

现有泥沙理论的不足和改进 ——扩散模型和费克定律适用性的讨论

刘大有

(中国科学院力学研究所)

提 要

描写混合物运动可以采用单流体模型、扩散模型和双流体模型,本文简要介绍了这三种模型,并作了比较,指出:单流体模型方程少、求解简单,但解中包含的信息量少;后两种模型包含的信息量相等,由于扩散模型方程组可从双流体模型方程组引入某种近似后推导出来,它的求解比双流体模型方程组简单,但包含一定的误差。本文分析了这种误差与运动介质物性的关系,给出了扩散模型的适用范围,说明了为什么对于气体混合物常用单流体模型或扩散模型,而对于气-固混合物大多采用双流体模型。液-固混合物性质介于上述两种混合物之间,扩散模型对于它基本上适用,但并不完全适用。

扩散模型中的扩散速度表达式,常根据费克定律给出。本文指出了费克定律的局限性,并把它与泥沙运动力学目前遇到的困难联系起来,由此说明采用更一般的扩散速度表达式的必要性。

关键词 单流体模型, 双流体模型, 扩散理论, 费克定律

一、引 言

关于泥沙运动的研究,经过几代人的努力,尤其是近二、三十年的研究,已取得很大发展,建立了泥沙运动力学的扩散理论,解决了一系列重大工程问题。但是,当人们进一步深入研究扩散理论,研究某些经验常数的变化规律并试图作出合理的理论解释时,在研究床面附近的泥沙运动和其它一些较复杂的流动形态时,发现经典的扩散理论存在的一些矛盾。对此,人们作出了很多努力,提出了各种修正理论,但收效不大。

本文用二相流观点研究泥沙运动,将气-固流研究中发展起来的双流体模型引入泥沙运动研究,分析现有泥沙理论包含的近似性质,尤其是费克(Fick)定律用于泥沙研究的局限性,为进一步研究奠定了基础。

二、关于混合物运动描写的一般概念

按其组成,混合物可分为均相混合物(如混合气体和溶液等)和多相混合物(如气-固混合物和液-固混合物等)。为简单起见,本文仅讨论二元混合物,并假设每一组元都是不可压缩的(密度 $\rho_k = \text{常数}$, $k = 1, 2$)。

对于二元混合物,可以采用一组流体力学方程组描写混合物的平均运动,这就是普通的流体力学方法;也可以用两组方程分别描写两种组元的运动,这两组方程通过组元间的作用力而互相耦合。采用两组方程描写混合物运动的力学模型叫做双流体模型,与之相对,采用

一组方程时则称为单流体模型

对于气体混合物,绝大多数都采用单流体模型,因为两种组元的运动速度 v_k ($k=1,2$) 总是十分接近,混合物平均速度 v_m $\left[\frac{\rho_1 v_1 + \rho_2 v_2}{\rho_1 + \rho_2} \right]$ 可以相当好地代表每一组元的运动

虽然每一组元的速度都很接近混合物速度,它们之差,即扩散速度 v_k ($v_k - v_m, k=1,2$) 很小,但在某些情况下 v_k 仍有不可忽略的作用,因为 v_k 的散度 ($\text{div} v_k$) 可能不小,而 ($\text{div} v_k$) 直接影响流体微团中组元 k 的浓度变化(扩散方程):

$$\rho_m \frac{dY_k}{dt} = - \text{div}(\rho_m Y_k v_k)$$

其中 Y_k 是组元 k 的质量分数(又称质量百分浓度). 应用于不可压缩流动时,则有

$$\frac{dY_k}{dt} = - \text{div}(Y_k v_k)$$

用一组描写混合物运动的微分方程,再补充某组元(例如组元 2)的扩散方程和关于扩散速度 v_2 的表达式,就能求得混合物速度 v_m , 压强 p , 扩散速度 v_k 和浓度 Y_k ($k=1,2$) 的分布,并进而求得每一组元的运动速度 v_k ($k=1,2$), 描写混合物运动的这种力学模型叫做扩散模型 研究废气(和废水)在大气(和水流)中的扩散,经常采用这种模型

扩散模型只有一组流体力学方程,因此也属于单流体模型,可看作是单流体模型的一种修正形式 它比一般的单流体模型复杂些,方程多一些,计算量也大一些,同时,给出的流场信息量也更多些

在双流体模型中,两种组元运动分别用两组运动方程描写,求解这两组方程可以得到每一组元的速度 v_k ($k=1,2$) 和分压分布,并进而可求得混合物速度 v_m , 压强 p 和组元的浓度 Y_k 分布

对于气体混合物运动,几乎都用单流体模型或扩散模型;对于气-固混合物运动,大多采用双流体模型;对于泥沙运动和其它各种液-固流,目前多数采用扩散模型(在泥沙运动力学中称为扩散理论),近年来也有些人探讨双流体模型在泥沙运动中的应用

双流体模型和扩散模型都能描写混合物运动,都能得到每一组元的速度分布,它们给出的流场信息量几乎一样多. 为什么对于有的混合物要采用双流体模型,有的混合物则采用扩散模型? 若采用这两种模型计算同一流动问题,得到的结果是否一样? 如果不一样,那么哪个更准确? 两种模型各自的适用范围如何? 弄清了这些问题也就知道研究泥沙运动该用什么模型,或者更确切地说,知道在什么条件下该用什么模型

三、 双流体模型与扩散模型

为了较清楚地说明两种模型的差异和共同点,最好写出所用的微分方程组 但如果写出方程组的具体形式,就会有一大堆的符号要说明,而且对于不同类型的混合物,具体方程的形式还有差别 本文只想从概念上说明,方程的具体形式并不重要,故不在这里给出,有兴趣者可见专著[1]的第十章(对于均相混合物)和第十四章(对于多相混合物),或见论文[2] 双流体模型的运动方程组为:

$$\text{组元 1 的质量守恒方程} \tag{1}$$

$$\text{组元 2 的质量守恒方程} \tag{2}$$

$$\text{组元 1 的动量守恒方程} \tag{3}$$

$$\text{组元 2 的动量守恒方程} \quad (4)$$

扩散模型的运动方程组为

$$\text{混合物的质量守恒方程} \quad (5)$$

$$\text{混合物的动量守恒方程} \quad (6)$$

$$\text{组元 2 的扩散方程} \quad (7)$$

$$\text{组元 2 的扩散速度表达式} \quad (8)$$

方程(1)和(2)相加就得到方程(5), 方程(3)和(4)相加就得到方程(6), 方程(7)是方程(2)的变形, 可由方程(2)恒等变换得到 如果方程(8)可由方程(1)-(4)推导出来, 那么用两种模型计算同一流动问题将得到完全一样的结果(假设两种模型的初始条件和边界条件也都相容). 否则计算的结果不会完全一样 为了说明两种模型差异的大小, 哪些因素影响这种差异, 就需要研究方程(8)与方程组(1)-(4)的关系

方程(3)和(4)适当变换后再相减, 可得到如下的方程(参见文献[1, 2]):

$$v_2 - v_1 = V_2 - V_1 = \tau \left(\frac{dv_1}{dt} - \frac{dv_2}{dt} \right) + Q_a + Q_b + Q_c + \dots \quad (9)$$

其中 τ 是弛豫时间, 它的物理意义在式(10)的前后给出; Q_a , Q_b 和 Q_c 等都不含对时间的偏导数, 它们可能是浓度梯度项、压强梯度项、温度梯度项、使两相产生不同加速度的外力项和湍流强度梯度项等 所以, 如果忽略右边第一项(在扩散模型中这项总是被忽略的), 则扩散速度($v_2 - v_1$)就完全由 Q_a, Q_b, Q_c, \dots 确定, 即由当地的流动参数和局部非均匀性质(例如, 压力梯度, 温度梯度……)完全确定, 与微团的运动历史无关, 式(9)也就成了确定扩散速度的表达式(也称作本构式). 在许多情况下, 式(9)还可进一步简化, 忽略 $Q_j(j = a, b, c, \dots)$ 中的某些项

由此可见, 扩散模型是一种近似模型, 它的近似程度还依赖于扩散速度表达式(9)的完善程度 由于扩散速度表达式(9)仅依赖于当地的流动状态, 远比微分方程(4)简单, 所以求解扩散模型运动方程比双流体模型简单

由于两组元的物性(主要是惯性)一般说来是不同的, 在某一外力作用下, 两组元会产生不同的加速度 a_1 和 a_2 , 随着时间的增长, 两组元的速度差将不断增加 随着速度差的增加, 组元间作用力就越来越大, 它将部分地削弱外力产生的加速度差 当两组元的速度差达到某一值 $(\Delta v)_{st}$ 时, 组元间作用力就完全抵消了外力产生的加速度差 若外力一直保持不变, 则介质内部就一直维持着这样的速度差, $(\Delta v)_{st}$ 满足

$$(\Delta v)_{st} = \tau(a_2 - a_1) \quad (10)$$

其中 τ 是弛豫时间, 它表征介质内部两组元耦合的松(τ 较大)和紧(τ 较小)的程度

如果有几种外力同时存在, 则两组元的速度差是每个外力单独作用所产生的速度差的叠加

不论采用怎样的扩散速度公式, 式(9)右边第一项在扩散模型中总是被忽略的 忽略这一项引起的相对误差 η 等于这一项与扩散速度(即式(9)的左边项)之比 可以证明, η 是 (τ/T) 的量级, 其中 T 是流动的特征时间 当流体转弯时, T 是转弯过程的特征时间; 当河道的宽和深沿流向有显著变化时, T 是这种变化过程的特征时间(特征长度除以平均流速).

实际流动都是湍流 对于湍流, 相对误差 η 不仅取决于 τ/T , 而且依赖于 τ/τ' , 其中 τ' 是水流湍流脉动的特征时间

下面以压强梯度 $\frac{\partial p}{\partial x}$ 这样一种外部作用为例, 定性地讨论它在各种混合物中引起的速度差

(1) 气体混合物

在一定压强梯度作用下(设浓度是均匀的), 分子质量为 m_1 和 m_2 的两种气体产生的加速度之比为 $m_2 : m_1$, 可以相差几倍, 甚至几十倍。但是, 两种气体成分之间的弛豫时间 τ 非常小, 在常温常压下约为 $10^{-10} \sim 10^{-9}$ 秒, 因此, 当流动充分发展时, 压强梯度在混合气体中引起的组元间速度差很小, 一般为每秒数厘米或数毫米或更小

(2) 气-固混合物

设 ρ_f 和 ρ_s 分别为气相和固相的相密度(即物质密度), 在压强梯度 $\frac{\partial p}{\partial x}$ 的作用下, 两相分别产生 $\left[-\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial p}{\partial x}\right]$ 和 $\left[-\frac{1}{\rho_s} \frac{\partial p}{\partial x}\right]$ 的加速度, 由于 ρ_s 与 ρ_f 之比一般相差数百倍, 所以加速度也相差数百倍。而在气-固流中弛豫时间 τ 可用下式估算,

$$\tau = \frac{(\rho_s + 0.5\rho_f)d^2}{18\mu} \quad (11)$$

对于0.1mm的沙粒, τ 约为0.08秒, 比混合气体情况大得多。所以, 在外部力作用下, 气、固两相的相对速度往往较大

(3) 液-固混合物

设液、固两相的密度分别为 ρ_f 和 ρ_s , 在压强梯度 $\frac{\partial p}{\partial x}$ 作用下, 产生的加速度分别为 $\left[-\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial p}{\partial x}\right]$ 和 $\left[-\frac{1}{\rho_s} \frac{\partial p}{\partial x}\right]$, 由于液、固两相的密度相差不太悬殊, 约数倍, 所以两相的加速度相差不太大。液-固流的弛豫时间也可用式(11)估算。对于0.1mm的沙粒, τ 约为0.1秒。显然, 在液-固流中压强梯度引起的相间速度差远小于气-固流, 但远大于混合气体中的组元速度差

实际情况还很复杂, 影响因素很多, 以上例子定性地说明了三种混合物组元间速度差的产生机制和量级大小, 说明了为什么对于混合气体几乎总是可以用求解较简单的扩散模型, 为什么对于气-固流常需采用双流体模型

对于液-固流, 在多数情况下, 如在比较顺直河道、比较平稳的流动中, 流动加速度小, 流动的特征时间 T 远大于弛豫时间 τ , 忽略式(9)右边第一项基本上合理, 即可采用扩散模型。但在急速转弯地段, 在强回流区(如港区、引航道口门附近等)和河道宽深变化剧烈地段, 流动加速度大, 采用扩散模型就可能引起较大的误差

回到上一节末提出的问题, 简明的回答是: (1) 两种模型计算同一流场的结果不会完全一样; (2) 扩散模型是近似的, 双流体模型是相对地精确的, 引入一定的近似假设后, 可由双流体模型运动方程组推导出扩散模型方程组; (3) 扩散模型比双流体模型简单, 只要条件合适, 以采用扩散模型为宜; (4) 对于混合气体和溶液等均相混合物, 扩散模型几乎总有足够的精度; (5) 对于气-固流, 除某些极端情况外, 一般应采用双流体模型; (6) 对于液-固流(如泥沙运动), 一般说可以采用扩散模型, 但在流动的某些区段, 扩散模型可能引起较大误差, 以采用双流体模型为宜

四、费克定律和扩散速度表达式

如果采用扩散模型, 就需要补充扩散速度表达式, 使方程组封闭。讲到扩散速度, 人们自

然会想到费克定律 根据费克定律, 扩散速度 v_2 与浓度梯度 $\text{grad } Y_2$ 成正比

$$v_2 = - \frac{D}{Y_2} \text{grad} Y_2 \quad (12)$$

上式表明, 浓度梯度会引起扩散, 当浓度均匀时, 扩散速度为零 事实上, 除浓度梯度外, 还有很多机制可以引起扩散 例如, 工业中分离同位素的扩散法和离心法, 就是分别利用温度梯度和压强梯度可以引起扩散的原理 因此, 根据费克定律给出的扩散速度表达式是不完全的

如何才能得到较完整的扩散速度表达式? 对于气体混合物的层流运动, 利用气体分子动力学理论 (kinetic theory of gas molecules, 旧称气体分子运动论) 可以推导出较完整的扩散速度表达式, 包括浓度梯度、压强梯度、温度梯度和使两组元产生不同加速度的外力引起的扩散等 对于二相混合物, 对于湍流运动, 分子动力学理论遇到很大困难, 长期以来, 关于扩散速度表达式人们只能依靠经验方法, 只能按照费克定律给出 笔者在研究双流体模型与扩散模型异同的过程中, 首先发现了从组元动量方程推导出扩散速度表达式的方法 (参见文献 [1] 的第十章). 将这一方法应用于混合气体时, 得到的结果与气体分子动力学得到的结果完全一致 (参见文献 [1] 的第十章), 进一步说明了这种方法的正确性 推导扩散速度表达式的这种新方法的主要优点在于可应用于湍流运动和非均相的混合物

式 (9) 的右边由许多项组成, 这表示有许多因素可以引起扩散 (即存在多种扩散势). 在实际应用中, 往往只有几种扩散势是重要的 一般说来, 最主要的扩散势是浓度梯度 若只保留浓度梯度项, 忽略其它各项, 则式 (9) 就退化为费克定律形式 下面将说明, 某些其它扩散势也有重要影响, 不能完全忽略

应用于泥沙问题, 从新的、较完全的扩散速度表达式发现, 除浓度梯度外, 压强梯度和颗粒的脉动 (包括湍流脉动) 强度梯度都可以引起扩散 由于水流中的压强梯度是由重力引起的, 因而压强梯度引起的扩散与现在泥沙理论中所说的重力沉降有联系 压强梯度引起的扩散的主要部分就是重力沉降, 但它还有其它部分, 这些部分在现有的泥沙理论中没有反映 颗粒脉动强度梯度引起的扩散, 在现有泥沙理论中则完全没有反映

利用新的扩散速度表达式, 可以解释一些现有的泥沙理论无法解释的现象 例如, 为了解释观察到泥沙浓度沿高度分布, 现有理论得出结论: 泥沙扩散系数大于水流的动量扩散系数^[3], 这不仅同流体力学的湍流理论矛盾 (因沙粒密度比水大, 脉动强度理应比水小)^[4], 也与布拉什 (L. M. Brush, Jr) 的水下射流的实验结果矛盾^[3]. 如果引入颗粒脉动强度梯度引起的扩散效应, 就可能得出正确结论^[5]. 又如, 在某些试验^[6, 7]中发现的泥沙浓度沿高度分布非单调减的现象, 目前理论都难以正确解释床面附近见到的泥沙浓度局部地沿高度递增, 新的扩散速度表达式可以正确解释之: 是由很大的颗粒脉动强度梯度引起的

分析表明, 基于费克定律的泥沙理论的缺陷, 在颗粒脉动强度变化较大的区域表现得最显著, 例如床面附近, 边壁附近, 回流区与主流的交界处, 水流陡降或急转的河段等, 在这些区域, 新的扩散速度表达式将显示出明显的优越性

所以, 目前的泥沙运动理论应在两个环节中加以改进和发展: 1. 扩散模型 (又称泥沙扩散理论) 是否适用和在什么条件下适用? 2. 如果扩散模型可用, 那么费克定律是否适用, 在什么范围内适用? 如不适用, 则应作怎样的修正?

根据我们目前的认识, 现有的泥沙运动理论的缺陷, 主要是因引入费克定律引起的, 其次是扩散模型本身的近似

五、结束语

本文的观点是: 1. 由于双流体模型的运动方程是基于质量守恒原理和动量守恒原理给

出的, 因此是最可信赖的; 2. 如果采用扩散模型, 那么以组元动量方程为基础导出的扩散速度表达式(9)比基于费克定律的公式(12)或其它经验公式可靠; 3. 基于扩散模型和费克定律发展起来的泥沙理论, 由于它比较简单, 而且实践证明它在许多河段(例如顺直河道的大部分流场)基本上正确, 很适合工程应用, 不应完全放弃, 应深入加以研究, 确定它的适用范围

费克定律基本上是经验的总结¹⁾, 由于引导出费克定律的经验主要来自均相介质中的扩散, 因此它主要适用于均相混合物. 用到多相混合物, 是经验规律的外推. 由于多相流中实验和测量很困难, 这种外推并未经很好的检验, 因此, 存在某些不足是完全可能的

参 考 文 献

- [1] 刘大有, 二相流体动力学. 北京, 高等教育出版社, 1993
- [2] 刘大有, 描写混合物运动的双流体模型与扩散模型. 第四届全国多相流、非牛顿流、物理化学流学术会议论文集, pp. 21- 26, 西安, 1993 10
- [3] 钱宁, 万兆惠, 泥沙运动力学. 北京, 科学出版社, 1983
- [4] J. O. 欣茨, 湍流(下册). 北京, 科学出版社, 1987(黄永念, 颜大春译).
- [5] 刘大有, 从二相流方程出发研究平衡输沙——关于扩散理论和泥沙扩散系数的讨论. 水利学报, 1995年, 第4期, 第62- 67页
- [6] 王光谦, 固液两相流与颗粒流的运动理论及实验研究. 清华大学博士论文, 1989
- [7] Bouvard, M. & Petkovic, S., Vertical dispersion of spherical, heavy particles in turbulent open channel flow, J. of Hydraulic Research, **23**, 1 (1985).

A comment on the defect of sediment theory

— a discussion on the suitability of the diffusion model and the Fick's law

Liu Dayou

(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences)

Abstract

One-fluid model, diffusion model and two-fluid model can be used to describe the motion of mixtures. By introducing these three models and comparing them with each other, it should be pointed out that the one-fluid model has fewer motion equations and hence can be easier solved, but there are less informations in the solution. The latter two models contain equal amount of information. Since the motion equations of the diffusion model can be deduced from that of the two-fluid model by introducing some approximate assumptions, a certain error is involved in it while it can be easier solved than the two-fluid model. The relationship between the error and the physical properties of the moving media has been analysed and the application range of the diffusion model has been given in this paper. It has been explained why the one-fluid model and

1) 对于均匀流场中的少量杂质的扩散, 用统计物理的方法可以证明费克定律是正确的, 但在一般情况下, 在非均匀流场中, 统计物理方法不适用, 费克定律就只应视作经验规律

the diffusion model are often used for mixed gas and the two-fluid model is used for gas-particle mixture. The property of liquid-particle mixture lies between the two kinds of mixture above and the diffusion model is basically, but not completely suitable to it.

In the diffusion model, the diffusion velocity is often expressed according to the well-known Fick's law. It should be pointed out that the application of the Fick's law is conditional and the difficulties met in sediment mechanics nowadays are contacted with these limitations, hence it is necessary to introduce a more general expression of the diffusion velocity.

Key words one-fluid model, diffusion model, two-fluid model, sediment mechanics

支持黄河三角洲持续发展项目

联合国开发计划署“支持黄河三角洲可持续发展”项目是为实现黄河三角洲持续发展而进行大规模投资的准备工作,主要是通过支持筹备实施 21 世纪议程项目,尤其是支持黄河入海流路治理、农业、自然环境保护、工业、城市发展和水土资源的优化利用等,实现黄河三角洲地区的持续发展。该项目将实现如下三个近期目标:制定治理和稳定黄河入海流路的规划,用以指导治河投入;完成黄河三角洲保护与发展研究中心的机构建设,负责对可持续发展项目的研究和协调工作;制定一个吸收了国内外先

进经验的黄河三角洲持续发展总体规划及一批合作开发项目的协议。为实现以上三个近期目标,分以下十个研究专题:投入产出分析和工业规划;交通运输规划;环境研究;水利工程的设计与实施;公共卫生方案;水资源的优化管理;建立地理信息系统;土地利用与区域规划;盐水中的泥沙沉积;10 黄河口计算机模型。本项目自 1995 年 1 月开始实施,项目期为两年,目前正在按计划实施。

(贺济生)

《河流推移质运动理论及应用》新书出版

本书是推移质泥沙运动理论和应用方面的一本专著,系统地介绍了作者在这方面的研究成果,共九章。一至五章简述了粗化附加阻力理论及其在泥沙起动、输沙率、沙波运动、颗粒运动速度和河床冲刷粗化等方面的应用,系统地阐述了不均匀沙起动输沙过程又是床沙粗化过程,具有不恒定性,它的规律不同于均匀沙;六、七章介绍紊流能损理论和动床水流卡门参数的变化规律、物理意义及其在求解超高(低)阻力和紊流参数中的应用;第八章介绍“天然沉沙池”自动冲刷理论及其在改善水库泥沙淤积状况、变动回水区淤沙碍航方面的应用;第九章数模计算。本书以大量实测资料说明物理过程、变化规律和具体计算方法,具有很强的实用性。

本书可供水利水电、桥梁、航道、港口、地理和选矿及水力输送固体物质等方面有关专业的设计、科研、教学人员和研究生参阅,是一本难得的专业参考书。本书 25 万字,每本 19 元,由中国铁道出版社出版、发行。书的作者:中国水利水电科学研究院泥沙研究所秦荣昱教授级高级工程师。欲购者请与北京市东单三条 14 号,中国铁道出版社发行部(邮编 100005)联系。

(王崇浩)