

采用双重介质模型研究血液 非牛顿特性对毛细血管—— 组织间流体交换的影响*

赵 跃

■北京大学力学系■

钱民全

■中国科学院力学研究所, 北京■

吴望一

(北京大学力学系)

本文采用文献〔4〕中提出的双重介质连续介质模型, 将血液视为Casson流体, 讨论了血液的非牛顿特性对毛细血管—组织间物质交换的影响。假设流动是一维的, 且组织液不流动, 得到了与Oka非牛顿流体的结果〔2〕相同的结论。此外, 本文还考虑了组织液流动时此问题的解, 将Oka的纯漏失量公式推广到组织液流动时的情形。

一、引言

微循环的主要生理功能是通过毛细血管进行血液和组织间的物质交换, 从而为细胞提供营养物质, 同时带走新陈代谢产生的废物。由于血管—组织间物质交换在微循环生理病理上的重要性, 人们对它进行了大量的研究。1970年Oka和Murata〔1〕从理论上研究了血浆在毛细血管内的流动以及跨过毛细血管壁水的交换, 得到了速度分布, 压力分布以及单位时间通过单位面积水的净流出量。后来, Oka〔2〕将此结果推广到血液不是牛顿流体的情况, 假设血液是Casson流体, 他讨论了血液的非牛顿特性对物质交换的影响。以上工作都是研究单个毛细血管与周围组织的流体交换。最近, 吴望一等人〔4〕首次提出采用渗流力学中的双重孔隙介质整体模型研究了毛细血管—组织间物质的总体交换问题。在组织液不流动的情形下, 得到了与Oka〔1〕一致的结果, 他们还进一步处理了组织液流动时的情形, 并将Oka等人得到的水的净流出量公式推广到组织液流动的情形。此外, 吴望一, 何筱毅〔3〕还采用连续介质整体模型对肺微循环的血液流动问题进行了研究, 得到了与冯元祯〔5〕片流理论基本上一致的结果。在上述工作的基础上, 本文试图采用一维双重孔隙介质整体模型来处理血液是Casson流体时的物质交换问题。我们将证明, 在组织液不流动时, 采用整体模型所得的结果将与Oka非牛顿流体的结果〔1〕相一致。最后我们还很自然地将结果推广到组织液流动时的情形。

二、不考虑组织液流动的情形

假设: 1. 毛细血管和组织组成双重孔隙介质。2. 血液渗流是一维定常的, 且遵守达西定律。3. 组织液不流动, 组织液压力 p_t 和渗透压 π_t 皆为常数。4. 毛细血管和组织在空间的每一

本文1988年2月26日收稿, 1988年12月13日修回
* 本文是国家自然科学基金资助的项目

点都进行流体交换,且流体交换服从Starling定律。5.血液是Casson流体。

在写出血液流动的控制方程之前,首先研究作为Casson非牛顿流体的血液在多孔介质内流动时应遵循什么形式的达西定律。对于牛顿流体我们在文^[3,4]中采用如下形式的达西定律

$$u = -\frac{k_b}{\mu} \frac{dp}{dx} \quad (1)$$

其中 u , p 分别是血液的流速和压力, k 是血液的渗透率, μ 是血液的粘度。速度和压差成线性关系的达西定律可以很容易地从泊肃叶流动中的压差—流量关系中得到说明。由于血液在其中流动的多孔介质是由毛细血管组成的,所以牛顿流体在直圆管中的泊肃叶公式成立。流量与压差的关系为

$$Q = \frac{\pi R^4}{8L} \frac{\Delta p}{\mu} \quad (2)$$

其中 R , L 分别是圆管的半径和长度, Δp 是长为 L 的圆管两端的压力差。比较(1)式和(2)式,我们容易根据泊肃叶公式来理解达西定律。其中渗透率 k 是一个和孔隙的几何特性有关的参数。

对于非牛顿Casson流体,也可以遵循同一思路从Casson流体在直圆管中的流量—压差关系导出相应的Casson流体应服从的达西定律具体形式。对于Casson流体Oka^[6]给出了相应于泊肃叶流动的流量和压差的关系

$$Q = \frac{\pi k^4}{8\eta_c} \frac{\Delta p}{L} F(\xi) \quad (3)$$

式中 η_c 为血液的Casson粘度。 $F(\xi) = 1 - \frac{16}{7}\sqrt{\xi} + \frac{4}{3}\xi - \frac{1}{21}\xi^4$, 而 $\xi = 2f_c L/R\Delta p$, f_c 是血液的Casson屈服值。根据(3)式可以推断出Casson流体对应的达西定律具有下列形式

$$u = -\frac{k_b F(\xi)}{\eta_c} \frac{dp}{dx} \quad (4)$$

和牛顿流体的达西定律比较发现, (1)式中的粘性系数 μ 现改为Casson粘性系数 η_c , 渗透率 k_b 则改为Casson流体在多孔介质流体中流动时的渗透率 $k_b F(\xi)$ 。应该指出, $F(\xi)$ 只和 f_c , L , R 以及毛细血管动脉端和静脉端压力 p_a , p_v 有关, 而与待求的函数 u , p 及坐标 x 无关。

现在我们写出作为Casson流体的血液渗流的控制方程和边界条件

$$\begin{cases} \frac{du}{dx} + K(p - p_a) = 0 \\ u = -\frac{k}{\eta_c} F(\xi) \frac{dp}{dx} \end{cases} \quad (5)$$

$x = 0$ 时: $p = p_a$; $x = L$ 时, $p = p_v$ 。其中 $p_a = p_t - \pi_t + \pi_b$, 这里 p_t 是组织液压力, π_b , π_t 分别是血液和组织液的渗透压, p_a , p_v 为血液的动脉端压力和静脉端压力。而

$$F(\xi) = 1 - \frac{16}{7}\sqrt{\xi} + \frac{4}{3}\xi - \frac{1}{21}\xi^4$$

式中 $\xi = \frac{2f_c L}{R\Delta p}$, $\Delta p = p_a - p_v$ 。

类似于文^[4]中对牛顿流体情形的求解过程, 我们容易得到方程^[5]的解, 它们为

$$\begin{aligned} p &= p_a - \bar{x}\Delta p + \frac{1}{6} \frac{\eta_c K}{k_b F(\xi)} L^2 \Delta p \left[\left(1 - \frac{3\Delta p_a}{\Delta p}\right) \bar{x} + 3 \frac{\Delta p_a}{\Delta p} \bar{x}^2 - \bar{x}^3 \right] \\ u &= \frac{k_b F(\xi)}{\eta_c} \frac{\Delta p}{L} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{K\eta_c}{k_b F(\xi)} L^2 \left[\left(\bar{x} - \frac{\Delta p_a}{\Delta p}\right)^2 - \left(\frac{\Delta p_a}{\Delta p}\right)^2 + \frac{\Delta p_a}{\Delta p} - \frac{1}{3} \right] \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

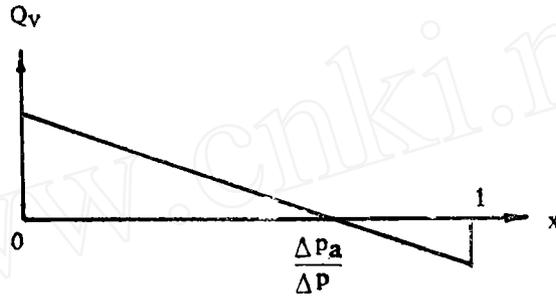
其中 $\Delta p = p_a - p_v$, $\Delta p_a = p_a - p_a$, $\bar{x} = x/L$ 。

由于 $K/k_b L^2$ 在生理条件下是 10^{-4} 数量阶, 根据(6)式, 忽略小量后, 可得每个截面处单

位长度的流体漏失量为

$$Q_v = AK(p - p_a) = AK\Delta p \left(\frac{\Delta p_a}{\Delta p} - \bar{x} \right) \quad (7)$$

可以看出, 当 $\frac{\Delta p_a}{\Delta p} < 0$ 即 $p_a < p_o$ 时, 毛细管全长都从组织吸收流体。当 $\frac{\Delta p_a}{\Delta p} > 1$ 即 $p_v > p_a$ 时, 毛细管全长都向组织漏失流体。而当 $0 < \frac{\Delta p_a}{\Delta p} < 1$ 时, 则发生毛细管全长既有吸收也有漏失的情况。 Q_v 随 \bar{x} 呈线性关系, 如图所示。从图中容易看出, 当 $\frac{\Delta p_a}{\Delta p} = 1/2$ 时, 吸收和漏失量相等。



计算净漏失量的公式为

$$M = Q_1 - Q_0 + L \int_0^1 Q_v d\bar{x}$$

其中 Q_1 、 Q_0 分别为出口处和进口处的流量。利用公式 $Q = uA$, 公式(7)以及公式(6)中 u 的表达式我们得

$$\begin{aligned} M &= \frac{Ak_b \Delta p}{L} \left[\frac{F(\xi)}{\eta_o} \Big|_{x=1} - \frac{F(\xi)}{\eta_o} \Big|_{x=0} \right] + KAL \Delta p \left(\frac{\Delta p_a}{\Delta p} - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{Ak_b \Delta p}{L} \left[\frac{F(\xi)}{\eta_o} \Big|_{x=1} - \frac{F(\xi)}{\eta_o} \Big|_{x=0} \right] + VK(p_m - p_a) \end{aligned} \quad (8)$$

式中 $p_m = 1/2(p_a + p_v)$, $V = AL$. 第一项是由于非牛顿效应引起的, 它依赖于 Casson 粘度及 Casson 屈服应力, 但与渗透系数无关。第二项则完全是由于渗透现象引起的, 它只依赖于渗透系数, 而与 Casson 流体的粘性及屈服应力无关。第一项一般不等于零, 因为毛细血管的进口处和出口处, 由于水的渗出量和渗入量的不同, 使血液压力发生不同的变化, 从而使 Casson 粘度和 Casson 屈服应力在进口处和出口处取不同的值, 导致第一项不等于零。只有在 $\frac{\Delta p_a}{\Delta p} = 1/2$ 时, 渗出的水和渗入的水相同, 进口处和出口处压力应该相等, 此时(8)式中的第一项就会消失。换言之, 血液的非牛顿特性对净漏失量的影响在 $\frac{\Delta p_a}{\Delta p} = 1/2$ 时将消失不见。

应该强调指出, 这里得出的净漏失量公式(8)与 Oka 在文[1]中得到的净漏失量公式完全相同。两者一致又一次说明双重介质模型对本文所处理的问题是适用的。

三、组织液流动的情形

若同时考虑血液和组织液的流动, 并假定组织液是牛顿流体, 血液是非牛顿 Casson 流体, 则血液和组织液将分别遵循非牛顿流体的达西定律(3)和牛顿流体的达西定律(1)。此时, 相应的控制方程和边界条件为

$$\begin{cases} \frac{du_b}{dx} + K(p_b - p_t - \pi_b + \pi_t) = 0 \\ \frac{du_t}{dx} - K(p_b - p_t - \pi_b + \pi_t) = 0 \\ u_b = -\frac{k_b}{\eta_b} F(\xi) \frac{dp_b}{dx} \\ u_t = -\frac{k_t}{\eta_t} \frac{dp_t}{dx} \end{cases} \quad (9)$$

$x=0$: $p_b = p_{b_a}$, $p_t = p_{t_a}$; $x=L$: $p_b = p_{b_v}$, $p_t = p_{t_v}$, 式中下标b和t分别代表血液和组织。像文〔4〕中所做的那样解此方程组得到

$$\begin{aligned} p_b &= p_{b_a} - \bar{x} \Delta p_{b_{av}} + \frac{1}{6} \frac{\eta_b K}{k_b F(\xi)} L^2 \Delta p_{a_v}^{bt} \left[\left(1 - \frac{3p_a^{bt}}{\Delta p_{a_v}^{bt}} \right) \bar{x} + 3 \frac{p_a^{bt}}{\Delta p_{a_v}^{bt}} \bar{x}^2 - \bar{x}^3 \right] \\ u_b &= \frac{k_b F(\xi)}{\eta_b} \frac{\Delta p_{b_{av}}}{L} + \frac{L}{2} K \Delta p_{a_v}^{bt} \left[\left(\bar{x} - \frac{p_a^{bt}}{\Delta p_{a_v}^{bt}} \right)^2 - \left(\frac{p_a^{bt}}{\Delta p_{a_v}^{bt}} \right)^2 + \frac{p_a^{bt}}{\Delta p_{a_v}^{bt}} - \frac{1}{3} \right] \\ p_t &= p_{t_a} - \bar{x} \Delta p_{t_{av}} - \frac{1}{6} \frac{\eta_t K}{k_t} L^2 \Delta p_{a_v}^{bt} \left[\left(1 - \frac{3p_a^{bt}}{\Delta p_{a_v}^{bt}} \right) \bar{x} + 3 \frac{p_a^{bt}}{\Delta p_{a_v}^{bt}} \bar{x}^2 - \bar{x}^3 \right] \\ u_t &= \frac{k_t}{\eta_t} \frac{\Delta p_{t_{av}}}{L} - \frac{L}{2} K \Delta p_{a_v}^{bt} \left[\left(\bar{x} - \frac{p_a^{bt}}{\Delta p_{a_v}^{bt}} \right)^2 - \left(\frac{p_a^{bt}}{\Delta p_{a_v}^{bt}} \right)^2 + \frac{p_a^{bt}}{\Delta p_{a_v}^{bt}} - \frac{1}{3} \right] \end{aligned}$$

式中 $\Delta p_{b_{av}} = p_{b_a} - p_{b_v}$, $\Delta p_{t_{av}} = p_{t_a} - p_{t_v}$, $p_a^{bt} = p_{b_a} - p_{t_a} - \pi_b + \pi_t$, $p_v^{bt} = p_{b_v} - p_{t_v} - \pi_b + \pi_t$,

$$\Delta p_{a_v}^{bt} = p_a^{bt} - p_v^{bt}, \quad \xi = 2f_b L / (R \Delta p_{b_{av}})$$

类似地可以得到整个毛细血管的净漏失量

$$M_b = AK_b \frac{\Delta p_{b_{av}}}{L} \left[\frac{F(\xi)}{\eta_b} \Big|_{\xi=1} - \frac{F(\xi)}{\eta_b} \Big|_{\xi=0} \right] + KV (\bar{p}_b - \bar{p}_t - \pi_b + \pi_t) \quad (10)$$

其中 $\bar{p}_b = 1/2 (p_{b_a} + p_{b_v})$, $\bar{p}_t = 1/2 (p_{t_a} + p_{t_v})$. 公式(10)是组织液流动时公式(8)的自然推广。第一项表示非牛顿效应, 第二项表示渗透效应。

参 考 文 献

- 〔1〕 Oka, S. Non-Newtonian blood flow in a capillary with permeable wall, Festchrift of Harold Wayland Symposium, California Institute of Technology Pasadena, 1979
- 〔2〕 Oka, S. & Murata, T. A Theoretical study of the flow of Blood in a Capillary with permeable wall. The 17th Rheology Symposium, Sapporo, Zairo 17, 300; Japan J. Appl. phys. 9, 345, 1970
- 〔3〕 Wu Wangyi & He Xiaoyi. A Continuum Model of the Blood Flow in the Lung Microcirculation Acta Mechanica Sinica. 1988; 4 (3)
- 〔4〕 吴望一, 是长春, 王 露. 毛细血管—组织间流体交换的双重介质模型. 力学学报. 1989; 21(6): 649—656
- 〔5〕 冯元桢. 生物力学. 科学出版社. 1983; 325—344
- 〔6〕 Oka, S. Theoretical approach to the effect of wall surface condition in hemorheology. In Hemorheology, ed, A. L. Copley, p.55, Pergamon Press, Oxford, 1968

STUDIES ON NON—NEWTONIAN EFFECT OF CONTINUUM MODEL ON FLUID TRANSFER BETWEEN CAPILLARIES AND TISSUES

Zhao Yue, Qian Min-quan and Wu Wang-yi

(Faculty of Mechanics, Peking University, Institute of Mechanics,
Chinese Academy of Sciences)

ABSTRACT

A continuum model is used to treat the blood flow in a capillary with blood as a Casson fluid. The Non-Newtonian effect on fluid transfer is discussed and results obtained coincide with that of Oka, s.

(Continued from page 72)

drainage. The method have the merits of high precision in time measurement and fine reproducibility. The apparatus has been initially used in clinical research.