

脉冲星磁层结构的整体解

胡文瑞

(中国科学院力学研究所)

摘要

本文用分区衔接的方法,求出了无力场磁层结构的整体解。首先将非线性的无力场逐段地用线性无力场逼近,从而求出各线性无力场的分析解。然后,将各个线性无力场衔接,并给出整体解。

利用脉冲星磁层的整体解,可以讨论磁层中的电流和电荷分布,并进一步组建磁层的物理模型。

一、前言

一般认为,脉冲星就是高速旋转的磁中子星^[1]。脉冲星的主要问题包括中子星的内部结构,脉冲星的磁层结构,以及磁层中的辐射机制。脉冲星的辐射过程与其磁层的结构密切相关。最近,观测到一些天体具有x射线和爆发,这些高能天体可能是脉冲星。所以,研究脉冲星的磁层结构是一个重要的天体物理课题。

当中子星的磁轴与其转轴有一定夹角时,磁极上部的辐射在远处就表现为脉冲讯号,这

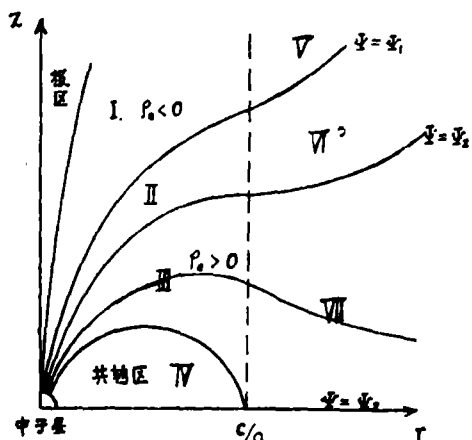


图1 磁轴与转轴都平行于z轴时的旋转中子星磁层

就是脉冲星的斜转子模型。为了理解脉冲星的磁结构,人们经常假设脉冲星的磁轴与自转轴平行,这就是同向转动磁层模型。这种轴对称模型首先由 Goldreich 和 Julian 提出^[2]。他们的定性分析表明,脉冲星磁层中有等离子体。根据磁层中的磁场和等离子体的特征,脉冲星磁层可以分为共转区,电子流和质子流的风区,主要特征如图1所示。共转区的边界在赤道面与光速圆柱相交。近来,人们不断地努力,以定量地求解自洽和全局的脉冲星磁层。

在脉冲星磁层的不同特征区域内,其典型参数数值是不同的。对于无力场模型,可以得到一些

本文1985年1月26日收到。

典型参数和区域中的自洽解^[3-5]。这些解对应于特定区域的位形,是一种局部解。考虑到轴对称无力场模型中的电场不存在沿磁场方向的分量, Scharlemann 进一步讨论了惯性项的修正^[6]。以后, Okamoto 又半定量地分析了脉冲星磁层的一些整体特性,指出磁层等离子体可能有较差自转^[7,8]。最近,作者指出脉冲星表面可能存在剪切层^[9,10],并用几何空间局部解的特性讨论了脉冲星磁层的性质^[11]。可以看出,脉冲星磁场的位形对于等离子体的分布可以有很大的影响。

Mestel 和 Wang 等人曾提出^[12,13],在脉冲星磁层中,风区可由电子流构成定常回路。当磁轴与转轴同向时,极区电子沿磁力线流到光速圆柱,然后折回低纬,再沿磁力线流回脉冲星。他们求出了这种脉冲星的整体解。

本文讨论轴对称脉冲星无力场近似下的整体解,将整个磁层空间按磁力线分为若干区域,在每个区域中用线性无力场去逼近非线性无力场,最后将不同区域的线性无力场彼此衔接起来,得到脉冲星磁层的自洽整体解。由于考虑了环向磁场的影晌,光速圆柱和以外的区域中的等离子体速度可以远小于光速。

二、基本方法和假设

对于定常轴对称的脉冲星磁层,无力场方程为

$$\rho_e \mathbf{E} + 1/c \mathbf{j} \times \mathbf{B} = 0 \quad (2.1)$$

其中 ρ_e , \mathbf{j} , \mathbf{E} , \mathbf{B} 分别为电荷密度,电流密度,电场和磁场强度。正、负荷电粒子的平均运动速度可以在柱坐标中表示为

$$\mathbf{V}_{\pm} = \kappa_{\pm} \mathbf{B} + \Omega r \mathbf{e}_0 \quad (2.2)$$

其中 Ω 为均匀角速度。由连续性方程不难得到

$$\mathbf{B} \cdot \nabla (n_{\pm} \kappa_{\pm}) = 0 \quad (2.4)$$

n_{\pm} 为荷电粒子的数密度。粒子数密度随 r 的增加而减少,沿每根磁力线的 $|\kappa_{\pm}|$ 将随 r 的增大而增大。(2.3) 式表明,当磁场有环向分量 B_{θ} 时,沿磁力线的粒子运动速度 $\kappa_{\pm} B_{\theta}$ 可以抵消刚性转动速度 Ωr ,而使净环向速度在光速圆柱 $r = \Omega/c$ 处比光速小得多。基本方程组还要考虑麦克斯韦方程

$$\nabla \times \bar{\mathbf{B}} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (2.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.6)$$

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{E}} = 4\pi \rho_e \quad (2.7)$$

以及电场的关系

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \mathbf{U} \times \bar{\mathbf{B}} = -\frac{\Omega r}{c} \mathbf{e}_0 \times \mathbf{B} \quad (2.8)$$

方程组 (2.1) — (2.8) 就构成基本方程组。

对于轴对称磁层问题,由 (2.6) 式可引用磁标势函数,即

$$B_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad B_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (2.9)$$

另外,轴对称问题中的 $E_{\theta} = 0$,由 (2.1) 的 θ 分量可得到关系

$$\frac{\partial(rB_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial\psi}{\partial z} - \frac{\partial(rB_\theta)}{\partial z} - \frac{\partial\psi}{\partial r} = 0$$

或者由此得到

$$rB_\theta(r, z) = g(\psi) \quad (2.10)$$

将这些结果代入无力场方程的极向分量, 经过适当运算, 就得到磁势的方程

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + gg'(\psi) = \left(\frac{\Omega r}{c}\right)^2 \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right) \quad (2.11)$$

或者重写为

$$\left[1 - \left(\frac{\Omega r}{c}\right)^2\right] \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right) - \frac{1 + \left(\frac{\Omega r}{c}\right)^2}{r} \frac{\partial\psi}{\partial r} + gg'(\psi) = 0 \quad (2.12)$$

不难看出, $g'(\psi)$ 就是电流与磁场的比值, 即无力场理论中的无力因子^[14]。脉冲星无力场磁层的基本方程就是 (2.10) 和 (2.12) 式。上述推导表明, 这组方程既适用于全完电荷分离的等离子体, 也适用于部分电荷分离的等离子体。

为了方便, 将所有量无量纲化, 引用

$$\xi = \frac{r}{c/\Omega}, \quad \zeta = \frac{z}{c/\Omega}, \quad \Psi = \frac{\psi}{\psi_0}, \quad G = \frac{g}{\psi_0 \Omega / c}$$

其中 ψ_0 为一典型值。这样, (2.12) 式的无量纲形式就写为

$$(1 - \xi^2) \left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial \zeta^2}\right) - \frac{1 + \xi^2}{\xi} \frac{\partial\Psi}{\partial \xi} + GG' = 0 \quad (2.13)$$

在适当的 $G(\Psi)$ 分布和边界条件下, 可求解 (2.13) 式。一旦求出了 Ψ , 其他电量的分布可表示为

$$\frac{\rho_r}{\left(\frac{\Omega^3\psi_0}{c^3}\right)} = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial\Psi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial^2\Psi}{\partial \zeta^2} \right] \quad (2.14)$$

$$j_r / \left(\frac{\Omega^3\psi_0}{c^2}\right) = -\frac{1}{4\pi} \frac{G'(\Psi)}{\xi} \cdot \frac{\partial\Psi}{\partial \xi} \quad (2.15)$$

$$j_\theta / \left(\frac{\Omega^3\psi_0}{c^2}\right) = -\frac{1}{4\pi} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial\Psi}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{\xi} \frac{\partial^2\Psi}{\partial \zeta^2} \right] \quad (2.16)$$

$$j_z / \left(\frac{\Omega^3\psi_0}{c^2}\right) = \frac{1}{4\pi} \frac{G'(\Psi)}{\xi} \cdot \frac{\partial\Psi}{\partial \xi} \quad (2.17)$$

从 (2.15) 和 (2.16) 可以看出, $G'(\Psi) = 0$ 的那一条磁力线对应于极向电流为零, 它将电流向外流的区域和电流向内流的区域分开, 被称为临界线。

求解方程 (2.13) 还应该讨论问题的边条件。一般假设脉冲星附近的磁场位形是偶极场。严格的偶极场没有环向分量, 即 $rB_\theta = g(\Psi) = 0$ 。因每根磁力线上的 G 保持不变, 故严格的脉冲星偶极场位形将要求磁层中的磁场也没有环向分量, 这是一种很特殊的磁场位形^[3]。一般而言, 这一近似条件只在共转区内才满足。我们在这里讨论, 脉冲星附近的极向场分量可用一个偶极场近似。由方程 (2.11) 可以看出, 当 $\Omega r \ll c$ 时, 右端项可忽略不计。

这时的无力场方程就简化为电中性等离子体时无力场的关系^[14]

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + gg'(\psi) = 0 \quad (2.18)$$

在线性无力场的情况下,

$$g = \alpha \psi$$

其中 α 为常数。这时可求出 ψ 的通解为^[14]

$$\psi(r, z) = r \sum_{n=0}^{\infty} (c_{1n} e^{-\lambda_n z} + c_{2n} e^{\lambda_n z}) J_1(\beta_n r) \quad (2.19)$$

在脉冲星的极区附近, 线性无力场是很好的近似。由此可得到极轴处的边界条件为

$$\Psi(0, \xi) = \frac{\partial \Psi(0, \xi)}{\partial r} = 0 \quad (2.20)$$

在光速圆柱以内, 磁势是对称于赤道平面的,

$$\frac{\partial \Psi(\xi, 0)}{\partial \xi} = 0, \quad \xi < 1 \quad (2.21)$$

而在光速圆柱外, 赤道平面为一磁面

$$\Psi(\xi, 0) = \Psi_c, \quad \xi > 1 \quad (2.22)$$

在光速圆柱上有 $\xi = 1$, 它是方程 (2.12) 的奇点, 这时必须满足条件

$$\frac{\partial \Psi(1, \xi)}{\partial \xi} = G[\Psi(1, \xi)] \frac{dG[\Psi(1, \xi)]}{d\Psi} \quad (2.23)$$

再加上无穷远边条件

$$\Psi|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad \Psi|_{z \rightarrow \infty} \rightarrow \Psi_c \quad (2.24)$$

这样, 我们给出了完整的边界条件。可以看出, 这组边界条件可以使求解方程 (2.12) 分为两步。第一步先计算光速圆柱以内的解, 然后再求光速圆柱以外的解。

为了求出脉冲星磁层的整体解, 还必须给出环向磁场的关系 (2.10), 即确定 $G(\Psi)$ 的分布。这正是困难之所在。在共转区中没有极向电流, 可以假设 $G(\Psi) = 0$ 。在极区附近, G 可近似表示为线性分布 $G(\Psi) = \alpha\Psi$ 。在极区与共转区之间的电流区域, $G(\Psi)$ 首先增大,

到临界线时达到峰值, 然后减小到共转区的零值。所以 $G(\Psi)$ 的分布是明显的非线性关系, 定性特征如图 2 中的粗线所示。即使在电中性等离子体中, 要求解这样的非线性无力场也是不容易的。为了得到整体磁层的特征, 可以将磁层区域分成若干小的区域, 在每个局部区域中用线性无力场去逼近非线性无力场, 如图 2 中的细线所示。然后, 再将这些局部的线性无力场彼此衔接起来, 得到脉冲星磁层的整体解。图 2 中用四个线性无力场去逼近非线性的整体无力场。原则上, 还可以将整个磁层分成更多的线性无力场来逼近。

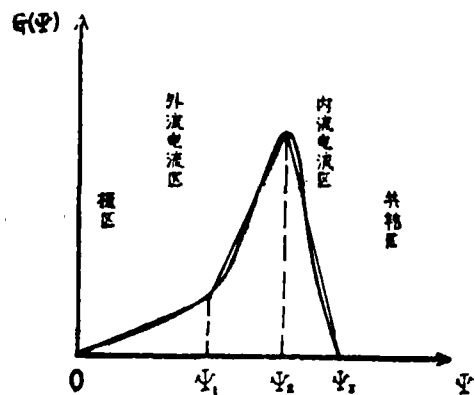


图 2 脉冲星磁层中环向场关系的示意图

三、线性无力场

根据图 2 的特征, 用四个局部无力场来逼近整体的脉冲星磁场。这样, 将脉冲星磁层分成了七个特征区域, 如图 1 所示。在光速圆柱以内有四个区域 (I, II, III, IV), 在光速圆柱以外有三个区域 (V, VI, VII)。这时, 环向场的分布规律可以表示为

$$G(\Psi) = \begin{cases} \alpha_1 \Psi^{(1,5)}, & \Psi_1 < \Psi < 0 \text{ (区域 I; V)} \\ \alpha_2 (\Psi^{(2,6)} + S_2), & \Psi_2 < \Psi < \Psi_1 \text{ (区域 II, VI)} \\ \alpha_3 (\Psi^{(3,7)} + S_3), & \Psi_3 < \Psi < \Psi_2 \text{ (区域 III, VII)} \\ 0, & \Psi < \Psi_3 \text{ (区域 IV)} \end{cases} \quad (3.1)$$

由于磁轴与转轴同方向, 所以 Ψ 的值皆负。将关系式 (3.1) 代入基本方程 (2.13), 就得到局部区域中的线性无力场方程

$$(1 - \xi^2) \left(\frac{\partial^2 \Psi^{(i)}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Psi^{(i)}}{\partial \zeta^2} \right) - \frac{1 + \xi^2}{\xi} \frac{\partial \Psi^{(i)}}{\partial \xi} + \alpha_i^2 \Psi^{(i)} = \alpha_i^2 S_i \quad (i = 1, 2, \dots, 7) \quad (3.2)$$

其中令 $S_1 = S_4 = S = 0$, $\alpha_i = \alpha_{i+4}$ ($i = 1, 2, 3$), 而上标 (i) 表示相应的局部区域。 $i = 1, 2, 3, 4$ 分别对应于光速圆柱内的 I, II, III, IV 区域; $i = 5, 6, 7$ 对应于光速圆柱以外的 V, VI, VII 区域。

当 $S_i = 0$ 时, 齐次线性无力场方程有本征函数解^[4]。当 $S_i \neq 0$ 时, 通过变换

$$\Phi^{(i)}(\xi, \zeta) = S_i + \Psi^{(i)}(\xi, \zeta) \quad (3.3)$$

可将 (3.2) 式变成齐次方程

$$(1 - \xi^2) \left(\frac{\partial^2 \Phi^{(i)}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Phi^{(i)}}{\partial \zeta^2} \right) - \frac{1 + \xi^2}{\xi} \frac{\partial \Phi^{(i)}}{\partial \xi} + \alpha_i^2 \Phi^{(i)} = 0 \quad (3.4)$$

用分离变量法, 令

$$\Phi^{(i)}(\xi, \zeta) = \sum_n \chi_n^{(i)}(\zeta) \varphi_n^{(i)}(\xi) \quad (3.5)$$

则本征函数 $\varphi_n^{(i)}(\xi)$ 的方程和边条件为

$$\frac{d^2 \varphi_n^{(i)}}{d\xi^2} - \frac{1 + \xi^2}{1 - \xi^2} \frac{1}{\xi} \frac{d\varphi_n^{(i)}}{d\xi} + \left(\pm \lambda_n^{(i)2} + \frac{\alpha_i^2}{1 - \xi^2} \right) \varphi_n^{(i)} = 0 \quad (3.6)$$

$$\varphi_n^{(i)}(0) = 0, \quad \frac{d\varphi_n^{(i)}(0)}{d\xi} = 0, \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (3.7)$$

$$\frac{d\varphi_n^{(i)}(1)}{d\xi} - \frac{\alpha_i^2}{2} \varphi_n^{(i)}(1) = 0, \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) \quad (3.8)$$

$$\varphi_n^{(i+4)}(1) = \varphi_n^{(i)}(1), \quad \frac{d\varphi_n^{(i+4)}(1)}{d\xi} = \frac{d\varphi_n^{(i)}(1)}{d\xi} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.9)$$

$$\varphi_n^{(i)}(\infty) \rightarrow 0, \quad (i = 5, 6, 7) \quad (3.10)$$

其中 $\lambda_n^{(i)}$ 为第 (i) 区域中的本征值。对称轴 $\xi = 0$ 只包含在区域 I 中, 它是方程 (3.4) 的奇线, 要求条件 (3.7)。边界条件 (3.7) 和 (3.8) 确定了光速圆柱以内区域 I—IV 中的解,

而边界条件 (3.9) 和 (3.10) 可用来确定光速圆柱以外区域 V—Ⅷ中的解。另外, 分离变量函数 $\chi_n(\xi)$ 满足的方程为

$$\frac{d^2 \chi_n^{(i)}}{d\xi^2} - \lambda_n^{(i)2} \chi_n^{(i)} = 0 \quad (3.11)$$

其解为

$$\chi_n^{(i)}(\xi) = c_{1n}^{(i)} e^{-\lambda_n^{(i)} \xi} + c_{2n}^{(i)} e^{\lambda_n^{(i)} \xi} \quad (3.12)$$

或者

$$\chi_n^{(i)}(\xi) = c_{3n}^{(i)} \sin(\lambda_n^{(i)} \xi) + c_{4n}^{(i)} \cos(\lambda_n^{(i)} \xi) \quad (3.13)$$

将 (3.6) 式的两族解分别记为 $\varphi_n^{(1)}$ 和 $\varphi_n^{(2)}$, 则区域中的通解 (3.3) 可具体地表示为

$$\begin{aligned} \Psi^{(i)}(\xi, \zeta) = & -S_i + \sum_n \left(c_{1n}^{(i)} e^{-\lambda_n^{(i)} \xi} + c_{2n}^{(i)} e^{\lambda_n^{(i)} \xi} \right) \varphi_n^{(1)}(\xi) \\ & + \sum_n \left[c_{3n}^{(i)} \sin(\lambda_n^{(i)} \xi) + c_{4n}^{(i)} \cos(\lambda_n^{(i)} \xi) \right] \varphi_n^{(2)}(\xi) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Schanlemann^[6]讨论过区域 I 中的解 $\varphi_n^{(1)}(\xi)$, 给出本征函数的分布。Mestel 和 Wang^[13]论述过与 $\varphi_n^{(2)}(\xi)$ 相关联的解。显然, (3.14) 给出了完整的线性解表达式。用轴向边界条件确定系数 $c_{in}^{(i)}$, 由径向边界条件可定出本征值 $\lambda_{n+}^{(i)}$ 或 $\lambda_{n-}^{(i)}$ 。只要用适当的方法把不同区域的解衔接起来, 就可得到总体解。

在 (3.1) 式中给出了 $G(\Psi)$ 的线性分布, 但未具体确定 α_i 和 S_i 的值。若能给出脉冲星表面处磁场分布的位形, 就能估计 $G(\Psi)$ 的分布。我们现在对脉冲星表面磁场位形还了解得很少, 特别是脉冲星磁层中有电流分布, 它的磁场位形不会是严格的偶极场。尽管共转区内无电流, 那里的磁场位形也会受外边电流分布的影响, 所以 S_i 和 α_i 的选择具有一定的任意性。但是, S_i 与 α_i 应该满足一定的条件。如果环向磁场分量是连续的, 则要求

$$G \Big|_{\Psi^{(i)} = \Psi_i} = G \Big|_{\Psi^{(i+1)} = \Psi_i}, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.15)$$

其中记 $\Psi_3 = \Psi_c$ 。其次, 对于定常模型还要求从脉冲星流出的电流和流入的电流相等, 即净电流为零。假设脉冲星附近的极向场为偶极场, 即磁势可表示为

$$\Psi = -\frac{\xi^2}{(\xi^2 + \zeta^2)^{3/2}}, \quad (\xi^2 + \zeta^2 \ll 1) \quad (3.16)$$

脉冲星附近的电流分布为

$$\begin{cases} j_r = \left(\frac{\Omega^3 \psi_0}{c^2} \right) \frac{G'(\Psi)}{4\pi} \frac{(-3\xi\zeta)}{(\xi^2 + \zeta^2)^{5/2}} \\ j_\zeta = \left(\frac{\Omega^3 \psi_0}{c^2} \right) \frac{G'(\Psi)}{4\pi} \frac{\xi^2 - 2\zeta^2}{(\xi^2 + \zeta^2)^{5/2}} \end{cases} \quad (3.17)$$

利用电流密度 (3.16), 可求出不同区域流入或流出的净电流, 它们是

$$I^{(1)} = -k\alpha_1 A(\theta_1) \quad (3.18)$$

$$I^{(2)} = -k\alpha_2 [A(\theta_2) - A(\theta_1)] \quad (3.19)$$

$$I^{(3)} = k\alpha_3 [A(\theta_3) - A(\theta_2)] \quad (3.20)$$

其中 k 为一正的常系数, θ_i 为磁力线 $\Psi = \Psi_i$ 与脉冲星表面交点的极角, 而函数分布

$$A(\theta) = 3 \sin \theta \cos^2 \theta + (2 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \sin \theta \quad (3.21)$$

净电流为零就要求

$$\alpha_1 A(\theta_1) + \alpha_2 [A(\theta_2) - A(\theta_1)] = \alpha_3 [A(\theta_3) - A(\theta_2)] \quad (3.22)$$

如果取

$$\Psi_1 = -0.5, \Psi_2 = -0.8, \Psi_3 = -1.2, \quad (3.23)$$

由关系式 (3.22) 和 (3.15) 就可以确定 α_i 和 S_i 的值, 它们是

$$\alpha_1 = 0.009394, \alpha_2 = 1.0, \alpha_3 = -0.7617, \alpha_4 = 0 \quad (3.24)$$

$$s_1 = 0, s_2 = 0.4953, s_3 = -0.9140, s_4 = 0 \quad (3.25)$$

其中的 α_i 有一个自由参数, 我们选取 $\alpha_2 = 1.0$ 。显然, 当 (3.23) 式给出的分段改变大小时, (3.24) 和 (3.25) 中的值也要相应地变化。这种变化正是无力场理论中环向磁场分布规律 $G(\Psi)$ 的不确定性。既使没有空间电荷, 也有这种不确定性。

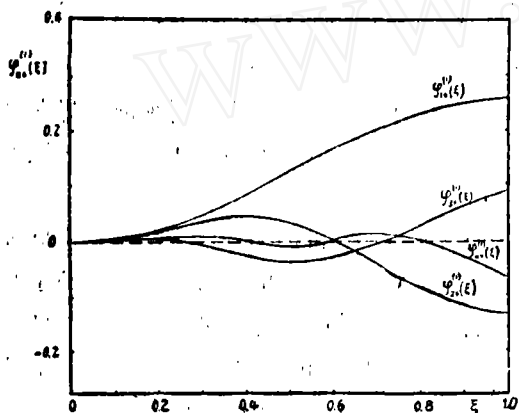


图3 本征函数的分布

一旦给出了 α_i 的大小, 就可以求解 (3.6) — (3.10) 的本征值和本征函数。用数值计算的方法, 从 $\xi = 0$ 的初值 (3.7) 出发, 计算到 $\xi = 1$ 。如果 $\xi = 1$ 处的函数不满足边条件 (3.8), 则调整 $\lambda_n^{(i)}$ 值, 直到满足为止。由此定出与 α_i 对应的一族本征值 $\lambda_n^{(i)}$, 以及相互的本征函数 $\psi_n^{(i)}$ 。本征函数可从光速圆柱内延拓到光速圆柱以外。对于无力因子 (3.24), 四个区域中的本征值的前几阶如表 I 所列。相应的本征函数与 [4] 中求出的特征类似, 它们都是波动形的分布, 如图 3 所示。

表 I (3.6) — (3.8) 的特征值 $\lambda_n^{(i)}$

$\lambda_n^{(i)}$	$i=0$	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$	$i=6$	$i=7$	$i=8$
$n=1$	3.21964	6.33669	9.46663	12.6015	15.7389	18.8778	22.0176	25.1581	28.2992
$n=2$	2.83447	6.12656	9.38707	12.4840	15.6415	18.7943	21.9443	25.0927	28.2400
$n=3$	3.00504	6.21607	9.38028	12.5336	15.6825	18.8294	21.9751	25.1202	28.2649
$n=4$	3.21967	6.33667	9.46662	12.6015	15.7389	18.8778	22.0176	25.1581	28.2992

四、渐近整体解的求法

在讨论磁流体力学的二维管道流动时, 曾经用分区求解, 然后衔接的方法, 得到整体的解^[15,16]。这里可采用类似的方法, 将不同区域的解光滑地衔接起来。所不同的是, 这里的衔接边界是一个旋转曲面, 而不是一个平面。

讨论光速圆柱以内四个区域中局部的衔接。首先, 利用 $z \rightarrow \infty$ 的边界条件 (2.24), 可

以定出区域 I 中的系数 $C_{2n}^{(1)} = C_{3n}^{(1)} = C_{4n}^{(1)}$, 这时得到

$$\Psi^{(1)}(\xi, \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(1)} e^{-\lambda_n^{(1)} \zeta} \varphi_{n+}^{(1)}(\xi) \quad (4.1)$$

再利用 $\zeta = 0$ 处的对称条件 (2.21), 可求出 $c_{1n}^{(4)}$ 与 $c_{2n}^{(4)}$ 以及 $c_{3n}^{(4)}$ 与 $c_{4n}^{(4)}$ 之间的关系, 从而得到

$$\Psi^{(4)}(\xi, \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[c_{n+}^{(4)} \operatorname{ch}(\lambda_n^{(4)} \zeta) \varphi_{n+}^{(4)}(\xi) + c_{n-}^{(4)} \cos(\lambda_n^{(4)} \zeta) \varphi_{n-}^{(4)}(\xi) \right] \quad (4.2)$$

这时, 还有 11 组系数 $C_n^{(1)}, C_{1n}^{(2)}, C_{2n}^{(2)}, C_{3n}^{(2)}, C_{4n}^{(2)}, C_{1n}^{(3)}, C_{2n}^{(3)}, C_{3n}^{(3)}, C_{4n}^{(3)}, C_{n+}^{(4)}$ 和 $C_{n-}^{(4)}$ 需要确定。用逼近的方法求解, 将每个区域的解截取到 $n = N^{(i)}$, 即

$$\begin{aligned} \Psi_{N_i}^{(i)}(\xi, \zeta) = & -s_i + \sum_{n=0}^{N^{(i)}} \left(c_{1n}^{(i)} e^{-\lambda_n^{(i)} \zeta} + c_{2n}^{(i)} e^{\lambda_n^{(i)} \zeta} \right) \varphi_{n+}^{(i)}(\xi) + \\ & + \sum_{n=0}^{N^{(i)}} \left[c_{3n}^{(i)} \sin(\lambda_n^{(i)} \zeta) + c_{4n}^{(i)} \cos(\lambda_n^{(i)} \zeta) \right] \varphi_{n-}^{(i)}(\xi) \end{aligned} \quad (4.3)$$

当 $N^{(i)} \rightarrow \infty$ 时, (4.3) 式就趋近于解 (3.14)。这样, 我们需要 $11 \left(1 + \sum_{i=1}^4 N^{(i)} \right)$ 个关系来确定上述 11 组系数。

将不同区域的界面 $\Psi = \Psi_i$ 表示为函数

$$\zeta^{(i)} = \zeta^{(i)}(\xi) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (4.4)$$

在光速圆柱内取 m 个点 $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m$, 记

$$\zeta_k^{(i)} = \zeta^{(i)}(\xi_k) \quad (k = 0, 1, \dots, m) \quad (4.5)$$

中子星附近的极向磁场分量近似取为偶极场。对 $\xi_0 \ll 1$, 由偶极场关系给出

$$\zeta_0^{(i)} = \left[\left(\frac{\xi_0}{\Psi_i} \right)^{2/3} - \xi_0^2 \right]^{1/2} \quad \xi_0 \ll 1 \quad (4.6)$$

不同区域解在界面 $\zeta^{(i)} = \zeta^{(i)}(\xi)$ 衔接的条件一般为函数值连续和导数连续。函数值连续的条件为

$$\begin{cases} \Psi_{N_i}^{(j)}(\xi_k, \zeta_k^{(i)}) = \Psi_i, & i = 1, 2, 3, \\ \Psi_{N_i}^{(j+1)}(\xi_k, \zeta_k^{(i)}) = \Psi_i, & k = 0, 1, \dots, m, \end{cases} \quad (4.7)$$

(4.7) 式共计有 $6(m+1)$ 个线性代数方程, 可以确定 $6(m+1)$ 个待定系数 $c_n^{(i)}$ 。当满足条件

$$6(m+1) = 11 \left(1 + \sum_{i=1}^4 N^{(i)} \right) \quad (4.8)$$

时, 这些系数就唯一确定了, 从而给出各个区域的渐近解。

在上述计算过程中, 需要给定 $\zeta_k^{(i)}$ 的值。如果界面 $\zeta = \zeta^{(i)}(\xi)$ 给得不合理, 不同区域解在界面 $\zeta = \zeta^{(i)}$ 处的导数将不连续。为了使导数衔接条件也得到满足, 就需要用叠代法来不断调整界面 $\zeta = \zeta^{(i)}(\xi)$ 的位置。一种可行的方法是先给定一组初始的界面点位置 $\zeta_k^{(i)}$, 通过

解方程 (4.7) 而求出局部 $\Psi_{N_i}^{(i)}(\xi, \zeta)$ 。由边值 $\Psi_{N_i}^{(i)}(\xi, \zeta) = \Psi_i$ 就得出整个边界的位置。取中点

$$\hat{\xi}_k = \frac{1}{2}(\xi_{k-1} + \xi_k), \quad (k=1, 2, \dots, m) \quad (4.9)$$

曲线 $\Psi_{N_i}^{(i)}(\hat{\xi}_k, \zeta) = \Psi_i$ 定出的位置 $\hat{\zeta}_+^{(i)}(\hat{\xi}_k)$ 与 $\Psi_{N_i}^{(i+1)}(\hat{\xi}_k, \zeta) = \Psi_i$ 定出的位置 $\hat{\zeta}_-^{(i)}(\hat{\xi}_k)$ 可能不同, 它们的差值

$$\Delta \zeta_k^{(i)} = \hat{\zeta}_+^{(i)}(\hat{\xi}_k) - \hat{\zeta}_-^{(i)}(\hat{\xi}_k) \quad (4.10)$$

就反应了偏离导数连续衔接条件的程度。根据 $\Delta \zeta_k^{(i)}$ 来调整位置 $\zeta_k^{(i)}$, 可给出新的位置 $\zeta_k^{(i)}$, 如此类推, 直至 (4.10) 所定义的 $|\Delta \zeta_k^{(i)}|$ 足够小。

作为一个例子, 我们讨论最低阶近似的解, 取 $N^{(1)}=0, N^{(2)}=N^{(3)}=N^{(4)}=1$ 。这时, 由 (4.6) 确定了 $(\xi_0, \zeta_0^{(i)})$ 三个交点的位置。利用点 $(\xi_0, \zeta_0^{(i)})$ 的值, 可求出系数 $c_0^{(i)}$, 从而得到区域 I 中的解为

$$\frac{\Psi^{(1)}(\xi, \zeta)}{\Psi_1} = \exp[-\lambda_0^{(1)}(\zeta - \zeta_0^{(1)})] \frac{\varphi_{0+}^{(1)}(\xi)}{\varphi_{0+}^{(1)}(\xi_0)} \quad (4.11)$$

另外, 区域 IV 中的解可由条件

$$\Psi_1^{(4)}(\xi_0, \zeta_0^{(3)}) = \Psi_3, \quad \Psi_1^{(4)}(1, 0) = \Psi_3$$

定出两个系数 $C_{n+}^{(4)}$ 和 $C_{n-}^{(4)}$, 从而得到解

$$\begin{aligned} \frac{\Psi_1^{(4)}(\xi, \zeta)}{\Psi_3} = & \left\{ \left[\varphi_{0-}^{(4)}(1) - \cos(\lambda_{0-}^{(4)} \xi_0) \varphi_{0-}^{(4)}(\xi_0) \right] ch(\lambda_{0+}^{(4)} \zeta) \varphi_{0+}^{(4)}(\xi) \right. \\ & + \left[ch(\lambda_{0+}^{(4)} \xi_0) \varphi_{0+}^{(4)}(\xi_0) - \varphi_{0+}^{(4)}(1) \right] \cos(\lambda_{0-}^{(4)} \zeta) \varphi_{0-}^{(4)}(\xi) \left. \right\} \\ & \cdot \left[ch(\lambda_{0+}^{(4)} \xi_0) \varphi_{0+}^{(4)}(\xi_0) \varphi_{0-}^{(4)}(1) - \cos(\lambda_{0-}^{(4)} \xi_0) \varphi_{0+}^{(4)}(1) \varphi_{0-}^{(4)}(\xi_0) \right]^{-1} \quad (4.12) \end{aligned}$$

而区域 II 和 III 的解可由下列的系数线性代数方程求出系数值后确定

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda_{0+}^{(i)} \zeta_0^{(i-1)}} & \varphi_{0+}^{(i)}(\xi_0) & e^{-\lambda_{0+}^{(i)} \zeta_0^{(i-1)}} & \varphi_{0+}^{(i)}(\xi_0) & \sin(\lambda_{0-}^{(i)} \xi_0^{(i-1)}) & \varphi_{0-}^{(i)}(\xi_0) \\ e^{\lambda_{0+}^{(i)} \zeta_0^{(i)}} & \varphi_{0+}^{(i)}(\xi_0) & e^{-\lambda_{0+}^{(i)} \zeta_0^{(i)}} & \varphi_{0+}^{(i)}(\xi_0) & \sin(\lambda_{0-}^{(i)} \xi_0^{(i)}) & \varphi_{0-}^{(i)}(\xi_0) \\ e^{\lambda_{0+}^{(i)} \zeta_1^{(i-1)}} & \varphi_{0+}^{(i)}(1) & e^{-\lambda_{0+}^{(i)} \zeta_1^{(i-1)}} & \varphi_{0+}^{(i)}(1) & \sin(\lambda_{0-}^{(i)} \xi_1^{(i-1)}) & \varphi_{0-}^{(i)}(1) \\ e^{\lambda_{0+}^{(i)} \zeta_1^{(i)}} & \varphi_{0+}^{(i)}(1) & e^{-\lambda_{0+}^{(i)} \zeta_1^{(i)}} & \varphi_{0+}^{(i)}(1) & \sin(\lambda_{0-}^{(i)} \xi_1^{(i)}) & \varphi_{0-}^{(i)}(1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{10}^{(i)} \\ c_{20}^{(i)} \\ c_{30}^{(i)} \\ c_{40}^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_{i-1} - S_{i-1} \\ \Psi_i - S_{i-1} \\ \Psi_{i-1} - S_{i-1} \\ \Psi_i - S_{i-1} \end{pmatrix} \quad (i=2, 3) \quad (4.13)$$

在此过程中,共转区与光速圆柱的交点 $(1,0)$ 已知。由解 $\Psi^{(1)}(\xi, \zeta)$ 定界面 $\Psi^{(1)} = \Psi_1$, 从而确定了界面与光速圆柱的交点 $(1, \xi_1^{(1)})$ 。因此,只需要调整交点 $(1, \xi_1^{(1)})$, 使问题大为简化。

为了得到更高阶的解,需要求解高维的系数方程,但原则上是类似的。本文中,我们将主要侧重于讨论方法。

五、小 结

中子星磁层的整体解是近年来大家关心的理论课题。由于问题有很强的非线性特性,要求整体解是比较困难的。即使采用数值分析的方法也不容易得到比较合理的物理图象。本文采用分区衔接的方法,用若干线性问题去逼近非线性问题,使中子星磁层求解的非线性偏微分方程化为求解若干线性代数方程。这无疑地使问题大为简化。同时,在本文的处理过程中,已经考虑到了中子星磁层的物理条件,使求得的解可以组建各种物理模型。

和无力场的理论一样,这种模型中还有许多可以调整的条件,特别是环向磁场的分布规律。在轴对称模型中,根据 (2.2) 和 (2.10) 式,转速可写为

$$v_{\theta} = \frac{K_2}{r} g(\psi) + r\Omega(\psi)$$

在光速圆柱 $r\Omega = c$ 处,粒子的旋转速度仍可小于光速。一些模型假设 $g(\psi) = 0$, 这就使许多物理信息消失了。此外,角速度分布 $\Omega(\psi)$ 也是很有物理含意的因素。本文与许多文章一样假设 $\Omega = \text{常数}$, 也只是一般的情况。这些问题都需要进一步的分析研究。

参 考 文 献

- [1] Gold, T., Nature, 218 (1968) 731
- [2] Goldreich, P., Julian, W. H., Astrophys. J., 157 (1969) 869
- [3] Michel, F. C., Astrophys. J., 180 (1973) 207
- [4] Scharlemann, E. T., Wagoner, R. V., Astrophys. J., 182 (1973) 951
- [5] Julian, W. H., Astrophys. J., 183 (1973) 967
- [6] Scharlemann, E. T., Astrophys. J., 193 (1974) 217
- [7] Okamoto, I., Monthly Notices RAS, 167 (1974) 457
- [8] Okamoto, I., Monthly Notices RAS, 170 (1975) 81
- [9] 胡文瑞, 自然, no.4 (1981) 153
- [10] 胡文瑞, 物理, no. 10 (1981) 217
- [11] 胡文瑞, 天体物理学报, 1 (1981) 677
- [12] Mestel, L. et al., Monthly Notices RAS, 188 (1979) 385
- [13] Mestel, L., Wang, Y. M., Monthly Notices RAS, 188 (1979) 799
- [14] 胡文瑞, 中国科学, no. 1 (1979) 69
- [15] 胡文瑞, 力学, no. 4 (1977) 293
- [16] 胡文瑞, 力学学报, no. 1 (1979) 25

THE GLOBAL SOLUTIONS FOR THE PULSAR'S MAGNETOSPHERES

Hu Wenrui (W.R.Hu)

(Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing)

ABSTRACT

In the present paper, the global solution for the pulsar's magnetosphere is given by the method of matching the solutions in several regions based on the force-free field model. The nonlinear relationship of azimuthal magnetic field is approximated by the linear ones and the linear force-free fields may be solved analytically by the expansions of eigenfunctions. The global solution is then obtain by matching the solutions.

By using the global solution of the pulsar's magnetosphere, we can discuss the feature of electrical current and charges distributions, and, furthermore, construct the physical model of the pulsar's magnetosphere.