第1卷第3期 振动工程学报 Vol.1 No.3
1988年8月 Journal of Vibration Engineering Aug. 1988

非线性系统随机振动分析方法的若干问题*

欧阳怡 缪经良 庄表中

（中国科学院力学研究所）（浙江大学）

摘 要

本文评述了近几年来在国外发较快的几种非线性系统随机振动分析方法。重点是具有较大非线性的系统的方法，如FPK法，矩闭合法和函数级数法。

关键词：非线性振动，随机振动，FPK 方法，矩闭合法，函数级数法。

一、引 言

近十年来，非线性系统随机振动问题的研究发展很快，其原因不外乎在许多实际工程系统中，仅从线性观点来考虑，不足以反映系统实际工作情况，例如大阻尼结构，本身就是一个非线性系统，若要计算它的响应，理应用非线性的方法。另一方面，许多结构在较大的激励下，本身也处于非线性变形状态，因此需要更精细的分析方法。有关这类评论性文章，近年来时有出现，如 Roberts[1]，Crandall 与 Zhu[2]和 Spanos[3]等。在这些论文中，对非线性随机振动的方法，作了一定的评述，并提出了一些今后值得研究的课题。与此同时，非线性随机振动的专著亦有出版，如 Диментберг[4]和庄表中等人[5]的书。在这些书中，对较成熟的方法，有着详尽的论述，也提出了一些新的问题。本文的目的不是对所有问题作全面的评述，而是仅就作者感兴趣并认为值得探讨的问题，提出一些看法。

一般来说，非线性随机振动计算方法大致可分为两大类：(一)由确定性非线性振动方法推广到随机振动领域，如摄动法，统计线性化法和平均法等。(二)将概率论、随机过程和随机微分方程理论运用于非线性振动中，如 FPK 法，矩闭合法，函数级数法和随机数字模拟法等。随着科学技术的发展，还会有其他方法出现，例如在某些情况下，用随机过程还不足以描述的物理现象，而进入模糊范畴的概念，那么模糊数学应用于动力学系统的分析，将不断得到发展。目前已有不少论文讨论这类问题，其中王光远，欧进萍等的一系列论文[6][7][8]，较深入地研究了这个问题，得出了一些有趣的结果，并把这类振动称之为模糊随机振动。另外，在非线性系统中，除了稳定与不稳定区外，还发现有浑沌现象，这是在确定性外载下产生的现象，那么在随机载荷作用下，系统也将有浑沌现象出现，有关这方面的论文，笔者尚少见到。关于(一)类方法，研究历史比较久，用这些方法分析许多工程问题，大都能获得比较满意的结果，特别对于弱非线性系统，其精度是有保证的。但对自激振动系统，则上述方

本文于1987年4月4日收到。

* 本课题得到中国科学院科学基金资助。

法是不适用的。最近 Roberts 和 Spanos[9]对随机平均法作了全面的评述，这里就不再赘述。现就(二)类方法中，迄今还讨论不多，应用尚不够普遍的几种方法，作一些介绍和探讨，希望引起注意，使其得到较快发展，而且这些方法有可能用于强非线性系统，这正是目前急待解决的课题。

二、福克-普朗克方程法（FPK方程）

FPK 方程早就应用于物理学问题，但用来研究随机振动问题，大约只有三十余年历史。一般认为精确求解此方程比较困难，对非稳态情况就更难。因此产生许多近似方法，其目的在于构造一个渐近满足方程的概率密度函数，这样过程的随机特征值也能求得。众所周知，欲求 FPK 方程的稳态精确解，早期需要遵守一些条件：如(一)阻尼力必须正比于响应速度即线性阻尼，(二)激励相关函数矩阵应比例于系统的阻尼矩阵，(三)激励是白噪声过程，(四)惯性力是线性的。这些严格的条件，使得应用 FPK 方程的范围受到限制。但另一方面也引起人们的探索，扩展这些条件，使之能适应更广泛的工程问题。

早在1964年 Caughey[10]研究了一类非线性阻尼系统的随机振动响应，找到了该系统的 FPK 方程的稳态精确解。这就消除了上面线性阻尼的限制。近来在寻求 FPK 方程精确解方面有所进展，值得提出的论文有[11][12][13]等。Caughey 和 Ma 在研究一个特殊弹性结构的随机稳定性时得出下列方程

$$\ddot{x}+\left(x^2+2\dot{x}^2-\frac{2}{x^2+2\dot{x}^2}\right)2D\dot{x}+\frac{2x^3+x\dot{x}^2}{x^2+2\dot{x}^2}=\xi(t) \qquad (1)$$

这是一个强非线性方程，$\xi(t)$是高斯白噪声激励。相应的能量表示式 $H(x,\dot{x})=x^4+\dot{x}^4+x^2\dot{x}^2$，再引入$y=\frac{1}{2}\dot{x}$的变量，上式可写成

$$\ddot{x}+\left[H_y f(H)-\frac{H_{yy}}{H_y}\right]D\dot{x}+\frac{H_x}{H_y}=\xi(t) \qquad (2)$$

式中 $H_y=\frac{\partial H}{\partial y}$，$H_x=\frac{\partial H}{\partial x}$，$H_{yy}=\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}$，$D$是白噪声的强度，即$E[\xi(t)\xi(t+\tau)]=2D\delta(\tau)$。引入$f(H)$是为了以后计算方便，这里仅要求$H$，$f$具有二阶导数并连续。与此相应的稳态 FPK 方程为

$$-\dot{x}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left[\left(H_y f(H)-\frac{H_{yy}}{H_y}\right)D\dot{x}+\frac{H_x}{H_y}\right]p+D\frac{\partial^2 p}{\partial \dot{x}^2}=0 \qquad (3)$$

经过一些变换，可求得概率密度函数

$$p(x,\dot{x})=AH_y\exp\left[-\int_0^H f(\eta)d\eta\right] \qquad (4)$$

式中A是标准化常数。如果H已知，则$f(H)$也知，通过上对式积分就能找到概率密度函数。

Dimentberg[13]曾讨论过下面二阶系统的微分方程

$$\ddot{x}+2\alpha\dot{x}[1+\eta(t)]+\beta\dot{x}\left(x^2+\frac{\dot{x}^2}{\omega^2}\right)+\omega^2 x[1+\zeta(t)]=\xi(t) \qquad (5)$$

式中$\eta(t)$，$\zeta(t)$和$\xi(t)$是零均值高斯白噪声过程，其强度分别为D_η，D_ζ和D_ξ，α是衰减系

数,β 是非线性参数,ω 是系统固有频率。而稳态概率密度函数 $p(x,\dot{x})$满足下面FPK方程

$$\dot{x}\frac{\partial p}{\partial x}=\omega^2 x\frac{\partial p}{\partial \dot{x}}+\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left\{\left[(2\alpha-2\alpha^2 D_\eta)\dot{x}+\beta\dot{x}\left(x^2+\frac{\dot{x}^2}{\omega^2}\right)\right]p\right\}$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial \dot{x}^2}\left[(4\alpha^2\dot{x}^2 D_\eta+\omega^4 x^2 D_\zeta+D_\xi)p\right] \tag{6}$$

如果 $\omega^2 D_\zeta=4\alpha^2 D_\eta$ 得到满足，则上式可找到精确解

$$p(x,\dot{x})=\frac{A\exp[-\beta_1(x^2+\dot{x}^2/\omega^2)]}{(K+x^2+\dot{x}^2/\omega^2)^{C-K\beta_1}} \tag{7}$$

式中，

$K=D_\xi/\omega^4 D_\zeta$, $C=2\alpha/\omega^2 D_\zeta+\frac{1}{2}$, $\beta_1=\beta/\omega^2 D_\zeta$, A 是标准化常数。由此可见，FPK方程亦可用于参激系统。

有时在应用FPK方程时，经常辅之以Itô方程。如一个二阶随机微分方程可用状态向量一阶微分方程组来表示：

$$\dot{\underset{\sim}{x}}=\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x},t)+\underline{G}(\underset{\sim}{x},t)\underset{\sim}{\xi}(t) \tag{8}$$

式中：$\underset{\sim}{x}$ 是系统响应 $2n$ 维状态向量，$\underset{\sim}{f}$ 是 $2n$ 维向量函数，$\underset{\sim}{\xi}$ 是 m 维向量，它的元素为宽带随机过程,如果是一个白噪声过程，则 $\underset{\sim}{x}$ 是一个马尔科夫过程,那么它的概率密度函数 $p(\underset{\sim}{x},t)$ 是满足FPK方程的。$\underline{G}$ 是 $2n\times m$ 阶的矩阵函数。它相应的方程为Stratonovish型：

$$dx_i=f_i(\underset{\sim}{x},t)dt+\sum_{j=1}^{m}G_{ij}(\underset{\sim}{x},t)dB_j(t) \tag{9}$$

此处 $B(t)$是维纳过程，并认为 $\xi(t)=\frac{dB(t)}{dt}$ 成立。如果所受激励是实际宽带随机过程，则相应的方程为Itô型：

$$dx(t)=\left\{f(x,t)+\frac{\sigma^2}{2}G(x,t)\frac{\partial G(x,t)}{\partial x}\right\}dt+G(x,t)dB(t) \tag{10}$$

此式是由Wong和Zakai[14]建立的。也可写成多维形式。与(9)式比较，多了 $\frac{\sigma^2}{2}G(x,t)\frac{\partial G(x,t)}{\partial x}dt$ 项,有时称它为Wong-Zakai修正项。与此相应的FPK方程也须增加一项，否则会产生错误。但应注意到，在某些特殊情况下，函数 $G(x,t)$ 与 x 无关，则上两式完全一样。有关这一问题详细的讨论，可参阅文献[1][15]。

三、矩闭合法

这是与FPK方程有关的一种近似法。可分为两种：(一)高斯矩闭合法，(二)非高斯矩闭合法。前者是假定系统的响应是高斯过程，利用高斯矩之间的关系来截断矩方程。但对于非线性系统的响应，高斯过程的假设，原则上是不适用的。因此发展了非高斯矩法，它是用另外的参数来截断矩方程的。在文献[15][16][17]中讨论过。

众所周知，矩方程的一般形式为

$$\frac{d}{dt}E[\Phi]=\sum_{i=1}^{n}E\left[f_i\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right]+\sum_{i,j=1}^{n}E\left[(\underline{G}\,\underline{Q}\,\underline{G}^T)_{ij}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i\partial x_j}\right]+E\left[\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right] \tag{11}$$

此处 $\Phi(\underset{\sim}{x},t)$ 是状态座标的函数，$Q=\dfrac{E[dB(t)dB^T(t)]}{dt}$，$T$ 表示矩阵转置。如果 $\dfrac{\partial\Phi}{\partial t}=0$，则其响应的概率密度函数也满足 FPK 方程。

方程(11)对非高斯响应矩的方程组是不封闭的，因此人们用各种方法来封闭它，即对某些量展开，然后截去高阶小量，或者以某种优化方法把高阶矩近似为低阶矩的函数，使之成为闭合方程组，以便求解。结果虽是近似，但亦具有一定的精度。另一方面，用渐近表示式来描述非高斯概率密度函数，也就是对高斯概率密度函数进行修正，这一做法早在40年前由 Cramer H.[13]提出过，并称之为 Gram-Charlier 渐近展式，即

$$p^*(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_n}{n!}\frac{d^n p(z)}{dz^n} \tag{12}$$

此式 $p(z)$ 是高斯概率密度函数，C_n 是待定常数，变量 $z=\dfrac{x-m}{\sigma}$。这里 m 和 σ 是随机过程的均值和均方根值。如果引入 Hermite 多项式，则上式可写成

$$p^*(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n}{n!}H_n(z)\right] \tag{13}$$

$$H_n(z)=(-1)^n\exp\left(\frac{z^n}{2}\right)\frac{d^n}{dz^n}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) \tag{14}$$

此处 $H_n(z)$ 是 Hermite 多项式，它具有一些计算方便的特点，如推递性，正交性和微分性等。C_n 可由 $H_n(z)$ 的正交条件求得，即

$$C_i=\int_{-\infty}^{\infty}H_i(z)p^*(z)dz=E[H_i(z)] \tag{15}$$

在实际运用时，(12)式只能取有限项，那么存在一个收敛问题，究竟取多少项，使结果具有一定精度，又不使运算冗长，这是一个需要注意的问题。Cramer 本人曾指出，在遵守一定条件下，此式对某些分布是收敛的，否则就可能不收敛。Crandall[19]也曾指出，对某些非线性系统不宜采用此法。因为计算概率密度函数值时会出现负值。这与其性质是矛盾的。另外还指出计算所得到的代数方程，可能不存在实数解。为了改善结果的精度，可采用 Edgeworth 展式

$$p^*(z)=p(z)\left[1+\frac{1}{3!}\frac{\lambda_3}{\sigma_x^3}H_3(z)+\frac{1}{4!}\frac{\lambda_4}{\sigma_x^4}H_4(z)+\frac{10}{6!}\frac{\lambda_6^2}{\sigma_x^6}H_6(z)+\cdots\right] \tag{16}$$

这是改进的 Gram-Charlier 展式，Assaf 等[16]曾指出，只要保持前四项，就可获得足够精度的概率密度函数。此处的 λ_i 是半不变量，即

$$\lambda_n[x^n]=\frac{1}{i^n}\frac{d^n\ln F_x(\theta)}{d\theta^n}\bigg|_{\theta=0} \tag{17}$$

此处 $F_x(\theta)$ 是随机变量的特征函数。而 n 阶矩函数为

$$E[x^n]=\frac{1}{i^n}\frac{d^n F_x(\theta)}{d\theta^n}\bigg|_{\theta=0} \tag{18}$$

由上两式可求出 λ_n 与 $E[x^n]$ 的关系如下：

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda_1=E[x]=m_1\\
&\lambda_2=m_2-m_1^2=D[x]\\
&\lambda_3=m_3-3m_1m_2+2m_1^3\\
&\lambda_4=m_4-3m_2^2-4m_1m_3+12m_1^2m_2-6m_1^4\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

故 λ_n 可看作是一种组合矩函数。对于多自由度系统，则须用 n 维展式，它们的形式如下，n 维的 Gram-Charlier 展式

$$p^*(z)=\sum_{k_1=0}^{\infty}\cdots\cdots\sum_{k_n=0}^{\infty}C_{k_1,k_2,\cdots,k_n}\frac{\partial^k p(z)}{\partial z_1^{k_1}\cdots\cdots\partial z_n^{k_n}} \tag{20}$$

n 维 Hermite 函数

$$H_{k_1,k_2,\cdots,k_n}(\underset{\sim}{y})=(-1)^k\exp\left(\frac{1}{2}\sum_{j,l}^{n}a_{jl}y_jy_l\right)$$
$$\frac{\partial^k}{\partial y_1^{k_1}\cdots\cdots\partial y_n^{k_n}}\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j,l}^{n}a_{jl}y_jy_l\right) \tag{21}$$

此处 $y_i=\sigma_i z_i$，$k=\sum_{i=1}^{n}k_i$，a_{jl} 是矩阵 $\underline{A}=\{E[\underset{\sim}{y}\,\underset{\sim}{y}^T]\}^{-1}$ 的元素。二维的 Edgeworth 展式为

$$\begin{aligned}p^*(y_1,y_2)=p(y_1,y_2)\Big[&\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\rho^k}{k!}H_k(y_1/\sigma_1)H_k(y_2/\sigma_2)\\&+\sum_{j+l=3}\frac{1}{l!j!}\frac{\lambda_{jl}}{\sigma_1^j\sigma_2^l}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\rho^k}{k!}H_{k+j}(y_1/\sigma_1)H_{k+l}(y_2/\sigma_2)\\&+\sum_{j+l=4}\frac{1}{l!j!}\frac{\lambda_{jl}}{\sigma_1^j\sigma_2^l}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\rho^k}{k!}H_{k+j}(y_1/\sigma_1)H_{k+l}(y_2/\sigma_2)\\&+\frac{1}{2}\sum_{\substack{j+l=3\\r+s=4}}\frac{1}{j!l!r!s!}\frac{\lambda_{jl}}{\sigma_1^j\sigma_2^l}\frac{\lambda_{rs}}{\sigma_1^r\sigma_2^s}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\rho^k}{k!}H_{k+j+r}(y_1/\sigma_1)\\&\times H_{k+l+s}(y_2/\sigma_2)\Big]\end{aligned} \tag{22}$$

此处 $\lambda_{12}=E[y_1y_2]$，$\rho=\lambda_{12}/\sigma_1\sigma_2$

$$p(y_1,y_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\exp\left\{-\frac{1}{2}[(y_1/\sigma_1)^2+(y_2/\sigma_2)^2]\right\}$$

在(16)式中引入半不变量 λ_i，其目的在于截断矩方程时，利用其特性。例如对于高斯过程，大于二阶的半不变量都为零，而对于非高斯过程，半不变量的高阶分量在总的分布中是很小的，故在矩方程中，可令高阶半不变量等于零，使计算简化，又具有一定的精度。

值得提出的是在应用非高斯矩闭合法解非线性随机振动问题，国内也有一些工作，如文献[20]，文中构造的概率密度函数形式为

$$p(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\exp\left[-\frac{1}{2}(y_1^2+y_2^2)\right]\sum_{i,j=0}^{\infty}C_{ij}H_i^1H_j^2 \tag{23}$$

式中 x_1 是位移响应，x_2 是速度响应。

$$y_1=(x_1-\mu_1)/\sigma_1,\qquad y_2=(x_2-\mu_2)/\sigma_2,\qquad H_i^1=H_i(y_1)$$
$$H_j^2=H_j(y_2),\qquad C_{ij}=E(H_i^1H_j^2)/i!j!$$

通过计算一非线性单自由度系统的响应，并与其精确解作了比较，得出如下结论：只要取到前8阶，非高斯矩法的结果几乎与精确解重合。如果只取2阶，则响应均方值的误差约为9%，这正是高斯矩法和统计线性化法的结果。还计算了干摩擦及双线性滞环阻尼系统的响应均方值，并与高斯矩法作了比较，其最大误差可达14%。可见对一个强非线性系统，用高斯矩法应慎重。

四、函数级数法

这是用 Hermite 级数展开来描一个随机函数的方法。上面已经看到，无论是 Gram-Charlier 展式还是 Edgeworth 展式都是以 Hermite 多项式为基础展开的，它用来描写一个概率密度函数，即分布函数。而现在的情况是用 Hermite 级数来表示一个随机变量或过程，也即是分布函数的变量，因此这两者是不同的。

任意一个随机函数可展成 Wiener-Hermite 函数序列，这里冠以 Wiener 以示与一般 Hermite 多项式区别。此一序列是正交的，并以概率 1 收敛于原随机函数，因此也是完备的。

设把任意一随机函数 $g(t)$ 展成

$$g(t)=G^{0}(t)H^{(0)}+\int_{-\infty}^{\infty}G^{(1)}(t,t_1)H^{(1)}(t_1)dt_1+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}G^{(2)}(t,t_1,t_2)H^{(2)}(t_1,t_2)dt_1dt_2+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}G^{(3)}(t,t_1,t_2,t_3)H^{(3)}(t_1,t_2,t_3)dt_1dt_2dt_3+\cdots\cdots \tag{24}$$

此处 $G^{(0)}(t)$ 是 $g(t)$ 的均值，第二项是其高斯过程部分，而其余部分是非高斯部分。$G^{(i)}$ 是确定性函数，或称为积分核，它们有如下关系

$$G^{(i)}(t,t_1,\cdots t_i)=E[g(t)H^{(i)}(t_1,t_2\cdots t_i)] \tag{25}$$

而 $H^{(i)}(t_1,\cdots t_i)$ 是 Wiener-Hermite 正交随机函数完备序列的 i 阶元素，它们具有如下性质

$$\left.\begin{aligned}&H^{(0)}=1,\ H^{(1)}(t)=\eta(t)\\&H^{(2)}(t_1,t_2)=\eta(t_1)\eta(t_2)-\delta(t_1-t_2)\\&H^{(3)}(t_1,t_2,t_3)=\eta(t_1)\eta(t_2)\eta(t_3)-\eta(t_1)\delta(t_2-t_3)\\&\qquad-\eta(t_2)\delta(t_3-t_1)-\eta(t_3)\delta(t_1-t_2)\\&H^{(4)}(t_1,t_2,t_3,t_4)=\cdots\cdots\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

此处 $\eta(t)$ 是具有零均值的白噪声过程，而 $\delta(t_1-t_2)=E[\eta(t_1)\eta(t_2)]$。由此亦知 $H^{(i)}(t)$ 是随机过程，它们有下列性质

$$E[H^{(i)}(t_1,t_2\cdots\cdots t_i)]=0 \qquad 当\ i\neq 0\ 时$$

$$E[H^{(i)}(t_1,\cdots t_i)H^{(j)}(t_1',\cdots t_j')]=0 \qquad 当\ i\neq j\ 时$$

现在把系统的输入输出都展成 Wiener-Hermite 函数，设输入 $f(t)$ 为

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}F^{(1)}(t,t_1)H^{(1)}(t_1)dt_1+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F^{(2)}(t,t_1,t_2)H^{(2)}(t_1,t_2)dt_1dt_2+\cdots\cdots \tag{27}$$

输出 $x(t)$ 为

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}A^{(1)}(t,t_1)H^{(1)}(t_1)dt_1+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}A^{(2)}(t,t_1,t_2)H^{(2)}(t_1,t_2)dt_1dt_2\cdots\cdots \tag{28}$$

这里均假定随机函数均值为零。由于 $f(t)$ 已知，故 $F^{(1)},F^{(2)}$ 是已知的核函数。待求的响应 $x(t)$ 的核函数 $A^{(1)},A^{(2)}$ 是未知的。把这些展式代入系统的运动方程，利用 $H^{(i)}(t)$ 的性质，可获得一组以 $A^{(1)},A^{(2)}$ 为变量的确定性微分积分方程，这些方程不是耦合的，由第一个方程可解出 $A^{(1)}$，以后而逐个解出 $A^{(2)},A^{(3)}\cdots\cdots$。解这些方程，可用迭代法，计算繁简，

自然取决于级数的项数多少。在文献[21]中，用此法计算了Duffing型振子的响应。激励是高斯白噪声，故其展式只取一项

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}F^{(1)}(t,t_1)H^{(1)}(t_1)dt_1 \tag{29}$$

并设核函数

$$F^{(1)}(t,t_1)=e(t)\delta(t-t_1) \tag{30}$$

此处 $e(t)$ 是确定性包络函数。文中对 $e(t)$ 是单位跃阶函数进行计算，所得结果与摄动法的结果进行比较，它们在小非线性情形时很接近。并得出随着非线性强度增加均方根值下降的结论。这正是所预期的Duffing振子硬化弹簧的结果。这个方法主要是用来计算强非线性系统和高斯激励系统的响应。此法提出的时间不长，研究工作甚少，但是对于计算非线性系统的随机响应来说，不失为方法之一，应继续发展。我们曾用此法计算了滞迟回线系统的随机响应，获得了一些有趣的结果，将在另文讨论。

总之，上面所讨论的几种方法，主要是针对强非线性系统而言，它们发展的历史都比较短，远未达到完善的地步，在实际运用上也存在不少困难，特别是推广到多自由度系统，不少问题值得进一步开展研究，以期能用来解决更多的工程计算问题。

参 考 文 献

[1] Roberts, J.B.: Techniques for Non-linear Random Vibration Problems。 *The Shock and Vibration Digest*, Vol.16,No.9, 1984, pp.3-14

[2] Crandall, S.H., Zhu, W.Q.: Random Vibration; a Survey of Recent Developments, *J.Appl. Mech. Trans. ASME*, Vol.50,No.4b, 1983,pp.953-962

[3] Spanos, P.D., Lutes,L.D.: A Primer of Random Vibration Techniques in Structural Engineering, *The Shock and Vibration Digest*. Vol.18,No.4, 1986, pp.3-19

[4] Диментбэрг, М.Ф.: Нелинейные стохастические Задачи механических колебаний, Москва, Наука,1980

[5] 庄表中，陈乃立，高瞻：《非线性随机振动理论及应用》，浙江大学出版社，1986年

[6] 王光远，欧进萍：多自由度滞变体系在地震作用下的模糊随机振动，《地震工程与工程振动》第6卷,第3期,1986年，pp.1-11

[7] 王光远：地震强度的模糊综合评定及其在抗震结构设计中的应用，《地震工程与工程振动》，第2卷,第4期,1982年,pp.17-25

[8] 欧进萍，王光远：基于模糊破坏准则的抗震结构动力可靠性分析，《地震工程与工程振动》，第6卷,第1期,1986年,pp.1-11

[9] Roberts, J.B., Spanos, P.D.: Stochastic Averaging; An Approximate Method of Solving Random Vibration Problems, *Int. J. Non-linear Mechanics*,Vol.21, No.1, 1986,pp.111-134

[10] Caughey, T.K.: On the Response of a Class of Non-linear Oscillators to Stochastic Excitation, *Colloq. Int. Nat. Rech. Sci*. 148, 1964,pp.393-402

[11] Caughey,T.K., Ma, F.: The Steady-State Response of a Class of Dynamical Systems to Stochastic Excitation, *J. Appl. Mech. Trans. ASME*,Vol.49, No.3, 1982, pp.629-632

[12] Caughey, T.K., Ma, F.: The Exact Steady-State Solution of a Class of Non-linear Stochastic Systems, *Int. J. Non-linear Mechanics*, Vol.17, No.3, 1982, pp.137-142

[13] Dimentberg, M.F.: An Exact Solution to a Certain Non-linear Random Problem, *Int. J. Non-linear Mechanics*, Vol.17, No.4, 1982, pp.231-236

[14] Wong, E., Zakai, M.: On the Relation Between Ordinary and Stochastic Differential Equation, *Int. J. Eng. Sci.*, Vol.3, No.2, 1965, pp.213-229

[15] Ibrahim, R.A.: *Parametric Random Vibration*, Hertfordshire Eng., Research Studies Pr. Ltd, 1985,

[16] Assaf, SH. A., Zirkle, L.D.: Approximate Analysis of Non-linear Stochastic System, *Int. J. Control*, Vol.23, No.4, 1976, pp. 477-492

[17] Crandall, S,H.: Non-Gaussian Closure for Random Vibration of Non-linear Oscillators, *Int. J. Non-linear Mechanics*, Vol.15, No.4/5, 1980, pp.303-313

[18] Cramer, H.: *Mathematical Method of Statistics*, Princeton University Press, 1946

[19] Crandall, S.H.: Non-Gaussian Closure Techniques for Stationary Random Vibration, *Int. J. Non-linear Mechanics*, Vol.20, No.1, 1985, pp.1-8

[20] 刘强，丁文镜：非线性随机振动中的非高斯矩方法，《力学学报》，第18卷，第5期，1986年，pp. 439-447

[21] Jahedi, A., Ahmadi, G.: Application of Wiener-Hermite Expansion to Nonstationary Random Vibration of a Duffing Oscillator, *J. Appl. Mech. Trans. ASME.*, Vol.50, No. 2, 1983, pp.436-442

Some Problems of Non-linear Random Vibration Analysis

Ou Yangyi　　*Miao Jinliang*

(Institute of Mechanics Academia Sinica of China)

Zhuang Biaozhong

(Zhejiang University)

Abstract

This review discusses analytical methods for solving non-linear random vibration, which are still in a very active state of development in recent years. Emphasis is laid on the analysis of large nonlinearities in system, for example, the FPK method, the closure method and the functional series expansion method.

key words: non-linear vibration; random vibration; the FPK method; the closure method; the functional series expansion method.