

68-75/67

盲肠河段口门紊动掺混区 水流运动的相似分析*

刘青泉

(中国科学院力学所)

TV 143.1

提 要

本文应用湍流模式,建立了盲肠口门紊动掺混区水流运动的数学模型,在定常流动中,近似具有自相似性,利用相似理论,给出了流函数和流速的相似函数,对掺混区的水流运动进行了模拟计算,并分析了掺混区横向流速梯度及涡粘性系数的变化特性。

关键词 盲肠河段,紊动掺混区,相似结构,相似函数,水流,运动,相似结构

一、前 言

盲肠口门有大尺度涡体产生、掺混和消失的活动,将其范围称作口门紊动掺混区,它实际上是盲肠回流与主流之间的过渡流动区。

在掺混区,水流充分紊动,相互掺混,并由此不断地进行着动量交换,为盲肠回流运动提供源源不断的动力——紊动切应力。对于挟沙水流,主回流之间通过紊动掺混区,还不断地进行着泥沙交换,掺混区是主流与回流之间进行动量和泥沙交换的重要场所,也是主、回流二者发生联系的纽带,因此,掺混区对盲肠回流运动起着十分重要的作用,是盲肠回流运动系统不可分割的有机部分,本文从掺混区水流运动的自相似性出发,探讨其流动特性,从而给出一些规律性的结果,以促进对盲肠回流运动的研究。

二、紊动掺混区概况

在盲肠河段口门,由于边界突然扩大,水流与边界产生分离,在交界面处形成速度间断面,水流受扰间断面失去稳定,形成如图1所示的紊动掺混区,这里可将它看作是主流以速度 U_m 的平行水流,以射流的形式经过盲肠口门时形成的自由紊流掺混区。

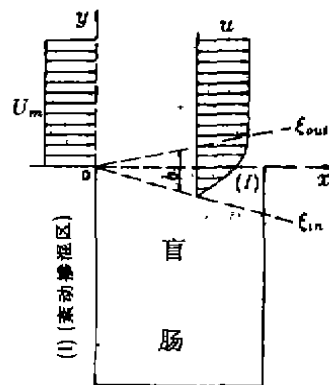


图1 紊动掺混区示意

* 本文于1994年2月3日收到。

掺混区由于紊动强烈，涡旋的产生和发展是间断的，因此固定点的流速，流向及压力也相应地发生周期性脉动，掺混区的边界也是不稳定的。但就时均意义上讲，掺混区具有较为明确固定的边界。

在讨论自由边界的掺混问题时，混合区宽度 b 与流程 x 成线性比例关系⁽¹⁾，即：

$$b = cx. \quad (c \text{ 为常数}) \quad (1)$$

式(1)表达了掺混区扩展的重要规律，即掺混区宽度沿流程线性增大。对于盲肠口门掺混区，尽管存在下壁的阻挡作用，但掺混区扩展规律仍近似遵循这一规律，此结论也被试验结果所证明⁽³⁾。当然，实际的掺混区边界是一个由涡团和周围外流交错组成的不规则面。式(1)给出的边界是统计或时均意义上的平均线。

盲肠口门的紊动掺混区，在交界面两侧沿程扩展，占据原来主流和盲肠回流的部分区域，实际上交界面两侧的扩散区，也分别是主流和回流的一部分。掺混区的水流运动对主流和回流的运动都产生一定的影响。前面讲过，掺混区主要为回流提供动量来源，维持了回流的稳定运动。反过来对于主流运动，却起着阻滞作用。主流在靠近交界面附近，普遍受到阻滞，且受阻滞的范围沿流程逐渐增大，如图2所示(水槽模型试验结果⁽³⁾，主流 $Re = 26670$ ，一般明渠流临界雷诺数 $Re_c = 500$)。

从试验资料看，掺混区对主流的阻滞具有较明显的边界，可认为大致在这条线上，水流具有从主流到掺混区过渡的性质，即将此线视作紊动掺混区在主流一侧的边界(外边界)。据此可得此边界线与口门几何界面的夹角 θ ， $\text{tg}\theta = y/x = 0.107$ ， $\theta = 6.11^\circ$ 。即直线 $y = 0.107x$ 可看作主流与掺混区的交界线，亦即掺混区的外边界，它与口门几何界面的夹角为 6.11 度。

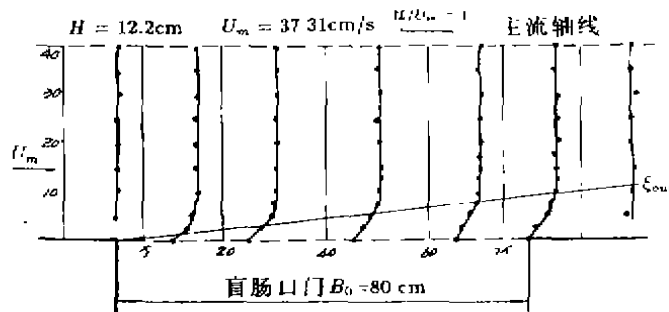


图2 盲肠口门段主流的垂线平均流速分布

三、掺混区水流运动的数学模型

掺混区内水流紊动剧烈，流速沿垂线分布比较均匀⁽³⁾，可看作平面浅水情况，即可作为沿深度平均的平面二维问题。由于掺混区宽度 b 远小于口门宽 B_0 和主流宽 B_m ，类似于一般紊流边界层方程的简化过程⁽⁴⁾，可求得描述掺混区水流的运动方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial u'v'}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2)$$

将掺混区水流看作自由紊流, 不考虑固壁影响, 从而不必考虑粘性影响的层流底层. 掺混区内 y 方向压力梯度很小, 盲肠外部势流空间内的压力可视作常量. 速度及速度脉动沿 x 方向变化率远小于沿 y 方向的变化率, 可略去 $\partial u^2 / \partial x$ 一项. 由此对于二维恒定自由紊流, 可化简得掺混区的紊流边界层方程:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u'v'}{\partial y} = 0, \quad (3)$$

其中 u 、 v 分别为 x 、 y 方向的时均流速分量; u' 、 v' 为 x 、 y 方向的脉动流速分量.

对于雷诺应力项 ($\tau = -\rho \overline{u'v'}$), 采用 Prandtl 掺长假设, 有

$$-\overline{u'v'} = l^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (4)$$

对自由紊流问题, 混合区宽度为紊流的特征长度, 故可假定混合掺长与掺混区宽度 b 成正比, 结合式(1)有:

$$l = c \cdot c_1 x, \quad (c, c_1 \text{ 均为常数}) \quad (5)$$

式(3)最终化简为:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = 2c^2 c_1^2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y} > 0 \right) \quad (6)$$

方程(3)或(6)是在没有考虑盲肠下壁阻挡的情况下, 将掺混区水流近似看作自由紊流导出的. 严格地讲, 由于下壁的存在, 对掺混区水流运动有较大的影响. 在口门下壁附近的邻域内, 方程不再能很好地描述该区域的水流运动. 合理的作法是将自由紊流问题与下游的绕流问题结合起来考虑, 但这势必使问题变得十分复杂. 考虑到实际问题中, 下壁的影响域并不太大, 近似认为方程(3)或(6)描述了掺混区的水流运动. 事实上, 除了上、下壁附近的邻域以外, 对掺混区的大部分区域, 该方程对其水流运动的描述还是较准确的.

四、掺混区水流运动的相似性

掺混区水流运动是否具有相似性, 关键在于能否找到一组相似变量, 将控制方程化简为常微分方程. 下面采用反推法探讨其相似性. 即先给出相似变量的待定形式, 将偏微分方程用相似变量表示为微分形式后, 该方程为常微分方程的条件即为所需的相似条件, 从而得到一组相似变量.

引用流函数 ψ 有

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (7)$$

代入方程(6), 并化简得:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 2c^2 c_1^2 x \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}. \quad (8)$$

考虑方程(8)的特点, 当盲肠口门突然开启时, 可看作是对原来主流运动区域形态的一种摄动. 口门处的水流运动速度与主流不一致, 可看作是对主流的扰动. 因此作为一级近似, 可令, $\psi_0 = U_m y$ 为方程(8)的一级近似解.

引用相似变量 $\xi = \delta x^{-m} y$, (9)

可将 ψ_0 写作 $\psi_0 = \delta^{-1} U_m x^m \cdot \xi$.

设流函数的相似函数为 $F(\xi)$ ，则有

$$\psi = \delta^{-1} U_m x^m F(\xi), \quad (10)$$

将上式代入方程 (8)，并整理得：

$$2c^2 c_1^2 \delta^3 x^{3-3m} F''(\xi)F'''(\xi) + mF(\xi)F''(\xi) = 0, \quad (11)$$

方程 (11) 存在相似解，则要求 $m=1$ ，可得：

$$\xi = \delta y / x. \quad (12)$$

由于用相似变量 $\xi = \delta y / x$ 可将方程 (6) 化为常微分方程，所以掺混区水流运动存在相似性。这样就可利用相似解来研究这类问题，从而大大简化问题的求解。

式 (12) 中的 δ 是一经验参数，令 $\delta = (cc_1)^{-2/3}$ 则可化简方程 (11) 为：

$$F''(\xi)(2F'''(\xi) + F(\xi)) = 0. \quad (13)$$

由于方程 $F''(\xi) = 0$ 表示水流在口门无流速梯度，即 $\partial u / \partial y = 0$ ，显然这不是掺混区的实际情况，因此 $F''(\xi) = 0$ 不是问题的解。所以最后可得掺混区水流运动的相似函数方程：

$$2F'''(\xi) + F(\xi) = 0. \quad (14)$$

五、掺混区水流运动相似解

(一)边界条件 方程 (8) 的边界条件，可在掺混区的内、外边界上确定。忽略下壁的影响，近似认为掺混区水流运动满足方程 (8)，并且满足下列边界条件：

在外边界 ξ_1 上

$$\partial \psi / \partial y = U_m, \quad (15)$$

$$\partial^2 \psi / \partial y^2 = 0, \quad (16)$$

$$\partial \psi / \partial x = 0. \quad (17)$$

在内边界 ξ_2 上，由于回流的存在，实际上内边界的条件是很难确定的。应将掺混区和回流作为一个大系统联合求解，但这必然使问题太复杂。由于回流的水流流速平均要比主流速小的多，且掺混区内边界上纵向流速很小，因此在内边界上，近似有：

$$\partial \psi / \partial y = 0, \quad (18)$$

$$\partial^2 \psi / \partial y^2 = 0 \quad (19)$$

在无回流情况下，(18)(19) 两式成立，回流的形成是由主流引起的，因此认为掺混区水流特点与未形成回流前相同，所以忽略此处的流速和流速梯度不会引起太大误差。

据上述分析，对相似函数方程 (14)，则具有如下边界条件：

外边界上 $\xi = \xi_1$ 时

$$F'(\xi) = 1, \quad (20)$$

$$F''(\xi) = 0, \quad (21)$$

$$F(\xi) = \xi. \quad (22)$$

内边界上 $\xi = \xi_2$ 时

$$F'(\xi) = 0, \quad (23)$$

$$F''(\xi) = 0. \quad (24)$$

求解方程 (14) 及边界条件 (20) — (24) 即可求得问题的解。

(二)方程的求解 方程 (14) 的特征根为：

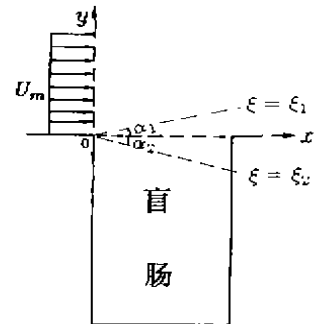


图 3 坐标示意

$$r_1 = 2^{-1/3} e^{i\pi/3}, \quad r_2 = 2^{-1/3} e^{i2\pi/3}, \quad r_3 = 2^{-1/3} e^{-i\pi/3}.$$

则方程(14)的通解为:

$$F(\xi) = a_1 e^{-A\xi} + a_2 e^{B\xi} \cos(\sqrt{3} B\xi) + a_3 e^{B\xi} \sin(\sqrt{3} B\xi), \quad (25)$$

其中 $A = 2^{-1/3}$, $B = 2^{-4/3}$.

式中 a_1, a_2, a_3 为积分常数, 由边界条件确定.

将式(25)代入式(20)~(24)中, 可得到一组非线性方程组, 5个方程5个未知数. 解此非线性方程组, 则可求得 $a_1, a_2, a_3, \xi_1, \xi_2$. 利用数值计算方法可求解此方程组.

借助系统工程中最优化的思想, 将求根问题转化为优化问题.

一般地, 为求解方程

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (26)$$

的一组实根, 定义目标函数:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n f_i, \quad (27)$$

如果一组变量 $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$, 使目标函数达到最小, 若方程(26)有实根, 这个最小值必为零, 且 $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$, 即为方程的一组实根.

运用最速下降法, 在计算机上求解这一优化问题, 可解得上述5个非线性方程组, 有:

$$a_1 = -0.019, \quad a_2 = 0.185, \quad a_3 = 0.850, \\ \xi_1 = 1.208, \quad \xi_2 = -2.403.$$

由此得到相似函数:

$$F(\xi) = -0.019e^{-A\xi} + 0.185e^{B\xi} \cos(\sqrt{3} B\xi) + 0.85e^{B\xi} \sin(\sqrt{3} B\xi), \quad (28)$$

其中 $A = 2^{-1/3}$, $B = 2^{-4/3}$.

则掺混区的流函数和流速解为:

$$\psi(\xi) = \delta^{-1} U_m x [-0.019e^{-A\xi} + 0.185e^{B\xi} \cos(\sqrt{3} B\xi) + 0.85e^{B\xi} \sin(\sqrt{3} B\xi)], \quad (29)$$

纵向流速

$$u = U_m \{0.019Ae^{-A\xi} + 0.185Be^{B\xi} [\cos(\sqrt{3} B\xi) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} B\xi)] + \\ 0.85Be^{B\xi} [\sqrt{3} \cos(\sqrt{3} B\xi) + \sin(\sqrt{3} B\xi)]\}. \quad (30)$$

其中 $A = 2^{-1/3}$, $B = 2^{-4/3}$.

将式(29)泰勒展开, 可以看出 $\psi_0 = U_m y$ 的确为方程的一级近似解.

(三)参数 δ 及掺混区扩散角 采用了 Prandtl 的掺长假设, 掺长 l 是经验的, 式(5)中 c_1, c 均为未知数, 由式 $\delta = (cc_1)^{-2/3}$ 可知, δ 也是一经验参数, 需由试验资料确定.

在第二部分曾由试验资料得到, 掺混区外边界与口门几何界面的夹角约为 $\theta = 6.11^\circ$. 即有 $y/x = \tan\theta = 0.107$, (外边界)

又 $\xi_1 = \delta y/x = 1.208$,

故得到 $\delta = 11.29$. (31)

由 ξ_1 和 ξ_2 的值, 进而可求得掺混区扩散角.

外扩散角(主流一侧) $\alpha_1 = 6.11^\circ$, (32)

内扩散角(回流一侧) $\alpha_2 = -12.02^\circ$. (33)

实际的主、回流界面并非盲肠口门的几何界面, 而应该是掺混区的零流线, 即 $\psi = 0$ 所构成的面. 亦即相等于 $\xi_0 = -0.27$, 或 $y/x = -0.024$, 则得到主、回流界面与几何界面的偏角:

$$\alpha = \arctg(y/x) = -1.37^\circ. \quad (34)$$

也就是说, 实际的主、回流界面要偏向盲肠口门内侧, 与口门几何界面的夹角约为 1.37° . 则以主、回流界面为中心线的掺混区内、外扩散角分别为:

外扩散角 $\alpha'_1 = 7.48^\circ$, (35)

内扩散角 $\alpha'_2 = -10.65^\circ$. (36)

(四)掺混区水流结构模拟与验证 式(30)为掺混区纵向流速的解析解, 在计算机上对掺混区的纵向流速分布进行计算, 并与试验资料(引自文献[3], 其主流 $Re = 34950$)进行对比验证, 如图4所示, (图中实线为计算值, 点据为模型试验值). 可见, 掺混区纵向流速分布的理论计算值与模型实验值符合良好. 说明式(30)能较好地描述掺混区的水流运动. 当然, 在掺混区下游, 水流受到下壁的阻挡影响, 改变了水流自由射流的相似结构, 因而在下壁附近的模拟误差要大一些. 但对掺混区大部分区域水流运动的模拟是相当好的.

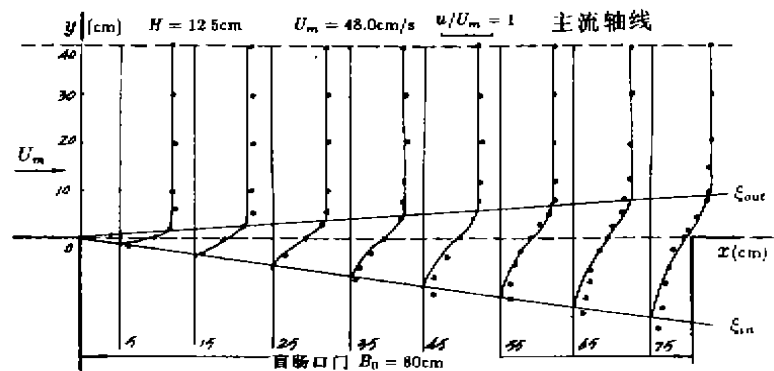


图4 紊动掺混区流速分布验证

六、横向流速梯度和涡粘性系数

(一)横向流速梯度 掺混区是主流到回流的过渡区, 其纵向流速逐渐由大到小, 沿界面法向具有较大的流速梯度. 掺混区正是由于存在明显的流速梯度, 才产生了较大的紊动切应力, 为盲肠回流的运动提供了动力来源.

由 $u = \partial\psi / \partial y$ 得 $u = U_m F'(\xi)$.

对 y 求偏导得:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \delta U_m x^{-1} F''(\xi), \quad (37)$$

$$F''(\xi) = -0.019A^2 e^{-4\xi} - 0.185ABe^{B\xi} [\cos(\sqrt{3}B\xi) + \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}B\xi)] + 0.85ABe^{B\xi} [\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}B\xi) - \sin(\sqrt{3}B\xi)] \approx -0.019A^2 e^{-4\xi}$$

$$+ AB e^{B\xi} [1.287 \cos(\sqrt{3} B\xi) - 1.17 \sin(\sqrt{3} B\xi)]. \quad (38)$$

代入式(37), 得到掺混区的横向流速梯度:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 11.29 U_m x^{-1} \{ -0.019 A^2 e^{-A\xi} + AB [1.287 \cos(\sqrt{3} B\xi) - 1.17 \sin(\sqrt{3} B\xi)] \}. \quad (39)$$

其中 $A = 2^{-\frac{1}{3}}, B = 2^{-\frac{4}{3}}$.

由式(39)可见, 流速梯度的大小仅与主流流速 U_m 和空间位置 ξ 有关, 与其它因素均无关.

对于盲肠口门几何界面, 有 $\xi = 0$, 则可得口门几何界面上的流速梯度:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{\xi=0} = \delta U_m x^{-1} F''(0) = 4.44 U_m x^{-1}. \quad (40)$$

可见流速梯度沿流程逐渐减小.

以 $(\partial u / \partial y)_{\xi=0}$ 为纵坐标, x / h_c 为横坐标 (h_c 为主流的临界水深, $h_c = \sqrt[3]{(U_m H)^2 / g}$), 与试验资料进行对比, 结果见图 5.

结果表明, 计算值较实测值要偏大一些. 这主要是由于试验中对流速梯度的观测, 是在口门界面两侧相距各 1.0cm 的两点之间用平均流速变化率来代替界面上的流速梯度所致^[3]. 因而所测数值普遍较真实值要偏小一些. 这种偏差, 越靠近上口门就越明显, 但从总的趋势来看, 说明理论值能够较好地反映实际情况.

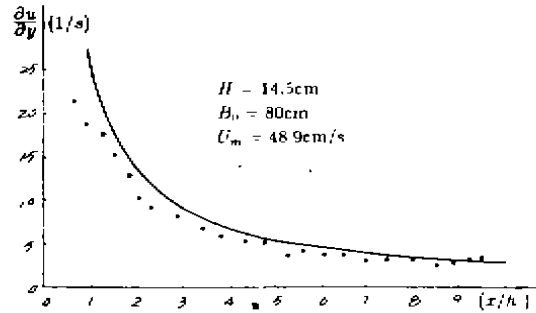


图 5 口门几何界面是的流速梯度

(二) 涡粘性系数 在盲肠口门紊动掺混区, 水流紊动强烈, 沿横向存在着较大的流速梯度, 分析掺混区的涡粘性系数 ν_t 的变化规律很有必要.

应用 Prandtl 的动量传梯理论作简要分析, 有:

$$\nu_t = l^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (\text{在掺混区 } \frac{\partial u}{\partial y} > 0) \quad (41)$$

由式(5)有 $l = cc_1 x$, 而 $cc_1 = \delta^{-3/2}$ 结合式(37)及式(41)得:

$$\nu_t = \delta^{-2} U_m x F''(\xi), \quad (42)$$

将 $\delta = 11.29$ 及式(38)代入上式, 即得到掺混区的涡粘性系数的表达式:

$$\nu_t = 0.007845 U_m x \{ -0.019 A^2 e^{-A\xi} + AB e^{B\xi} [1.287 \cos(\sqrt{3} B\xi) - 1.17 \sin(\sqrt{3} B\xi)] \}. \quad (43)$$

其中 $A = 2^{-\frac{1}{3}}, B = 2^{-\frac{4}{3}}$.

将 $\xi = 0$ 及 $\xi = -0.27$ 分别代入上式, 可得到:

$$\text{在几何界面上} \quad \nu_t = 0.00309 U_m x, \quad (44)$$

在主、回流交界面上

$$v_t = 0.00325U_m x. \quad (45)$$

式 (43)、(44)、(45) 均表明, 掺混区的涡粘性系数 v_t 与主流流速 U_m 及流程 x 成正比.

七、结 论

1. 盲肠口门紊动掺混区是主、回流之间进行动量和泥沙交换的重要场所, 对回流的运动起着十分重要的作用.

2. 掺混区水流可近似看作自由紊流, 水流的运动具有自相似性.

3. 运用相似理论, 对流速场进行了求解, 理论计算与试验资料符合良好.

4. 讨论了掺混区的横向流速梯度和涡粘性系数, 对研究回流运动的动力提供了理论依据.

5. 本研究是针对盲肠口门紊动掺混区水流运动的, 但可以肯定, 其它情形的主、回流过渡区的紊动水流运动具有同样规律, 甚至符合的更好.

致谢 本文得到武汉水利电力大学谢鉴衡教授、魏良瑛教授和中科院力学所刘大有研究员的指导.

参 考 文 献

- (1) L. Prandtl, et al., 流体力学概论. 郭永怀、陆士嘉译, 科学出版社, 1981年5月.
- (2) 王丰, 相似理论及其在传热学中的应用. 高等教育出版社, 1990年6月.
- (3) 刘青泉, 盲肠河段回流区及主、回流过渡区的水沙运动规律. 武汉水利电力大学博士论文, 1993年4月.
- (4) 吴望一, 流体力学(上、下册). 北京大学出版社, 1981年.
- (5) L. Prandtl, Bemerkungen Zur Theorie der Freien Turbulenz. ZAMM22, 1942.
- (6) R. L. Hangen, A. M. Dhanak, Momentum transfer in turbulent separated flow past a rectangular cavity. *Jour. of Applied Mech.*, ASME, Vol. 33, No. 3, sept. 1966.

Similarity analysis for water movement of turbulent mixing region at the mouth of cecum reach

Liu Qingquan

(Institute of Mechanics, CAS)

Abstract

In this paper, a mathematical model for flow of turbulent mixing region at the mouth of cecum reach is established based on turbulence model. In the conditions

(下转第 67 页)

**A study of sediment transport from the equations of
turbulent two-phase flows
—— A discussion on diffusion theory and diffusion
coefficient of sediment**

Liu Dayou

*(Institute of mechanics, Chinese academy of sciences,
multi-phase reaction laboratory, Chinese academy of sciences)*

Abstract

The vertical distribution of sediment concentration is studied based on the force equilibrium principle in the present research. The constitutive relations of the interphase drag in a turbulent two-phase flow are given, referring to the constitutive relations of the force between species in a turbulent gas-mixture flow. Finally the equation for the vertical distribution of sediment concentration in a fully developed channel flow is obtained. Based on the obtained equation, the diffusion equation of sediment currently used can be derived if some assumptions are introduced.

Key words two-phase flow, sediment, diffusion theory, diffusion coefficient of sediment.

(上接第 75 页)

of steady flow, it is proved that the flow has similarity structure at turbulent mixing region. From the theory of similarity, the similarity functions of flow function and velocity are obtained. The flow of turbulent mixing region is numerically simulated and the velocity gradient, virtual kinematic viscosity are analysed.

Key words cecum reach, turbulent mixing region, similarity structure, similarity function.