View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk

brought to you by CORE

provided by National University of Kyiv-Mohyla Academy

УДК 519.85

Ємець О. О., Ємець Є. М., Ольховський Д. М.

ОПТИМІЗАЦІЙНІ ЗАДАЧІ НА ПЕРЕСТАВЛЕННЯХ: МЕТОД КОМБІНАТОРНОГО ВІДСІКАННЯ З ВИКОРИСТАННЯМ АЛГОРИТМУ КАРМАРКАРА

Останнім часом інтенсивно досліджуються задачі комбінаторної оптимізації, що призводить до розробки нових підходів та методів до їх розв'язування. Актуальною є розробка поліноміальних алгоритмів для розв'язування задач комбінаторної оптимізації.

У цьому дослідженні запропоновано використовувати алгоритм Кармаркара у методі комбінаторного відсікання для розв'язування допоміжних задач лінійного програмування. Викладено метод комбінаторного відсікання на основі алгоритму Кармаркара. Сформульовано та доведено теорему про скінченність запропонованого методу.

Ключові слова: переставлення, метод комбінаторного відсікання, метод Кармаркара.

Останнім часом із розвитком можливостей комп'ютерної техніки в математичному моделюванні зростає актуальність задач комбінаторної оптимізації [4; 5; 8–10].

У працях [9, с. 56–86; 6–8] розглянуто метод комбінаторного відсікання на вершинно розташованих множинах, зокрема на переставленнях. Актуальною є розробка поліноміальних алгоритмів для певних класів задач комбінаторної оптимізації. У методах комбінаторного відсікання для розв'язування допоміжних задач лінійного програмування (ДЗЛП) використовуються

© О. *Ємець О. О., Ємець Є. М., Ольховський Д. М.*, 2011

симплекс-метод (СМ), М-метод та двоїстий СМ (ДСМ), що, як відомо, не поліноміальні.

Доцільно розглянути можливість використання поліноміальних алгоритмів (напр., алгоритму Кармаркара [6; 7; 11; 12]) для розв'язування ДЗЛП у комбінаторному відсіканні.

Постановка задачі

Розглянемо задачу: знайти

$$C(x^*) = \sum_{j=1}^{k} c_j x_j \to \max \qquad (1)$$

за комбінаторних умов

$$x = (x_1, \ldots, x_k) \in E_{k\nu}(G) \qquad (2)$$

та за додаткових обмежень

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j \le b_i, i = 1, 2, \ldots, m, \qquad (3)$$

де $c_j, a_{ij}, b_i \in R^1$ $\forall i \in J_m, \forall j \in J_k$, тут $J_m = \{1, \ldots, m\}$ – множина перших m натуральних чисел, k, ν, m – задані натуральні сталі, $E_{k\nu}(G)$ – загальна множина переставлень [10, с. 22–38], яка утворюється з елементів мультимножини G, що має k елементів, серед яких ν різні.

Для розв'язування умовної лінійної задачі комбінаторної оптимізації на переставленнях, тобто для задачі (1) – (3) пропонується застосувати метод комбінаторного відсікання для задач на вершинно розташованих комбінаторних множинах [9, с. 56–86; 1–3]. ДЗЛП, які треба розв'язувати при цьому пропонується використати метод Кармаркара.

Виникає проблема побудови відсікання точки – розв'язку ДЗЛП, якщо вона не задовольняє комбінаторним обмеженням (якщо ґрунтуватися на першому [9, с. 56–86] методі комбінаторного відсікання).

Метод комбінаторного відсікання на основі алгоритму Кармаркара

Крок 1. Будуємо допоміжну ЗЛП (ДЗЛП), замінивши умову (2) на умову

$$x \in \Pi_{k\nu}(G), \qquad (4)$$

де $\Pi_{k\nu} = conv\, E_{k\nu}(G)$ – загальний переставний многогранник [10, с. 14–38] – опукла оболонка множини $E_{k\nu}(G)$, описана системою лінійних рівнянь [10, с. 22–24]:

$$\sum_{j \in \omega} x_j \le \sum_{j=1}^{|\omega|} g_{k-j+1}, \ \forall \omega \subset J_k, \ |\omega| < k;$$

$$\sum_{j=1}^{k} x_j = \sum_{j=1}^{k} g_j,$$

де $\{g_1, \ldots, g_k\} = G$, $|\omega|$,– кількість елементів у множині ω, та елементи у G пронумеровано так, що

$$g_1 \le g_2 \le \ldots \le g_k.$$

Крок 2. Розв'язуємо ДЗЛП (1), (3), (4) методом Кармаркара [6; 7; 11; 12], перетворивши ДЗЛП у необхідну для цього форму. Якщо розв'язку ДЗЛП немає – вихідна задача нерозв'язна.

Крок 3. Перетворюємо отриманий розв'язок в точку x^* області (3), (4).

Крок 4. Якщо $x^* \in E_{k\nu}(G)$ задача, розв'язана. Якщо $x^* \notin E_{k\nu}(G)$, перехід на крок 5.

Крок 5. Визначаємо вершини, суміжні до x^* в многогранній області $M = \Pi_{k\nu} \bigcap D$, де D – множина, що задається співвідношенням (3).

Для цього використовуємо означення суміжної вершини x до вершини x^* многогранної області, що лежить на одному ребрі з x^* та належить M.

При цьому перевірку того, що $x \in \Pi_{k\nu}$, здійснюють використовуючи $k – 1$ перевірку по одній нерівності з $(k – 1)$-ї спілки нерівностей многогранника $\Pi_{k\nu}(G)$ на основі теореми (див. теорему 3.12 [10, с. 92]).

Крок 6. За одержаними $k – 1$ суміжними вершинами будуємо відсікання точки x^*. Потрібну k-ту точку x^0 вибираємо довільно (наприклад, початок координат).

Відсікання – це нерівність, що задає півпростір, межа якого пролягає через суміжні до x^* точки $x^0, \ldots, x^{k-1}$, і точка x^* не лежить у цьому півпросторі.

Гіперплощина, що є межею півпростору-відсікання задається рівнянням гіперплощини в R^k, що проходить через k точок:

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_1^0 & x_2 - x_2^0 & \ldots & x_k - x_k^0 \\ x_1^1 - x_1^0 & x_2^1 - x_2^0 & \ldots & x_k^1 - x_k^0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{k-1} - x_1^0 & x_2^{k-1} - x_2^0 & \ldots & x_k^{k-1} - x_k^0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (5)$$

Якщо взяти початок координат за $x^k = O(0, \ldots, 0)$, то (5) після розкриття визначника набуває вигляду $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j = 0$. Якщо $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j^* > 0$, то відсікання має вигляд $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j \le 0$. Інакше (коли $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j^* < 0$.) відсікання має вигляд $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j \ge 0$.

Коли $x^k \ne O(0, \ldots, 0)$, то (5) набуває вигляду $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j + \beta_j = 0$. При $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j^* + \beta_j > 0$ відсікання задається нерівністю $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j + \beta_j \le 0$, інакше (коли $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j^* + \beta_j < 0$) – нерівністю $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j + \beta_j \ge 0$.

Крок 7. Додаємо нерівність-відсікання, побудоване на кроці 6, до системи (3). Перехід на крок 2.

<u>Теорема.</u> Метод відсікання на основі алгоритму Кармаркара скінчений.

<u>Доведення.</u> Очевидно, що множина вершин $vert\,D$ $vert\,D$ многогранної області D скінчена $\left|vert\,D\right| < \infty$, оскільки $vert\,\Pi_{k\nu}(G) = \frac{k!}{\eta_1! \cdot \ldots \cdot \eta_k!}$, де $(\eta_1, \ldots, \eta_k)$ – первинна специфікація мультимножини G, $\left|vert\,D\right| < \infty$, оскільки m, k – це сталі константи. Щоразу від області відсікається одна вершина, інші не утворюються. Що і треба було довести.

Висновки

Запропоновано й обґрунтовано метод комбінаторного відсікання на основі алгоритму Кармаркара для умовних лінійних задач комбінаторної оптимізації на переставленнях.

На відміну від відомих методів комбінаторного відсікання для задач на вершинно розташованих множинах ДЗЛП розв'язано не певною різновидністю симплекс-методу, а поліноміальним алгоритмом Кармаркара. При цьому розв'язано проблему побудови суміжних точок для розв'язку x^* ДЗЛП та побудова нерівності-відсікання для x^*.

Надалі доцільно оцінити кількість операцій запропонованого методу під час числових експериментів і теоретично.

Література

1. Емец О. А. Об одном методе отсечений для задач комбинаторной оптимизации / О. А. Емец // Экономика и матем. методы. – 1997. – Т. 33, вып. 4. – С. 120–129.
2. Емец О. А. Отсечения в линейных частично комбинаторных задачах оптимизации на перестановках / О. А. Емец, Е. М. Емец // Экономика и матем. методы. – 2001. – Т. 37. – С. 118–121.
3. Ємець О. О. Відсікання в лінійних частково комбінаторних задач евклідової комбінаторної оптимізації / О. О. Ємець, Є. М. Ємець // Доп. НАН України. – 2000. – № 9. – С. 105–109.
4. Ємець О. О. Задачі комбінаторної оптимізації з дробово-лінійними цільовими функціями / О. О. Ємець, Л. М. Колєчкіна. – К. : Наук. думка, 2005. – 117 с.
5. Ємець О. О. Задачі оптимізації на полі комбінаторних множинах : властивості та розв'язування / О. О. Ємець, О. В. Роскладка – Полтава : РВЦ ПУСКУ, 2006. – 129 с.
6. Ємець О. О. Оптимізація лінійної функції на переставленнях : перетворення переставного многогранника до вигляду, необхідного для використання в алгоритмі Кармаркара / О. О. Ємець, Є. М. Ємець, Д. М. Ольховський // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 2010. – № 2. – С. 43–49.
7. Зайченко Ю. П. Исследование операций / Юрій Петрович Зайченко. – К. : Видавничий дім «Слово», 2003. – 688 с.
8. Сергиенко И. В. Задачи дискретной оптимизации : Проблемы, методы, решения, исследования / И. В. Сергиенко, В. П. Шило. – К. : Наук. думка, 2003. – 265 с.
9. Стоян Ю. Г. Оптимізація на полі розміщеннях : теорія та методи / Ю. Г. Стоян, О. О. Ємець, Є. М. Ємець. – Полтава : РВЦ ПУСКУ, 2005. – 103 с.
10. Стоян Ю. Г. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації / Ю. Г. Стоян, О. О. Ємець – К. : Інститут систем. досліджень освіти, 1993. – 188 с.
11. Таха Х. А. Введение в исследование операций / Хемди А. Таха. – М. : Издательский дом «Вильямс», 2005. – 912 с.
12. Karmarkar N. A new polynomial-time algorithm for linear programming / N. Karmarkar // Combinatorica. – 1984. – Vol. 4. – P. 373–395.

O. Iemets, E. Iemets, D. Olkhovsky

OPTIMIZATION PROBLEM ON PERMUTATIONS: COMBINATORIAL CUTTING METHOD USING ALGORITHM KARMARKARA

Combinatorial optimization problems have been intensively researched in recent years, which lead to the development of new approaches and methods to solve these tasks. Important is the development of algorithms for solving combinatorial optimization.

Method for solving combinatorial cut-off method of linear programming problems using Karmarkar's algorithm is proposing in this paper. The article describes the method of combinatorial cut-off based on the Karmarkar algorithm. Formulated and proved a theorem about the finiteness of the proposed method.

Keywords: permutations, combinatorial cut-off method, Karmarkar's algorithm.

Матеріал надійшов 17 березня 2011 р.