kislenko, K. (2007). Structuring Students' Beliefs in Mathematics: a Norwegian Case. Teoksessa K. Hoskonen & M. S. Hannula (Toim.), *Current State of Research on Mathematical Beliefs XII. Proceedings of the MAVI-7 Workshop May 25–28, 2006* (ss. 47-57). Helsinki: Yliopistopaino.

Kloosterman, P., & Stage, F. K. (1992). Measuring Beliefs About Mathematical Problem Solving. *School Science and Mathematics, 92*(3), 109–115.

Kloosterman, P. (2002) Beliefs about mathematics and mathematics learning in the secondary school: Measurement and implications for motivation. Teoksessa G. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (Toim.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (ss. 247–269). Dordrecht: Kluwer.

Leder, G. C., Pehkonen, E., & Törner, G. (2002). *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* Dordrecht: Kluwer.

Malmivuori, M-L. (2001). *The dynamics of affect, cognition, and social environment in the regulation process of personal learning process: The case of mathematics.* University of Helsinki. Department of Education. Research Report 172.

Mapolelo, D. C. (2009). Students' experiences with mathematics teaching and learning: listening to unheard voices. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *40*(3), 309–322.

McLeod, D. B. & McLeod, S. H. 2002. Synthesis - Beliefs and Mathematics Education: Implications for Learning, Teaching, and research. Teoksessa G.

C. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (Toim.), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* (ss. 115–123). Dordrecht: Kluwer.

Op 't Eynde, P., De Corte, E., & Verschaffel, L. (2002). Framing students' mathematicsrelated beliefs: A quest for conceptual clarity and a comprehensive categorization. Teoksessa G. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (Toim.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (ss. 13–37). Dordrecht: Kluwer.

Op't Eynde, P., & De Corte, E. (2004). Junior high students' mathematics-related belief systems: Their internal structure and external relations. *A paper presented in TSG24 at ICME-10*. http://www.icme-organisers.dk/tsg24/Documents/OptEyndeDeCorte.doc

Ottelin, J. (1998) Four view clusters of Finnish twelth-graders about mathematics teaching. Teoksessa (Toim.), *The state-of-art in mathematics-related belief research. Results of the MAVI activities (s.* 240–248). University of Helsinki. Department of Teacher Education. Research Report 195.

Pehkonen, E. (1994). On Differences in Pupils' Conceptions about Mathematics Teaching. *The Mathematics Educator, 5*(1), 3–10.

Pehkonen, E., & Pietilä, A. (2003). On Relationships between Beliefs and Knowledge in Mathematics Education. *Proceedings of the CERME-3 (Bellaria) meeting.* http://www.dm.unipi.it/~didattica/ CERME3/proceedings/Groups/TG2/TG2_pehkonen_cerme3.pdf.

Presmeg, N. (2002). Beliefs about the nature of mathematics in the bridging of everyday and school mathematical practices. Teoksessa G. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (Toim.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (ss. 293–312). Dordrecht: Kluwer.

Schinck A. G., Neale, H. W., Jr., Pugalee, D. K., & Cifarelli, V. V. (2008). Using Metaphors to Unpack Student Beliefs About Mathematics. *School Science and Mathematics, 108*(7), 326–333.

Stage, F. K., & Kloosterman, P. (1995). Gender, Beliefs, and Achievement in Remedial College-Level Mathematics. *The Journal of Higher Education, 66*(3), 294-311.

Underhill, R. G. (1988). Mathematics Learners' Beliefs: A Review. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 10*(1), 55–69.

Wedege, T., & Skott, J. (2007). Potential for change of views in the mathematics classroom? Teoksessa *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME5), Cyprus, 22.-26.2.2007* (ss. 1-10).

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*, 458-477.

KESKUSTELURYHMÄ

The VIDEOMAT project

ANN-SOFI RÖJ-LINDBERG

aroj@abo.fi
Åbo Akademi University, Faculty of Education

Abstract

The paper introduces a recently launched collaborative research project, VIDEOMAT, focused on the contribution of video studies to the comparative analysis of mathematics lessons from Finland, Sweden, Norway and USA. Theoretical and empirical aspects emerging in the planning of the study are explored. As the study still is an evolving phase there are as yet no research results to present.

Keywords

comparative research, videomethodology, algebra

Introduction

Finnish youngsters have been among the top overall performers in mathematics in international student assessment surveys during the last decade. In relation to a relatively modest history of student mathematical knowledge and skills, this is a remarkable situation described by some as 'a miracle' (Simola, 2005) and by others as 'Finnish paradoxes of education' (Sahlberg, 2011). One paradox described by Sahlberg is the quantity versus quality paradox: in Finland 15-years-olds seem to know more in domains included in the OECD PISA-surveys even though they have spent less time in school, and on homework, than students in countries with much lower levels of achievement (Sahlberg, 2011, pp. 62-65).

The research project VIDEOMAT[4] seeks to develop understanding for such paradoxes, and with a special focus on understanding the disparities in average mathematics performances across Finland, Sweden, Norway and USA. As exemplified in Table 1 with results from the OECD PISA-surveys there are consistent differences in this respect between these four countries.

[4] VIDEOMAT is a 3-year project (2011-2013) financed by NOS-OH (grant 210321/F10). Universities involved are the University of Agder (Norway), the Åbo Akademi University (Finland), the University of Gothenburg (Sweden) and the University of California at Los Angeles (USA). A more comprehensive account of VIDEOMAT is given in Kilhamn & Röj-Lindberg (2012).

Table 1. Average mathematical performances of Finland, Sweden, Norway and USA in the OECD PISA-surveys (international mean = 500)

Survey	*Finland*	*Sweden*	*Norway*	*USA*
PISA 2000	536	510	499	493
PISA 2003	544	509	495	491
PISA 2006	548	503	487	474
PISA 2009	541	494	498	487

The primary aim of VIDEOMAT is to do comparative analyses concerning introductory algebra teaching and learning. This includes, among others, instructional strategies, student activities, use of speech, written work, representations and artefacts, the context where algebra is located, student engagement, collaboration, and reasoning about algebra. A second aim is to use the collected data for dialogue and professional development among teachers through analyses of their own practices and the practices of fellow teachers. It is an assumption of the VIDEOMAT project that many aspects of classroom practice are so taken for granted that they only stand out as particular to a specific practice if they are contrasted against practices where they do not occur. Viewing what in some aspects can be considered the same algebra content taught by different teachers in different countries will hopefully reveal hitherto overlooked dimensions in algebra teaching.

In the discussion group "Early algebra learning in Nordic and US classrooms explored through video recordings" the VIDEOMAT project was introduced. There was consensus in the group as to the potential of VIDEOMAT to increase the educators' understanding of why there are difficulties in the transition from arithmetic to algebra as a learning content.

Methodologies of comparative research studies using video recordings

As argued by James Stigler and his colleagues (Stigler, Gallimore & Hiebert, 2000) and by others (e. g. Andrews, 2010; Clarke, 2006; Knipping, 2003), cross-cultural comparison is a powerful way to reveal unnoticed practices. Referring to analyses undertaken as part of the international Learner's Perspective Study (LPS) (Clarke, Keitel & Shimizu, 2006) Clarke concludes that "it is in the examination of classrooms across a variety of cultural settings and school systems

that we find our educational assumptions most visible and open to challenge" (Clarke, 2006, p. 376). Next, I will first give a brief methodological overview of LPS as well as of the Third International Mathematics and Science Study (TIMSS 1995) and its follow-up study (TIMSS-R 1999), and then account for two smaller scale video based comparative studies where generalization was not the explicit intent. The methodologies of these studies are relevant examples in developing a comparative video based study such as VIDEOMAT.

The comparative studies TIMSS and LPS

TIMSS 1995 and TIMSS-R 1999 were the first studies to use video technology to investigate classroom teaching on a country-wide basis and to compare teaching across countries (Hiebert, Gallimore, Garnier, Givvin & Hollingsworth, 2003; Stigler et al., 2000). Both of these studies had a similar design aimed at investigating teaching in general and variability at a national level to facilitate comparisons across countries. In the year 2000 the LPS study was designed in an attempt to address some of the drawbacks of the TIMSS video studies (Clarke et al., 2006).

In TIMSS 1995 and TIMSS-R 1999 video surveys (Stigler et al., 2000) were used to study what was considered representative samples of eighth-grade classrooms, in Japan, Germany and the USA (TIMSS) (Stigler & Heibert, 1999) and in Australia, the Czech republic, the Netherlands, USA, Hong Kong, Switzerland and Japan (TIMSS-R) (Hiebert et al., 2003). Randomly selected mathematics classrooms were videotaped resulting in a total of 231 lessons in TIMSS 1995 and approximately 630 lessons in TIMSS-R. In TIMSS-R, the recorded lessons were deliberately spread out over a school year to ensure national-level pictures of grade eight mathematics teaching. In TIMSS 1995 one camera was used focusing solely on the teacher. In TIMSS-R two cameras were used, one was operated manually to follow the teacher and to take close-ups of the students work whereas the second camera was stationary and placed at the front of the class room. Additional information related to the lessons and to mathematics teaching was collected as well in both studies.

In TIMSS 1995, an initial bottom-up quantitative coding approach was followed by a more qualitative top-down analysis to derive understanding of the cultural systems of teaching in each country. The bottom-up approach was used to develop valid categories across the three countries. The categories described such features as the organization structure of the classroom and the kind of work expected of the students. Theories of learning were used as tools to make sense of the video data rather than as overarching tools for shaping the coding scheme.

An important and unanticipated lesson was learned from TIMSS 1995. That is, to understand differences between countries in teaching activities, for example the amount of time students spend on solving problems, you need to understand how an activity is expected to function within the cultural patterns of teaching in each country. The findings from TIMSS 1995 indicated the existence of such cultural patterns. For this reason, the analytic process within TIMSS-R 1999 started with a top-down approach that involved national research teams constructing tentative descriptions of typical lessons within each country. These patterns were then applied as an analytic framework within the study to further guide and interpret bottom-up coding and analysis. Mathematical problems (content) rather than classroom organization (as in TIMSS) were used as a basis for the initial coding of lessons. A strong message from the TIMSS-R 1999 Study was that "an international comparison of teaching, even among mostly high-achieving countries, cannot, by itself, yield a clear answer to the question of which method of mathematics teaching may be best to implement in a given country /…/ Research is needed that can more precisely examine the possible effects that particular methods or approaches may have on student learning." (Hiebert et al., 2003, p. 150).

In the year 2000 the Learners' Perspective Study (LPS) was designed in an attempt to address some of the drawbacks of the TIMSS video studies (Clarke, et al., 2006). One disadvantage of the TIMSS studies was that the accounts of teaching were quite limited since they drew on only one lesson from each teacher. The LPS study design limited data collection to three teachers in each country, but in return the documentation was much more extensive. A series of 10 consecutive lessons in 8th grade mathematics classrooms were documented using three cameras in the classroom, supplemented by reconstructive accounts obtained through post-lesson video-stimulated recall interviews with students and the teacher. This design made it possible to address questions about the consistency and variation of lesson structure across a sequence of lessons in relation to teachers' intentions, as well as student awareness of lesson structure. The videotaped lessons were not selected to give national-level pictures of mathematics teaching within specific content areas. The selected teachers were considered 'good practitioners' by the educational community in their own country and a variety of content areas were included. With a LPS-type design it was however possible to reveal dimensions of learning mathematics that may stay hidden when the focus of a study is on typical features of lessons in general (see for instance Häggström, 2008).

Two smaller scale studies

Inspired by the differences in performances between Norway and Finland found in the OECD PISA-surveys Johansen (2009) videotaped classrooms with 8/9-year-old students in two classrooms in each country and during three mathematics lessons in each classroom. The main message from this case study is that the teachers mainly asked questions of a lower order. However, the Norwegian teachers used lower order questions more frequently than the Finnish teachers. This was especially true for one Finnish teacher, whose work included mentoring student-teachers. 'Do you use plus or minus?' is given as an example of a question classified as lower order, while 'What do you notice?', 'How did you think?' and 'Why did I do this?' are examples of higher order questions. The conclusions in Johansen (2009) support findings in Savola (2008, see below) who writes that "Finnish teachers give their students valuable opportunities to explain their thinking, words like 'why' and 'explain' are often heard".

In a video-based study Savola (2008, 2010) analyzed the classroom practices of ten Finnish and ten Icelandic randomly chosen mathematics teachers of 14/15-year-olds to demonstrate a method for coding lesson structure. At least two typical lessons the same day with each teacher were recorded with two video cameras. The last two lessons were coded and used as part of the data set. In order to protect the identities of the students both cameras were placed at the back of the classroom to mainly follow the teacher. Methodologically Savola was inspired by ideas applied in the TIMSS and LPS studies and he focused both on the function of the lesson segments and on forms of social interaction. Four functional categories were used to code lessons segments: Review, Introducing new content, Practicing/Applying, and Other. The lesson segments were then analyzed with a focus on the form of social interaction. As a result Savola (2010) finds reason to assert "the participatory nature of the lessons, more specifically, the presence of content-related discourse as a factor in the recent educational successes" of Finnish youngsters in the OECD PISA-surveys (p. 11). The results in Johansen (2009) and Savola (2008) are interesting within the VIDEOMAT study and its analyses related to students' reasoning about introductory algebra as a learning content, as questions to the students that awake critical thinking may be powerful in their effects on the learning of students (Ellis, 1993).

Methodologies and methods of the VIDEOMAT project

The VIDEOMAT project has two dimensions: research and developmental work to improve teaching practices. Classrooms focusing on algebra teaching are examined through video recordings. The content area of introductory algebra, more precisely the introduction of variables in expressions, was chosen because there is evidence of the problems in the transition from arithmetic to algebra as learning content (e. g. Cai & Knuth, 2011; Carraher, Schliemann, Brizuela & Earnest, 2006; Dekker & Dolk, 2011; Kieran, 1992). There is no intention in VIDEOMAT to generalize the findings to wider populations of teachers, classrooms or schools. Project teachers are enrolled through personal contacts with the researchers or through school authorities. The number of teachers in each country is restricted to four or five from two to three primary or lower secondary schools. Five lessons with each teacher are video recorded.

Research questions

Three general research questions are addressed: (1) Which teaching methods are used and how are the lessons organized in the four countries? (2) How are the main components of mathematics lessons elaborated, implemented and discussed by the teachers? (3) How do students perceive mathematics lessons when introduced to algebra? More specific research questions are about to be elaborated across the project and within each country. For instance, in Norway an analysis of the textbooks used in each country has been presented (Reinhardtsen, 2012). In Finland there is an interest to investigate the constitution and negotiation of sociomathematical norms, and in Sweden ways in which interest/engagement in algebra is constituted are being examined. As the project unfolds the aim is to make research data accessible to different analytical interests and more detailed research questions using multiple perspectives. Specific content related questions will be posed emerging from what is addressed in the classroom when teachers plan, implement and elaborate on what they interpret as being introductory algebra. One such content specific question addressed in the Swedish team concerns proportional reason in an algebra setting.

Data collection

Lessons are videotaped with three stationary video cameras. One camera is positioned in front of the classroom facing the students to capture students' interactions with each other and with the teacher. One camera is focused on a group of students. The third camera is at the back of the classroom. It is operated manually to follow the teacher and to capture close-ups of the teacher working with students or in the front of the classroom. In the fifth lesson this third camera follows a second group of students instead of the teacher.

Five consecutive lessons with each participating teacher are video recorded. As noted within LPS, by taping a sequence of lessons a richer picture of the class-

room work is obtained than through recording a single lesson. The timing of the taped lessons is decided together with each teacher. In the pre-discussions with the teacher, the content of the video recorded lessons is negotiated to ensure it is related to introductory algebra, and, if possible, to the introduction of variables in expressions. The analyses done within VIDEOMAT of national curricula and standards and of commonly used textbooks in the four countries, placed the introduction of variables in expressions in grades 6-7, age group 12-13 years (see also Reinhardtsen, 2012). In the recruiting process teachers were asked to let the researchers collect data from the first four lessons they considered as introduction to algebra, and specifically introduction to variables in expressions. For the fifth lesson the teachers are requested to let the students solve some common problems with an algebraic content. The problems are adapted from the TIMSS 2007 attainment survey in mathematics. The same problems are solved in each of the four countries and the teacher is asked to incorporate the problems into the fifth lesson in whatever way he/she feels comfortable.

Students' written work and teachers' lesson files (lesson plans, tasks, textbooks, etc) are collected. An interview with the teacher is conducted after the fifth lesson and the teacher is also asked to make comments at the end of each lesson.

The importance of including the voices of the students is acknowledged in VIDEOMAT: through the analysis of the video recordings it is possible to make an account of processes made visible for students, but not to students. Each country will decide to what extent and how they want to include the voices of students. In Finland, for instance, focus group discussions have been conducted after the fifth lesson with the two video recorded groups of students from one classroom in grade 7.

The second phase

In a second phase a virtual platform will be created to stimulate dialogues and professional development among the participating teachers through collaborative analyses of their own practices. The overall research question for this phase is: How are the main components of algebra lessons discussed by teachers? The intent is to investigate how video recorded lessons could be used to mediate professional development. When teachers examine recordings of their own practices as well as episodes from other classrooms they are afforded the possibility of challenging their own educational assumptions and, hopefully, make positive restructurings of their practices (Clarke, 2006). As pointed out by James Stigler and his colleagues (2000), teaching is a cultural activity, and thus, teachers (and researchers alike) may be blind to some of the significant features that characterize teaching in their own culture because they are taken for granted as the way things are or ought to be, rather than choices that can be re-examined.

In this phase the participating teachers will select, share and discuss episodes from the recorded lessons. Methodological questions discussed at length in the VIDEOMAT research team concern how to choose episodes for the teachers to analyze and what kind of prompts the teachers should be given to encourage the discussion. For teachers in the three Nordic countries Sweden, Norway and Finland (schools from the Swedish-speaking community) the teachers can watch and understand video recorded lessons from the four countries without translations, due to the similarities of the Scandinavian languages spoken and the high proficiency of English among these teachers. However, for the American teachers, translations need to be made. This entails further methodological considerations. Translation reduces the authenticity of the data. Bucholtz (2007) points out that a colloquial or a formal translation style imply different attitudes toward the speaker. Students in a grade 6 or grade 7 mathematics classrooms use many colloquial expressions, unfinished sentences and words with implicit meanings known only in the local culture.

In preparation for the teacher discussions each teacher will be given access to the teacher camera video of his/her recorded lessons, and is asked to look through them and pick out one or more episodes where he/she would like feedback and suggestions from other teachers concerning the teaching of algebra. For each chosen episode the teacher should also formulate a question of the type: "How can I better facilitate student understanding here?" The teachers in each country will then meet to show each other their chosen episodes and discuss them using their own questions as a starting point. These discussions will be moderated by a researcher and video recorded. At the end of the session the group will create a final selection of episodes and questions that they want to share with teachers in the other countries. These episodes will be shared on a virtual platform for further collaborative analysis.

Discussion

This article has described some methodological considerations in the design of an international comparative video study about algebra teaching and learning. Aligning different research interests and theoretical assumptions takes time and effort. Although theoretical and methodological issues need more negotiation in an international comparative study, VIDEOMAT is an example of how the collaboration of researchers from different countries, and the use of data from different cultural settings, has the potential to uncover things not seen in smaller

country specific studies. A study such as the VIDEOMAT project may uncover other aspects of teaching and learning algebra in the Nordic countries than separate studies in each country would have shown. Modern technology offers possibilities for researchers to record, to share and to work together and with teachers.

At present the pool of knowledge concerning comparative studies using video data in the Nordic countries is small. In the Nordic journal NOMAD, for instance, in the time period 1993-2011 among the articles based on video information from Nordic classrooms no article report on international comparative analyses (see Kilhamn & Röj-Lindberg, 2012). However, and as indicated by small scale studies like Savola (2008) and Johansen (2009), this lack must not be interpreted as evidence of a total lack of such studies on the Nordic arena. The VIDEOMAT project discussed in this article may inspire to more video based comparative research, which include Finland, within mathematics education.

References

Andrews, P. (2010). The importance of acknowledging the cultural dimension in mathematics teaching and learning research, *Acta Didactica Napocensia, 3*(2), 3-16.

Bucholtz, M. (2007). Variation in transcription. *Discourse Studies, 9*(6), 784–808.

Cai, J., & Knuth, E. (Eds.). (2011). *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives*. Berlin: Springer.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M., & Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. J*ournal for Research in Mathematics Education, 37*(2), 87–115.

Clarke, D. J., Keitel, C., & Shimizu, Y. (Eds.) (2006). *Mathematics classrooms in twelve countries*. Rotterdam: Sense Publishers.

Clarke, D. J. (2006). Using international research to contest prevalent oppositional dichotomies, *ZDM, 38*(5), 376–387.

Dekker, T., & Dolk, M. (2011). From arithmetic to algebra. In P. Drijvers (Ed.), *Secondary algebra education* (pp. 69–87). Rotterdam: Sense Publishers.

Drijvers, P. (Ed.). (2011). *Secondary algebra education. Revisiting topics and themes and exploring the unknown*. Rotterdam: Sense Publishers.

Ellis, K. (1993). *Teacher questioning behaviour and student learning: what research says to teachers.* Paper presented at the annual meeting of the Western States Communication Association, Albuquerque, NM, February 12-16, 1993.

Hiebert, J., Gallimore, R., Garnier, H., Givvin, K., & Hollingsworth, H. (2003). *Teaching mathematics in seven countries: results from the TIMSS 1999 video study.* Washington, DC: U.S. Department of Education.

Häggström, J. (2008). *Teaching systems of linear equations in Sweden and China*. Göteborg Studies in Educational Sciences 262. Göteborg, Sweden: Acta Universitatis Gothenburgensis.

Johansen, K. (2009). *Spørsmål og respons i finske og norske matematikklasserom: En komparative case-studie.* Master thesis, University of Agder, Kristiansand. Retrieved 30.7.2012 from www.uia.no/no/content/download/137060/2322378/file/Microsoft+Word+-+Masteroppgaven.pdf.

Kaput, J. J., Carraher, D. W., & Blanton, M. L. (Eds.). (2008). *Algebra in the early grades*. New York, NY: Routledge.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390–419). New York, NY: Macmillian Publishing Company.

Kilhman, C., & Röj-Lindberg, A-S. (2012). Seeking hidden dimensions of algebra teaching through video analysis. In B. Grevholm, P. S. Hundeland , K. Juter, K. Kislenko & P. E. Persson (Eds.). *Nordic research in mathematics education, past, present and future*. Oslo: Cappelen Damm.

Knipping, C. (2003). Learning from comparing: A review and reflection on qualitative oriented comparisons of teaching and learning mathematics in different countries, *ZDM, 35*(6), 282–293.

Sahlberg, P. (2011). *Finnish lessons. What can the world learn from educational change in Finland?* London: Teachers College Press.

Reinhardtsen, J. (2012). *The introduction of Algebra. Comparative studies of textbooks in Finland, Norway, Sweden and USA.* Master thesis, University of Agder, Kristiansand.

Savola, L. (2008). *Video-based analysis of mathematics classroom practice: Examples from Finland and Iceland.* (Doctoral dissertation). Columbia University. ProQuest/UMI (AAT 3317607).

Savola, L. (2010). Comparison of the classroom practices of Finnish and Icelandic mathematics teachers. *Journal of Mathematics Education at Teachers College, 1*(2), 7–13.

Simola, H. (2005). The Finnish miracle of PISA: historical and sociological remarks of teaching and teacher education. *Comparative Education*, *41*(4), 455–470.

Stigler, J., & Hiebert, J. (1999). *The teaching gap*. New York, NY: Free Press

Stigler, J. W., Gallimore, R., & Hiebert, J. (2000). Using video surveys to compare classrooms and teaching across cultures: Examples and lessons from the TIMSS video studies. *Educational Psychologist, 35*(2), 87–100.