

## Zernike 多项式展开系数的时间相关性

张德良 姜文汉

严海星

(中国科学院光电技术研究所, 成都, 610209)

(中国科学院力学研究所, 北京, 100080)

**摘 要** 分析了受大气湍流扰动的光波波前在系统接收孔径上的 Zernike 多项式展开系数的时间相关性, 在此基础上进一步分析了从不同方向到达系统接收孔径的光波波前整体倾斜之间的相关性, 并给出了光波在水平均匀大气中传播时的结果。

**关键词** Zernike 多项式 时间相关性 整体倾斜 自适应光学

光波在大气中传输时其波前会受到大气湍流的随机扰动, 从而使其成像受到严重影响。为了克服这种影响, 需要采用自适应光学系统对光波波前所受的大气扰动进行补偿<sup>[1]</sup>。

自适应光学系统所探测到的光波波前可以用一系列的 Zernike 多项式展开<sup>[2]</sup>。由于自适应光学系统存在时间延迟  $\Delta t$ , 在时刻  $t$  测量到的光波波前只能补偿  $t + \Delta t$  时刻到达系统的光波。然而到达自适应光学系统的光波波前不断发生变化, 用  $t$  时刻的光波波前补偿  $t + \Delta t$  时刻的光波波前会引起误差<sup>[3]</sup>, 因此有必要弄清各阶多项式的时间相关性, 对在  $\Delta t$  时间间隔内其展开系数时间相关性很好的 Zernike 多项式所对应的波前扰动进行补偿, 而放弃对相关性变得很差的 Zernike 多项式所对应的波前扰动进行补偿。这样做可以消除对在  $\Delta t$  时间间隔内已经改变了波前扰动进行补偿所带来的负面影响。这种因外界环境的变化而采取的对光波波前所受扰动进行有选择的部分补偿具有重要的现实意义。Jean- Paul Gaffard 在研究本征模式法的应用时对这个观念有所涉及<sup>[4]</sup>, 但运用本征模式却很难对此进行深入的研究。

本文给出了各阶 Zernike 多项式展开系数的时间相关性与大气湍流强度、光波传输路径上的横向风速、目标运动速度及系统接收孔径之间关系的解析表达式。在此基础上, 进一步分析了各阶 Zernike 多项式展开系数的角度相关性。这对于理解大气湍流对光波波前的扰动, 以及最终实现自适应光学系统对光波波前扰动进行有选择的部分补偿都很有意义。

## 1 理论推导

设系统接收孔径的半径为  $R$ , 则  $L$  处的点光源发出的光波在接收孔径上的相位分布为

$$\Phi(R \vec{r}, t) = k \int_0^L dh n_1 [X(h) R \vec{r}, t] \quad (1)$$

其中  $k$  为光波波数;  $n_1$  为大气湍流的折射率起伏;  $\vec{r}$  在单位圆上取值。对于球面波,  $X(h) = 1 - h/L$ ; 对于平面波,  $X(h) = 1$ 。相应的 Zernike 多项式展开系数为

$$a_i(t) = d^2 W(\vec{r}) Z_i(\vec{r}) \Phi(R \vec{r}, t) \quad (2)$$

其中  $W(\vec{r})$  为接收系统的孔径函数

$$W(\vec{r}) = \begin{cases} 1/\pi & |\vec{r}| \leq 1 \\ 0 & |\vec{r}| > 1 \end{cases} \quad (3)$$

国家863激光技术领域资助课题

1997年7月25日收到原稿, 1997年9月5日收到修改稿。

张德良, 男, 1968年出生, 博士研究生。

各阶 Zernike 多项式展开系数在时间域上互相关函数为

$$\langle a_i(t) a_i(t + \tau) \rangle = d^2 r_1 d^2 r_2 Z_i(\vec{r}_1) Z_i(\vec{r}_2) \langle \Phi(R \vec{r}_1, t) \Phi(R \vec{r}_2, t + \tau) \rangle \quad (4)$$

相位扰动相关函数  $\langle \Phi(R \vec{r}_1, t) \Phi(R \vec{r}_2, t + \tau) \rangle$  和大气湍流折射率起伏的相关函数  $\Gamma_n^{(0)}$  之间的关系已由文献[7]给出

$$\langle \Phi(R \vec{r}_1, t) \Phi(R \vec{r}_2, t + \tau) \rangle = 0.00969k^2 \int_0^L dh C_n^2(h) \Gamma_n^{(0)}(X(h)R \vec{r}, \tau, h) \quad (5)$$

其中  $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  而

$$\Gamma_n^{(0)}[X(h)R \vec{r}, \tau, h] = d^2 \rho \Phi_n^{(0)}(\rho) \rho e^{-2\pi i \Phi_n^{(0)}(h)\tau} e^{2\pi i X(h)R \vec{r}} \quad (6)$$

其中  $\Phi_n^{(0)}(\rho)$  为大气湍流折射率的起伏谱。注意到

$$W(\vec{r}_1) Z_i(\vec{r}_1) = d^2 \rho_1^* Q_i(-\rho_1^*) e^{2\pi i \rho_1^* \vec{r}_1} \quad (7)$$

$$W(\vec{r}_2) Z_i(\vec{r}_2) = d^2 \rho_2 Q_i^*(-\rho_2) e^{-2\pi i \rho_2 \vec{r}_2} \quad (8)$$

将(5~ 8)式代入(4), 可得

$$\langle a_i(t) a_i(t + \tau) \rangle = 0.00969k^2 \int_0^L dh C_n^2(h) d^2 \rho \Phi_n^{(0)}(\rho) \rho e^{-2\pi i \Phi_n^{(0)}(h)\tau} Q_i[-X(h)R \rho] Q_i^*[-X(h)R \rho] \quad (9)$$

由于

$$Q_i(\rho, \theta) = \begin{cases} (n+1)^{1/2} \frac{J_{n+1}(2\pi\rho)}{\pi\rho} (-1)^{(n+m)/2} l^m 2^{(1-\delta_{m0})/2} \cos m\theta & l = 1 \\ (n+1)^{1/2} \frac{J_{n+1}(2\pi\rho)}{\pi\rho} (-1)^{(n+m)/2} l^m 2^{1/2} \sin m\theta & l = -1 \end{cases} \quad (10)$$

其中  $n, m, l$  为各阶 Zernike 多项式的参数 ( $n, m$  为不小于0的整数, 并满足  $m \leq n, n-m$  为偶数)。Zernike 多项式的定义可参见文献[6]。所以

$$Q_i[-X(h)R \rho] Q_i^*[-X(h)R \rho] = \begin{cases} 2^{1-\delta_{m0}} (n+1) \frac{J_{n+1}^2[2\pi X(h)R \rho]}{[\pi X(h)R \rho]^2} \cos^2 m\theta & l = 1 \\ 2(n+1) \frac{J_{n+1}^2[2\pi X(h)R \rho]}{[\pi X(h)R \rho]^2} \sin^2 m\theta & l = -1 \end{cases} \quad (11)$$

将(11)式代入(9)式, 用 Kolmogorov 谱  $\Phi_n^{(0)} = \rho^{-11/3}$  描述大气湍流, 并利用积分恒等式

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta e^{-in\theta - iz \sin\theta} = J_n(z) \quad (12)$$

可得

$$\langle a_i(t) a_i(t + \tau) \rangle = 0.00969k^2 2(n+1) (2\pi)^{8/3} R^{5/3} \int_0^L dh C_n^2(h) \chi^{6/3}(h) G(h) \quad (13)$$

其中

$$G(h) = \begin{cases} 2^{1-\delta_{m0}} [G_{(n+1)2_0}(-\frac{14}{3}, \frac{v(h)\tau}{\chi(h)R}) + (-1)^m G_{(n+1)2_{2m}}(-\frac{14}{3}, \frac{v(h)\tau}{\chi(h)R}) \cos 2m\varphi], & l = 1 \\ 2[G_{(n+1)2_0}(-\frac{14}{3}, \frac{v(h)\tau}{\chi(h)R}) - (-1)^m G_{(n+1)2_{2m}}(-\frac{14}{3}, \frac{v(h)\tau}{\chi(h)R}) \cos 2m\varphi], & l = -1 \end{cases} \quad (14)$$

$\varphi$ 为横向风速的方向角;  $G_{mn}(\alpha, \beta) = \int_0^\alpha \tau^m d\tau J_n(\tau) J_n(\beta\tau)$ , 它的解析解已由 G. A. Tyler 给

出<sup>[5]</sup>。

定义归一化互相关函数为

$$\gamma_i(\tau) = \frac{\langle a_i(t)a_i(t+\tau) \rangle}{\langle a_i^2(t) \rangle} \quad (15)$$

其中  $\langle a_i^2(t) \rangle$  实际上是 Zernike 多项式展开系数的方差, 其值已由 R. J. Noll 给出<sup>[2]</sup>

$$\langle a_i^2(t) \rangle = 0.092(2\pi)^{8/3}(n+1) \frac{\Gamma(14/3)\Gamma(n-5/6)}{2^{14/3}\Gamma^2(17/6)\Gamma(n+23/6)}(R/r_0)^{5/3} \quad (16)$$

图1给出了  $\langle a_i^2(t) \rangle$  与  $n$  的关系。

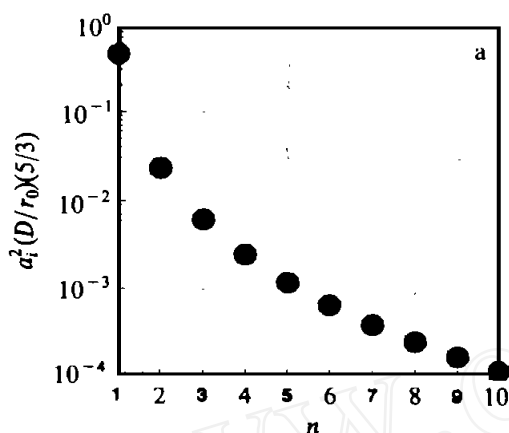


Fig 1 Relationship between variance of coefficients of Zernike polynomials and parameter  $n$   
图1 Zernike 多项式展开系数方差与  $n$  的关系

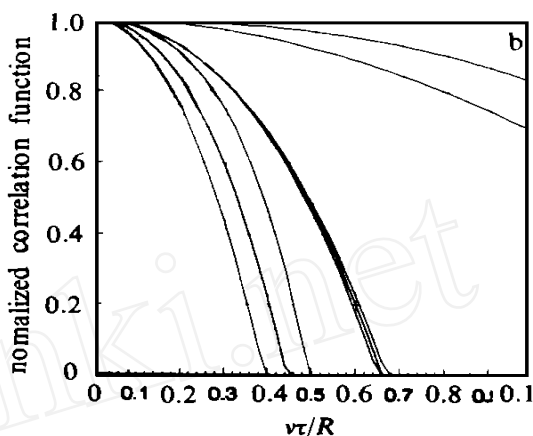


Fig 2 Relationship between normalized correlation function of coefficients of Zernike polynomials and  $v\tau/R$   
图2 Zernike 多项式展开系数的归一化相关函数与  $v\tau/R$  的关系

将(13)和(16)式代入(15)式, 得到

$$\gamma_i(\tau) = \frac{(2\pi)^{11/3} \int_0^L dh C_n^2(h) \chi^{6/3}(h) G(h)}{2 \int_0^L dh C_n^2(h) \chi^{6/3}(h) \rho^{-14/3} d\rho J_{n+1}^2(2\pi\rho)} \quad (17)$$

## 2 光波在水平均匀大气中传播时的一些结果

考虑光波在水平均匀大气中传播时的情况, 可以使分析变得简洁, 也不影响对问题的理解, 而且还可以对影响 Zernike 多项式时间相关性的一些因素有更深入的认识。下面分析光波传播路径上的湍流介质变化分别由横向风引起和目标横向运动引起两种情况。

### 2.1 光波传播路径上的横向风引起湍流介质发生变化

假定这时的横向风速为  $v$ , 则

$$G(h) = \begin{cases} 2^{1-\delta_{m0}} [G_{(n+1)2_0}(-\frac{14}{3}, \frac{v\tau}{\chi(h)R}) + (-1)^m G_{(n+1)2_{2m}}(-\frac{14}{3}, \frac{v\tau}{\chi(h)R}) \cos 2m\varphi], & l = 1 \\ 2[G_{(n+1)2_0}(-\frac{14}{3}, \frac{v\tau}{\chi(h)R}) - (-1)^m G_{(n+1)2_{2m}}(-\frac{14}{3}, \frac{v\tau}{\chi(h)R}) \cos 2m\varphi], & l = -1 \end{cases} \quad (18)$$

$$\gamma_i(\tau) = \frac{(2\pi)^{11/3} \int_0^L dh \chi^{6/3}(h) G(h)}{2 \int_0^L dh \chi^{6/3}(h) \rho^{-14/3} d\rho J_{n+1}^2(2\pi\rho)} \quad (19)$$

可见这时  $\gamma_i(\tau)$  与大气湍流的强度、光波波长以及光波传播距离  $L$  无关, 而只与接收孔径的尺寸、系统时间延迟、横向风速以及横向风速的风向  $\varphi$  有关。

图2给出了在  $\varphi = 0$ , 即  $v$  沿  $x$  方向时,  $\gamma_i(\tau)$  与  $v\tau/R$  之间的关系曲线。从上到下的前两条曲线对应的 Zernike 多项式的参数分别为  $(1, 1, -1)$ ,  $(1, 1, 1)$ 。第三条看上去比较粗的曲线实际上由三条曲线组成, 所对应的参数分别为  $(2, 2, -1)$ ,  $(2, 0, 1)$ ,  $(2, 2, 1)$ 。第四条曲线对应的参数为  $(3, 1, -1)$ 。第五条曲线实际上由两条曲线组成, 所对应的参数分别为  $(3, 3, -1)$ ,  $(3, 3, 1)$ 。第六条曲线所对应的参数为  $(3, 1, 1)$ 。

## 2.2 目标横向运动时的情况

设目标横向运动时相对于系统的旋转角速度为  $\bar{\theta}$ , 则  $v(h) = \bar{\theta}h$ ,  $v(h)\tau = \bar{\theta}\tau h$ 。  $\bar{\theta}\tau$  实际上是时间延迟  $\tau$  内目标旋转过的角度  $\theta$ , 因此这时的归一化相干函数反映了各阶 Zernike 多项式的等晕情况。鉴于此, 将  $\gamma_i(\tau)$  改为  $\gamma_i(\theta)$ ,  $\bar{\theta}\tau$  改为  $\theta$  平面波时各阶 Zernike 多项式的等晕情况已由 P. H. Hu 等人给出<sup>[6]</sup>。在这里我们的推导实际上还给出了球面波时的情况

$$G(h) = \begin{cases} 2^{1-\delta^{m0}} [G_{(n+1)^2_0}(-\frac{14}{3}, \frac{\theta h}{\chi(h)R}) + (-1)^m G_{(n+1)^2_{2m}}(-\frac{14}{3}, \frac{\theta h}{\chi(h)R}) \cos 2m\varphi], & l = 1 \\ 2[G_{(n+1)^2_0}(-\frac{14}{3}, \frac{\theta h}{\chi(h)R}) - (-1)^m G_{(n+1)^2_{2m}}(-\frac{14}{3}, \frac{\theta h}{\chi(h)R}) \cos 2m\varphi], & l = -1 \end{cases} \quad (20)$$

$$\gamma_i(\theta) = \frac{(2\pi)^{11/3} \int_0^L dh \chi^{6/3}(h) G(h)}{2 \int_0^L dh \chi^{6/3}(h) \rho^{-14/3} d\rho J_{n+1}^2(2\pi\rho)} \quad (21)$$

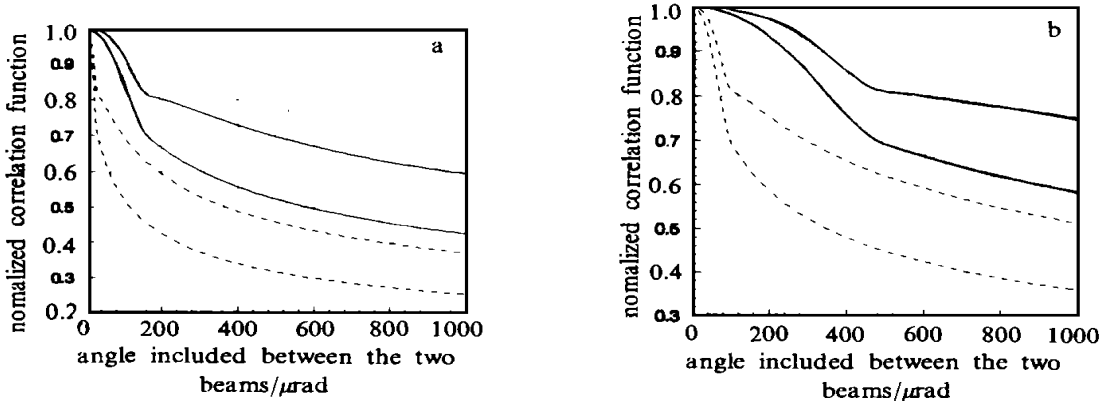


Fig. 3 Relationship between normalized correlation function of coefficients of Zernike polynomials and  $\theta$ . The solid lines and the dashed lines are corresponding to  $R = 0.25\text{m}$  and  $R = 0.05\text{m}$ , respectively. (a)  $L = 3\text{km}$ , (b)  $L = 1\text{km}$

图3 Zernike 多项式展开系数的归一化相关函数与  $\theta$  的关系

可以看出, 这时  $\gamma_i(\theta)$  与  $\theta$  光波传播距离  $L$ 、系统接收孔径半径  $R$  有关, 仍然与大气湍流强

度, 光波波长无关。

我们对第2阶和第3阶 Zernike 多项式, 即整体倾斜的角度相关性进行了考察。仍然假设  $v$  沿  $x$  方向。这两阶 Zernike 多项式对应的参数  $n, m, l$  分别为  $(1, 1, 1)$  和  $(1, 1, -1)$ 。图3给出了系统接收半径分别为  $R = 0.25\text{m}$  和  $R = 0.05\text{m}$ , 光波传播距离 (a)  $L = 3\text{km}$  和 (b)  $L = 1\text{km}$  时的规一化相关函数  $Y(\theta)$  与目标旋过角度  $\theta$  之间的关系,  $\theta$  的单位为微弧度。每种情况下从上到下的两条曲线分别对应第三阶和第二阶 Zernike 多项式。

### 3 结果分析

可以看出, 当光波在水平均匀大气中传播, 并且路径上的横向风速相等时,  $Y_i(\tau)$  与大气湍流的强度, 光波波长以及光波传播距离无关。这是因为在上述条件下大气湍流的折射率起伏、光波波长和光波传播距离对波前扰动的影响都是线性的, 并且在整个路径上的横向风的影响相同, 因此根据  $Y_i(\tau)$  的定义(15)不难看出, 以上因素不会影响到  $Y_i(\tau)$  的值。

从图2可以看出,  $Y_i(\tau)$  随  $v\tau/R$  的增加而减小, 也即当  $R$  一定时,  $Y_i(\tau)$  随  $v\tau$  的增大而减小, 而当  $v\tau$  一定时,  $Y_i(\tau)$  随  $R$  的减小而减小。这是因为  $v\tau$  代表了时间上相距为  $\tau$  的两光波波前所经历的湍流之间的间距,  $v\tau$  越大, 两光波波前所经历的湍流之间的相关性越差,  $Y_i(\tau)$  也因此越小。而当  $v\tau$  一定的情况下, 系统接收孔径的半径  $R$  减小时, 孔径上的各阶 Zernike 多项式所对应的湍流结构的尺度越小。而湍流结构的尺度越小, 其空间相关性也越差。因此这时  $Y_i(\tau)$  也随之减小。

从图2还可以看出,  $n$  越大, 对应的  $Y_i(\tau)$  随  $v\tau/R$  增大而减小得越快。而  $n$  相同时,  $Y_i(\tau)$  减小的情况与  $m$  有关。这是因为  $n$  主要反映了该类 Zernike 多项式所对应的湍流结构尺度,  $n$  越大, 对应的湍流尺寸越小, 因此对应的  $Y_i(\tau)$  随  $n$  增大减小得越快。而当  $n$  相同时, 由于  $m$  反映了湍流结构沿角向的破碎情况,  $l$  反映了湍流结构主要沿  $x$  方向还是沿  $y$  方向分布。当  $m = 0$  时, 对应的 Zernike 多项式对方向和角度都是不敏感的, 因此对应的  $Y_i(\tau)$  只表现出由  $n$  所确定的随  $v\tau/R$  的增加而减小的情况。对于  $m = 1, l = 1$  和  $l = -1$  所对应的 Zernike 多项式分别反映沿  $x$  方向和沿  $y$  方向分布的湍流结构成份。当光波传播路径上的横向风沿  $x$  方向时, 所有的湍流结构都在  $x$  方向被吹动, 所以沿  $x$  方向分布的湍流结构在  $x$  方向所受的影响要大一些, 因此  $l = 1$  所对应的  $Y_i(\tau)$  随  $v\tau/R$  的增大减小得快一些。当  $m > 1$  时, 所反映的湍流结构沿角向的破碎加剧,  $l = 1$  和  $l = -1$  所对应的湍流结构在  $x$  方向和  $y$  方向的差别减小, 因此它们所分别对应的  $Y_i(\tau)$  随  $v\tau/R$  增大而减小的差别也很快减小。从图2可以看出当  $m = 3$  时,  $l = 1$  和  $l = -1$  各自所对应的  $Y_i(\tau)$  随  $v\tau/R$  增大而减小的差别已几乎看不出来。

图3给出了从不同方向到达系统接收孔径的光波波前沿  $x$  方向和沿  $y$  方向的整体倾斜之间的相关性。可以看出当系统接收孔径变小时, 夹角为  $\theta$  的两光波波前的整体倾斜的相关性减小。这是因为到达系统的光波波前的整体倾斜由尺度大于系统接收孔径的湍流结构确定, 当系统接收孔径变小时, 确定整体倾斜的湍流成份增多, 而新增的尺寸较小的湍流成份的相关性减小, 因此整体倾斜的相关性也减小。

将图3(a)和3(b)进行比较可以看出, 当光波的传播距离减小时, 从不同方向到达系统的光波波前整体倾斜的相关性增大。这是因为两光波在任一处的间距与该处到系统接收孔径的距离有关, 距离越小, 该处两光波的间距也越小, 两光波传播路径上的湍流的相关性就越大。因此光波传播距离越小, 从不同方向到达系统的光波波前整体倾斜的相关性越大。

根据以上分析,对于光波在水平均匀大气中传播时的情况,我们得到如下结论:

- (1) 光波波前的 Zernike 多项式展开系数的规一化相关函数  $\mathcal{Y}_i(\tau)$  与大气湍流强度、光波波长、光波传播距离没有关系,随  $v\tau/R$  的增大而减小。
- (2)  $\mathcal{Y}_i(\tau)$  随  $v\tau/R$  的增大而减小的情况与对应的 Zernike 多项式的参数  $m, n, l$  有关。
- (3) 光波在水平均匀大气中传播时,从不同方向到达系统的光波波前的整体倾斜的规一化相关函数随光波传播距离的减小而增大,随系统接收孔径的减小而减小,与大气湍流强度、光波波长没有关系。

致 谢 完成本工作期间曾得到中科院光电所许冰的帮助,谨在此深表谢意。

### 参考文献

- 1 Hard J W. Active optics: a new technology for the control of light *Proc IEEE*, 1978, **66**(6): 651~ 697
- 2 Noll R J. Zernike polynomials and atmospheric turbulence *JOSA*, 1976, **66**: 207~ 211
- 3 张德良,姜文汉,吴旭斌,严海星,李树山. 水平大气中横向风对自适应光学系统性能的影响 *光学学报*, 1997, **17**(5): 614~ 620
- 4 Gaffard J P, Ladanois G. Adaptive optical transfer function modeling *Proc SPIE*, 1991, **1542**: 34~ 45
- 5 Tyler G A. Analysis of propagation through turbulence: evaluation of an integral involving the product of three Bessel functions *JOSA*, 1990, **7**(7): 1218~ 1223
- 6 Hu P H, Stone J, Stanley T. Application of Zernike polynomials to atmospheric propagation problems *JOSA*, 1989, **6**(10): 1595~ 1608

## TEMPORAL CORRELATION OF COEFFICIENTS OF ZERNIKE POLYNOMIALS

Zhang Deliang and Jiang Wenhan

*Institute of Optics and Electronics, Chinese Academy of Sciences, Chengdu, 610209*

Yan Haixing

*Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, 100080*

**ABSTRACT** Temporal correlation of coefficients of Zernike polynomials of wavefront, which is perturbed by the atmospheric turbulence, has been analyzed. The tip-tilt correlation of wavefronts come from different directions has also been analyzed, too. Results while light propagates in the horizontal atmosphere are presented.

**KEY WORDS** Zernike polynomials, temporal correlation, assemble tilt, adaptive optics