Cantorin joukko

Heikki Valve

Helsinki, 25. marraskuuta 2012
Pro Gradu
Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

HELSINGIN YLIOPISTO — HELSINGFORS UNIVERSITET — UNIVERSITY OF HELSINKI

Tiedekunta/Osasto — Fakultet/Sektion — Faculty	Laitos — Institution — Department
Matemaattis-luonnontieteellinen	Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Tekijä — Författare — Author

Heikki Ari Tapani Valve

Työn nimi — Arbetets titel — Title

Cantorin joukko

Oppiaine — Läroämne — Subject

Matematiikka

Työn laji — Arbetets art — Level	Aika — Datum — Month and year	Sivumäärä — Sidoantal — Number of pages
Pro gradu -tutkielma	marraskuu 2012	37 s.

Tiivistelmä — Referat — Abstract

Tässä tutkielmassa tarkastellaan Cantorin joukkoa ja sen soveltamista muutamiin matemaattisiin tarkoituksiin. Cantorin joukon määrittelyssä otetaan huomioon sen monet topologiset ominaisuudet. Tarkoituksena on muotoilla Cantorin joukkoon liittyvät matemaattiset erikoisuudet mahdollisimman ymmärrettävällä tavalla matematiikkaa vain vähän opiskelleelle.

Cantorin joukko on hämmentänyt matemaatikkoja sen ensimmäisestä esiintymisestä lähtien. Joukko muodostetaan vaiheittain poistamalla yksikkövälistä $[0, 1]$ avoimia kolmanneksia. Prosessin ensimmäisessä vaiheessa välistä $[0, 1]$ poistetaan väli $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Seuraavassa vaiheessa kahdesta välistä $[0, \frac{1}{3}]$ ja $[\frac{2}{3}, 1]$ poistetaan jälleen niiden keskimmäiset kolmannekset eli välit $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ ja $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$. Kun tätä prosessia jatketaan loputtamasti, välistä $[0, 1]$ lopulta jäljelle jäävät pisteet muodostavat Cantorin joukon.

Cantorin joukkoon kuuluvat ainakin kaikkien poistettujen välien päätepisteet. Yhtenä joukon erikoisuutena on kuitenkin se, että siihen kuuluu vielä ylinumeroituvasti ääretön määrä pisteitä, jotka eivät ole poistettujen välien päätepisteitä. Tämän seurauksena myös Cantorin joukko on siis ylinumeroituvasti ääretön.

Topologiset ominaisuudet ovat Cantorin joukolla myös erikoisia. Voidaan osoittaa, että joukolla ei ole sisäpisteitä eli pisteitä, joilla olisi jokin Cantorin joukkoon kuuluva ympäristö. Lisäksi voidaan osoittaa, että jokainen Cantorin joukon piste on kasautumispiste eli piste, jonka jokaisessa ympäristössä on jokin toinen Cantorin joukon piste.

Pirunporrasfunktionakin tunnetun Cantorin funktion γ lähtö- ja maalijoukko on yksikköväli $[0, 1]$ eli $\gamma : [0, 1] \to [0, 1]$. Funktion määrittely aloitetaan kuitenkin usein Cantorin joukon avulla. Nimen pirunporrasfunktio γ on saanut portaikkoa muistuttavasta kuvaajastaan. Vaikka γ muistuttaa portaikkoa ja ensisilmäyksellä vaikuttaa katkonaiselta, niin se on kuitenkin jatkuva ja jopa tasaisesti jatkuva.

Viimeisenä asiana tässä tutkielmassa esitetään lyhyesti Cantorin joukkoon liittyvä Lebesguen käyrä. Lebesguen käyrää sanotaan avaruuden täyttäväksi käyräksi, koska se kulkee jokaisen maalijoukkonsa, tässä tapauksessa yksikköneliön $[0, 1] \times [0, 1]$, pisteen kautta.

Avainsanat — Nyckelord — Keywords

Cantorin joukko, Pirunporras funktio, Lebesguen käyrä

Säilytyspaikka — Förvaringsställe — Where deposited

Kumpulan tiedekirjasto

Muita tietoja — Övriga uppgifter — Additional information

Sisältö

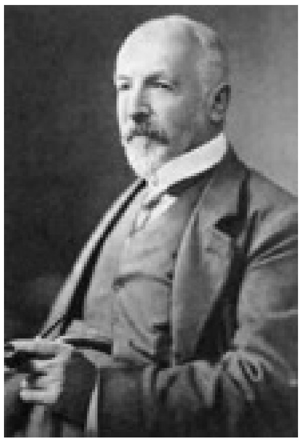
1

Johdanto

Joukossa voi olla äärellinen tai ääretön määrä jäseniä. Kuinka nämä joukot sitten voidaan erottaa toisistaan? Kuinka monta alkiota kuuluu luonnollisten lukujen joukkoon tai vaikkapa reaalilukujen joukkoon? Joukko-opin isänäkin tunnettu Georg Cantor (1845-1918) tuli tunnetuksi muun muassa näiden kysymysten vastausten etsimisestä.

Venäläissyntyinen Cantor asui ja työskenteli vuodesta 1856 lähtien Saksassa. Hän osoitti matemaattista kypsyyttä jo varhaisella iällä ja saavutti tohtorinarvon 1867, vain 22 vuoden iässä.[16] Nuorena tohtorina hän julkaisi artikkeleita lukuteorian lisäksi myös analyysin töistään. Erityisesti Cantorin analyysin töihin on sanottu vaikuttaneen hänen Weierstrassilta (1815-1897) saamansa opit.

Vuonna 1872 Cantor nimitettiin Hallen yliopiston professoriksi ja hän aloitti kirjeenvaihdon Richard Dedekindin (1831-1916) kanssa. Tämä vuosikymmenen kestänyt kirjeenvaihto tuotti paljon tuloksia molemmille miehistä. Vuosien 1873-1878 aikana Cantor teki suurimmat läpimurtonsa lukujoukkojen koon tutkimisen suhteen. Jo näiden vuosien aikana Cantor alkoi miettiä kontinuumihypoteesina tunnettua väitettä, jonka mukaan jokaisessa reaalilukujen osajoukossa, jossa on ääretön määrä jäseniä, on joko yhtä monta jäsentä kuin luonnollisten lukukujen joukossa tai yhtä monta jäsentä kuin koko reaalilukujen joukossa. [2]



Kuva 1.1: Georg Cantor.

Seuraavina vuosina 1879-1884 Cantor julkaisi kuusiosaisen artikkelin, joka oli tarkoitettu joukko-opin perusteiksi. Hän myös aloitti, Dedekindin kanssa päättyneen kirjeenvaihdon tilalle, uuden kirjeenvaihdon ruotsalaisen matemaatikon Gösta Mittag-Lefflerin (1846-1927) kanssa. Tämä kirjeenvaihto kesti kuitenkin vain muutaman vuoden.

Vuodesta 1884 aina elämänsä loppuun asti, Cantor kärsi ajoittain masennuksesta ja stressistä. Hän ei tuottanut enää suuria mateemaattisia julkaisuja ja joutui aika ajoin ottamaan vapaata opetustyöstään Hallen yliopistossa. Hänen viimeiset suurimmat julkaisut 1895-1897 painottuivat enemmän filosofiaan ja teologiaan kuin matematiikkaan. [2]

Cantor vietti osan elämänsä viimeisistä vuosista mielisairaalassa, jossa hän kuoli sydänkohtaukseen 1918. David Hilbert (1862-1943) kuvaili Cantorin elämäntyötä "...hienoimmaksi matemaattisen nerouden tuotokseksi ja yhdeksi ylimmistä ihmisen älyllisen toiminnan saavutukseksi".

Elämänsä aikana Cantor sai ajatuksilleen äärettömyydestä ja joukkojen vertailusta erittäin paljon vastustusta. Vaikuttavin hänen vastustajistaan oli Leopold Kronecker (1823-1891), joka Weierstrassin tavoin opetti Cantoria tämän uran alkuaikoina. Cantorin mielenterveyden ongelmien on myös osin arveltu johtuneen hänen elämäntyötään kohtaan kohdistuneen kovan kritiikin vaikutuksesta.

Cantor määritteli reaalilukujoukon käyttämällä trigonometrisia sarjoja rationaalilukujen kanssa jo vuonna 1872.[2] Tällöin hän havaitsi, että on olemassa suljettuja joukkoja, joiden jokainen piste on kasautumispiste, mutta jotka eivät kuitenkaan ole millään välillä tiheitä. Tällaisesta joukosta Cantor antoi esimerkkinä joukon, jota myöhemmin alettiin kutsua Cantorin joukoksi.

Tutkielman pääpaino on Cantorin joukon ja sen hyödyntämisen esittelyssä. Erityispiirteidensä vuoksi Cantorin joukko on hämmentänyt matemaatikkoja löytämisestään lähtien. Näihin erityisyyksiä käsitellään myös tässä työssä. Lisäksi tutkielmassa esitetään joitakin reaalilukujoukon ominaisuuksia ja osoitetaan se muun muassa ylinumeroituvasti äärettömäksi.

Työn loppupuolella esitetään vielä Cantorin joukkoon liittyvä Lebesguen käyrä. Lebesguen käyrä on avaruuden täyttävä käyrä. Ensimmäisen tällaisen käyrän konstruoi Guiseppe Peano (1858-1932), jonka työtä motivoivat Cantorin aiemmin saavuttamat tulokset joukkojen mahtavuuksille.

2

Alku

Tutkielman aluksi on hyvä kerrata joitakin käsitteitä, jotka toimivat tutkielman pohjana. Tällä tavoin tutkielmasta koitetaan tehdä mahdollisimman helposti lähestyttävä. Suuressa osassa tutkielman määritelmiä on rajoituttu tarkastelemaan reaalilukusuoran pisteitä, koska tätä laajempi käsittely on tässä pääasian kannalta tarpeetonta.

2.1 Joukot

Joukko koostuu alkioista eli pisteistä eli jäsenistä. Joukkoa merkitään jollakin suurella kirjaimilla $A, B, C \ldots$.

Esimerkki 2.1. Joukon $A = \{0, 1\}$ jäsenet ovat 0 ja 1. Yleisesti tunnettuja joukkoja ovat lukujoukot $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ ja $\mathbb{R}$. Joukon alkiot voidaan myös ilmoittaa jollakin säännöllä. Parillisten kokonaislukujen joukko voidaan esittää joukkona $E = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

Joukkojen A ja B *yhdisteeseen* kuuluvat kaikki alkiot, jotka kuuluvat joko joukkoon A tai joukkoon B.

Joukkojen A ja B *leikkaukseen* kuuluvat kaikki ne alkiot, jotka kuuluvat joukkoon A ja B.

Kahden joukon A ja B väliseksi *erotukseksi* sanotaan joukkoa, joka muodostetaan poistamalla joukosta A joukon B alkiot.

Joukon $A \subset \mathbb{R}$ *komplementtiin* $\complement A = \mathbb{R} \setminus A$ kuuluvat kaikki ne alkiot, jotka eivät kuulu A:han.

Esimerkki 2.2. Joukkojen $A = \{0, 1\}$ ja $B = \{2, 3\}$ yhdiste on $A \cup B = \{0, 1, 2, 3\}$. Joukkojen A ja B leikkaus on $A \cap B = \{2\}$. Joukkojen $C = \{0, 1, 2, 3\}$ ja $D = \{0, 3\}$ erotus on $C \setminus D = \{1, 2\}$.

Määritelmä 2.3. Joukon A *osajoukoksi* sanotaan joukkoa B, joka on muodostettu poistamalla joukosta A alkiota. Joukko A on myös itsensä osajoukko.

Reaalilukujoukon $\mathbb{R}$ osajoukkoja ovat erityisesti *välit* $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}, (a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}, [a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ tai $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$. Kaari- ja hakasulut määrittävät onko väli *avoin, puoliavoin* vai *suljettu.*

Esimerkki 2.4. Joukko $A = \{-1, 2, 3\}$ on kokonaislukujoukon $\mathbb{Z}$ osajoukko eli $A \subset \mathbb{Z}$. Väli $B = (0, 1) \subset \mathbb{R}$ on avoin eli kumpikaan joukon päätepisteistä ei kuulu joukkoon B. Puoliavoimeen väliin $C = [0, 1) \subset \mathbb{R}$ kuuluu välin päätepiste 0, mutta ei piste 1. Väli $[0, 1]$ on suljettu.

Muitakin joukkoja kuin vain välejä voidaan sanoa *avoimiksi* ja *suljetuiksi.*

Määritelmä 2.5. Joukko $E \subset \mathbb{R}$ on *avoin*, jos jokainen piste $x \in E$ kuuluu jollekin avoimelle välillä $(a, b) \subset E$. Joukko F on suljettu, jos sen komplementti $\complement F$ on avoin.

Huomautus 2.6. Joukko voi olla samanaikaisesti sekä suljettu että avoin.[13] Esimerkiksi tyhjä reaalilukujoukon osajoukko $\emptyset$ on avoin ja suljettu. Toisaalta jotkin reaalijoukon osajoukot eivät ole tässä kumpaankaan, kuten $\mathbb{Q}$.

Joukon A *potenssijoukko* $\mathcal{P}(A)$ on kaikkien A:n osajoukkojen joukko. Esimerkiksi joukon $A = \{2, 3, 5\}$ potenssijoukko on $\mathcal{P}(A) = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \{2, 3\},$
$\{2, 5\}, \{3, 5\}, \{2, 3, 5\}, \emptyset\}$.

Seuraava määritelmä on erityisesti hyvä tuntea, kun tutkitaan erilaisia välejä ja lukujen käyttäytymistä väleillä. [5]

Määritelmä 2.7. Olkoon $A \subset \mathbb{R}$. Joukko A on *ylhäältä rajoitettu*, jos on olemassa $a \in \mathbb{R}$ siten, että $a \geq x$ kaikilla $x \in A$. Sanotaan, että a on A:n yläraja.

Luku M on joukon A *supremum* eli pienin yläraja, jos se on pienin joukon A ylärajoista. Tätä merkitään $M = \sup A$.

Vastaavasti olkoon $B \subset \mathbb{R}$. Joukko B on *alhaalta rajoitettu*, jos on olemassa $b \in \mathbb{R}$ siten, että $b \leq x$ kaikilla $x \in B$. Sanotaan, että b on B:n alaraja.

Luku m on joukon B *infimum* eli suurin alaraja, jos se on suurin joukon B alarajoista. Tätä merkitään $m = \inf B$.

Esimerkki 2.8. Joukon $A = (0, 1]$ infimum on $\inf A = 0$. Joukon pienin yläraja on 1, joka on samalla siis sen supremum $\sup A$.

2.2 Lukujonot

Lukujonoksi sanotaan jonoa reaalilukuja x_n, jossa luvun paikan jonossa ilmaisee $n \in \mathbb{N}$. Jonoja merkitään tässä (x_n).

Esimerkki 2.9. Joukosta $A = \{0, 1\}$ voidaan muodostaa päättymätön jono $(a_n) = 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1 \ldots$ tai päättyvä jono $(b_n) = 0, 0, 1$. Jonojakin voidaan ilmaista jonkin säännön avulla. Negatiivisten kokonaislukujen lukujono $(x_n) = -1, -2, -3, -4, \ldots$ voidaan lyhyesti ilmaista joukkomerkinnän avulla $(x_n) = \{x_n \mid x_n \in \mathbb{Z}_-\}$.

Osajonoksi (x_{n_k}) sanotaan lukujonoa, joka on muodostettu poistamalla jonosta (x_n) jäseniä. Jono (x_n) on itsensä osajono. Esimerkiksi lukujonon $(f_n) = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$ osajono (f_{n_k}) on $(f_{n_k}) = 1, 3, 8, \ldots$.

Määritelmä 2.10. Lukujonoa (x_n) sanotaan *suppenevaksi* eli konvergoivaksi, jos sillä on *raja-arvo* $a \in \mathbb{R}$. Olkoon lukujonon (x_n) raja-arvo $a \in \mathbb{R}$. Tällöin lukujono suppenee sitä kohti, jos jokaiselle luvulle $\epsilon > 0$ on olemassa luku $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ siten, että

$$|x_n - a| < \epsilon, \text{kun } n \geq n_\epsilon \ .$$

Lukujonon (x_n) suppenemista kohti raja-arvoa a merkitään

$$x_n \to a, \text{ kun } n \to \infty \text{ tai } a = \lim_{n \to \infty} x_n \ .$$

Jos jono (x_n) ei suppene, se hajaantuu eli divergoi.

Esimerkki 2.11. Lukujono (x_n), jolle pätee, että $x_n = \frac{1}{n}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ suppenee ja sen raja-arvo on $a = 0$.

Määritelmä 2.12. Lukujono (x_n) on *Cauchyn jono*, jos jokaiselle $\epsilon > 0$ on olemassa $n_0 \in \mathbb{N}$, jolle pätee ehto $|x_k - x_m| < \epsilon,$ kun $k \geq n_0$ ja $m \geq n_0$.

Lause 2.13. *Reaalilukujoukon suppeneva lukujono (x_n) on Cauchyn jono.*

Todistus. Oletetaan, että $\epsilon > 0$ ja $x_n \to a$, kun $n \to \infty$. Nyt suppenevan lukujonon määritelmän mukaan on olemassa $n_0 \in \mathbb{N}$ jokaiselle avoimelle välille $(a - \frac{\epsilon}{2}, a + \frac{\epsilon}{2}) = \{x_k \in (x_n) \mid |x_k - a| < \frac{\epsilon}{2}\}$, kun $k \geq n_0$. Samoin on olemassa $n_0 \in \mathbb{N}$ jokaiselle avoimelle välille $(a - \frac{\epsilon}{2}, a + \frac{\epsilon}{2}) = \{x_m \in (x_n) \mid |x_m - a| < \frac{\epsilon}{2}\}$, kun $m \geq n_0$. Tästä saadaan, että

$$|x_k - x_m| = |x_k - a + a - x_m| \leq |x_k - a| + |a - x_m| = |x_k - a| + |x_m - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Jokainen suppeneva reaalijoukon lukujono on siis Cauchyn jono. □

Voidaan myös osoittaa, että jokainen reaalilukujoukon Cauchyn jono suppenee. Tätä varten tarvitsee kuitenkin tuntea seuraava analyysin tulos.

Lause 2.14 (Bolzano-Weierstrassin lause)**.** *Rajoitetulla lukujonolla on aina suppeneva osajono.*

Lause 2.15. *Reaalilukujoukon Cauchyn jono (x_n) suppenee.*

Todistus. Olkoon $\epsilon > 0$. Tiedetään, että (x_n) on rajoitettu, joten lauseen 2.14 nojalla sillä on suppeneva osajono (x_{n_k}). Merkitään tällöin, että $x_{n_k} \to a$, kun $n_k \to \infty$. Nyt kaikille k on olemassa $L \in \mathbb{N}$, että pätee $|x_{n_k} - a| < \frac{\epsilon}{2}$, kun $k \geq L$.

Kaikille m ja n on myös olemassa N, että pätee $|x_m - x_n| < \frac{\epsilon}{2}$, kun $m, n \geq N$. Olkoon $M = sup\{L, N\}$. Tällöin kaikille $k \geq M$ pätee, että

$$|x_n - a| = |x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - a| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

□

Huomautus 2.16. Topologiassa metrisiä avaruuksia, joiden jokainen Cauchyn jono suppenee, sanotaan *täydellisiksi avaruuksiksi.*[13] Reaalilukujoukko ja tavallinen metriikka muodostavat lauseen 2.15 nojalla täydellisen avaruuden.

2.3 Funktiot

Kuvaus eli funktio ilmaisee kahden joukon A ja B välisen säännönmukaisuuden, jossa kuvauksen *lähtöjoukon* A jokainen alkio x muodostaa jokaisen *maalijoukon* jonkin alkion y kanssa parin (x, y). Kuvauksia merkitään usein nuolimerkinnällä $f : A \to B$ ja merkinnällä $f(a) = b$, jossa $a \in A$ ja $b \in B$.

Esimerkki 2.17. Lukujonot (x_n) ovat kuvauksia $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Olkoon kuvaus $f : X \to Y$ ja $A \subset X$. Joukon A *kuvaksi* sanotaan Y:n osajoukkoa $fA = \{f(x) \in Y \mid x \in A\}$. Vastaavasti joukon $B \subset Y$ *alkukuvaksi* sanotaan X:n osajoukkoa $f^{-1}B = \{x \in X \mid f(x) \in B \subset Y\}$.

Määritelmä 2.18. Funktiot voidaan jaotella seuraavasti:

1. Kuvausta $f : A \to B$ sanotaan *injektioksi*, jos kaikille $x, y \in A$ ja $x \neq y$ pätee $f(x) \neq f(y)$.
2. Kuvausta $f : A \to B$ sanotaan *surjektioksi*, jos kaikille $b \in B$ on olemassa $a \in A$, jolle pätee $f(a) = b$.
3. Kuvausta sanotaan *bijektioksi*, jos se on yhtä aikaa injektio ja surjektio.

Esimerkki 2.19. Funktio $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, jolle $g(x) = x^2$, on surjektio, mutta ei injektio, koska esimerkiksi $-2, 2 \in \mathbb{R} \nRightarrow g(-2) \neq g(2)$. Kuvaus $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, jolle $h(x) = x$ on bijektio.

Olkoon funktio $f : X \to Y$ bijektio. Tällöin jokaista $y \in Y$ kohti on olemassa tasan yksi $x \in X$, jolle $f(x) = y$. Kun merkitään alkiota $x = f^{-1}(y)$, niin saadaan kuvaus $f^{-1} : Y \to X$. Tätä kuvausta sanotaan f:n *käänteiskuvaukseksi*. Käänteiskuvauksen merkintää ei tule sekoittaa alkukuvan merkintään, joka määriteltiin kaikille kuvauksille eikä vain bijektioille.

Erityisesti, kun f on bijektio ja sen käänteiskuvaus on f^{-1}, niin $f^{-1}B$ merkitsee joukon B kuvaa kuvauksessa f^{-1} ja joukon B alkukuvaa kuvauksessa f eli siis samaa asiaa.

Määritelmä 2.20. Funktion f *vasemmanpuoleinen raja-arvo* on a pisteessä x_0, jos jokaista lukua $\epsilon > 0$ kohti on olemassa $\delta > 0$, jolle $|f(x) - a| < \epsilon$, kun $x \in (x_0 - \delta, x_0)$. Tätä merkitään

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = a.$$

Samalla tavoin määritellään funktion *oikeanpuoleinen raja-arvo* olemaan b pisteessä x_0, jos jokaista lukua $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$, jolle $|f(x) - b| < \epsilon$, kun $x \in (x_0, x_0 + \delta)$. Tätä merkitään

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = b.$$

Vasemman- ja oikeanpuoleisesta raja-arvoista käytetään nimitystä *toispuoleiset raja-arvot*.

Määritelmä 2.21. Funktiota $f : A \to \mathbb{R}$ sanotaan *jatkuvaksi* pisteessä $x \in A \subset \mathbb{R}$, jos jokaista lukua $\epsilon > 0$ kohti on olemassa jokin $\delta > 0$, jolle $|f(x) - f(y)| < \epsilon$, kun $|x - y| < \delta$ ja $y \in A$.

Funktion jatkuvuuden määritelmä voidaan myös muotoilla toispuoleisten raja-arvojen avulla. Funktio on jatkuva pisteessä a, jos sen toispuoleiset raja-arvot ovat yhtäsuuria kuin funktion arvo tässä pisteessä eli

$$\lim_{x \to a-} f(x) = f(a) = \lim_{x \to a+} f(x).$$

Määritelmä 2.22. Funktio $f : A \to \mathbb{R}$ on *tasaisesti jatkuva*, jos jokaista lukua $\epsilon > 0$ kohti on olemassa jokin $\delta > 0$ siten, että kaikilla $x, y \in A \subset \mathbb{R}$ pätee, että $|f(x) - f(y)| < \epsilon$, kun $|x - y| < \delta$.

Tasainen jatkuvuus eroaa jatkuvuudesta. Funktion jatkuvuutta tutkittaessa δ:n arvo valitaan jokaisen tutkittavan pisteen kohdalla aina erikseen. Funktion tasaista jatkuvuutta tutkittaessa δ:lle käytetään samaa arvoa jokaisen pisteen kohdalla.

Esimerkki 2.23. Olkoon funktio $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, jolle $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Funktio f on jatkuva, mutta ei tasaisesti jatkuva. Tämä nähdään, kun tutkitaan mitä tapahtuu x:n lähestyessä nollaa. Jos valitaan $\delta = \frac{1}{2}$, niin pienillä x:n ja y:n arvoilla ei löydetä lukua $\epsilon > 0$, jolle $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

3

Kohti Cantorin joukkoa

Tässä luvussa käsitellään hyödyllisiä ja tarpeellisia käsitteitä erityisesti Cantorin joukon ominaisuuksien mahdollisimman hyvään ymmärrykseen.

3.1 Sulkeuma ja tiheä joukko

Määritelmä 3.1. Joukko $U \subset \mathbb{R}$ on pisteen $b \in \mathbb{R}$ *ympäristö*, jos $b \in U$ ja U on avoin $\mathbb{R}$:ssä.

Esimerkki 3.2. Avoin väli $(-1, 1)$ on pisteen $0 \in \mathbb{R}$ ympäristö, koska $0 \in (-1, 1)$ ja $(-1, 1)$ on avoin $\mathbb{R}$:ssä.

Määritelmä 3.3. Pistettä $x \in \mathbb{R}$ sanotaan joukon $A \subset \mathbb{R}$ *kasautumispisteeksi*, jos jokaisessa x:n ympäristössä on jokin joukon A piste $y \neq x$.

Vastaavasti pistettä $x \in A$ sanotaan joukon $A \subset \mathbb{R}$ *erakkopisteeksi*, jos x:llä on jokin sellainen ympäristö U, jolle $U \cap A = \{x\}$.

Joukkoa sanotaan *diskreetiksi*, jos sen kaikki pisteet ovat erakkopisteitä.

Esimerkki 3.4. Kokonaislukujen joukko $\mathbb{Z}$ on diskreetti joukko.

Määritelmä 3.5. Olkoon $A \subset \mathbb{R}$. Piste $z \in \mathbb{R}$ on A:n *sisäpiste*, jos z:lla on ympäristö $U \subset A$.

Jos taas z:lla on ympäristö $U \subset \complement A$, niin z on A:n *ulkopiste*. Jos z ei ole A:n sisä- eikä ulkopiste, se on A:n *reunapiste*.

Esimerkki 3.6. Joukon $A = (0, 1]$ sisäpisteiden joukon muodostaa kaikki $x \in (0, 1)$, ulkopisteiden joukon kaikki $x \in \complement[0, 1]$ ja reunapisteitä ovat 0 ja 1.

Määritelmä 3.7. Olkoon $X \subset \mathbb{R}$. Joukon X *sulkeuma* $\bar{X}$ on kaikkien niiden pisteiden $x \in \mathbb{R}$ joukko, joiden jokainen ympäristö kohtaa X:n.

Sulkeumaan sisältyy siis vähintään kaikki pisteet $x \in X$ ja X:n reunapisteet.

Esimerkki 3.8. Sulkeuma joukolle $\mathbb{R} \setminus \{1\} \subset \mathbb{R}$ on $\mathbb{R}$, koska otettiin mikä tahansa joukon $\mathbb{R}$ piste ja valitun pisteen mikä tahansa ympäristö, niin jokainen valittu ympäristö kohtaa $\mathbb{R} \setminus \{1\}$:n.

Lause 3.9. *Olkoot $X, Y \in \mathbb{R}$. Tällöin pätee, että*

(1) $X \subset \bar{X}$.

(2) $\bar{X}$ *on aina suljettu.*

(3) Jos $X \subset Y$ ja Y on suljettu $\mathbb{R}$:ssä, niin $\bar{X} \subset Y$.

(4) Joukko X on suljettu $\mathbb{R}$:n jos ja vain jos $X = \bar{X}$.

Todistus. Näytetään kohdat (1) – (4) tosiksi.

(1): Jos $x \in X$ ja U on x:n mielivaltainen ympäristö, niin $x \in U \cap X$. Tällöin sulkeuman määritelmän 3.7 mukaan $x \in \bar{X}$. Siis jokainen X:n piste kuuluu sen sulkeumaankin.

(2): Merkitään $V = \complement\bar{X}$ ja olkoon $v \in V$. Koska $v \in \complement\bar{X}$, niin sillä on olemassa ympäristö U, joka ei, (1):n nojalla, kohtaa X:ää. Jos jokin $u \in U$, niin U on u:n ympäristö, joka ei kohtaa X:ää eli $u \notin \bar{X}$ ja siis $u \in V$. Tästä seuraa, että $U \subset V$ ja joukko V on tällöin avoin, koska sen jokaisen pisteen ympäristö on avoin. Määritelmän 2.5 mukaan $\bar{X}$ on siis suljettu.

(3): Väite voidaan muotoilla uudelleen seuraavasti: *Jos $X \subset Y$ ja Y on suljettu $\mathbb{R}$:ssä, niin $\complement Y \subset \complement\bar{X}$.* Oletetaan, että $y \in \complement Y$. Tällöin $\complement Y$ on y:n ympäristö, joka ei kohtaa Y:tä eikä X:ää, koska $X \subset Y$. Sulkeuman määritelmän 3.7 nojalla $y \notin \bar{X}$, joten $y \in \complement\bar{X}$.

(4): Oletetaan ensin, että X on suljettu $\mathbb{R}$:ssä ja osoitetaan, että tällöin $X = \bar{X}$. Yleisesti tiedetään, että $X \subset X \subset \mathbb{R}$. Koska X on suljettu, niin kohdan (3) nojalla $\bar{X} \subset X$. Toisaalta kohdan (1) nojalla $X \subset \bar{X}$, joten siis $X = \bar{X}$. Oletetaan sitten, että $X = \bar{X}$ ja osoitetaan, että tällöin X on suljettu $\mathbb{R}$:ssä. Kohdan (2) nojalla tämä on tosi.

$\square$

Määritelmä 3.10. $X \subset \mathbb{R}$ on *tiheä* $\mathbb{R}$:ssä, jos $\mathbb{R}$:n jokaisen pisteen x jokainen ympäristö sisältää ainakin yhden X:n pisteen. Toisin sanoen X on tiheä, jos X:n sulkeuma on $\mathbb{R}$.

Esimerkki 3.11. Joukko $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ on tiheä $\mathbb{R}$:ssä.

3.2 Mahtavuus

Mahtavuudella eli kardinaliteetillä tarkoitetaan mielivaltaisen joukon alkioiden lukumäärää eli joukon kokoa. Joukon mahtavuus ilmaistaan äärellisen joukon tapauksessa luonnollisella luvulla ja äärettömän joukon tapauksessa kardinaaliluvulla.

Esimerkki 3.12. Joukon $S = \{4, 5, 6, 7\}$ koko on selvästikin 4 ja sitä merkitään $\mathrm{card}(S) = |S| = 4$. Joukon $T = \{4, 5, 6, 7, \ldots n\}$ koko on $n - 3$ eli $\mathrm{card}(T) = |T| = n - 3$. Äärellisen joukon J, jonka mahtavuus on $\mathrm{card}(J) = n$, potenssijoukon $\mathcal{P}(J)$ mahtavuus on $\mathrm{card}(\mathcal{P}(J)) = 2^n$.

Määritelmä 3.13. Olkoon $A, B \subset \mathbb{R}$. Jos on olemassa injektio $f : A \to B$, niin joukon A mahtavuus on pienempi tai yhtäsuuri kuin joukon B mahtavuus. Merkitään tällöin, että $A \lesssim B$.

Jos on olemassa surjektio $g : A \to B$, niin joukon A mahtavuus on suurempi tai yhtäsuuri kuin joukon B mahtavuus. Merkitään tällöin, että $A \gtrsim B$.

Joukot A ja B ovat keskenään *yhtä mahtavat* jos ja vain jos on olemassa bijektio $f : A \to B$. Yhtä mahtavia joukkoja merkitään tässä $A \sim B$.

Esimerkki 3.14. Olkoon $D = \{1, 2, 3\}$, $E = \{5, 9, 11\}$ ja f kuvaus, jolle $f(1) = 7, f(3) = 9$ ja $f(2) = 11$. Tällöin joukot D ja E ovat keskenään yhtä mahtavat eli $D \sim E$, koska f on bijektio.

Äärettömät joukot jaetaan kahteen luokkaan, numeroituviin ja ylinumeroituviin.[3] Luonnollisten lukujen mahtavuuden tiedetään olevan ääretön ja sitä merkitään $\mathrm{card}(\mathbb{N}) = \aleph_0 = \infty$. $\aleph$ (luetaan alef) on hepreaa. Luonnollisten lukujen joukko on numeroituvasti ääretön joukko, koska sen ja jonkin äärellisen joukon alkioista voidaan tehdä keskenään alkiopareja.

Reaalilukujen tapauksessa tällaisia alkiopareja ei kuitenkaan voida muodostaa, koska reaalilukujen luettelointi ei onnistu samalla tavoin kuin luonnollisilla luvuilla. Reaalilukujoukon mahtavuudesta käytetään merkintää $\mathrm{card}(\mathbb{R}) = \mathfrak{c}$. Cantor todisti pitkään häntä vaivanneelle reaalilukujen mahtavuudelle vuonna 1874, että $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} > \aleph_0$.[2] Muiden äärettömien joukkojen mahtavuuksia voidaan merkitä $\aleph_1, \aleph_2 \ldots$.

Lause 3.15 (Cantorin diagonaaliargumentti)**.** *Reaalilukujen joukko on ylinumeroituvasti ääretön joukko.*

Todistus. Näytetään Cantorin diagonaaliargumentin avulla, että jo suljettu väli $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ on ylinumeroituva, joten myös $\mathbb{R}$ on ylinumeroituva. Välin $[0, 1]$ luvuista voidaan alkaa tekemään listausta, joka on esitettynä taulukossa 3.1. Näitä desimaalilukuja x_i on numeroituva määrä, koska $i \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} x_1 &= 0{,}\underline{1}23456\ldots \\ x_2 &= 0{,}3\underline{5}7913\ldots \\ x_3 &= 0{,}02\underline{4}681\ldots \\ x_4 &= 0{,}101\underline{2}13\ldots \\ x_5 &= 0{,}7180\underline{8}9\ldots \\ x_6 &= 0{,}46578\underline{1}\ldots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Taulukko 3.1: Desimaalilukujen luettelo.

Merkitään seuraavaksi näin saatujen desimaalilukujen tiettyä desimaalinumeroa yleisesti $x_{i,j}$, jossa i kertoo monesko luku on kyseessä ja j numeron paikan luvussa. Esimerkiksi tapauksessa $x_{3,4}$ kyseessä on listan kolmannen desimaaliluvun neljäs numero eli 6. Nyt voidaan määritellä desimaaliluvut x_{α_k} siten, että $x_{\alpha_k,1} \neq x_{1,1}$, $x_{\alpha_k,2} \neq x_{2,2}$, $x_{\alpha_k,3} \neq x_{3,3}$,

..., $x_{\alpha_k,n} \neq x_{n,n}$. Määritetään lisäksi, että jos $x_{\alpha_k,n} = 9$, niin $x_{\alpha_k,n} = 7$ sekä jos $x_{\alpha_k,n} = 0$, niin $x_{\alpha_k,n} = 2$. Taulukossa 3.1 esitetyistä luvuista on korostettuna numerot, joiden avulla voidaan määrittää jollekin x_{α_k}:lle kuusi ensimmäistä desimaalia eli $x_{\alpha_k} = 0,245172\ldots$.

x_{α_k} ei kuitenkaan voi olla mikään listatuista desimaaliluvuista, koska se määriteltiin niin. Jos esimerkiksi $x_{\alpha_k} = x_{151}$, niin silloin olisi $x_{\alpha_k,151} = x_{151,151}$. Tämä on kuitenkin mahdotonta ja x_{α_k} on listauksen ulkopuolinen luku.

Lopuksi olkoon T kaikkien välin $[0,1]$ taulukossa 3.1 listattujen desimaalilukujen ja kaikkien lukujen x_{α_k} joukko. Tällöin joukon T ja luonnollisten lukujen $\mathbb{N}$ välillä ei voida muodostaa kaikista alkioista alkiopareja, joten $T \subset [0,1]$ on ylinumeroituva.

$\square$

Cantorin diagonaaliargumentissa käytetty tekniikka on erittäin hyödyllinen todistusten laatimiseen ja Cantor itsekin hyödynsi sitä muun muassa todistaakseen seuraavan tärkeän joukko-opin tuloksen. [11]

Lause 3.16 (Cantorin teoreema). *Joukko A ja sen potenssijoukko $\mathcal{P}(A)$ eivät ole yhtä mahtavat.*

Todistus. Tehdään vastaoletus, että $\operatorname{card}(A) = \operatorname{card}(\mathcal{P}(A))$ eli joukon A ja sen potenssijoukon $\mathcal{P}(A)$ välillä on olemassa bijektio h. Tällöin nähdään kaikilla $x \in A$, että pisteiden $h(x)$ muodostama joukko on A:n osajoukko, koska potenssijoukko $\mathcal{P}(A)$ sisältää kaikki A:n osajoukot. Lisäksi x joko kuuluu tähän osajoukkoon tai ei kuulu. Määritellään joukko X siten, että

$$X = \{x \mid x \in A \text{ ja } x \notin h(x)\} .$$

Tällöin pätee, että $X \in \mathcal{P}(A)$ ja $X = h(y)$ jollakin $y \in A$. Nyt nähdään, että

$$\begin{aligned} & y \in X \\ \Leftrightarrow \quad & y \notin h(y) \text{ ja } y \in A \\ \Leftrightarrow \quad & y \notin X = h(y) \end{aligned}$$

Väite on siis ristiriidassa itsensä kanssa, $y \in X \Leftrightarrow y \notin X$. Vastaoletus on siis väärä ja $\mathcal{P}(A) \nsim (A)$.

$\square$

Huomautus 3.17. Cantorin teoreemasta seuraa, että mille tahansa joukolle A, $A \lesssim \mathcal{P}(A)$. Joukon A ja sen potenssijoukon välille voidaan muodostaa esimerkiksi injektio $f : A \to \mathcal{P}(A)$, jolle $f(a) = \{a\}$ kaikilla $a \in A$, mutta ei surjektiota. Suurinta kardinaliteettiä ei ole siis olemassa.

3.3 Perfektit joukot

Määritelmä 3.18. Reaalilukujoukon osajoukkoa P sanotaan *perfektiksi*, jos se on suljettu ja jokainen sen pisteistä on kasautumispiste.

Määritelmä 3.19. Joukko S on *separoituva*, jos se sisältää numeroituvan tiheän osajoukon D eli joukon, jossa on numeroituva määrä alkioita ja sen sulkeuma $\bar{D}$ on koko S.

Esimerkki 3.20. Reaalilukujen joukko on separoituva. Rationaaliluvut $\mathbb{Q}$ ovat reaalilukujen numeroituva, tiheä osajoukko, jonka sulkeuma on $\mathbb{R}$.

4

Cantorin joukko

4.1 Joukon muodostaminen

Määritelmä 4.1. *Cantorin joukkoon C* kuuluvat ne suljetun välin $[0,1]$ pisteet, jotka saadaan poistamalla välistä $[0,1]$ avoimia "keskimmäisiä kolmanneksia". Joukkoon kuuluvien välien määrittämiseen voidaan hyödyntää karkeasti sääntöä

$$C_n = \frac{1}{3}C_{n-1} \ \cup \ (\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C_{n-1}) \ ,$$

jossa $C_0 = [0,1]$ ja $n \in \{1,2,3,\ldots\}$.[17]

Esimerkki 4.2. Joukko C_1 saadaan säännön avulla esitettyä $C_1 = \frac{1}{3}C_0 \cup (\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C_0)$ eli $[0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$.

Joukko C_2 saadaan säännön avulla esitettynä $C_2 = \frac{1}{3}[0, \frac{1}{3}] \cup \frac{1}{3}[\frac{2}{3}, 1] \cup (\frac{2}{3} + \frac{1}{3}[0, \frac{1}{3}] \cup \frac{2}{3} + \frac{1}{3}[\frac{2}{3}, 1])$ eli $[0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$.

Taulukossa 4.1 on esitettynä Cantorin joukon muodostamisen kolme ensimmäistä vaihetta. Taulukon arvoja on havainnollistettu kuvassa 4.1.

Cantorin joukkoon kuuluvat ainakin kaikkien poistettujen välien päätepisteet. Päätepisteiden lisäksi C:hen kuuluu kuitenkin esimerkiksi pisteet $\frac{1}{13}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{4}$ ja $\frac{3}{4}$. Yleisesti Cantorin joukkoon kuuluvat kaikkien sen muodostamisessa syntyneiden osajoukkojen C_i leikkauksessa olevat pisteet eli

$$C = \bigcap_{i=0}^{\infty} C_i.$$

Huomautus 4.3. Välistä $[0,1]$ poistettujen avointen välien yhdiste on avoin. Cantorin joukko on siis suljettujen joukkojen leikkaus ja muodostaa tavallisen metriikan kanssa huomautuksessa 2.16 esitellyn täydellisen avaruuden. Itse asiassa Cantorin joukko on perfekti eli jokainen joukon piste on kasautumispiste. Joukon mikään piste ei kuitenkaan ole sisäpiste.

n	Poistetut pisteet	Cantorin joukon pisteet
1.	$(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$	$[0, \frac{1}{3}], [\frac{2}{3}, 1]$
2.	$(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}), (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$	$[0, \frac{1}{9}], [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}], [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}], [\frac{8}{9}, 1]$
3.	$(\frac{1}{27}, \frac{2}{27}), (\frac{7}{27}, \frac{8}{27}), (\frac{19}{27}, \frac{20}{27}), (\frac{25}{27}, \frac{26}{27})$	$[0, \frac{1}{27}], [\frac{2}{27}, \frac{1}{9}], [\frac{2}{9}, \frac{7}{27}], [\frac{8}{27}, \frac{1}{3}], [\frac{2}{3}, \frac{19}{27}], [\frac{20}{27}, \frac{7}{9}], [\frac{8}{9}, \frac{25}{27}], [\frac{26}{27}, 1]$
$\vdots$		

Taulukko 4.1: Cantorin joukon muodostamisen kolme ensimmäistä vaihetta.

Lemma 4.4. *Olkoon $A \subset \mathbb{R}$ ja $a \in \mathbb{R}$. Tällöin $a \in \bar{A}$ jos ja vain jos on olemassa sellainen jono (x_n) A:ssa, että $x_n \to a$, kun $n \to \infty$.*

Todistus. Oletetaan, että $a \in \bar{A}$. Jokaisella $n \in \mathbb{N}$ voidaan valita piste $x_n \in A \cap (a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n})$. Tällöin saadaan aikaiseksi A:n jono (x_n). Lisäksi, koska $|x_n - a| < \frac{1}{n}$, niin $x_n \to a$, kun $n \to \infty$.

Oletetaan sitten, että $x_n \in A$ ja $x_n \to a$. Jos U on a:n ympäristö, niin $x_n \in U \cap A$ tarpeeksi suurilla n, joten $U \cap A \neq \emptyset$. Koska U oli a:n mielivaltainen ympäristö, niin sulkeuman määritelmän mukaan $a \in \bar{A}$.

$\square$

Lause 4.5. *Cantorin joukon jokainen Cauchyn jono suppenee.*

Todistus. Tiedetään, että $C \subset \mathbb{R}$ ja C on suljettu. Olkoon (x_n) Cauchyn jono C:ssä. Jono (x_n) suppenee tällöin kohti jotakin pistettä $a \in \mathbb{R}$, koska jokainen $\mathbb{R}$:n Cauchyn jono suppenee (2.15). Koska C on suljettu, se on lauseen 3.9 nojalla itsensä sulkeuma. Nyt lemman 4.4 nojalla $a \in C$ ja jokainen C:n Cauchyn jono siis suppenee.

$\square$

Lause 4.6. *Jokainen Cantorin joukon piste on kasautumispiste.*

Todistus. Olkoon $c \in C$ Cantorin joukon piste. Nyt c on kasautumispiste, jos jokaisessa sen ympäristössä on jokin piste $a \neq c$. Piste c voi olla joko suljetun välin päätepiste tai ei. Tutkitaan ensin tapaus, että se on.

Olkoon U c:n mielivaltainen ympäristö eli $c \in U$ ja U on avoin. Koska U on avoin, $c \in (a - r, a + r)$, jollakin C:n avoimella välillä $(a - r, a + r)$, jossa $r > 0$. Täytyy siis osoittaa, että pisteelle c pätee, että $|c - a| < r$ jollakin $r > 0$.

Koska c on jonkin välin C_n päätepiste, niin se on välin päätepiste myös kaikilla $k \geq n$. Tällöin oli r miten pieni tahansa, niin aina voidaan valita jokin väli C_k, jonka pituus on $\dfrac{1}{3^k} < r$. Olkoon nyt $a \in C$ saman välin C_k toinen päätepiste kuin c. Siis $|c - a| = \dfrac{1}{3^k} < r$.

Toisessa tapauksessa piste $c \in C$ eli $c \in C_k$ kaikilla k. Olkoon tällöin $a \in C$ kumpi tahansa välin C_k päätepisteistä. Tällöin $|c - a| < \dfrac{1}{3^k}$ ja jälleen k voidaan valita riittävän suureksi siten, että $\dfrac{1}{3^k} < r$. Siis $|c - a| < r$. Jokainen Cantorin joukon piste on siis kasautumispiste. Lopuksi nähdään, että jokainen Cantorin joukon kasautumispiste kuuluu todella Cantorin joukkoon, koska Cantorin joukko on suljettu.

$\square$

Kuva 4.1: Cantorin joukon muodostamisen kolme ensimmäistä vaihetta reaalilukusuoran osien avulla esitettynä.

4.2 Kolmikantainen lukujärjestelmä

Arjessa on totuttu käyttämään kymmenkantaista lukujärjestelmää, jonka kantaluku on siis 10. Kantaluku 10 tarkoittaa sitä, että esimerkiksi luku 137_{10} voidaan esittää potenssimuodossa $1 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 7 \times 10^0$, jossa kertoimina voidaan käyttää kymmentä eri numeroa $0 \ldots 9$. Luku kirjoitetaan tavallisemmin lyhyesti ilman kantaluvun potensseja ja alaindeksin kantalukumerkintää.

Etenkin tietokoneiden kanssa työskenteleminen on tehnyt suurelle joukolle ihmisiä tutuksi binäärijärjestelmän eli kaksikantaisen lukujärjestelmän. Kaksikantaisen ja kolmikantaisen lukujärjestelmän ymmärtämisestä on hyötyä Cantorin joukon kokonaisvaltaisessa käsittelyssä. Näistä lukujärjestelmistä tutustutaan kolmikantaiseen lukujärjestelmään seuraavaksi vähän paremmin.

Kolmikantaisen lukujärjestelmän kantaluku on 3. Tässä järjestelmässä luku 137_{10} on muotoa $1 \times 3^4 + 2 \times 3^3 + 0 \times 3^2 + 0 \times 3^1 + 2 \times 3^0$ eli 12002_3. Järjestelmässä voidaan kertoimina käyttää kolmea eri numeroa $0, 1, 2$. Kaikki murtoluvutkin voidaan myös tietenkin esittää kolmikantaisessa lukujärjestelmässä.

Esimerkki 4.7. Kymmenkantaisen lukujärjestelmän luku $\frac{1}{3}$ on kolmikantaisessa lukujärjestelmässä esitettynä 0,1. Luvulle $0{,}1_3$ on olemassa kuitenkin toinen esitystapa. Samalla tavoin kuin kymmenkantaisen lukujärjestelmän luku 1 voidaan esittää muodossa $0{,}999\ldots_{10}$, voidaan luku $0{,}1_3$ esittää muodossa $0{,}0222\ldots_3$.

Esimerkki 4.8. Binäärijärjestelmän kantaluku on 2. Kymmenkantainen luku $\frac{1}{4} = 0{,}25 = 2 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2}$ on kolmikannassa $0 \times 3^{-1} + 2 \times 3^{-2} + 0 \times 3^{-3} \ldots = 0{,}020202\ldots_3$ ja binäärijärjestelmässä esitettynä $0{,}01_2$.

Huomautus 4.9. Cantorin joukon jokainen piste $x \in C$ voidaan esittää kolmikantaisen lukujärjestelmän avulla käyttäen ainoastaan numeroja 0 ja 2 (kts. 4.7).[4] Esimerkiksi luku $(\frac{2}{3})_{10}$ on $0{,}200\ldots_3$.

Cantorin joukosta poistettujen pisteiden kolmikantaesityksiä tarkasteltaessa havaitaan, että ne noudattavat tiettyä sääntöä. Joukon muodostamisen ensimmäisessä vaiheessa poistetaan välistä $[0, 1]$ kaikki pisteet, jotka ovat muotoa $0{,}1xyz\ldots_3$, missä $x, y, z \in \{0, 1, 2\}$ paitsi $0{,}1_3$, joka voidaan esimerkin 4.7 tavalla muuttaa muotoon $0{,}0222\ldots_3$.

Joukon muodostamisen toisessa vaiheessa poistetaan kaikki pisteet, jotka ovat muotoa $0{,}01xyz\ldots_3$ tai $0{,}21xyz\ldots_3$ paitsi $0{,}01_3 = 0{,}00222\ldots_3$ ja $0{,}21_3 = 0{,}20222\ldots_3$. Tällä tavoin joukon muodostamisen n:ssä vaiheessa poistetaan kaikki pisteet, jotka ovat muotoa $0,\underbrace{xyz\ldots xyz}_{n-1}1xyz\ldots_3$ paitsi $0,\underbrace{xyz\ldots xyz}_{n-1}1_3 = 0,\underbrace{xyz\ldots xyz}_{n-1}0222\ldots_3$. Tästä tiedosta on erityisesti apua luvussa 6.

Lause 4.10. *Cantorin joukolla ei ole sisäpisteitä.*

Todistus. Olkoon piste $z \in C$. Täytyy siis näyttää, että z:lla ei ole ympäristöä $U \subset C \subset \mathbb{R}$. Toisin sanoen valittiinpa mikä tahansa avoin väli $(z-r, z+r)$, niin tällöin on olemassa jokin piste $w \in (z-r, z+r)$, joka ei kuulu Cantorin joukkoon. Avoimelta väliltä $(z-r, z+r)$ voidaan valita rationaaliluku, joka on muotoa $\frac{n}{3^m}$, jossa $n, m \in \mathbb{N}$. Jos tämän rationaaliluvun kolmikantaesitys sisältää numeron 1, niin se ei kuulu Cantorin joukkoon ja on etsitty piste w.

Toisaalta jos rationaaliluvun $\frac{n}{3^m}$ kolmikantaesitys ei sisällä numeroa 1, niin on olemassa luku $k > m$ siten, että $\frac{n}{3^m} + \frac{1}{3^k} \in (z-r, z+r)$, koska $(z-r, z+r)$ on avoin. Tällöin luku $\frac{n}{3^m} + \frac{1}{3^k}$ sisältää numeron 1 ja on siis etsitty piste w.

□

Määritelmä 4.11. Joukko A on *ei-missään tiheä*, jos sen sulkeumalla $\bar{A}$ ei ole sisäpisteitä.

Ei-missään tiheän joukon A osajoukko B on ei-missään tiheä. Jos A on jokin reaalilukujoukon suljettu osajoukko niin A on ei-missään tiheä jos ja vain jos $\bar{A}$ on ei-missään tiheä.

Cantorin joukko C on ei-missään tiheä välillä $[0, 1]$, koska jokaisella avoimella välillä $(a-r, a+r) \subset [0, 1]$ on jokin yhteinen piste jonkin poistetun välin kanssa.

Lause 4.12. *Cantorin joukko on ei-missään tiheä.*

Todistus. Tiedetään, että Cantorin joukko on suljettu, joten C:n sulkeuma on joukko itse (3.9) ja joukolla ei ole sisäpisteitä (4.10). Tällöin määritelmän 4.11 mukaan C on ei-missään tiheä.

□

4.3 Cantorin joukon mahtavuus

Cantorin joukon mahtavuuden tarkastelu voidaan aloittaa valitsemalla jokin piste c Cantorin joukosta. Piste c kuuluu tällöin Cantorin joukon muodostamisen ensimmäisen vaiheen oikeaan, $[0, \frac{1}{3}]$, tai vasempaan, $[\frac{2}{3}, 1]$, väliin. Piste c kuuluu samoin johonkin Cantorin joukon muodostamisen toisen vaiheen neljästä välistä $[0, \frac{1}{9}]$, $[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}$, $[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}]$, $[\frac{8}{9}, 1]$ jne.

Pisteen c paikka voidaan määrittää tarkastelemalla kumpaan väliin, vasempaan vai oikeaan, piste kussakin muodostamisen vaiheessa kuuluu. Tämä määritys onnistuu päättymättömän binäärijonon avulla. Pisteen c binäärijonossa numero 0 määritellään tarkoittavan pisteen kuuluvan vasempaan väliin ja numero 1 oikeaan. Esimerkiksi piste c, jonka binäärijono on $1010101010\ldots$, kuuluu ensimmäisessä vaiheessa oikeaan väliin $[\frac{2}{3}, 1]$, toisessa vaiheessa vasempaan väliin $[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}]$, kolmannessa vaiheessa oikeaan jne.

Cantorin joukon ja näiden binäärijonojen joukon $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} = 2^{\mathbb{N}}$ välille voidaan muodostaa bijektio. Tämä johtuu siitä, että kahden eri Cantorin joukon pisteen binäärijonot eroavat toisistaan. Tällöin nämä joukot ovat siis yhtä mahtavat.

Esimerkkiä 3.12 voidaan soveltaa luonnollisten lukujen tapauksessa. Binäärijonojen joukon $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} = 2^{\mathbb{N}}$ ja luonnollisten lukujen potenssijoukon $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ välille voidaan siis muodostaa bijektio. Kun lopuksi tiedetään, että luonnollisten lukujen potenssijoukko $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ on lauseen 3.16 nojalla ylinumeroituva, niin edellämainittujen kahden bijektion nojalla Cantorin joukko on luonnollisten lukujen potenssijoukon kanssa yhtä mahtava ja näin ollen ylinumeroituva.

Huomautus 4.13. Välistä $[0, 1]$ poistettujen välien päätepisteiden muodostama joukko on kuitenkin numeroituva, koska kyseisen joukon ja luonnollisten lukujen välille voidaan määrittää bijektio. Cantorin joukkoon täytyy siis kuulua ylinumeroituva määrä pisteitä, jotka eivät ole poistettujen välien päätepisteitä.

4.4 Muita Cantorin joukon ominaisuuksia

Cantorin joukon mitta

Cantorin joukosta poistettujen välien pituus saadaan laskettua geometrisena summana.[4]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \cdots = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}}\right) = 1,$$

jossa $\frac{1}{3}$ on ensimmäisessä vaiheessa poistetun välin pituus, $\frac{2}{9}$ toisessa vaiheessa poistettujen janojen yhteispituus jne. Jos vähennetään näiden välien pituus joukon $[0,1]$ pituudesta, saadaan $1-1=0$. Cantorin joukko ei kuitenkaan ole tyhjä, kuten aiemmin on osoitettu.

Cantorin joukon pituus on tarkemmin perusteltavissa erityisesti matemaattisessa analyysissä käytetyllä käsitteellä *mitta*. Mainittakoon, että Cantorin joukon mitta on 0. Mitalle ei anneta tässä tarkempaa määritelmää.

Muut Cantorin joukot

Kappaleessa 4.1 nähtiin, että Cantorin joukko muodostuu suljetuista väleistä reaalilukuja, joiden yhteenlaskettu pituus on 1. Nämä suljetut välit saatiin aikaiseksi poistamalla avoimia keskimmäisiä kolmanneksia prosessin edellisen vaiheen väleistä lähtien liikkeelle välistä $[0,1]$. Muiksi Cantorin joukoiksi sanotaan joukkoja, jotka saadaan aikaiseksi muuttamalla poistetun välin pituutta. [15]

Poistetun välin pituus on siis jokin luku k väliltä $0 < k < 1$. Kun lähdetään liikkeelle välistä $[0,1]$, ensimmäisen poiston jälkeen tutkitun joukon pituus on $(1-k)$. Seuraavaksi poistetaan pituudeltaan $(1-k)$ olevasta välistä $(1-k)k$ eli k:n pituinen osuus. Tällöin jäljelle jäävien neljän välin yhteispituus on $(1-k)-(1-k)k = (1-k)^2$.

Jatkettaessa poistoprosessia n:teen vaiheeseen asti, havaitaan välejä olevan 2^n kappaletta ja koko tutkitun joukon pituus on $(1-k)^n$. Kun n kasvaa suureksi, niin pituus näyttäisi pienenevän kohti nollaa, koska $0 < 1-k < 1$. Jokaiseen joukkoon kuitenkin tiedetään kuuluvan ainakin poistettujen välien päätepisteet, joten mikään tällainen joukko ei ole tyhjä.

Esimerkki 4.14. Olkoon $k = 0,1$. Kun suljetusta välistä $[0,1]$ poistetaan avoin väli

$(0,45, 0,55)$, jäljelle jäävien kahden suljetun välin $[0, 0,45]$ ja $[0,55, 1]$ yhteenlaskettu pituus on $0,45 + 0,45 = 0,90 = 1 - 0,1 = (1 - k)$.

Seuraavassa vaiheessa jäljelle jäävien neljän välin yhteenlaskettu pituus on $0,2025 + 0,2025 + 0,2025 + 0,2025 = 0,81 = (1 - 0,1) - (1 - 0,1)0,1 = (1 - 0,1)^2 = (1 - k)^2$. Lopulta n:ssä vaiheessa jäljellä olevien n:n välin yhteenlaskuttu pituus on $(1 - k)^n = (1 - 0,1)^n = 0,9^n$. Koska $0,9 < 1$, niin n:n välin yhteenlasketun pituuden arvo lähestyy nollaa n:n kasvaessa rajatta.

Cantorin avaruus

Cantorin joukon avulla voidaan muodostaa topologinen Cantorin avaruus.[7]

Määritelmä 4.15. Jos metriikka d on muodostettu siten, että

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \neq y \\ 0, & \text{kun } x = y \end{cases},$$

niin metriikan d määräämä topologia on *diskreetti topologia.*

Jonkin joukon A ja diskreetin topologian paria (A, D_T) sanotaan *diskreetiksi avaruudeksi.* Diskreetin avaruuden kaikki osajoukot ovat avoimia ja suljettuja.

Määritelmä 4.16. *Cantorin avaruutta* voidaan merkitä joko $(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, D_T)$ tai yleisimmin käytetyllä $\mathcal{C} = 2^{\mathbb{N}} = \{(x_n) \mid x_n \in \{0,1\} \text{ kun } n \in \mathbb{N}\}$. Avaruuden pisteet ovat siis numeroituvasti äärettömiä binäärijonoja diskreetissä topologiassa.

Määritelmä 4.17. Funktio $g : A \to B$ on *homeomorfismi*, jos se täyttää seuraavat ehdot:

(1) g on bijektio.

(2) g on jatkuva.

(3) $g' = g^{-1}$ on jatkuva.

Tällöin sanotaan, että joukot A ja B ovat keskenään *homeomorfiset* ja merkitään $A \approx B$.

Cantorin avaruuden $\mathcal{C}$ tiedetään olevan homeomorfinen Cantorin joukon kanssa. Tämä nähdään, kun tarkastellaan homeomorfismin määritelmän ehtoja funktiolle

$$g(a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a_n}{3^n}$$

. Tämän funktion lähtöarvot ovat siis binäärijonon (a_n) jäseniä.

(1): Funktio g tiedetään kappaleesta 4.3 bijektioksi.

(2): Käytetään tssä vaihtoehtoista esitetystä funktion jatkuvuuden määritelmälle 2.21. Funktio g on jatkuva, jos jokaisen avoimen osajoukon $V \subset C$ alkukuva $g^{-1}V$ on avoin $\mathcal{C}$:ssa. Koska Cantorin avaruus on diskreetti, niin sen jokainen osajoukko on avoin. Siis g on jatkuva, koska kaikki $g^{-1}V \subset \mathcal{C}$ ovat avoimia.

(3): Täytyy osoittaa, että $g' : C \to \mathcal{C}$ on jatkuva. g' on jatkuva, jos jokaisen avoimen osajoukon $V' \subset \mathcal{C}$ alkukuva $g'^{-1}V'$ on avoin C:ssa. Tiedetään, että jokainen Cantorin joukon piste on kasautumispiste, joten jokaisen pisteen c ympäristössä on C:n mielivaltaisen osajoukon A piste $x \neq c$. Joukko A on tällöin avoin, koska millä tahansa pisteellä $c \in C$ on olemassa avoin väli $(c-r, c+r)$, johon piste x kuuluu. Merkitään $A = g'^{-1}V'$, jolloin g' on jatkuva.

5

Pirunporrasfunktio

Määritelmä 5.1. *Pirunporrasfunktion* $\gamma : [0,1] \to [0,1]$ muodostaminen aloitetaan Cantorin joukon C avulla. Funktio muuttaa Cantorin joukon pisteiden kolmikantaesityksen luvuista numerot 2 numeroiksi 1 ja tulkitsee luvut uudelleen binääriesityksenä. Välistä $[0,1]$ poistettujen kolmannesten päätepisteet saavat tällöin samat arvot.

Esimerkiksi funktion arvo $\gamma((\frac{1}{3})_{10}) = f(0,0222\ldots_3) = 0,01111_2 = 0,1_2 = (\frac{1}{2})_{10}$ on sama kuin $\gamma((\frac{2}{3})_{10}) = \gamma(0,2_3) = 0,1_2 = (\frac{1}{2})_{10}$. Koska funktio γ saa samat arvot poistettujen kolmannestensa päätepisteissä, funktio γ määritellään olemaan vakio niiden välillä. Täsmällisemmin funktiolle γ voidaan antaa määritelmä seuraavasti:

$$\gamma(0,2t_1 2t_2 2t_3 2t_4\ldots_3) = 0,t_1t_2t_3t_4\ldots_2\,, t_j = 0 \text{ tai } 1.$$

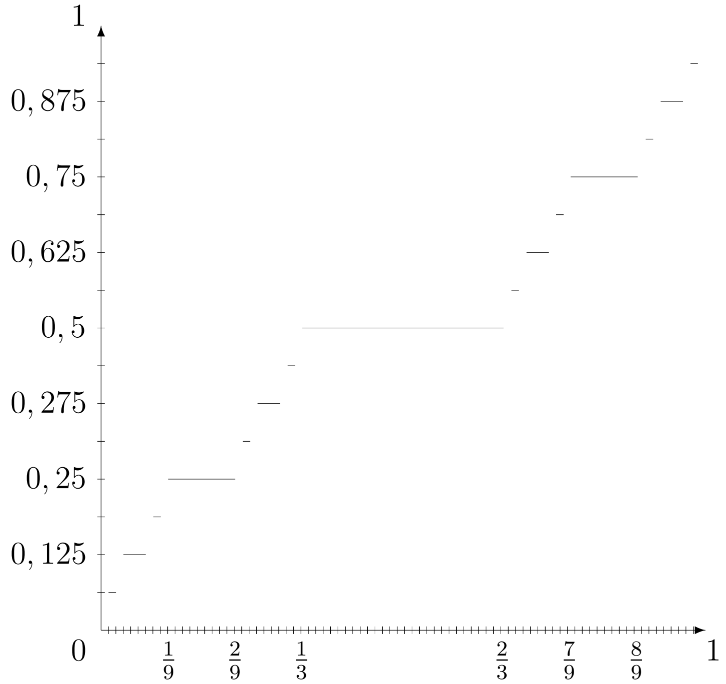
Nimensä γ on saanut kuvaajansa ulkoasusta. Pirunporrasfunktiosta käytetään myös nimeä Cantorin funktio.

Lause 5.2. *Cantorin funktio on kasvava eli kaikilla $x, y \in C$ ja $x < y$ pätee $\gamma(x) \leq \gamma(y)$.*

Todistus. Olkoon $x, y \in C$ sellaiset, että $x < y$. Siis luvuille $x = 0,2t_1 2t_2 2t_3\ldots_3$ ja $y = 0,2t_1 2t_2 2t_3\ldots_3$, missä $t_k = 0$ tai 1 pätee, että jollakin indeksillä t_k on $x_{t_k} < y_{t_k}$. Tällöin täytyy olla, että $x_{t_k} = 0$ ja $y_{t_k} = 1$. Nyt $\gamma(x) = 0,t_1t_2t_3\ldots 0_k\ldots_2$ ja $\gamma(y) = 0,t_1t_2t_3\ldots 1_k\ldots_2$ eli $\gamma(x) \leq \gamma(y)$. $\gamma(x) = \gamma(y)$ pätee tasan silloin, kun $\gamma(x) = 0,t_1t_2t_3\ldots 0_k 1_{k+1} 1_{k+2} 1_{k+3}\ldots$.

$\square$

Kuvan 5.1 perusteella voisi luulla, että Cantorin funktio ei ole jatkuva, vaikka se on. Tämä nähdään, kun tutkitaan raja-arvoja funktion pisteissä.[12] Itse asiassa Cantorin funktio on tasaisesti jatkuva, mutta se ei kuitenkaan ole absoluuttisesti jatkuva.



Kuva 5.1: Cantorin funktion muoto neljännen poiston jälkeen.

Lause 5.3. *Funktio γ on jatkuva.*

Todistus. Täytyy siis näyttää, että $\lim_{t \to c-} \gamma(t)$ ja $\lim_{t \to c+} \gamma(t)$ ovat olemassa kaikilla $c \in [0, 1]$ ja että

$$\lim_{t \to c-} \gamma(t) \leq \gamma(c) \leq \lim_{t \to c+} \gamma(t).$$

Olkoon $T = \{\gamma(t) \mid 0 < t < c\}$. Joukko T on rajoitettu ylhäältä $\gamma(c)$:llä, koska γ on kasvava. On siis olemassa $\sup T = M$ ja $M \leq \gamma(c)$. Jokaisella $\epsilon > 0$ on olemassa $\gamma(t_1) \in T$ siten, että $M - \epsilon < \gamma(t_1) \leq M$. Nyt pätee, että $M - \epsilon < \gamma(t) \leq M$ kaikilla $t \in (t_1, c)$, koska γ on kasvava. Edellisen epäyhtälön vasemmanpuoleisesta puoliskosta saadaan tällöin, että $|\gamma(t) - M| < \epsilon$, kun $t_1 < t < c$. Täten nähdään, että $\lim_{t \to c-} \gamma(t)$ on olemassa ja $\lim_{t \to c-} \gamma(t) = M \leq \gamma(c)$.

Olkoon $T^* = \{\gamma(t) \mid c < t < 1\}$. Joukko T^* on rajoitettu alhaalta $\gamma(c)$:lla, koska γ on kasvava. On siis olemassa $\inf T^* = m$ ja $\gamma(c) < m$. Jokaisella $\epsilon > 0$ on olemassa $\gamma(t_2) \in T^*$ siten, että $m \leq \gamma(t_2) < m + \epsilon$. Nyt pätee, että $m \leq \gamma(t) < m + \epsilon$ kaikilla $t \in (c, t_2)$, koska γ on kasvava. Edellisen epäyhtälön oikeanpuoleisesta puoliskosta saadaan tällöin, että $|\gamma(t) - m| < \epsilon$, kun $c < t < t_2$. Täten nähdään, että $\lim_{t \to c+} \gamma(t)$ on olemassa ja $\gamma(c) \leq m = \lim_{t \to c+} \gamma(t)$.

Kun lopuksi yhdistetään kahden edellisen kappaleen lopputulokset, nähdään, että väite pätee. □

Huomautus 5.4. Funktiolla γ ei kuitenkaan saa olla yhtään epäjatkuvuuskohtaa. Jos tällainen kohta c olisi, niin välillä $[0, 1]$, eli funktion maalijoukolla, olisi kolo $\gamma(c-)$:n ja $\gamma(c+)$:n välissä. Tällaista koloa ei tietenkään ole.

Lause 5.5. *Cantorin funktio on tasaisesti jatkuva.*

Todistus. Täytyy osoittaa, että jokaista lukua $\epsilon > 0$ kohti on olemassa $\delta > 0$ siten, että kaikilla $x, y \in C$ pätee $|\gamma(x) - \gamma(y)| < \epsilon$, kun $|x - y| < \delta$. Olkoon $\epsilon > 0$ mielivaltainen. Nyt voidaan aina valita luku $n \in \mathbb{N}$ siten, että $\frac{1}{2^n} \leq \epsilon$. Voidaan myös valita $\delta = \frac{1}{3^n} > 0$. Nähdään, että kaikille $x, y \in C$ pätee tällöin $|f(x) - f(y)| < \frac{1}{2^n}$, kun $|x - y| < \frac{1}{3^n}$. □

Määritelmä 5.6. Funktio $f : A \to \mathbb{R}$ on *absoluuttisesti jatkuva*, jos kaikilla luvuilla $\epsilon > 0$ on olemassa jokin $\delta > 0$ siten, että kun äärellinen jono erillisiä välejä $(x_k, y_k) \subset A \subset \mathbb{R}$, jossa $k = 1, \dots n$, toteuttaa ehdon

$$\sum_{k=1}^{n} |y_k - x_k| < \delta$$

niin tällöin

$$\sum_{k=1}^{n} |f(y_k) - f(x_k)| < \epsilon.$$

Lause 5.7. *Cantorin funktio ei ole absoluuttisesti jatkuva.*

Todistus. Cantorin funktio $\gamma : C \to [0,1]$ ei kuitenkaan ole absoluuttisesti jatkuva. Kun $\epsilon < 1$, niin jokaiselle $\delta > 0$ on olemassa jono välejä (x_k, y_k), joihin sisältyvät kaikki Cantorin joukon pisteet siten, että ehto

$$\sum_{k=1}^{n} |y_k - x_k| < \delta$$

toteutuu. Tällöin kuitenkin saadaan, että

$$\sum_{k=1}^{n} |\gamma(y_k) - \gamma(x_k)| = 1,$$

koska γ vaikuttaa vain Cantorin joukon pisteisiin.

□

6

Lebesguen käyrä

Määritelmä 6.1. *Lebesguen käyräksi* sanotaan jatkuvaa funktiota, jonka määrittely aloitetaan funktion $f_l : C \to [0,1] \times [0,1]$ avulla. Kappaleessa 4.1 nähtiin, että jokainen piste $c \in C$ voidaan esittää kolmikantaisena lukuna käyttäen ainoastaan numeroja 0 ja 2. Kun tarkastellaan jo aiemmin käytettyä surjektiota (5.1), jossa jokainen Cantorin joukon pisteen kolmikantaesityksen desimaalikehitelmän numero 2 korvattiin numerolla 1, saadaan aikaiseksi yksiselitteinen tapa ilmoittaa pisteessä c funktion f_l kuvan (x, y) paikka yksikköneliössä.

Muutettu desimaalikehitelmä on siis numeroista 0 ja 1 muodostuva äärellinen binäärijono, joka ilmaisee mihin suljettuun väliin Cantorin joukon muodostamisen n:ssä vaiheessa piste c kuuluu. Kun desimaalikehitelmää luetaan vasemmalta oikealle, binäärijonon numeron 0 kohdalla piste c kuuluu n:n vaiheen vasempaan väliin ja numeron 1 kohdalla oikeaan. Esimerkiksi, jos pisteen c binäärijonoksi muutettu desimaalikehitelmä on 100110, niin piste c kuuluu Cantorin joukon muodostamisen ensimmäisen vaiheen oikeanpuoleiseen väliin $[\frac{2}{3}, 1]$, toisen vaiheen vasemmanpuoleiseen väliin $[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}]$, kolmannen vaiheen vasemmanpuoleiseen väliin $[\frac{2}{3}, \frac{19}{27}]$ jne.

Edellistä voidaan havainnollistaa vielä paremmin esittämällä suljettujen välien päätepisteet kolmikantaisina. Väli $[\frac{2}{3}, 1]$ on tällöin muotoa $[0,2_3; 0,222\ldots_3]$, väli $[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}]$ on muotoa $[0,2_3; 0,20222\ldots_3]$ jne. Nyt jos verrataan pisteen c alkuperäistä muotoa $c = 0,200220$ edelläesittyihin väleihin, havaitaan sen kuuluvan niihin väleihin, joihin se määriteltiin aiemmin kuuluvan. Tämä johtuu tiedosta, joka esitettiin jo aiemmin kohdassa 4.9.

Koska funktion f_l maalijoukko on tason neliö $[0,1] \times [0,1]$, niin pisteen c desimaalikehitelmän avulla voidaan paikantaa kohta yksikköneliössä, jossa kyseinen piste sijaitsee. Tätä prosessia voidaan havainnollistaa piirtämällä ensin yksikköneliö ja tutkia sijaitseeko piste neliön keskitason ala- vai yläpuolella eli joukossa $[0,1] \times [0, \frac{1}{2}]$ vai $[0,1] \times [\frac{1}{2}, 1]$.

Prosessin seuraavassa vaiheessa tutkitaan sijaitseeko piste leveyssuunnassa keskitason oikealla vai vasemmalla puolella. Tässä vaiheessa piste sijaitsee siis jossakin neljästä joukosta: $[0, \frac{1}{2}] \times [0, \frac{1}{2}], [\frac{1}{2}, 1] \times [0, \frac{1}{2}], [0, \frac{1}{2}] \times [\frac{1}{2}, 1], [\frac{1}{2}, 1] \times [\frac{1}{2}, 1]$. Tämän jälkeen toistetaan prosessi alusta.

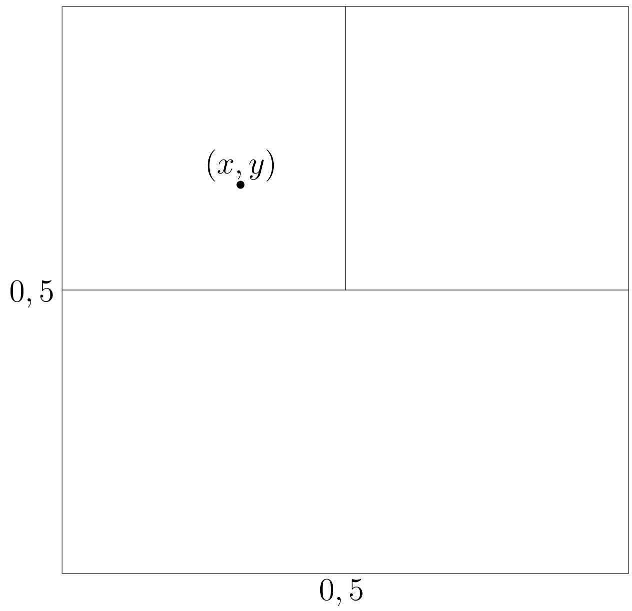
Määritellään lopuksi pisteen c desimaalikehitelmän ensimmäisen numeron ilmaisevan korkeussuuntaa, toisen numeron leveyttä, kolmannen korkeutta jne. Jos desimaalikehitelmää luettaessa korkeutta ilmaisevan numeron arvo on 0, niin piste sijaitsee prosessin kyseisessä vaiheessa yksikköneliön keskitason alapuolella. Arvo 1 ilmaisee pisteen sijaitsevan keskitason yläpuolella.

Leveyssuunnan kanssa toimitaan samoin tavoin ja arvo 0 ilmaisee, että piste sijaitsee keskitason vasemmalla puolella ja arvo 1, että se sijaitsee oikealla. Nyt aiemman esimerkin pisteen c binäärijonoksi muutettu desimaalikehitelmä 100110 voidaan lukea. Lukemisprosessi on esitetty kuvissa 6.1 ja 6.2.

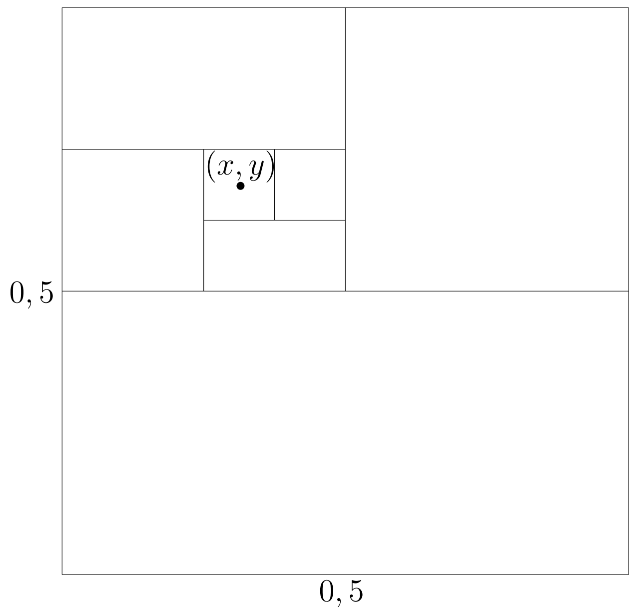
Huomautus 6.2. Lukemisprosessin määritelmästä johtuen nähdään, että funktio f_l kuvaa välin $[0, \frac{1}{3}]$ Cantorin joukon pisteet yksikköneliön keskitason alapuolelle eli suorakulmioon $[0,1] \times [0, \frac{1}{2}]$ ja välin $[\frac{2}{3}, 1]$ yksikköneliön keskitason yläpuolelle eli suorakulmioon $[0,1] \times [\frac{1}{2}, 1]$.

6.1 Käyrän muodostaminen

Lebesguen käyrä muodostetaan laajentamalla funktion f_l lähtöjoukkoa koko väliksi $[0,1]$. [15] Tällöin olkoon piste $t \in (a,b)$, jossa (a,b) on jokin Cantorin joukon muodostamisessa poistettu avoin väli. Nyt pistettä t voidaan merkitä $t = \alpha a + (1-\alpha)b$, jossa $\alpha \in (0,1)$. Mitä suurempi luku α on, sitä lähempänä piste t sijaitsee poistetun välin (a,b) vasenta päätepistettä a. Toisaalta mitä pienempi luku α on, sitä lähempänä piste t sijaitsee poistetun välin (a,b) oikeaa päätepistettä b.



Kuva 6.1: Binäärijonon 100110 lukemisprosessi kahden ensimmäisen numeron jälkeen.



Kuva 6.2: Binäärijonon 100110 lukemisprosessi viimeisen numeron jälkeen.

Pisteet $t \in (a, b)$ kuvataan yksikköneliölle funktion

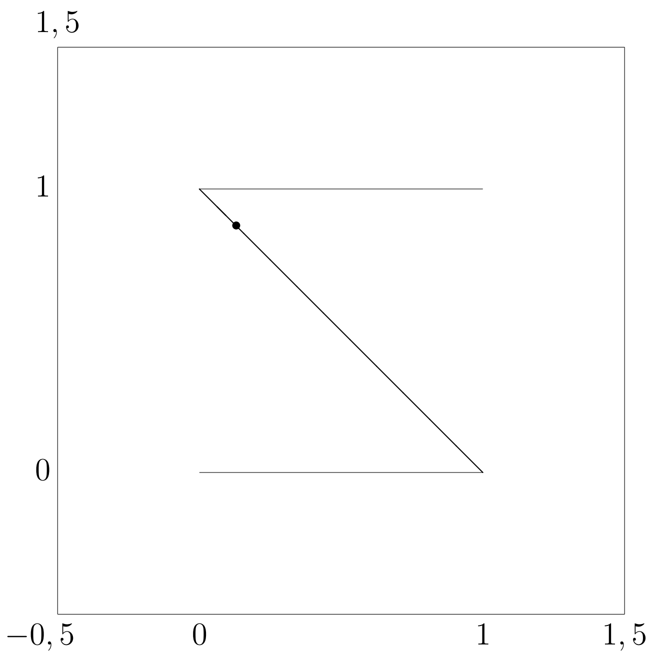
$$f_l(t) = \frac{f_l(b)(t-a) + f_l(a)(b-t)}{b-a}$$

avulla.[12] Kun tästä ratkaistaan muuttuja t, havaitaan aiemmin määritellyn α:n saavan arvon

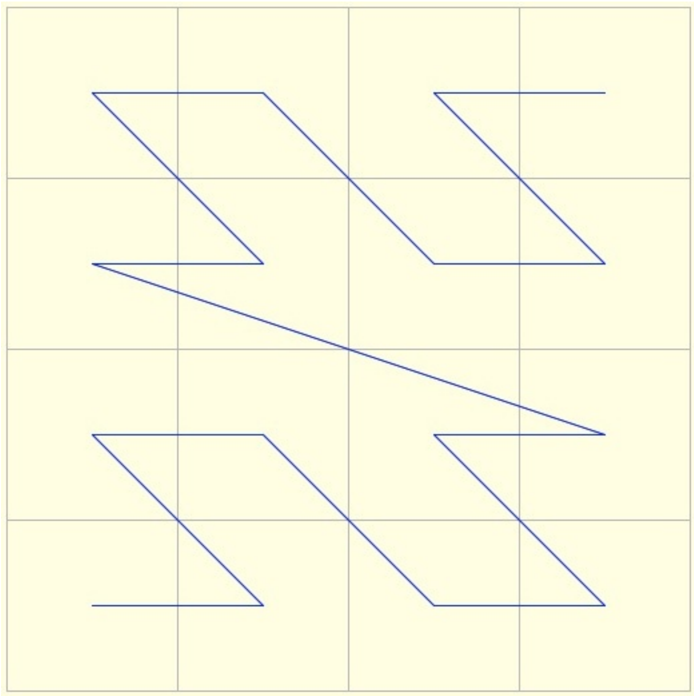
$$\alpha = \frac{f_l(b) - f_l(t)}{f_l(b) - f_l(a)}.$$

Mitä pienempi luku α on, sitä lähempänä yksikköneliön pisteet $f_l(b)$ ja $f_l(t)$ ovat toisiaan. Toisaalta, mitä suurempi luku α on, sitä kauempana piste $f_l(b)$ on pisteestä $f_l(t)$ eli lähempänä pistettä $f_l(a)$.

Lebesguen käyrä muodostuu funktion f_l pisteistä. Toisin sanoen Lebesguen käyrä yhdistää Cantorin joukon yksikköneliölle kuvatut pisteet suoralla. Lebesguen käyrää sanotaan avaruuden täyttäväksi käyräksi, koska iteroitaessa se käy läpi kaikki yksikköneliön pisteet. Käyrän yksinkertaisin muoto on esitettynä kuvassa 6.3.



Kuva 6.3: Lebesguen käyrä ja määritelmän 6.1 esimerkkipiste.

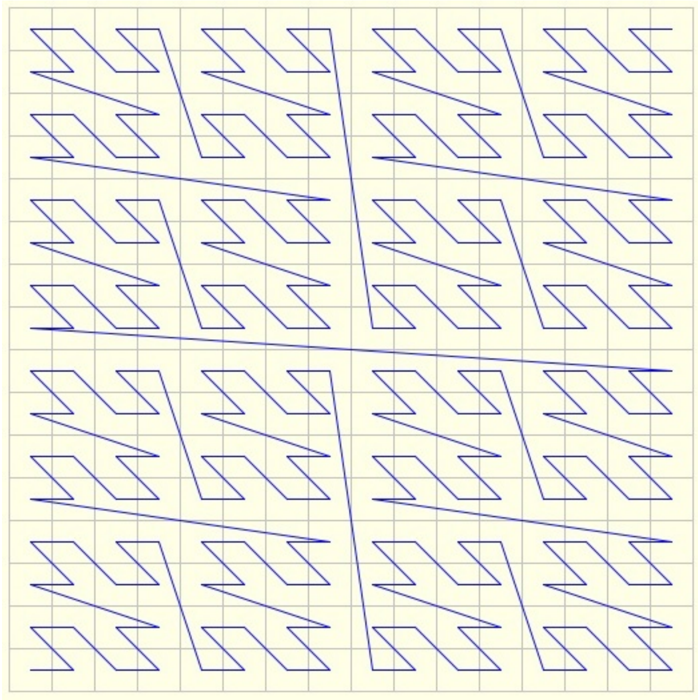


Kuva 6.4: Lebesguen käyrän toinen iteraatio. [15]

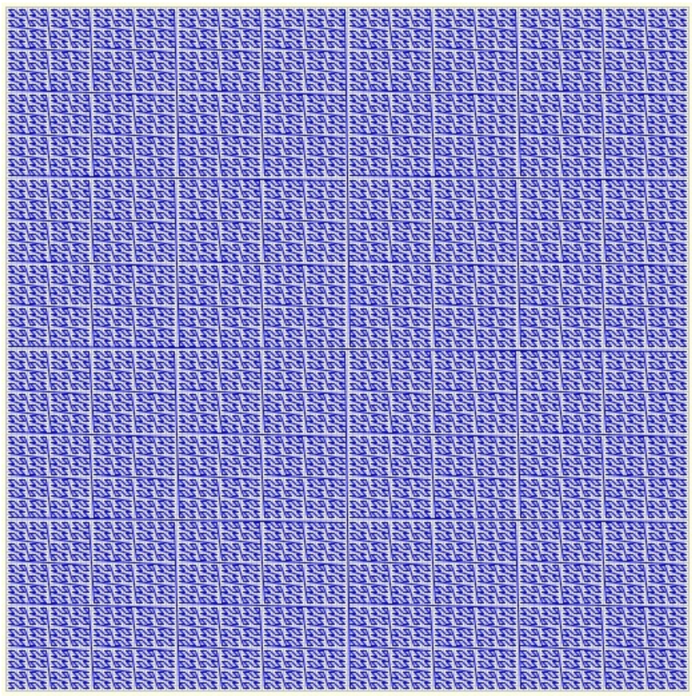
Lebesguen käyrän täyttää koko yksikköneliön, kun sitä iteroidaan äärettömän monta kertaa. Tämän ajatuksen takana on välien raja-arvotarkatelu Olkoon piste $(u, v) \in [a_n, b_n] \times [c_n, d_n] = L_n$, jossa $[a_n, b_n], [c_n, d_n] \subseteq [0, 1]$. (u, v) on siis piste jossakin yksikköneliön osaneliössä.

Välin $[a_n, b_n]$ päätepisteiden etäisyyden lähestyessä nollaa eli $b_n - a_n \to 0,$ kun $n \to \infty$, päätepisteet lähestyvät raja-arvoa u eli $a_n \to u$ ja $b_n \to u$. Samoin välin $[c_n, d_n]$ päätepisteiden etäisyyden lähestyessä nollaa eli $d_n - c_n \to 0,$ kun $n \to \infty$, päätepisteet lähestyvät raja-arvoa v eli $c_n \to v$ ja $d_n \to v$. Nyt voidaan merkitä lyhyesti kaikkien osaneliöiden raja-arvopisteiden etäisyyttä toisistaan $\mathrm{diag} L_n = \delta_n$. Tällöin $\delta_n \to 0,$ kun $n \to \infty$.

Valittiinpa siis kuinka pieni yksikköneliön osaneliö, kun Lebesguen käyrää on iteroitu äärettömän monta kertaa, niin osaneliön pisteiden etäisyys toisen neliön pisteistä on nolla. Toisen sanoen nämä pisteet täyttävät koko yksikköneliön. Lebesguen käyrän toinen, neljäs ja seitsemäs iteraatio on esitetty kuvissa 6.4, 6.5 ja 6.6. [15]



Kuva 6.5: Lebesguen käyrän neljäs iteraatio. [15]



Kuva 6.6: Lebesguen käyrän seitsemäs iteraatio. [15]

7

Loppusanat

Lähtökohtana tälle tutkielmalla oli esittää mahdollisimman selkokielisesti Cantorin joukon taustat, määritelmä ja osa siitä johdettuja tuloksia. Lukijalta vaadittiin vain vähän esitietoja matematiikasta ja tutkielman alussa varmistettiin vankka pohja tutkielman pääasioiden ymmärrykseen.

Cantorin joukkoon liittyen asiaa jäi paljon tämän tutkielman ulkopuolella. Kirjoittajan mielestä tämän tutkielman sisältämät asiat muodostavat kuitenkin yhtenäisen kokonaisuuden, joka ohjaa Cantorin joukkoon tutustumisessa ja ymmärtämisessä. Lukija voi jatkaa syventymistä Cantorin joukkoon ja yleisesti Georg Cantorin työhön tutustumalla muun muassa kontinuumihypoteesiin, järjestyslukuihin, Cantorin joukon moniulotteisiin versioihin tai vaikkapa erilaisiin fraktaaleihin.

Kirjallisuutta

[1] Arnold B. H. Intuitive Concepts in Elementary Topology. Prentice-Hall, 1962.

[2] Dauben, J.W. Georg Cantor - His Mathematics and Philosophy of the Infinite. Harvard University Press, 1979.

[3] Eisenberg, M. Axiomatic Theory of Sets and Classes. Holt. Rinehart and Winston Inc., 1971.

[4] Gelbaum, B.R. and Olmsted, J.M.H. Counterexamples in analysis. Holden-Day Inc., 1964.

[5] Hurri-Syrjänen, R. Differentiaali- ja integraalilaskenta I.1, luentomoniste. Helsingin yliopisto, 1999.

[6] Jech, T. Set Theory, Second Edition. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1997.

[7] Kechris, A.S. Classical Descriptive Set Theory. Springer-Verlag New York Inc., 1995.

[8] Myrberg, L. Differentiaali- ja integraalilaskenta osa 1. Kirjayhtymä, 1996.

[9] Myrberg, L. Differentiaali- ja integraalilaskenta osa 2. Kirjayhtymä, 1975.

[10] Pervin, W.J. Foundations of General Topology., Academic Press, 1965.

[11] Rotman, B. and Kneebone, G.T. The Theory of Sets & Transfinite Numbers. Oldbourne Book Co. Ltd., 1966.

[12] Sagan, H. Space-Filling Curves. Springer-Verlag New York Inc., 1994.

[13] Väisälä, J. Topologia I, 4. painos. Limes ry, 2007.

[14] Väisälä, J. Topologia II, 2. painos. Limes ry, 2005.

Internet

[15] Bogomolny, A. http://www.cut-the-knot.org/do_you_know/cantor.shtml & http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/LebesgueCurve.shtml, 25. marraskuuta 2012.

[16] O'Connor J.J. and Robertson E.F. http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Biographies/Cantor.html, 25. marraskuuta 2012.

[17] Wikipedia, The Free Encyclopedia. http://en.wikipedia.org/wiki/Cantor_set & http://en.wikipedia.org/wiki/Cantor's_diagonal_argument , 25. marraskuuta 2012.