# VAKUUTUSTOIMINNAN SIJOITUSRISKIT

Tuomas Kvist

Opiskelijanumero: 013316367

Pro gradu -tutkielma

Helsingin yliopisto

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Lokakuu 2010

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

| Tiedekunta/Osasto Fakultet/Sektion – Faculty | Laitos Institution – Department |
|---|---|
| Matemaattis-luonnontieteellinen | Matematiikan ja tilastotieteen laitos |


Tekijä Författare – Author
Tuomas Kvist


Työn nimi Arbetets titel – Title
Vakuutustoiminnan sijoitusriskit

Oppiaine Läroämne – Subject
Soveltava matematiikka

| Työn laji Arbetets art – Level | Aika Datum – Month and year | Sivumäärä Sidoantal – Number of pages |
|---|---|---|
| Pro gradu | Lokakuu 2010 | 53 |


Tiivistelmä Referat – Abstract

Riskiteorian klassisessa vararikkomallissa rahan arvo on vakio ja mallinnettavana on ainoastaan yhtiön kassavirta, jota kuvataan riippumattomilla ja samoin jakautuneilla satunnaismuuttujilla $Q_i$. Yhtiön tulkitaan olevan vararikossa mikäli $Q_i$:den summa ylittää yhtiön alkupääoman $U_o$.

Todellisuudessa kuitenkin vakuutusyhtiö harjoittaa myös sijoitustoimintaa, jonka tulos vaikuttaa merkittävästi yhtiön kunkin hetkisen pääoman määrään. Riskillisissä sijoituksissa myös tappiot ovat mahdollisia. Näin ollen malli, johon sisältyy kassavirtaa esittävien $Q_i$:den lisäksi sijoitustoiminnan tulosta esittävät diskonttaustekijät $M_i$, kuvaa vararikkotodennäköisyyttä paremmin kuin klassinen vararikkomalli. Kun tarkastelujakso on äärettömän pitkä ja tietyt $M_i$:den jakaumaa koskevat oletukset ovat voimassa, niin vakuutusyhtiön tulevien tappioiden nykyarvoa voi kuvata satunnaismuuttujalla $R$, joka ratkaisee satunnaisdifferenssiyhtälön $R =_L Q + MR,$ jossa $R$ on riippumaton satunnaismuuttujaparista $(Q, M)$.

Tämän tutkielman päälähde on Charles Goldien artikkeli ”Implicit renewal theory and tails of solutions of random equations” vuodelta 1991. Kyseessä on perinteisen uusiutusteorian laajennus, jota soveltamalla voi muodostaa asymptoottisen esityksen yhtiön vararikkotodennäköisyydelle $P(R > U_0)$ tapauksessa, jossa alkupääoma $U_o$ lähestyy ääretöntä.

Oletukset sekä määritelmät esitetään luvussa 2 ja tarvittavat apulauseet esitetään luvussa 3. Luvussa 4 esitetään nimellä päälause 1 seuraava tulos: $P(R > U_o) \sim C U_o^{-\rho}, U_o \to \infty$, jossa $C$ on vakio ja $\rho$ on Lundbergin eksponentti eli positiivinen luku, jolla on voimassa $EM^{\rho} = 1$.

Lopuksi luvussa 5 esitetään päälauseena 2 tulos, joka kuvaa nopeutta, jolla $P(R > U_o)$ lähestyy asymptoottiaan $U_o$:n lähestyessä ääretöntä:

$$U_o^{\rho} P(R > U_o) = C - \frac{1}{2\pi} Re\left(\int_\zeta U_o^{-iz} \frac{\hat{g}(z)dz}{1-\hat{\eta}(z)}\right) + O\left(U_o^{-\beta/2}\right), U_o \to \infty.$$

Tässä esityksessä polku $\zeta$ sekä luku $\beta \in (0,1)$ riippuvat mitasta $\eta$, joka puolestaan riippuu $M$:n jakaumasta. Funktio $g$ riippuu lisäksi $R$:n jakaumasta, mutta yhtälön oikean puolen muoto ei.



Avainsanat – Nyckelord – Keywords
vakuutustoiminta, sijoitusriskit, uusiutumisteoria, satunnaisdifferenssiyhtälö, residylause.


Säilytyspaikka – Förvaringställe – Where deposited

Muita tietoja – Övriga uppgifter – Additional information

SISÄLLYSLUETTELO

# 1. JOHDANTO

Vakuutusyhtiöllä on tavallisesti lähes jatkuva-aikaista kassavirtaa. Negatiivista kassavirtaa syntyy mm. maksettavista vahingonkorvauksista, liiketoiminnan yleisistä kuluista kuten henkilöstön palkkakuluista ja toimitilojen hoitokuluista sekä maksettavista veroista ja osingoista. Positiivista kassavirtaa syntyy vakuutusmaksuista ja joskus myös yhtiöön sijoitettavasta uudesta pääomasta. Lisäksi yhtiön hallussa oleva pääoma tuottaa kassavirtaa, esimerkiksi vakuutusyhtiö saa vuokratuloja omistamistaan vuokrakiinteistöistä ja osinkoa omistamistaan osakkeista. Sijoitustoiminnan tuottamaa kassavirtaa voi kutsua sijoitustuotoksi, joka saattaa joissain tapauksissa olla negatiivista, esimerkiksi jos vuokrakiinteistöjen remonttikustannukset ylittävät tarkasteluvälillä vuokratuoton. Riskiteorian perinteinen tutkimuskohde on yrityksen kassavirran, erityisesti vahingonkorvausten, mallintaminen erilailla jakautuneita satunnaismuuttujia käyttäen.

Klassisen riskiteorian vararikko-ongelman lähtökohtana on malli, jossa yhtiöllä on alkuhetkellä pääoma $U_0 > 0$ ja jossa yhtiön tulevan kassavirran oletetaan koostuvan jonosta satunnaismuuttujia $Q_i$, jotka ovat kaikilla $i$ samoin jakautuneita ja riippumattomia sekä toisistaan että $U_0$:sta. Ajanjaksot $i$ tulkitaan yleensä vuosiksi. Positiivinen $Q_i$ tulkitaan tarkoittamaan negatiivista kassavirtaa, siis tappiota. Sijoitustoiminnan tuottaman kassavirran voi jossain mielessä ajatella sisältyvän satunnaismuuttujien $Q_i$ jakaumaan, mutta tämä tulkinta on ongelmallinen, sillä esitettyjen oletusten puitteissa yhtiön pääoman suuruus kullakin ajanjaksolla ei vaikuta kyseisen $Q_i$:n jakaumaan. Todellisuudessa esimerkiksi yhtiön omistamien vuokrakiinteistöjen määrä ja sitä kautta vuokratulojen muodostaman kassavirran suuruus riippuu jollain tapaa yhtiön pääoman määrästä. Oletus, että kassavirtaa vastaavat $Q_i$:t ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita kaikilla $i$, on joka tapauksessa suuri yksinkertaistus todellisen vakuutusyhtiön tilanteesta. Yhtiön tulkitaan mallin mukaan tekevän vararikon jos $Q_i$:den summa on jonain hetkenä suurempi kuin alkupääoma. Näillä oletuksin, kun tarkasteluväli ulotetaan nykyhetkestä ikuisuuteen ja kun yhtiön alkupääoma $U_0$ lähestyy ääretöntä, klassinen vararikkoteoria antaa yhtiön vararikon todennäköisyydelle ehdottomaksi ylärajaksi $Ce^{-\rho U_0}$, jossa $C$ on vakio ja $\rho > 0$ on niin sanottu Lundbergin eksponentti.

Todellisen vakuutusyhtiön pääoma ei kuitenkaan ole rahakirstu, jonka arvon voi määrittää suoraan alkupääoman sekä kirstuun sisään ja kirstusta ulos virranneen kassavirran perusteella. Vakuutusyhtiö nimittäin aktiivisesti sijoittaa hallussaan olevaa pääomaa ja sijoitustoiminnasta saatavat voitot muodostavat merkittävän osan vakuutusyhtiön, kuten muidenkin finanssialan toimijoiden, liiketoiminnasta. Vakuutusyhtiön sijoitustoiminta tasapainoilee tuottavuuden, turvallisuuden ja likviditeetin välillä ja vakuutusyhtiön riskinottoa rajoitetaan myös lakisääteisesti. Huomattava osa vakuutusyhtiöiden pääomasta on kuitenkin sijoitettu osakkeisiin ja muihin riskillisiin sijoitusinstrumentteihin, sillä ne ovat yleensä odotusarvollisesti tuottavampia kuin riskittömät sijoituskohteet. Tällöin myös sijoitustappiot ovat mahdollisia.

Teen terminologisen eron kassavirraksi muodostuvan sijoitustuoton, joka voi sisältyä tai olla sisältymättä klassisen vararikko-ongelman muuttujien $Q_i$ jakaumaan, sekä sijoitusvoittojen ja –tappioiden välille. Sijoitusvoitoilla ja –tappioilla tarkoitan esimerkiksi yhtiön omistamien osakkeiden tai kiinteistöjen myyntiarvon muutosta. Myyntiarvon muutos ei todellisuudessa ole aivan yksikäsitteinen ennen kuin kauppa tapahtuu, mutta esim. osakkeille ja vastaaville sijoitusinstrumenteille voi kunakin hetkenä helposti kohdistaa tarkan myyntiarvon olettaen, että yhtiön omistamien osakkeiden määrä ei ole kovin merkittävä verrattuna kyseisellä osakkeella tehtävän kaupan määrään. Myös pankkitalletusten tuottama korko on sijoitusvoittoa. Vuokratuloistakin olisi kätevä ajatella, että niillä ostetaan uusia asuntoja tai vaikka osakkeita, jolloin nekin kasvavat korkoa korolle periaatteella. Oleellista terminologiassa on se, että sijoitusvoittoja tai tappioita kuvaan korkotekijällä $K_i$ tai yhtäpitävästi diskonttaustekijällä $M_i = 1/K_i$, jonka vaikutus on lineaarisesti riippuvainen pääoman määrästä. Toisin sanoen mikäli yhtiön pääoma on vuoden $i$ alussa $U$ ja jos kyseisen vuoden kassavirtaa kuvaava $Q_i$ saa arvon nolla, niin yhtiön pääoma on kyseisen vuoden lopussa $K_iU$. Sijoitustappiot yksinään eivät voi saattaa yhtiötä vararikkoon, mutta ne voivat pienentää merkittävästi pääomaa, jolloin yhtiö tulee paljon haavoittuvaisemmaksi negatiiviselle kassavirralle.

Tämän tutkielman päälähde on Charles Goldien artikkeli "Implicit renewal theory and tails of solutions of random equation" vuodelta 1991. Tähän artikkeliin viittaan toistuvasti vain mainiten Goldien nimen. Goldien implisiittisen uusiutumisteorian soveltaminen antaa mahdollisuuden muodostaa tietyin oletuksin sijoitusvoitot ja –tappiot huomioivan asymptoottisen esityksen yhtiön vararikkotodennäköisyydelle tilanteessa, jossa sekä tarkastelujakson pituus että yhtiön alkupääoma lähestyvät ääretöntä.

Vaikka Goldien teoria edellyttää ääretöntä ajanjaksoa, esitettävän mallin konstruktio on ehkä luontevinta aloittaa äärellisestä ajanjaksosta. Olkoot $U_0$ ja satunnaismuuttujat $Q_i$ kuten klassisessa vararikkoteoriassa, siis $U_0$ on yhtiön alkupääoma ja $Q_i$ kuvaa yhtiön kassavirtaa vuoden $i$ aikana. Tulkitaan positiivinen $Q_i$:n arvo tarkoittamaan negatiivista kassavirtaa, siis tappiota. Kassavirran $Q_i$ oletetaan yksinkertaistaen syntyvän vuoden $i$ alussa. Olkoon satunnaismuuttuja $K_i$ korkotekijä, joka kuvaa sijoitustuottoa vuonna $i$. Merkitään $M_i = 1/K_i$, jolloin $M_i$ on diskonttaustekijä. Koska nollatuottoinen riskitön sijoitus on aina mahdollinen ja käytännössä aina on myös mahdollista saada positiivista korkoa, on luontevaa olettaa $E(K) > 1$. Oletetaan myös $P(K < 1) > 0$, siis että sijoitustappioiden riski on todellinen. Tämä tarkoittaa, että pääoma on sijoitettu niin, että riskillisissä sijoituksissa on mahdollista hävitä enemmän kuin mitä riskittömät sijoitukset tuottavat.

Edellämainitut korkotekijää $K$ koskevat oletukset tarkoittavat $E(M) \in (0,1)$ ja $P(M > 1) > 0$. Kuten klassisessa mallissa, satunnaismuuttujat $Q_i$ oletetaan samoin jakautuneiksi ja riippumattomiksi kaikilla $i$. Oletetaan, että myös satunnaismuuttujat $M_i$ ovat samoin jakautuneita ja riippumattomia kaikilla $i$. Näillä oletuksin yhtiön pääoman kunkin vuoden alussa voi kirjoittaa seuraavasti:

$$
\begin{aligned}
U_1 &= K_1 U_0 - K_1 Q_1,\\
U_2 &= K_2 K_1 U_0 - K_2 K_1 Q_1 - K_2 Q_2,\\
U_3 &= K_3 K_2 K_1 U_0 - K_3 K_2 K_1 Q_1 - K_3 K_2 Q_2 - K_3 Q_3,\\
U_n &= K_n \cdot \ldots \cdot K_1 U_0 - K_n \cdot \ldots \cdot K_1 Q_1 - K_n \cdot \ldots \cdot K_2 Q_2 - \ldots - K_n \cdot K_{n-1} Q_{n-1} - K_n Q_n.
\end{aligned}
$$

Jaetaan viimeinen rivi tekijällä $K_n \cdot \ldots \cdot K_1$:

$$\frac{U_n}{K_n \cdot \ldots \cdot K_1} = U_0 - Q_1 - \frac{Q_2}{K_1} - \ldots - \frac{Q_{n-1}}{K_{n-2} \cdot \ldots \cdot K_1} Q_{n-1} - \frac{Q_n}{K_{n-1} \cdot \ldots \cdot K_1}.$$

Sijoittamalla $M_i = 1/K_i$ voidaan kirjoittaa

$$M_1 \cdot \ldots M_n U_n = U_0 - Q_1 - M_1 Q_2 - \ldots - M_1 \cdot \ldots \cdot M_n Q_n,$$

eli

$$U_0 - M_1 \cdot \ldots M_n U_n = Q_1 + M_1 Q_2 + \ldots + M_1 \cdot \ldots \cdot M_n Q_n.$$

Yhtälön oikea puoli kuvaa nyt tulevan kokonaistappion, siis tulevan negatiivisen kassavirran ja sijoitustappioiden yhteisvaikutuksen, nykyarvoa. Huomataan, että mikäli yhtälön oikean puolen satunnaismuuttujasarja saa arvon, joka on suurempi kuin $U_0$, niin silloin yhtiön pääomaa vuoden $n$ lopussa kuvaava satunnaismuuttuja $U_n$ saa negatiivisen arvon, eli yhtiö on vararikossa.

Äärettömän ajan tilannetta varten on parempi korvata yhtiön vasen puoli summaa tarkoittavalla satunnaismuuttujalla $S_n$. Yhtälön oikean puolen voi kirjoittaa yhtäpitävästi seuraavassa muodossa:

$$\textbf{(1.0)}\quad S_n = \sum_{i=1}^{n} M_1 \bullet \ldots \bullet M_{i-1} Q_i.$$

Yhtälön (1.0) oikean puolen suppenemista kun $n \to \infty$ on käsitelty lähteissä Vervaat(1979) ja Toivanen(2008). Tulos on, että satunnaismuuttujasumma suppenee jos ja vain jos $E \log M < 0$. Jensenin epäyhtälön ja logaritmifunktion konkaaviuden johdosta

$$E(M) < 1 \Rightarrow E \log M < 0,$$

joten tämän tutkielman oletusten puitteissa suppeneminen tapahtuu. Tällöin on olemassa satunnaismuuttuja $S_\infty$, jonka jakauma on sama kuin yhtälön (1.0) oikeasta puolesta syntyvän ääretöntermisen satunnaismuuttujasumman. Voidaan siis kirjoittaa

$$\textbf{(1.1)}\quad S_\infty =_L \sum_{i=1}^{\infty} M_1 \bullet \ldots \bullet M_{i-1} Q_i.$$

Kun satunnaismuuttujaparit $(M_i, Q_i)$ oletaan samoin jakautuneiksi ja keskenään riippumattomiksi, mutta parien sisäinen riippuvuus sallitaan, niin kyseistä yhtälöä kutsutaan satunnaisdifferenssiyhtälöksi. Merkinnällä $R = S_\infty$ yhtälön (1.1) voi tällöin kirjoittaa yhtäpitävästi muodossa

$$\textbf{(1.2)}\quad R =_L Q + MR,\ R \text{ riippumaton parista } (M, Q).$$

Esityksestä (1.2) näkyy suoraan, että kyseessä on uusiutumisyhtälö. Sanallinen tulkinta tilanteesta voisi olla, että $R$:n jakauma ei muutu kun se "vielä kerran" kerrotaan $M$:llä ja siihen lisätään $Q$. Esitetyin tulkinnoin $R$ kuvaa vakuutusyhtiön tulevan kokonaistappion nykyarvoa, kun tarkasteluväli ulotetaan nykyhetkestä ikuisuuteen. Näin ollen $P(R > U_0)$ on yhtiön vararikkotodennäköisyys. Satunnaismuuttujan $R$ jakauma on tuntematon, joten kyseiselle todennäköisyydelle ei voi laskea suoraan ylärajaa. Osoittautuu kuitenkin, että kun Goldien oletukset ovat voimassa, niin hänen tulostensa perusteella on mahdollista muodostaa vararikkotodennäköisyydelle asymptoottinen esitys $P(R > U_0) \sim C U_0^{-\rho}$ kun $U_0 \to \infty$. Toisen Goldien päätuloksen perusteella saadaan esitys nopeudelle, jolla $P(R > U_0)$ lähestyy asymptoottiaan kun $U_0 \to \infty$. Nämä tulokset on nimetty tässä tutkielmassa päälauseiksi 1 ja 2.

On paikallaan todeta, että esitettävä malli ei vastaa reaalimaailman vakuutusyhtiön tilannetta kovinkaan hyvin. Todellisella vakuutusyhtiöllä ei ensinnäkään ole ääretöntä alkupääomaa eikä sen toiminta tule myöskään jatkumaan ikuisesti. Käytettävä malli sallii kunkin satunnaismuuttujaparin $(M_i, Q_i)$ sisäisen riippuvuuden, siis riippuvuuden kunkin vuoden sijoitustuoton ja liiketoiminnan tuloksen välille. Tämä on positiivista, sillä esimerkiksi jos yhtiö reaalisoi sijoitusomaisuuttaan vuoden $i$ aikana, tämä vaikuttaa sekä kyseiseen $M_i$:hin että $Q_i$:hin. Toisaalta tällainen tarkastelu korostaa entisestään mallin käytännön tulkinnan suurinta ongelmaa, joka on oletus siitä, että $M_i$:t ovat toisistaan riippumattomia ja samoin jakautuneita kaikilla $i$ ja $Q_i$:t samoin. Todellisen vakuutusyhtiön liiketoiminnassa esiintyy ajan kuluessa muutoksia, jotka vaikuttavat tulevaan kassavirtaan eli tulevien $Q_i$:den jakaumaan. Toisaalta esimerkiksi nousu- ja laskukaudet vaikuttavat kunkin $M_i$:iin jakaumaan. On myös todennäköistä, että useita vuosia jatkuva negatiivinen liiketoiminnan tulos tai negatiivinen sijoitustuotto vaikuttaisi yhtiön liiketoiminta- tai sijoitusstrategiaan ja kenties päätöksiä tekevät ihmisetkin vaihtuisivat. Liiketoiminnan jatkuessa äärettömän kauan henkilöstö vaihtuu joka tapauksessa, vieläpä äärettömän monta kertaa. Käytännön kannalta olisi siis luontevaa lieventää $Q_i$:ta ja $M_i$:ta koskevia oletuksia, mutta tämä ei ole Goldien teoriaan nojautuvan mallin puitteissa mahdollista. Lähteessä Toivanen(2008) on esim. osoitettu, että mikäli $M_i$:t oletetettaisiin Markovin ketjuksi niin saatava vararikkotodennäköisyys poikkeaisi huomattavasti Goldien mallin oletusten puitteissa saatavista tuloksista.

Tässä tutkielmassa esitettävä Goldien teoriaan perustuva malli vararikkotodennäköisyydelle kuvaa kuitenkin todellisen vakuutusyhtiön tilannetta huomattavasti paremmin kuin klassinen riskiteorian vararikkomalli, jossa siinäkin $Q_i$:t on oletettu toisistaan riippumattomiksi ja samoin jakautuneiksi kaikilla $i$ ja josta sijoitusvoittoja tai –tappioita kuvaavat diskonttaustekijät $M_i$ puuttuvat kokonaan, jolloin rahan arvokin on pakko tulkita vakioksi.

Satunnaisdifferenssiyhtälö (1.2) esiintyy lukuisissa yhteyksissä, taloudellisten sovellusten lisäksi mm. fysiikassa, biologiassa ja sosiologiassa. Lisäksi on huomattavaa, että Goldien implisiittisen uusiutumisteorian tulokset eivät rajoitu yhtälöön (1.2) vaan kyseessä on yleisempi laajennus uusiutusmisteorialle. Perinteisen uusiutumisteorian lähtökohtana on tilanne, jossa $g$ on tunnettu funktio ja $U$ on kertymäfunktio $F$:n uusiutumismitta eli

$$U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{(n)}(x).$$

Tässä tilanteessa funktio $r = U * g$ ratkaisee uusiutumisyhtälön $r = g + F * r$ ja yksi uusiutumisteorian tuloksista on, että $r(t)$:n raja-arvo kun $t \to \infty$ on funktion $g$ integraalin sisältävä $t$:stä riippumaton vakio. Goldie osoittaa, että vastaava asymptoottinen tulos pätee tietyin ehdoin myös sellaisille uusiutumisyhtälöille, joissa myös $g$ on tuntematon, vieläpä integraali joka puolestaan sisältää funktion $r$. Goldien mallin uusiutumisyhtälöt ovat muotoa $R =_L \Psi(R)$, jossa $\Psi$ ja $R$ ovat keskenään riippumattomia satunnaismuuttujia ja $\Psi$ on sellainen, että itseisarvoiltaan suurilla argumenteilla $t$ on voimassa $\Psi(t) \approx Mt$, jossa $M$ on luvussa 2.2 esitettävät ehdot toteuttava satunnaismuuttuja. Goldien antaa yhtälön (1.2) lisäksi esimerkeiksi implisiittisen uusiutumisteorian sovelluskohteista mm. yhtälöt $R =_L \max(Q, MR)$ ja $R =_L Q + \max(L, R)$, joissa $R$ on riippumaton satunnaismuuttujaparista $(M, Q)$ ja –kolmikosta $(M, Q, L)$. Goldie todistaa tuloksensa olettaen ainoastaan $M$:n jakaumaa koskevat ehdot sekä tietyt funktiota $g$ koskevat integroituvuusehdot. Tämän jälkeen Goldie todistaa integroituvuusehtojen voimassaolon erikseen kullekin esimerkkiyhtälölleen. Esimerkkiyhtälöistä ainoastaan (1.2) on vakuutusyhtiön sijoitusriskeihin liittyvän tulkinnan kannalta mielenkiintoinen ja näin ollen se on ainoa, jonka osalta integroituvuusehdon voimassaolo todistetaan tässä tutkielmassa. Tarkoitus on kuitenkin seurata Goldien yleisempää esitystä siltä osin kun se ei merkittävästi raskauta tätä tutkielmaa sekä esittää selvästi, mitkä oletukset ovat riittäviä Goldien yleisen teorian kannalta.

# 2. MERKINTÖJÄ JA OLETUKSIA

## 2.1 Merkintojä ja määritelmiä

Tutkielmassa käytetyt merkintätavat ja määritelmät ovat hyvin pitkälti samat kuin Goldien artikkelissa.

Kahden integroituvan, reaaliarvoisen funktion $f$ ja $g$ välinen konvoluutio on

$$f * g = \int_{\mathbb{R}} f(x-u)g(u)du, \ x \in \mathbb{R}.$$

Funktion $f$ ja mitan $\mu$ välinen konvoluutio on

$$f * \mu(s) = \int_{\mathbb{R}} f(x-u)\mu(du).$$

Mittojen $\mu$ ja $\lambda$välinen konvoluutio Borel-joukot sisältävässä sigma-algebrassa $\wp$ on

$$\mu * \lambda(B) = \int \int_{\{(x,y):x+y\in B\}} d(\mu \times \lambda), \ B \in \wp.$$

$x^+ = \max(x, 0), x \in \mathbb{R}.$

Merkintä $f \in L^1(\mathbb{R})$ tarkoittaa että funktio $f$ on integroituva, siis

$$\int_{\mathbb{R}} |f(u)| du < \infty.$$

Satunnaismuuttujan $X$ jakaumaa sanotaan aritmeettiseksi jos ja vain jos on olemassa reaaliluku $a$, jolla on voimassa $P(M \in \{ka|k \in Z\} = 1$

Funktiota $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ sanotaan oleellisesti Riemann-integroituvaksi, jos

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon \sum_{n\in\mathbb{Z}}^{\infty} \underline{m}_k(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \bar{m}_k(\varepsilon) < \infty,$$

missä

$$\underline{m}_k(\varepsilon) = \inf_{x\in[n\varepsilon,(n+1)\varepsilon]} f(x),$$
$$\bar{m}_k(\varepsilon) = \sup_{x\in[n\varepsilon,(n+1)\varepsilon]} f(x).$$

$\check{f}(s) = \int_{-\infty}^{s} e^{-(s-u)} f(u) du$. Sama asia ilmaistaan välillä myös kirjoittamalla $\check{f}(s) = K * f(s)$, jossa $K(s) = e^{-s} 1_{s>0}$.

$\hat{f}(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{izs} f(s) ds, \ z \in \mathbb{C}.$

$\hat{\mu}(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{izs} \mu(ds), \ z \in \mathbb{C}$. Kun $z \in \mathbb{R}$ tämä on sama kuin karakteristinen funktio parametrilla $z$ sille satunnaismuuttujalle, jonka jakauman mitta $\mu$ määrittää.

$\tilde{\mu}(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{zs} \mu(ds), \ z \in \mathbb{C}$. Kun $z \in \mathbb{R}$ tämä on sama kuin momentit generoiva funktio parametrilla $z$ sille satunnaismuuttujalle, jonka jakauman mitta $\mu$ määrittää.

Merkintä $f(s) = O(g(s))$ kun $s \to \infty$ tarkoittaa, että on olemassa $0 < M < \infty$ ja $s_0$, niin että kaikilla $s > s_0$ on voimassa

$$|f(s)| \leq M|g(s)|.$$

Merkintä $f(s) = o(g(s))$ kun $s \to \infty$ puolestaan tarkoittaa

$$\lim_{s\to\infty} \frac{f(s)}{g(s)} = 0.$$

On hyvä todeta, että mielivaltaisella $x$ on voimassa $O(x) = -O(x)$, $o(x) = -o(x)$.

Merkintä $\mu^{(n)}$ tarkoittaa mitan $\mu$ konvoluutiota $n$ kertaa itsensä kanssa. $\mu^{(0)}$ on origoon sijoittuva yksikkömassa, jota merkitään myös $\delta_0$:lla. $\delta_0\{I\} = 1$ jos $0 \in I$, $\delta_0\{I\} = 0$ jos $0 \notin I$.

Funktiot $r$ ja $g$ sekä mitat $\eta$ ja $\nu$ määritellään seuraavasti ja niitä käytetään toistuvasti päälauseiden 1 ja 2 todistuksessa:

$r(s) = e^{\rho s}P(R > e^s)$.

$g(s) = e^{\rho s}(P(R > e^s) - (MR > e^s))$.

$\eta(ds) = e^{\rho s}P(\log M \in ds)$.

$\nu(ds) = \sum_{k=0}^{\infty} \eta^{(k)}(ds) = e^{\rho s} \sum_{k=0}^{\infty} P(V_k \in ds)$

Päälauseen 1 todistuksessa käytetään lisäksi seuraavia määritelmiä:

$\Pi_k = M_1 \cdot M_2 \cdot \ldots \cdot M_k$, $\Pi_0 = 1$.

$V_k = \log \Pi_k = \log M_1 + \log M_2 + \ldots + \log M_k$.

$\delta_n(s) = e^{\rho s}P(\Pi_n R > e^s) = e^{\rho s}P(e^{V_n}R > e^s)$.

$\nu_n(ds) = \sum_{k=0}^{n} \eta^{(k)}(ds) = e^{\rho s} \sum_{k=0}^{n} P(V_k \in ds)$,

## 2.2 Oletuksia

Goldie asettaa implisiittisessä uusiutumisteoriassaan satunnaismuuttujalle $M$ kolme ehtoa: On olemassa $\rho > 0$, jolla on voimassa

**(2.1)** $E(|M|^{\rho}) = 1,$

**(2.2)** $E(|M|^{\rho} \log|M|) < \infty,$

ja lisäksi

**(2.3)** Satunnaismuuttujan $\log|M|$ jakauma ei ole aritmeettinen.

Tässä tutkielmassa oletetaan, että ehdot (2.1), (2.2) ja (2.3) ovat voimassa. Lisäksi oletetaan, että että $M$:llä on kahdesti derivoituva tiheysfunktio ja

$E(M) < 1,$
$P(M > 1) > 0,$
$P(M > 0) = 1.$

Oletuksista viimeinen yksinkertaistaa tilannetta verrattuna Goldien yleisempään tapaukseen, jossa $M$ voi saada myös negatiivisia arvoja. Kyseisen oletuksen vuoksi tässä tutkielmassa ei jatkossa käytetä itseisarvomerkintää $M$:n kanssa.

Goldie todistaa, että ehdoista (2.1)–(2.3) seuraa seuraavat tulokset:

**(2.4)** $-\infty \leq E \log M < 0$ ja

**(2.5)** $m = E(M^{\rho} \log M) \in (0, \infty).$

*Todistus:* Olkoon $h(u) = E(M^u)$. Tällöin $h'(u) = E(M^u \log M)$ ja $h''(u) = E(M^u \log^2 M)$. kun $u \in (0, \rho)$ niin $h''(u) > 0$, eli $h$ on aidosti konveksi ja näin ollen aidosti kasvava välillä $[0, \rho]$. Konveksiudesta seuraa, että $h'(0) = E \log M < 0$, joten (2.4) on voimassa. $h(0) = h(\rho) = 1$, joten $h'(u) = 0$ jollakin $u \in (0, \rho)$. Tästä voidaan päätellä, että $h'(\rho) > 0$. Merkitään $h'(\rho) = E(M^{\rho} \log M) > 0$. Oletuksen (2.2) nojalla $E(M^{\rho} \log M) < \infty$, joten (2.5) on voimassa.

Tulokset (2.1)–(2.5) ovat siis voimassa. Koska nyt oletetaan $P(M > 0) = 1$ niin tuloksen (2.4) voisi kirjoittaa muodossa $-\infty < E \log M < 0$.

Luvussa 4.1 todistetaan, että Päälauseen 1 tulos on voimassa yhtälön (1.2) tapauksessa. Tällöin tarvitaan lisäksi seuraava oletus:

**(2.6)** $E|Q|^{\rho} < \infty.$

Päälauseen 2 yhteydessä tarvittavia lisäoletuksia ovat

**(2.7)** $EM^{\rho} \log^2 M < \infty,$

**(2.8)** $E|Q|^{\rho+\beta} < \infty,$

**(2.9)** $EM^{\rho+\beta} < \infty,$

joissa kahdessa jälkimmäisessä $\beta \in (0, 1)$.

Kaikki tässä luvussa esitetyt oletukset sopivat luontevasti yhteen tämän tutkielman lähtökohdan kanssa, jonka mukaan $M$ on diskonttaustekijä ja $Q$ kuvaa vakuutusyhtiön vuotuista kassavirtaa.

# 3. APULAUSEITA

Todistettavat tulokset ovat hyvin teknisiä ja tulemme tarvitsemaan useita apulauseita. Apulauseet 3.1–3.6 ovat tarpeen päälauseen 1 todistuksessa. Päälauseen 2 todistuksessa käytetään lisäksi apulauseita 3.7–3.9.

**Apulause 3.1**

Olkoon $f \geq 0, f \in L^1(\mathbb{R})$. Funktio $f$ on oleellisesti Riemann-integroituva jos kaikilla $t \in \mathbb{R}$ ja kaikilla $\varepsilon > 0$ on voimassa

**(3.1.1)** $f(t+\varepsilon) \geq \theta(\varepsilon) f(t),$

jossa $\theta(\varepsilon) \uparrow 1$ kun $\varepsilon \downarrow 0$.

*Todistus*: $\theta(\varepsilon) \uparrow 1$ kun $\varepsilon \downarrow 0$, joten $\theta(\mathring{\varepsilon}) \geq \theta(\varepsilon)$ kun $\mathring{\varepsilon} \leq \varepsilon$. Näin ollen kaikilla $x \in [n\varepsilon, (n+1)\varepsilon]$ ja kaikilla $y \in [(n-1)\varepsilon, n\varepsilon]$ on voimassa

$$f(x) \geq \theta(\varepsilon) f(n\varepsilon) \geq \theta^2(\varepsilon) f(y).$$

Iintegraalilaskennan väliarvolauseen nojalla on olemassa $y \in [(n-1)\varepsilon, n\varepsilon]$, jolle on voimassa

$$f(y) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{(n-1)\varepsilon}^{n\varepsilon} f(u)du.$$

Näin ollen voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \underline{m}_n(\varepsilon) &= \varepsilon \sum_{n\in\mathbb{Z}} \inf_{x\in[n\varepsilon,(n+1)\varepsilon]} f(x) \geq \varepsilon\theta(\varepsilon) \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n\varepsilon) \\ &\geq \theta^2(\varepsilon) \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{(n-1)\varepsilon}^{n\varepsilon} f(u)du = \theta^2(\varepsilon) \int_{\mathbb{R}} f(u)du. \end{aligned}$$

Kaikilla $x \in [n\varepsilon, (n+1)\varepsilon]$, $y \in [(n+1)\varepsilon, (n+2)\varepsilon]$ puolestaan on voimassa

$$f(x) \leq \frac{1}{\theta(\varepsilon)} f((n+1)\varepsilon) \leq \frac{1}{\theta^2(\varepsilon)} f(y).$$

Näin ollen voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \bar{m}_n(\varepsilon) &= \varepsilon \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sup_{x\in[n\varepsilon,(n+1)\varepsilon]} f(x) \leq \frac{\varepsilon}{\theta(\varepsilon)} \sum_{n\in\mathbb{Z}} f((n+1)\varepsilon) \\ &\leq \frac{1}{\theta^2(\varepsilon)} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{(n+1)\varepsilon}^{(n+2)\varepsilon} f(u)du = \frac{1}{\theta^2(\varepsilon)} \int_{\mathbb{R}} f(u)du. \end{aligned}$$

On siis voimassa

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} \underline{m}_n(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{m}_n(\varepsilon) = \int_{\mathbb{R}} f(u)du < \infty,$$

mikä määritelmän mukaan tarkoittaa, että funktio $f$ on oleellisesti Riemann integroituva.

**Apulause 3.2**

Jos $f \in L^1(\mathbb{R})$, niin $\check{f}$ on oleellisesti Riemann-integroituva.

*Todistus:* Jos funktio $f \in L^1(\mathbb{R})$, niin sekä $f^+$ että $f^-$ ovat integroituvia ja niitä on mahdollista tarkastella erikseen. Näin ollen yleisen tapauksen todistamiseksi riittää todistaa lause tilanteessa $f \geq 0$. Tällöin kaikilla $t \in \mathbb{R}$ ja kaikilla $\varepsilon > 0$ on voimassa

$$\check{f}(t+\varepsilon) = \int_{-\infty}^{t+\varepsilon} e^{-(t+\varepsilon-u)} f(u)du \geq e^{-\varepsilon} \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-u)} f(u)du = e^{-\varepsilon}\check{f}(t).$$

Merkitsemällä $\theta(\varepsilon) = e^{-\varepsilon}$ voidaan kirjoittaa

$$\check{f}(t+\varepsilon) \geq \theta(\varepsilon)\check{f}(t),\ \theta(\varepsilon) \uparrow 1 \text{ kun } \varepsilon \downarrow 0.$$

Näin ollen apulauseen 3.1 perusteella $\check{f}$ on oleellisesti Riemann-integroituva.

**Apulause 3.3**

Jos on voimassa

$$\int_0^t u^\rho P(R > u)du \sim Ct \text{ kun } t \to \infty,$$

niin

$$P(R > t) \sim Ct^{-\rho} \text{ kun } t \to \infty.$$

*Todistus:* Oletetaan

$$\int_0^t u^\rho P(R > u)du \sim Ct \text{ kun } t \to \infty.$$

Tällöin jos $b > 0$ niin

$$\int_0^{bt} u^\rho P(R > u)du \sim Cbt \text{ kun } t \to \infty.$$

Olkoon ensin $b > 1$.

$$\int_t^{bt} u^\rho P(R > u)du \leq \int_t^{bt} u^\rho P(R > t)du = \frac{b^{\rho+1}t^{\rho+1} - t^{\rho+1}}{\rho + 1} P(R > t)$$
$$= \frac{b^{\rho+1} - 1}{\rho + 1} t^{\rho+1} P(R > t).$$

Kun $t \to \infty$ niin oletuksen nojalla

$$\int_t^{bt} u^\rho P(R > u)du \sim C(b-1)t,$$

Edellisen kahden yhtälön perusteella

$$\lim_{t\to\infty} t^\rho P(R > t) \geq \frac{C(b-1)(\rho+1)}{b^{\rho+1} - 1}.$$

L'Hospitalin sääntöä käyttämällä voimme todeta

$$\lim_{b\downarrow 1} \frac{C(b-1)(\rho+1)}{b^{\rho+1} - 1} = \frac{C(\rho+1)}{(\rho+1)} = C.$$

Näin ollen

$$\lim_{b\downarrow 1,\, t\to\infty} \inf\; t^\rho P(R > t) \geq C.$$

Olkoon sitten $0 < b < 1$. Tällöin

$$C(1-b)t \sim \int_{bt}^{t} u^\rho P(R > u)du \geq \int_{bt}^{t} u^\rho P(R > t)du$$
$$= \frac{t^{\rho+1} - b^{\rho+1}t^{\rho+1}}{\rho + 1} = \frac{1 - b^{\rho+1}}{(\rho + 1)} t^{\rho+1} P(R > t) \text{ kun } t \to \infty,$$

joten on voimassa

$$\lim_{t\to\infty} t^{\rho} P(R > t) \leq \frac{C(\rho+1)(1-b)}{1-b^{\rho+1}}.$$

L’Hospitalin säännöllä

$$\lim_{b\uparrow 1} \frac{C_{+}(\rho+1)(1-b)}{1-b^{\rho+1}} = C,$$

joten on voimasssa

$$\lim \sup_{b\uparrow 1, t\to\infty} t^{\rho} P(R > t) \leq C.$$

Limes inferioria ja limes superioria koskevat tulokset yhdistämällä nähdään

$$\lim_{t\to\infty} t^{\rho} P(R > t) = C,$$

toisin sanoen on voimassa

$$P(R > t) \sim C_{+} t^{-\rho} \text{ kun } t \to \infty. \qquad \square$$

**Apulause 3.4**

Olkoot $X$ ja $Y$ mielivaltaisia satunnaismuuttujia ja $\rho \in \mathbb{R}$. Tällöin jos

$$\frac{1}{\rho} E|(X^{+})^{\rho} - (Y^{+})^{\rho}|,$$

niin

$$\int_{0}^{\infty} |P(X > u) - P(Y > u)| u^{\rho-1} du.$$

*Todistus:* Kaikilla $u \in \mathbb{R}$ ja mielivaltaisilla satunnaismuuttujilla $X$ ja $Y$ on voimassa

$$\begin{aligned} P(X > u) &= P(X > u, Y > u) + P(X > u, Y \le u) \\ &= P(Y > u) - P(X \le u, Y > u) + P(X > u, Y \le u), \end{aligned}$$

joten

$$P(X > u) - P(Y > u) = P(Y \le u < X) - P(X \le u < Y).$$

Vastaavasti

$$P(Y > u) - P(X > u) = P(X \le u < Y) - P(Y \le u < X).$$

Näin ollen kolmioepäyhtälön nojalla voidaan todeta

$$|P(X > u) - P(Y > u)| \le P(X \le u < Y) + P(Y \le u < X).$$

$X^+ = \max(X, 0)$, joten kun $u > 0$ niin $P(X^+ > u) = P(X > u)$. Voidaan siis kirjoittaa

$$\int_0^\infty |P(X > u) - P(Y > u)| u^{\rho-1} du \le \int_0^\infty P(X^+ < u < Y^+) u^{\rho-1} du + \int_0^\infty P(Y^+ < u < X^+) u^{\rho-1} du.$$

Epäyhtälön oikean puolen ensimmäistä integraalia voi muokata seuraavasti:

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty P(X^+ < u < Y^+) u^{\rho-1} du \\ &\qquad = \int_{X^+}^{Y^+} P(X^+ < u < Y^+) u^{\rho-1} du = E1_{X^+<Y^+} \int_{X^+}^{Y^+} u^{\rho-1} du = \frac{1}{\rho} E1_{X^+<Y^+}((Y^+)^\rho - (X^+)^\rho). \end{aligned}$$

Jälkimmäisen integraalin voi vastaavasti lausua muodossa

$$\int_0^\infty P(Y^+ < u < X^+) u^{\rho-1} du = \frac{1}{\rho} E1_{Y^+<X^+}((X^+)^\rho - (Y^+)^\rho).$$

Nämä voidaan yhdistää:

$$\frac{1}{\rho}(E1_{X^+<Y^+}((Y^+)^\rho - (X^+)^\rho) + E1_{Y^+<X^+}((X^+)^\rho - (Y^+)^\rho)) \;=\; \frac{1}{\rho}E|(X^+)^\rho - (Y^+)^\rho|.$$

Näin ollen

$$\int_0^\infty P(X < u < Y)u^{\rho-1}du \leq \frac{1}{\rho}E|(X^+)^\rho - (Y^+)^\rho|.$$

Epäyhtälön oikean puolen äärellisyys implikoi vasemman puolen äärellisyyden, joten lause on todistettu.

**Apulause 3.5**

Olkoot $x, y \in \mathbb{R}, r > 0$. Tällöin

$$|x+y|^r \leq c_r(|x|^r + |y|^r),$$

missä $c_r = \max(2^{r-1}, 0)$.

**Apulause 3.6**

Olkoot $x, y \in \mathbb{R}, r > 0$. Tällöin

$$||x|^r - |y|^r| \leq \begin{cases} |x-y|^r \text{ kun } 0 < r \leq 1, \\ r|x-y|\max(|x|,|y|)^{r-1} \text{ kun } 1 < r < \infty. \end{cases}$$

Apulauseiden 3.5 ja 3.6 todistus on esitetty lähteessä Toivanen(2008: 10-11).

**Apulause 3.7 eli Riemann-Lebesquen lemma**

Olkoon $f(t) \in L^1(\mathbb{R})$. Tällöin

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{ixt}dt \to 0 \text{ kun } x \to \pm\infty,$$

kun $x \to \pm\infty$.

*Todistus*: Esitetty lähteessä Kawata(1972).

**Apulause 3.8**

Olkoot $\chi$ ja $\mu$ todennäköisyysmittoja $\mathbb{R}$:ssä. Oletetaan että $\chi$:llä on kahdesti derivoituva tiheysfunktio $q$. Oletetaan, että $\mu$:llä on absoluuttisesti jatkuva komponentti ja lisäksi

$$m = \int_{\mathbb{R}} x\mu(dx) > 0,$$

$$m_2 = \int_{\mathbb{R}} x^2\mu(dx) < \infty.$$

Tällöin mitta

$$\sum_{n=0}^{\infty} \chi * \mu^{(n)}$$

on absoluuttisesti jatkuva tiheysfunktionaan $p$, jolle pätee

$$\text{(3.8.1)} \qquad p(x) - \frac{1}{m}\chi(-\infty,x] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixz}\hat{\chi}(z)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}(z)} - \frac{1}{-imz}\right)dz.$$

*Todistus:* $\chi$:n tiheysfunktio $q$ oletetaan kahdesti derivoituvaksi, jolloin lähteen Feller(1966) lauseen XV.4 perusteella reaalisella $z$ on voimassa $|\hat{\chi}(z)| = o(|z^{-2}|)$ kun $z \to \pm\infty$. Lisäksi $|\hat{\chi}(z)| \leq 1$ kaikilla $z \in \mathbb{R}$, joten $\hat{\chi} \in L^1(\mathbb{R})$. Saman lähteen lauseen XV.3 perusteella kun $\hat{\chi} \in L^1(\mathbb{R})$, niin $\chi$:n tiheysfunktio $q(x)$ voidaan lausua käänteistä Fourier-muunnosta käyttäen seuraavasti:

$$q(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixz}\hat{\chi}(z)dz.$$

Näin ollen yhtälön (3.8.1) voi kirjoittaa yhtäpitävässä muodossa

$$p(x) - \frac{1}{m}\chi(-\infty,x] - q(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixz}\hat{\chi}(z)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}(z)} - \frac{1-imz}{-imz}\right)dz.$$

Olkoon $z \in \mathbb{R}$. Tällöin $\hat{\mu}(z)$ on jonkin satunnaismuuttujan karakteristinen funktio, jonka voi Taylorin polynomia hyödyntäen kirjoittaa muodossa

$$\hat{\mu}(z) = 1 + imz + A(z)z^2,$$

jossa $A(z) = \frac{m_2}{2} + o(z)$. On oletettu $m_2 < \infty$ joten $A(z) = O(1)$ kun $z \to 0$.

Olkoon $\frac{1}{2} \leq r \leq 1.$ Osoitetaan ensin

$$f(z) = \hat{\chi}(z)\left(\frac{1}{1 - r\hat{\mu}(z)} - \frac{1 - imz}{1 - r - imz}\right) \in L^1(\mathbb{R}):$$

Valitaan $z_0$ siten, että $|z \operatorname{Im} A(z)| \leq \frac{1}{2}m$, kun $z \in (-z_0, z_0)$. Tällöin seuraava epäyhtälö on voimassa kaikilla $z \in [-z_0, z_0]$:

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{1 - r\hat{\mu}(z)} - \frac{1 - imz}{1 - r - imz}\right| \\
&= \left|\frac{1}{1 - r - rimz - rz^2A(z)} - \frac{1 - imz}{1 - r - imz}\right| \\
&= \frac{|z|^2|r(m^2 - izmA(z) + A(z))|}{|rz^2A(z) + imrz + r - 1||r + imz - 1|} \\
&= \frac{rz^2|(m^2 - imzA(z) + A(z))|}{\sqrt{((r - 1 + rz^2 \operatorname{Re} A(z))^2 + (rmz + rz^2 \operatorname{Im} A(z))^2} \cdot \sqrt{(r-1)^2 + (mz)^2}} \\
&\leq \frac{rz^2|(m^2 - imzA(z) + A(z))|}{\sqrt{(rmz + rz^2 \operatorname{Im} A(z))^2} \cdot \sqrt{(mz)^2}} \\
&\leq \frac{rz^2|(m^2 - imzA(z) + A(z))|}{\frac{1}{2}rm^2z^2} \\
&= \frac{2|(m^2 - imzA(z) + A(z))|}{m^2} < \infty.
\end{aligned}$$

Toisaalta kaikilla $z$, joilla $|z| > z_0$, on voimassa

$$
\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{1 - r\hat{\mu}(z)} - \frac{1 - imz}{1 - r - imz} \right| \\
&\leq \left| \frac{1}{1 - r\hat{\mu}(z)} \right| + \left| \frac{1 - imz}{1 - r - imz} \right| \\
&\leq \left| \frac{1}{1 - \sup_{|z|>z_0} \hat{\mu}(z)} \right| + \left| \frac{1 - r - imz}{1 - r - imz} \right| + \left| \frac{r}{1 - r - imz} \right| \\
&\leq \frac{1}{1 - \sup_{|z|>z_0} |\hat{\mu}(z)|} + 1 + \left| \frac{1}{1 - r - imz} \right| \\
&\leq \frac{1}{1 - \sup_{|z|>z_0} |\hat{\mu}(z)|} + 1 + \frac{1}{mz_0} < \infty.
\end{aligned}
$$

Toisin sanoen kaikilla $z \in \mathbb{R}$ ja kaikilla $r \in [\frac{1}{2}, 1]$ on olemassa $M < \infty$, jolla on voimassa

$$
\left| \frac{1}{1 - r\hat{\mu}(z)} - \frac{1 - imz}{1 - r - imz} \right| < M.
$$

Tästä seuraa

$$
\left| \hat{\chi}(z) \left( \frac{1}{1 - r\hat{\mu}(z)} - \frac{1 - imz}{1 - r - imz} \right) \right| < M\hat{\chi}(z),
$$

ja $M\hat{\chi}(z) \in L^1(\mathbb{R})$ koska $\hat{\chi}(z) \in L^1(\mathbb{R})$. Nyt voidaan käyttää dominoidun konvergenssin lausetta kuten lähteessä Holopainen (2004) ja päätellä $f(z) \in L^1(\mathbb{R})$, ja lisäksi vaihtaa raja-arvon oton ja integroinnin järjestystä seuraavassa esityksessä:

$$
\begin{aligned}
\textbf{(3.8.2)} \qquad &\lim_{r \uparrow 1} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixz} \hat{\chi}(z) \left( \frac{1}{1 - r\hat{\mu}(z)} - \frac{1 - imz}{1 - r - imz} \right) dz \right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixz} \hat{\chi}(z) \left( \lim_{r \to 1} \left( \frac{1}{1 - r\hat{\mu}(z)} - \frac{1 - imz}{1 - r - imz} \right) \right) dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixz} \hat{\chi}(z) \left( \frac{1}{1 - \hat{\mu}(z)} - \frac{1 - imz}{-imz} \right) dz.
\end{aligned}
$$

Määritellään mitta $E_m(dy)$ seuraavasti:

$$
E_m(dy) = 1_{y>0} \frac{1}{m} e^{-\frac{y}{m}} dy.
$$

Kyseessä on eksponentiaalijakauman tiheysfunktio parametrilla $\frac{1}{m}$. Näin ollen

$$E_m^{(n)}(dy) = \frac{\frac{1}{m}^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\frac{y}{m}} dy,$$

eli kyseessä on Gamma-jakauman tiheysfunktio. Tämän karakteristinen funktio on

$$\hat{E}_m^{(n)}(z) = \left( \frac{1}{1 - imy} \right)^n.$$

Määritellään

$$p_r(x) = \int_{-\infty}^{\infty} q(x-y) \sum_{n=0}^{\infty} r^n \left( \mu^{(n)}(dy) - E_m^{(n)}(dy) \right), \; x \in \mathbb{R}.$$

Koska seuraavan yhtälön ylin rivi on integroituva, voidaan käyttää Fubinin lausetta vaihtuvamerkkisille funktioille kuten lähteessä Holopainen (2004) Sen lisäksi käytetään geometrisen summan kaavaa sekä sijoitusta $x = y + s$:

$$\begin{aligned}
&\hat{\chi}(z) \left( \frac{1}{1 - r\hat{\mu}(z)} - \frac{1 - imz}{1 - r - imz} \right) \\
&= \hat{\chi}(z) ( \frac{1}{1 - r\hat{\mu}(z)} - \frac{1}{1 - r\hat{E}_m^{(n)}(z)} ) \\
&= \hat{\chi}(z) \sum_{n=0}^{\infty} r^n (\hat{\mu}^{(n)}(z) - \hat{E}_m^{(n)}(z)) \\
&= \hat{\chi}(z) \int_{-\infty}^{\infty} e^{izy} \sum_{n=0}^{\infty} r^n (\mu^{(n)}(dy) - E_m^{(n)}(dy)) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{izs} q(s) \int_{-\infty}^{\infty} e^{izy} \sum_{n=0}^{\infty} r^n (\mu^{(n)}(dy) - E_m^{(n)}(dy)) ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{iz(y+s)} \int_{-\infty}^{\infty} q(s) \sum_{n=0}^{\infty} r^n (\mu^{(n)}(dy) - E_m^{(n)}(dy)) ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{izx} \int_{-\infty}^{\infty} q(x-y) \sum_{n=0}^{\infty} r^n (\mu^{(n)}(dy) - E_m^{(n)}(dy)) dx \\
&= \hat{p}_r(x),
\end{aligned}$$

Näin ollen aiemmin esitetyn lähteen [Feller] lauseen XV.3 perusteella on voimassa seuraava yhteneväisyys:

$$\begin{aligned} p_r(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixz}\hat{p}_r(x)dz \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixz}\hat{\chi}(z)\left(\frac{1}{1-r\hat{\mu}(z)} - \frac{1-imz}{1-r-imz}\right)dz. \end{aligned}$$

Tästä puolestaan seuraa yhtälön (3.8.2) perusteella

$$\textbf{(3.8.3)} \qquad \lim_{r\uparrow 1} p_r(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixz}\hat{\chi}(z)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}(z)} - \frac{1-imz}{-imz}\right)dz.$$

Kun $r \uparrow 1$ niin

$$\int_{-\infty}^{\infty} q(x-y)\sum_{n=0}^{\infty} r^n \mu^{(n)}(dy) \uparrow \int_{-\infty}^{\infty} q(x-y)\sum_{n=0}^{\infty}\mu^{(n)}(dy) = \sum_{n=0}^{\infty}\chi * \mu^{(n)}(x) = p(x).$$

Kuten todettua

$$E_m^{(n)}(dy) = \frac{\frac{1}{m}^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\frac{y}{m}} dy.$$

Kun $n$ on kokonaisluku, niin $\Gamma(n) = (n-1)!$, joten on voimassa

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} E_m^{(n)}(dy) &= \delta_0(dy) + \frac{(\frac{1}{m})^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\frac{1}{m}y} dy \\ &= \delta_0(dy) + \frac{1}{m} e^{-\frac{1}{m}y} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\frac{1}{m})^{n-1}}{(n-1)!} y^{n-1} dy \\ &= \delta_0(dy) + \frac{1}{m} e^{-\frac{1}{m}y} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{m}y)^n}{n!} \\ &= \delta_0(dy) + \frac{1}{m} e^{-\frac{1}{m}y + \frac{1}{m}y} \\ &= \delta_0(dy) + \frac{1}{m}. \end{aligned}$$

Näin ollen kun $r \uparrow 1$,

$$\begin{aligned} p_r(x) \;\uparrow\; & \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} q(x-y)(\mu^{(n)}(dy) - E_m^{(n)}(dy)) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \chi * \mu^{(n)}(x) - \int_{-\infty}^{\infty} q(x-y)\delta_0(dy) - \int_{-\infty}^{\infty} q(x-y)\frac{1}{m}1_{y>0}dy \\ &= p(x) - q(x) - \frac{1}{m}\int_0^{\infty} q(x-y)dy \\ &= p(x) - q(x) + \frac{1}{m}\chi(-\infty,x]. \end{aligned}$$

Toisaalta esityksen (3.8.3) perusteella

$$p_r(x) \uparrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixz}\hat{\chi}(z)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}(z)} - \frac{1-imz}{-imz}\right)dz \text{ kun } r \uparrow 1.$$

Tulokset yhdistämällä nähdään

$$p(x) - \frac{1}{m}\chi(-\infty,x] - q(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixz}\hat{\chi}(z)(\frac{1}{1-\hat{\mu}(z)} - \frac{1}{-imz} - 1)dz.$$

On voimassa

$$-q(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixz}\hat{\chi}(z)dz,$$

joten edellisen yhtälön voi sieventää muotoon

$$p(x) - \frac{1}{m}\chi(-\infty,x] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixz}\hat{\chi}(z)\left(\frac{1}{1-\hat{\mu}(z)} - \frac{1-imz}{-imz}\right)dz. \qquad \square$$

**Apulause 3.9**

Olkoon $K \in L^1(\mathbb{R})$ sellainen, että $\hat{K}(\xi) \neq 0$ kaikilla $\xi \in \mathbb{R}$. Olkoon olemassa vakiot $p > 1/2$, $a > 0$ ja $C$, sekä funktio $w$ joka on holomorfinen alueessa $-a < \operatorname{Im} z < 0$, niin että on voimassa

$$|w'(z)| < C(1+|z|)^{p-1}, \ -a < \operatorname{Im} z < 0,$$

$$\lim_{\eta \downarrow 0} w(\xi - i\eta) = \frac{1}{\hat{K}(\xi)}, \ \xi \in \mathbb{R}.$$

Olkoon $\beta$ vakio, $0 < \beta < a$ ja olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ rajoitettu funktio, joka toteuttaa joillain vakioilla $A, x_0$ ehdon

**(3.9.1)** $f(x) - f(x-y) \leq Ae^{-\beta x/(p+1)}, \ 0 \leq y \leq e^{-\beta x/(p+1)}, \ x > x_0.$

Tällöin jos on voimassa

$$K * f(x) = O(e^{-\beta x}) \text{ kun } x \to \infty,$$

niin on voimassa

$$f(x) = O(e^{-\beta x/(p+1)}) \text{ kun } x \to \infty.$$

*Todistus*: Esitetty lähteessä Ganelius(1962).

# 4. PÄÄLAUSE 1

Oletetaan Goldien tapaan ainoastaan, että satunnaismuuttujat $R, M, M_1, M_2, M_3, \ldots$ ovat määriteltyjä samassa todennäköisyysavaruudessa ja että ne kaikki ovat keskenään riippumattomia, ja että kaikilla $i$ on voimassa $M_i =_L M$ ja että $M$ toteuttaa ehdot (2.1), (2.2) ja (2.3). Vielä ei ole tarpeellista olettaa, että $R$ on (1.2):n tai minkään muunkaan uusiutumisyhtälön ratkaisu.

**Päälause 1**: Jos

**(4.1)** $\int_0^\infty |P(R > t) - P(MR > t)| t^{\rho - 1} dt < \infty,$

niin

**(4.2)** $P(R > t) \sim Ct^{-\rho}$ kun $t \to \infty$.

Lisäksi

$$\textbf{(4.3)}\quad C = \frac{1}{m}\int_0^\infty t^{\rho-1}(P(R > t) - P(MR > t)dt,$$

jossa $m = E(M^\rho \log M)$.

*Päälauseen 1 todistus:* Goldie esittää todistuksen erikseen tilanteissa $P(M > 0) = 1$ ja $P(M < 0) > 0$. Tässä tutkielmassa rajoitutaan tapaukseen $P(M > 0) = 1$.

Todetaan ensin, että $g(s) = e^{\rho s}(P(R > e^s) - (MR > e^s)) \in L^1(\mathbb{R})$ on yhtäpitävä ehdon (4.1) kanssa. Ehto (4.1) tulee nimittäin sijoituksella $t = e^s$, $dt = e^s ds$ muotoon

$$\int_{-\infty}^{\infty} |P(R > e^s) - P(MR > e^s)| e^{\rho s} ds < \infty,$$

ja

$$\int_{-\infty}^{\infty} |P(R > e^s) - P(MR > e^s)| e^{\rho s} ds = \int_{\mathbb{R}} |g(s)| ds.$$

Muodostetaan esitys todennäköisyydelle $P(R > e^s)$ käyttäen luvussa 2.1 esitettyjä määritelmiä sekä hyödyntäen ensin teleskooppisummaa:

$$\begin{aligned}
e^{-\rho s} r(s) &= P(R > e^s) = P(\Pi_0 R > e^s) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (P(\Pi_{k-1} R > e^s) - P(\Pi_k R > e^s)) + P(\Pi_n R > e^s) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (P(e^{V_{k-1}} R > e^s) - P(e^{V_{k-1}} MR > e^s)) + P(e^{V_n} R > e^s) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (P(R > e^{s-V_k}) - P(MR > e^{s-V_k})) + e^{-\rho s}\delta_n(s) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\mathbb{R}} (P(R > e^{s-u}) - P(MR > e^{s-u})) P(V_k \in du) + e^{-\rho s}\delta_n(s).
\end{aligned}$$

Nyt on mahdollista kirjoittaa

$$r(s) = g * \nu_{n-1}(ds) + \delta_n(s),$$

sillä

$$\begin{aligned} g * \nu_{n-1}(ds) &= \int_{\mathbb{R}} e^{\rho(s-u)} P(R > e^{s-u}) - (MR > e^{s-u}) \nu_{n-1}(du) \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{\rho(s-u)} (P(R > e^{s-u}) - (MR > e^{s-u})) e^{\rho u} \sum_{k=0}^{n-1} P(V_k \in du) \\ &= e^{\rho s} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\mathbb{R}} (P(R > e^{s-u}) - P(MR > e^{s-u})) P(V_k \in du). \end{aligned}$$

$V_k = \log M_1 + \ldots \log M_k$, ja koska oletusten mukaan satunnaismuuttujat $\log M_i$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita ja $E(\log M) < 0$, niin suurten lukujen lain perusteella $P(\lim_{k\to\infty} V_k = -\infty) = 1$. Äärettömyyspiste ei kuulu ylläolevan Riemann-integraalin integroimisväliin, joten käytetään tasoitusoperaattoria $K(s) = e^{-s} 1_{t>0}$.

Yleisesti pätee lähteen Kawata(1972 :76) perusteella, että funktioiden $f, h, k \in L^1(\mathbb{R})$ konvoluutiot ovat vaihdannaisia, liitännäisiä sekä distributiivisiä. Tasoitusoperaattori $K$ on eksponenttijakauman tiheysfunktio, joten $K(s) \in L^1(\mathbb{R})$. Oletuksen (4.1) nojalla myös $g(s) \in L^1(\mathbb{R})$. Näin ollen voimme hyödyntää konvoluution liitännäisyyttä sekä distributiivisuutta ja kirjoittaa

$$\begin{aligned} \check{r}(s) &= (g * \nu_{n-1}(ds) + \delta_n(s))\check{} = K * (g * \nu_{n-1}(ds) + \delta_n(s)) \\ &= K * g * \nu_{n-1}(ds) + K * \delta_n(s) \\ &= (K * g) * \nu_{n-1}(ds) + K * \delta_n(s) \\ &= \check{g} * \nu_{n-1}(s) + \check{\delta}_n(s). \end{aligned}$$

Luvussa 2.1 määritetty mitta $\eta$ on $\log M$:n jakauman määrittävän todennäköisyysmitan Esscher-muunnos parametrilla $\rho$, joten $\eta$ on todennäköisyysmitta, minkä voi myös laskennallisesti osoittaa:

$$\int_{\mathbb{R}} \eta(du) = \int_{\mathbb{R}} e^{\rho u} P(\log M_1 \in du) = \int_{\mathbb{R}} e^{\rho \log M} P(M \in dm) = E(e^{\rho \log M}) = E(M^\rho) = 1.$$

Huomataan lisäksi, että satunnaismuuttujan $\log M$ odotusarvo todennäköisyysmitalla $\eta$ on tuloksessa (2.5) määritetty $m$:

$$E_\eta(\log M) = \int_{\mathbb{R}} u \cdot \eta(du) = \int_{\mathbb{R}} ue^{\rho u} P(\log M \in du) = \int_{\mathbb{R}} \log M e^{\rho \log M} P(M \in dm)$$
$$= E(M^\rho \log M) = m \in (0, \infty).$$

Määritellään uusiutumismitta $\nu(ds)$ kuten luvussa 2.1 on esitetty:

$$\nu(ds) = \sum_{k=0}^{\infty} \eta^{(k)}(ds) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{\rho s} P(\log M_1 + \ldots + \log M_k \in ds) = e^{\rho s} \sum_{k=0}^{\infty} P(V_k \in ds).$$

Lähteen Feller (1966) lauseen VI.4 perusteella $\nu$ on transientti eli $\nu\{I\} < \infty$, koska $E_\eta(\log M) \neq 0$. Tästä seuraa, että kaikilla oleellisesti Riemann integroituvilla funktioilla $f$ ja kaikilla $s \in \mathbb{R}$ on voimassa

$$|f| * \nu(s) < \infty.$$

Apulauseen 3.2 ja ehdon (4.1) nojalla $\check{g}$ on oleellisesti integroituva, joten

$$\begin{aligned} |\check{g}| * \nu(s) &= \int_{\mathbb{R}} |\check{g}(s-u)| \nu(du) \\ &= \int_{\mathbb{R}} |\check{g}(s-u)| e^{\rho u} \sum_{k=0}^{\infty} P(V_k \in du) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=0}^{\infty} e^{\rho u} |\check{g}(s-u)| P(V_k \in du) \\ &= E \sum_{k=0}^{\infty} e^{\rho V_k} |\check{g}(s - V_k)| < \infty. \end{aligned}$$

Itseisesti suppeneva sarja suppenee, joten on voimassa

$$\check{g} * \nu(s) = E \sum_{k=0}^{\infty} e^{\rho V_k} \check{g}(s - V_k) < \infty.$$

Näin ollen on mahdollista käyttää Fubinin lausetta vaihtuvamerkkisillä funktioille ja vaihtaa odotusarvon ja summauksen järjestystä:

$$
\begin{aligned}
\check{g} * \nu(s) &= E\sum_{k=0}^{\infty} e^{\rho V_k}\check{g}(s - V_k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} E(e^{\rho V_k}\check{g}(s - V_k)).
\end{aligned}
$$

Lasketaan vielä seuraava tulos:

$$
\begin{aligned}
\check{r}(s) &= \check{g} * \nu_{n-1}(s) + \check{\delta}_n(s) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \check{g}(s-u)\nu_{n-1}(du) + \check{\delta}_n(s) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\mathbb{R}} \check{g}(s-u)e^{\rho u}P(V_k \in du) + \check{\delta}_n(s) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} E(\check{g}(s - V_k)e^{\rho V_k}) + \check{\delta}_n(s) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} E(e^{\rho V_k}\check{g}(s - V_k)) \ + \check{\delta}_n(s).
\end{aligned}
$$

Määritelmien mukaan

$$
\check{\delta}_n(s) = e^{-s} \int_{-\infty}^{s} e^{(\rho+1)u}P(e^{V_n}R > e^u)du.
$$

Kuten todettua, oletusten ja suurten lukujen lain perusteella

$$
P(\lim_{n\to\infty} V_n = -\infty) = 1.
$$

Näin ollen kaikilla $u > -\infty$ on voimassa

$$
\lim_{n\to\infty} P(e^{V_n}R > e^s) = P(0 > e^u) = 0.
$$

Siis $P(e^{V_n}R > e^u) = 0$ kun $u > -\infty$ ja toisaalta $e^{(\rho+1)u} \to 0$ kun $u \to -\infty$, joten integrandin arvo $\check{\delta}_n(s)$:n esityksessä on nolla kaikilla $u$. Näin ollen kaikilla $s$ on voimassa

$$
\lim_{n\to\infty} \check{\delta}_n(s) = 0.
$$

Voidaan siis kirjoittaa

$$\begin{aligned}
\check{r}(s) &= \lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n-1} E(e^{\rho V_k}\check{g}(s-V_k)) + \check{\delta}_n(s)\Big) \\
&= E\sum_{k=0}^{\infty}(e^{\rho V_k}\check{g}(s-V_k)) \\
&= E_\eta \sum_{k=0}^{\infty}\check{g}(s-V_k) \\
&= \check{g} * \nu(s).
\end{aligned}$$

Tämä tarkoittaa, että $\check{r}(s)$ toteuttaa uusiutumisyhtälön $\check{r}(s) = \check{g}(s) + \check{r} * \eta(s)$ kaikilla $s$.

Lause 4.2 lähteessä Athreya, McDonald, Ney (1978) kuuluu seuraavasti: Olkoon $S_n$ ei-aritmeettinen satunnaiskulku jolla on positiivinen, äärellinen odotusarvo. Olkoon $K : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olennaisesti integroituva funktio. Tällöin

$$M(t) = E\sum_{k=0}^{\infty} K(t-S_n) \to \frac{1}{E(S_1)}\int_{-\infty}^{\infty} K(u)du.$$

Satunnaiskulku $V_k$ ei ole aritmeettinen, $E_\eta(V_1) = m \in (0,\infty)$ ja $\check{g}$ on osoitettu oleellisesti integroituvaksi. Johtopäätös on

$$\check{r}(s) = E_\eta \sum_{k=0}^{\infty}\check{g}(s-V_k) \longrightarrow \frac{1}{m}\int_{-\infty}^{\infty}\check{g}(s)ds.$$

Fubinin lausetta käyttäen voidaan lisäksi todeta

$$\int_{-\infty}^{\infty} \check{g}(s)ds = \int_{-\infty}^{\infty} (\int_{-\infty}^{s} e^{u-s} g(u)du)ds$$
$$= \int_{(-\infty,\infty)\times(-\infty,\infty)} 1_{(u\leq s)} \cdot e^{u-s} g(u)du$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{u}^{\infty} e^{-s} ds \right) e^{u} g(u)du$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(u)du.$$

Kirjoittamalla $\check{r}(s)$ auki saadaan esitys

$$\int_{-\infty}^{s} e^{u-s} e^{\rho u} P(R > e^{u})du \to \frac{1}{m} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\rho u}(P(R > e^{u}) - P(MR > e^{u}))du \text{ kun } s \to \infty.$$

Sijoitetaan tähän $a = e^{u}$. Tällöin $du = da/a$, $a(-\infty) = 0$, $a(\infty) = \infty$, $a(s) = e^{s}$. Esitys tulee muotoon

$$e^{-s} \int_{0}^{e^{s}} a^{\rho} P(R > a)da \to \frac{1}{m} \int_{0}^{\infty} a^{\rho-1}(P(R > a) - P(R > a))da \text{ kun } s \to \infty.$$

Oikea puoli on nyt (4.3):ssa määritelty vakio $C$. Sijoitetaan vasemmalle puolelle $t = e^{s}$, $ds = dt/t$:

$$\frac{1}{t} \int_{0}^{t} a^{\rho} P(R > a)da \to C \text{ kun } t \to \infty.$$

Kertomalla puolittain $t$:llä saman voi kirjoittaa muotoon

$$\int_{0}^{t} a^{\rho} P(R > a)da \sim tC \text{ kun } t \to \infty,$$

josta suoraan apulauseen 3.3 nojalla seuraa esitys (4.2):

$$P(R > t) \sim Ct^{-\rho} \text{ kun } t \to \infty. \quad \square$$

Päälause 1 on siis todistettu tapauksessa $P(M > 0) = 1$. Goldien esittämä todistus tapauksessa $P(M < 0) > 0$ on pitkä ja raskas ja tämän tutkielman kannalta merkityksetön.

**4.1 Integroituvuusehdon voimassaolon osoitus**

Päälause 1:n oletuksina oli ehtojen (2.1), (2.2) ja (2.3) lisäksi $R$:n riippumattomuus $M$:sta sekä $g$:n integroituvuusehdon (4.1) voimassaolo. Pitää siis osoittaa, että (4.1) on voimassa yhtälön (1.2) tapauksessa.

Kun $R =_L Q + MR$ niin $P(R > u) = P((Q + MR) > u)$ kaikilla $u$. Sijoittamalla $Q + MR = X$, $MR = Y$ apulauseeseen 3.4 on mahdollista todeta, että (4.1) on yhtäpitävä seuraavan ehdon kanssa

$$\textbf{(4.4)} \qquad \frac{1}{\rho} E|(Q + MR)^+)^\rho - ((MR)^+)^\rho| < \infty$$

Aiemmin emme ole olettaneet mitään satunnaismuuttujan $Q$ jakaumasta. Nyt oletamme, että (2.6) on voimassa, toisin sanoen $E|Q|^\rho < \infty$.

Kun $Q \leq 0$, $(Q + MR) \leq 0$, niin

$$E|(Q + MR)^+)^\rho - ((MR)^+)^\rho| = 0.$$

Kun $MR \leq 0, (Q + MR) > 0$, niin

$$E|(Q + MR)^+)^\rho - ((MR)^+)^\rho| = E(Q + MR)^\rho.$$

Kun $(Q + MR) < 0, MR > 0$, niin

$$E|(Q + MR)^+)^\rho - ((MR)^+)^\rho| = E(MR)^\rho.$$

Kun $(Q + MR) > MR > 0$, niin

$$E|(Q + MR)^+)^\rho - ((MR)^+)^\rho| = E((Q + MR)^+)^\rho - (MR)^\rho).$$

Kun $MR > (Q + MR) > 0$, niin

$$E|(Q + MR)^+)^\rho - ((MR)^+)^\rho| = E((MR)^\rho - (Q + MR))^\rho.$$

Voimme siis kirjoittaa että (4.4):n vasen puoli on vakiota $1/\rho$ vaille $E_1 + E_2 + E_3 + E_4$, jossa

$$\begin{aligned} E_1 &= E1_{-Q<MR\le 0}(Q+MR)^\rho, \\ E_2 &= E1_{0<MR\le -Q}(MR)^\rho, \\ E_3 &= E1_{MR>0,Q>0}((Q+MR)^\rho - (MR)^\rho), \\ E_4 &= E1_{0<-Q<MR}((MR)^\rho - (Q+MR)^\rho). \end{aligned}$$

Ehto (4.4) on voimassa jos ja vain jos kukin $E_i$ on äärellinen.

$E_1 \le E|Q|^\rho < \infty$.
$E_2 \le E(-Q)^\rho \le E|Q|^\rho < \infty$.

$E_3$:n ja $E_4$:n "alueissa" sekä $(Q+MR)$ että $MR$ ovat positiviisia, joten

$$\left| |Q+MR|^{\rho+\beta} - |MR|^{\rho+\beta} \right| = ((Q+MR)^{\rho+\beta} - (MR)^{\rho+\beta}).$$

Näin ollen apulauseiden 3.5 ja 3.6 käyttö on mahdollista, eikä itseisarvomerkkejä tarvi kirjoittaa paitsi $Q$:n kohdalla $E_4$:ssä.

Jos $\rho \le 1$, niin apulauseen 3.6 nojalla

$$E_3 \le E((Q+MR) - MR)^\rho \le EQ^\rho < \infty.$$

Jos $\rho > 1$, niin apulauseen 3.6 nojalla

$$E_3 \le \rho EQ(Q+MR)^{\rho-1}.$$

Apulauseen 3.5 nojalla

$$(Q+MR)^{\rho-1} \le c_{\rho-1}Q^{\rho-1} + c_{\rho-1}(Q+MR)^{\rho-1},$$

joten jos $\rho > 1$ niin

$$E_3 \le \rho c_{\rho-1}EQ^\rho + \rho c_{\rho-1}EQEM^{\rho-1}ER^{\rho-1}.$$

$EQ^\rho < \infty$ joten $EQ < \infty$.

$ER^{\rho-1}$:n äärellisyyden osoittamisessa tarvitaan $ER$:n äärellisyyttä. Tämä sisältyy jo lähtökohtana olevaan yhtälöön (1.2), mutta osoitetaan äärellisyys tässä erikseen käyttäen oletuksia satunnaismuuttujien riippumattomuudesta ja samoin jakautuneisuudesta:

$$\begin{aligned} ER &= E\Big(\sum_{i=1}^{\infty} M_1 \bullet \ldots \bullet M_{i-1} Q_i\Big) = EQ \sum_{i=1}^{\infty} E(M_1 \bullet \ldots \bullet M_{i-1}) \\ &= EQ \sum_{i=1}^{\infty} E(M)^{i-1} = EQ \sum_{i=0}^{\infty} E(M)^{i} \\ &= \frac{EQ}{1-EM} < \infty. \end{aligned}$$

Oletuksen mukaan $P(M > 0) = 1$. Näin ollen $1_{MR>0} = 1_{R>0}$, joten $E_3$:n ja $E_4$:n äärellisyystarkastelussa voidaan olettaa $R > 0$. Jos $1 < \rho < 2$ niin $E1_{R>1}R^{\rho-1} \leq E1_{R>1}R < \infty$. Selvästi $E1_{0<R<1}R^{\rho-1} < \infty$, joten $E1_{R>0}R^{\rho-1} < \infty$.

Jos $\rho \geq 2$ niin voimme hyödyntää Minkowskin epäyhtälöä samaan tapaan kuin lähteessä Toivanen(2008:10):

$$ER^{\rho-1} = E(Q+MR)^{\rho-1} \leq \Big((EQ^{\rho-1})^{\frac{1}{\rho-1}} + E((MR)^{\rho-1})^{\frac{1}{\rho-1}}\Big)^{\rho-1},$$

Jätetään $E(Q+MR)^{\rho-1}$ yhtälöstä pois ja otetaan puolittain $(\rho-1)$:s juuri.

$$(ER^{\rho-1})^{\frac{1}{\rho-1}} \leq (EQ^{\rho-1})^{\frac{1}{\rho-1}} + (EM^{\rho-1})^{\frac{1}{\rho-1}}(ER^{\rho-1})^{\frac{1}{\rho-1}},$$

Epäyhtälön voi nyt kirjoittaa muodossa

$$\Big(1-(EM^{\rho-1})^{\frac{1}{\rho-1}}\Big)(ER^{\rho-1})^{\frac{1}{\rho-1}} \leq (EQ^{\rho-1})^{\frac{1}{\rho-1}}.$$

Koska nyt oletetaan $\rho > 1$, niin $\log EM^{\rho-1} < \log EM^{\rho} = 0$ eli $EM^{\rho-1} < 1$. Näin ollen epäyhtälön merkki säilyy kun jaetaan puolittain termillä $1-(EM^{\rho-1})^{\frac{1}{\rho-1}}$:

$$(ER^{\rho-1})^{\frac{1}{\rho-1}} \leq \frac{(EQ^{\rho-1})^{\frac{1}{\rho-1}}}{\Big(1-(EM^{\rho-1})^{\frac{1}{\rho-1}}\Big)}.$$

Haluttu tulos saadaan korottamalla puolittain potenssiin $(\rho-1)$ :

$$ER^{\rho-1} \leq \frac{EQ^{\rho-1})}{\left(1-(EM^{\rho-1})^{\frac{1}{\rho-1}}\right)^{\rho-1}} < \infty.$$

Äärellisyyden perusteena on $EQ^{\rho-1} < \infty$ ja $EM^{\rho-1} < 1$.

Voidaan siis yhteenvetona todeta, että kaikilla $\rho > 0$ on voimassa $E_3 < \infty$.

Viimeiseksi osoitetaan $E_4$:n äärellisyys.

Jos $0 < \rho < 1$ niin apulauseen 3.6 nojalla

$$E_4 = E1_{0<-Q<MR}((MR)^\rho - (Q+MR)^\rho) \leq E(-Q)^\rho = E|Q|^\rho < \infty.$$

Jos $\rho > 1$ niin apulauseen 3.6 nojalla

$$E_4 \leq \rho E1_{0<-Q<MR}\rho(-Q)(MR)^{\rho-1} \leq \rho E|Q|EM^{\rho-1}E1_{R>0}R^{\rho-1}.$$

$E|Q|$, $EM^{\rho-1}$ ja $E1_{R>0}R^{\rho-1}$ on osoitettu äärellisiksi, joten $E_4 < \infty$ kaikilla $\rho > 0$. Siis

$$E_1 + E_2 + E_3 + E_4 < \infty,$$

joten (4.4) on voimassa. Näin ollen päälauseen 1 tulos on voimassa. Sijoittamalla $U_0 = t$ se voidaan kirjoittaa muotoon

$$P(R > U_0) \sim CU_0^{-\rho} \text{ kun } U_0 \to \infty.$$

Vakion C voi lisäksi esittää apulauseen 3.4 nojalla muodossa

$$\frac{E|((Q+MR)^+)^\rho - ((MR)^+)^\rho|}{\rho E(M^\rho \log M)}.$$

# 5. PÄÄLAUSE 2

Toinen Goldien ja tämän tutkielman päälauseista tarjoaa esityksen sille, kuinka nopeasti $P(R > t)$ lähestyy asymptoottiaan $Ct^{-\rho}$ kun $t \to \infty$. Olkoot aiemmat oletukset muuttujista $M$, $Q$ ja $R$ voimassa, ja olkoon lisäksi olemassa sellainen $0 < \beta < 1$, että ehdot

**(2.8)** $E|M|^{\rho+\beta} < \infty$ ja

**(2.9)** $E|Q|^{\rho+\beta} < \infty$

ovat voimassa. Olkoon taas $\eta(ds) = e^{\rho s}P(\log M \in ds)$ ja $g(s) = e^{\rho s}(P(R > e^s) - (MR > e^s))$.

**Päälause 2**: Jos

**(5.1)** $\int_{\mathbb{R}} |P(R > t) - P(MR > t)|t^{\rho+\beta-1}dt < \infty$,

niin

$$(5.2) \qquad t^\rho P(R > t) = C - \frac{1}{2\pi}\operatorname{Re}\left(\int_\zeta t^{-iz}\frac{\hat{g}(z)}{1-\hat{\eta}(z)}dz\right) + O(t^{-\beta/2}) \text{ kun } t \to \infty.$$

Päälauseen 2 esityksessä $\zeta$ on jokin suljettu, itseään leikkaamaton polku avoimessa alueessa $D = \{-\beta < \operatorname{Im} z < 0\}$, joka sulkee sisäänsä kaikki $1 - \hat{\eta}(z)$:n nollakohdat alueessa $D$.

On huomionarvoista, että Goldien artikkelissa on virhe tämän lauseen esityksessä. Kyseessä on Goldien artikkelin lause 3.2 ja sen esityksessä lukee

$$t^\rho P(R > t) = C - \frac{1}{2\pi}\operatorname{Re}\left(\int_\zeta e^{-izt}\frac{\hat{g}(z)}{1-\hat{\eta}(z)}dz\right) + O(t^{-\beta/2}) \text{ kun } t \to \infty.$$

Integrandina kuuluu kuitenkin olla $e^{-izt}$:n sijaan $e^{-iz\log t}$ eli $t^{-iz}$.

*Päälauseen 2 todistus:* Apulausetta 3.7 eli Riemann-Lebesquen lemmaa tullaan käyttämään toistuvasti. Osoitetaan ensin sen perusteella, että alueessa $\bar{D}$ on voimassa $\hat{\eta}(z) \to 0$ kun $\operatorname{Re} z \to \pm\infty$:

Koska $M$:llä on tiheysfunktio, on olemassa $f(u) \in L^1(\mathbb{R})$, jolla on voimassa $\eta(du) = e^{\rho u} P(\log M \in du) = f(u)du$. Reaalisella $z$ voimme suoraan todeta

$$\hat{\eta}(z) = \int_{\mathbb{R}} f(u)e^{iuz}du \to 0 \text{ kun } z \to \pm\infty.$$

Olkoon sitten $z \in \bar{D} = \{-\beta \leq \operatorname{Im} z \leq 0\}$. Voimme kirjoittaa $z = x + iy,\ -\beta \leq y \leq 0$. Ehdon (2.8) voi kirjoittaa yhtäpitävästi muodossa

$$\tilde{\eta}(\beta) = \int_{\mathbb{R}} e^{\beta t}\eta(dt) < \infty.$$

Tällöin $\tilde{\eta}(-y) < \infty$ kaikilla $z \in \bar{D}$ eli on mahdollista määrittää funktio $f_y(t)dt = e^{-yt}\eta(dt) \in L^1(\mathbb{R})$. Näin ollen

$$\begin{aligned}
\hat{\eta}(z) &= \int_{\mathbb{R}} e^{it(x+iy)}\eta(dt) \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{itx}e^{-ty}\eta(dt) \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{itx}f_y(t)dt \to 0, \text{ kun x} \to \pm\infty.
\end{aligned}$$

Osoitetaan seuraavaksi, että $1 - \hat{\eta}(z)$:lla on enintään äärellinen määrä nollakohtia alueessa $D$ ja että origo on ainoa nollakohta $\partial D$:ssä. Mitta $\eta$ ei ole aritmeettinen, joten origo on $1 - \hat{\eta}(z)$:n ainoa nollakohta reaaliakselilla. Lähteen [Palka] lauseen VIII.1.5 seurauksen nojalla diskreetin funktion $f$ nollakohtien joukko alueessa $U$, jossa $f$ ei ole vakio, koostuu erakkopisteistä. Funktio $1 - \hat{\eta}(z)$ on analyyttinen ja ei-vakio alueessa $D$, joten sen nollakohtien joukko alueessa $D$ koostuu erakkopisteistä. On myös mahdollista valita sellainen $\beta$, että $\hat{\eta}(z) \neq 1$ kaikilla $z$, joilla $\operatorname{Im} z = \beta$. Tällöin origo on ainoa $1 - \hat{\eta}(z)$:n nollakohta $\partial D$:ssä. Alueessa $D$ on voimassa $\hat{\eta}(z) \to 0$ kun $\operatorname{Re} z \to \pm\infty$, joten $1 - \hat{\eta}(z)$:n mahdolliset nollakohdat sijaitsevat jossain $\bar{D}$:n rajoitetussa, siis kompaktissa osajoukossa. Kompaktin joukon äärettömällä osajoukolla on vähintään yksi kasautumispiste, joten erakkopisteistä koostuva nollakohtien joukko on äärellinen. Yksi seurauksista on, että on mahdollista valita polku $\zeta$, joka kiertää kaikki $1 - \hat{\eta}(z)$:n nollakohdat alueessa $D$.

Goldie esittää artikkelissaan päälauseen 2 todistuksen yleisemmässä tapauksessa, jossa riittää, että mitalla $\eta$ on absoluuttisesti jatkuva komponentti, siis että $\eta^{(n)}$ on absoluuttisen jatkuva jollakin $n \in \mathbb{N}$. Tämä abstraktilta tuntuva ehto tuo todistukseen huomattavasti lisää pituutta ja teknisyyttä verrattuna tässä tutkielmassa oletettuun tilanteeseen, jossa $\eta$ on absoluuttisesti jatkuva. Goldien yleisempää tapausta ei näin ollen todisteta apulausetta 3.8 pitemmälle, vaan kyseistä apulausetta käytetään asettamalla $\chi = \mu = \eta$. Tämä edellyttää, että $\eta$:n toinen momentti on äärellinen ja että $\eta$:n tiheysfunktio on kahdesti derivoituva. Tehtyjen oletusten puitteissa näin on asian laita, sillä (2.7):n ollessa voimassa

$$m_2 = \int_{\mathbb{R}} u^2 \eta(du) = EM^{\rho} \log^2 M < \infty,$$

ja $\eta(du) = e^{\rho u} P(\log M \in du)$ on kahdesti derivoituva, kun $M$:n tiheysfunktio oletetaan kahdesti derivoituvaksi. Näin ollen apulauseen 3.8 nojalla

$$\sum_{n=0}^{\infty} \chi * \mu^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \eta^{(n)}$$

on jatkuva tiheysfunktionaan $p$, jolle kaikilla $x \in \mathbb{R}$ on voimassa

$$p(x) = \frac{1}{m} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixz} \hat{\eta}(z) \left( \frac{1}{1 - \hat{\eta}(z)} - \frac{1}{-imz} \right) dz - \frac{1}{m} \eta(x, \infty).$$

Päälauseen I todistuksessa esitelty uusiutumismitta $v$ voidaan nyt kirjoittaa muodossa

**(5.2.1)** $$v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^{(n)}(x) = \delta_0(x) + p(x).$$

Yleisesti on voimassa

$$\int_x^{\infty} e^{\beta t} \eta(dt) \geq e^{\beta x} \int_x^{\infty} \eta(dt) = e^{\beta x} \eta(x, \infty),$$

Ehdosta (2.8) seuraa

$$\int_x^{\infty} e^{\beta t} \eta(dt) = o(1) \text{ kun } x \to \infty.$$

Näin ollen

$$\eta(x,\infty) = o(e^{-\beta x}) \text{ kun } x \to \infty,$$

ja voidaan kirjoittaa

$$\textbf{(5.3)} \qquad p(x) = \frac{1}{m} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixz}\hat{\eta}(z)\left(\frac{1}{1-\hat{\eta}(z)} - \frac{1}{-imz}\right)dz + o(e^{-\beta x}) \text{ kun } x \to \infty.$$

Integroimispolku kulkee origon yli, joten osoitetaan seuraavaksi, että origo on poistuva erikoispiste. Riittää osoittaa, että

$$\lim_{z\to 0} e^{-ixz}\hat{\eta}(z)\left(\frac{1}{1-\hat{\eta}(z)} - \frac{1}{-imz}\right)$$

on olemassa ja äärellinen. Termi $e^{-ixz}\hat{\eta}(z)$ on rajoitettu ja analyyttinen koko alueessa $\bar{D}$ , joten sen voi jättää pois tarkastelusta. Voidaan kirjoittaa

$$\hat{\eta}(z) = 1 + imz + A(z)z^2 \text{ kun } z \to 0,\ A(z) = \frac{m_2}{2} + o(z),$$

ja

$$\begin{aligned}
&\lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{1-\hat{\eta}(z)} - \frac{1}{-imz}\right) \\
&= \lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{1-(1-imz-A(z)z^2)} - \frac{1}{-imz}\right) = \\
&= \lim_{z\to 0}\frac{-imz-(-imz-A(z)z^2)}{(-imz-A(z)z^2)-imz} \\
&= \lim_{z\to 0}\frac{A(z)}{m^2-zimA(z)} \\
&= \frac{m_2}{2m^2} = \frac{E(M^\rho \log^2 M)}{2E(M^\rho \log M)^2} < \infty.
\end{aligned}$$

Funktiosta

$$f(z) = \frac{1}{1-\hat{\eta}(z)} - \frac{1}{-imz}$$

voisi siis tehdä analyyttisen origossa asettamalla

$$f(0) = \frac{E(M^\rho \log^2 M)}{2E(M^\rho \log M)^2}.$$

Näin ollen origo on poistuva erikoispiste esityksessä (5.3).

Tutkitaan seuraavaksi funktion $f$ epäjatkuvuuskohtia alueessa $D$. Termillä $1/(-imz)$ ei ole muita nollakohtia kuin origo. Termillä $1-\hat{\eta}(z)$ on nollakohtia enintään äärellinen määrä alueessa $D$. Oletetaan ensin, että nollakohtia on vain yksi ja merkitään sitä $z_0$:lla. Olkoon kyseisen nollakohdan kertaluku $m$. Tällöin $f$ voidaan esittää $z_0$:n punkteeratussa ympäristössä $\{U(z_0, r)\backslash z_0\}$ yksikäsitteisenä Laurent-sarjana

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \ldots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + \ldots$$

Kertomalla kyseinen yhtälö puolittain $(z-z_0)^{m-1}$:lla voidaan kirjoittaa

$$(z-z_0)^{m-1}f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)} + a_{-m+1} + a_{-m+2}(z-z_0) + \ldots,$$

ja saadun yhtälön oikea puoli on termiä

$$\frac{a_{-m}}{(z-z_0)}$$

lukuunottamatta jonkin analyyttisen funktion Taylor-sarjaesitys. Näin ollen kun $\gamma$ on Jordan-polku, on voimassa

$$\int_\gamma (z-z_0)^{m-1}f(z)dz = \int_\gamma \frac{a_{-m}}{(z-z_0)}dz = 2\pi i a_{-m}.$$

Toisin sanoen $a_{-m}$ on funktion $(z-z_0)^{m-1}f(z)$ residy pisteessä $z_0$. Vastaavasti päätellen voimme todeta, että $a_{-m+1}$ on funktion $(z-z_0)^{m-2}f(z)$ residy pisteessä $z_0$ ja niin edelleen. Näin ollen vaihtaen indeksointia $a_{-j} \to a_j$ on mahdollista kirjoittaa

$$f(z) - \sum_{j=1}^{j=m} \frac{a_j}{(z-z_0)^j} = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \ldots,$$

ja saadun yhtälön oikea puoli on nyt analyyttisen funktion Taylor-sarjaesitys. Määritellään yhtälön vasen puoli $\omega(z)$:ksi:

$$\omega(z) = \frac{1}{1-\hat{\eta}(z)} - \frac{1}{-imz} - \sum_{j=1}^{j=m} \frac{a_j}{(z-z_0)^j} \ ,$$

Näin määriteltynä $\omega(z)$ on analyyttinen alueessa $D$ ja jatkuva sekä rajoitettu alueessa $\bar{D}$. Luvut $a_j$ ovat kullakin $j = 1, \ldots, m$ funktion

$$\frac{(z-z_0)^{j-1}}{1-\hat{\eta}(z)}$$

residyja kohdassa $z = z_0$.

Jos $1-\hat{\eta}(z)$:lla on useampia nollakohtia alueessa $D$, yhteensä $m$ kpl, niin summan voi kirjoittaa muotoon

$$\sum_{k=1}^{l} \sum_{j=1}^{j=m_l} \frac{a_{j,l}}{(z-z_{0,l})^j},$$

missä $m_l$ on $k$:nnen nollakohdan kertaluku. Yksinkertaisuuden vuoksi esitys jätetään jatkossa yhtä nollakohtaa vastaavaan muotoon. Residyitä on enintään äärellinen määrä, joten summalausekkeen arvo on joka tapauksessa rajoitettu ja ongelmaa esim. integroituvuuden kannalta ei ole. Todistuksen lopussa osoitettava apulauseen 3.8 soveltuvuus esitetään kuitenkin tilanteessa, jossa nollakohtia voi olla useita.

Yhtälön (5.3) voi nyt kirjoittaa muodossa

$$\textbf{(5.4)} \qquad p(x) - \frac{1}{m} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixz} \hat{\eta}(z) \omega(z) dz + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixz} \hat{\eta}(z) \sum_{j=1}^{j=m} \frac{a_j}{(z-z_0)^j} dz$$
$$+ o(e^{-\beta x}) \text{ kun } x \to \infty.$$

Koska funktiot $\hat{\eta}(z)$, $e^{izx}$ ja $\omega(z)$ ovat kaikki analyyttisiä alueessa $D$ ja jatkuvia $\bar{D}$ :ssä, niin $e^{-ixz}\hat{\eta}(z)\omega(z)$ on analyyttinen $D$:ssä ja jatkuva $\bar{D}$:ssä.

Osoitetaan seuraavaksi, että esityksen (5.4) ensimmäinen integraali sisältyy virhetermiin

$o(e^{-\beta x})$.

Cauchyn integraalilauseen tavallisen muodon perusteella jos funktio $f$ on analyyttinen avoimessa alueessa $U$ ja jos $\gamma \in U$ on Jordan-polku, niin on voimassa

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

Lähteessä Palka (1995) on Cauchyn lauseen ehtoja lieventävä lause 5.7, joka on esitetty ilman todistusta ja nimellä Goursat'n lause. Se alkaa seuraavasti: "Olkoon $\gamma$ Jordan-polku kompleksitasossa ja olkoon $U$ sen sisus, ja olkoon $f : \bar{U} \to \mathbb{C}$ jatkuva funktio, joka on analyyttinen alueessa $U$. Tällöin

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0."$$

Näin ollen kun $\gamma$ on Jordan-polku alueessa $\bar{D}$, on voimassa

$$\int_{\gamma} e^{-ixz}\hat{\eta}(z)\omega(z)dz = 0.$$

Valitaan Jordan-poluksi $\gamma$ suorakulmio, joka yhdistää $\bar{D}$:n pisteet $(-b, b, b - i\beta, -b - i\beta)$, $b \in \mathbb{R}$. Aiemmin on osoitettu Riemann-Lebesquen lemmaan perustuen, että alueessa $\bar{D}$ pätee $\hat{\eta}(z) \to 0$ kun $\mathrm{Re}(z) \to \pm\infty$. Näin ollen $e^{-ixz}\hat{\eta}(z)\omega(z) \to 0$ kun $\mathrm{Re}(z) \to \pm\infty$, joten kun $b$:n annetaan lähestyä ääretöntä, integrandi lähestyy nollaa. Näin ollen

$$\lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{-b-i\beta} e^{-ixz}\hat{\eta}(z)\omega(z)dz = 0 = \int_{b-i\beta}^{b} e^{-ixz}\hat{\eta}(z)\omega(z)dz.$$

Goursat'n lemman perusteella integraalin arvo yli $\partial D$:n on nolla, joten edellisestä yhtälöstä seuraa

$$\lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} e^{-ixz}\hat{\eta}(z)\omega(z)dz + \int_{b-i\beta}^{-b-i\beta} e^{-ixz}\hat{\eta}(z)\omega(z)dz = 0.$$

Vastapolulle pätee yleisesti

$$\int_\gamma f dz = -\int_{-\gamma} f dz,$$

joten voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixz}\hat{\eta}(z)\omega(z)dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix(z-i\beta)}\hat{\eta}(z-i\beta)\omega(z-i\beta)dz \\
&= e^{-\beta x}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-xiz}\hat{\eta}(z-i\beta)\omega(z-i\beta)dz.
\end{aligned}$$

Nyt $|\hat{\eta}(z-i\beta)| = \tilde{\eta}(\beta)$ kun $z \in \mathbb{R}$, joten ehdosta (2.8) seuraa $\hat{\eta}(z-i\beta) \in L^1(\mathbb{R})$. Näin ollen viimeisen rivin integraali on Riemann-Lebesquen lemman nojalla $o(1)$ kun $x \to \infty$ ja viimeinen rivi on tällöin $o(e^{-\beta x})$. Yhtälön (5.4) voi siis kirjoittaa yhtäpitävään muotoon

$$\textbf{(5.5)} \qquad p(x) - \frac{1}{m} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixz}\hat{\eta}(z)\sum_{j=1}^{m}\frac{a_j}{(z-z_0)^j}dz + o(e^{-\beta x}) \text{ kun } x \to \infty.$$

Muodostamalla vastaavan Jordan-polun kuin aiemmin ja antamalla taas $b$:n lähestyä ääretöntä, voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty-i\beta}^{\infty-i\beta} e^{-ixz}\hat{\eta}(z)\sum_{j=1}^{m}\frac{a_j}{(z-z_0)^j}dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix(z-i\beta)}\hat{\eta}(z-i\beta)\sum_{j=1}^{m}\frac{a_j}{(z-z_0-i\beta)^j}dz \\
&= e^{-x\beta}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixz}\hat{\eta}(z-i\beta)\sum_{j=1}^{m}\frac{a_j}{(z-z_0-i\beta)^j}dz \\
&= o(e^{-x\beta}) \text{ kun } x \to \infty.
\end{aligned}$$

Viimeinen rivi perustuu taas Riemann-Lebesquen lemmaan, jota voi käyttää koska residysummalauseke on rajoitettu ja $\hat{\eta}(z-i\beta) \in L^1(\mathbb{R})$. Ylläesitetty integraali siis sisältyy yhtälön (5.5) virhetermiin $o(e^{-\beta x})$, joten sen voi siis lisätä yhtälöön (5.5) ja kirjoittaa

$$p(x) - \frac{1}{m} = -\frac{1}{2\pi}\Big(\int_{-\infty-i\beta}^{\infty-i\beta} e^{-ixz}\hat{\eta}(z)\sum_{j=1}^{m}\frac{a_j}{(z-z_0)^j}dz - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixz}\hat{\eta}(z)\sum_{j=1}^{m}\frac{a_j}{(z-z_0)^j}dz\Big) + o(e^{-\beta x})$$

kun $x \to \infty$.

Tässä esityksessä integraalien summa on sama kuin integraalin yli minkä tahansa alueessa $D$ olevan suljetun ja kaikki $1 - \hat{\eta}(z)$:n nollakohdat kiertävän polun $\zeta$. Huomataan myös, että $1 - \hat{\eta}(z)$:n nollakohdissa $\hat{\eta}(z) = 1$, joten $\hat{\eta}(z)$:n voi poistaa integraalista. Voidaan siis kirjoittaa

$$\textbf{(5.6)} \qquad p(x) - \frac{1}{m} = -\frac{1}{2\pi}\int_{\zeta} e^{-ixz}\sum_{j=1}^{m}\frac{a_j}{(z-z_0)^j}dz + o(e^{-\beta x}) \text{ kun } x \to \infty$$

Yleisesti pätee, että kun suljettu polku $\zeta$ kiertää pisteen $z_0$ kertaalleen vastapäivään, niin integraalin

$$\int_{\zeta}\frac{dz}{(z-z_0)^j}$$

arvo on $2\pi i$ kun $j = 1$, 0 kun $j \neq 1$. Yhtälön (5.6) voi siis kirjoittaa yhtäpitävästi muodossa

$$p(x) - \frac{1}{m} = -\frac{1}{2\pi}\int_{\zeta} e^{-ixz}\frac{a_1}{(z-z_0)^j}dz + o(e^{-\beta x}) \text{ kun } x \to \infty.$$

Aiemmin tehtyjen määrittelyiden nojalla termi $a_1$ on sama kuin termi $a_{-1}$ meromorfisen funktion

$$f = \frac{1}{1-\hat{\eta}(z)}$$

Laurent-sarjaesityksessä

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \ldots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + \ldots$$

Toisin sanoen $a_1$ on ainoa termi joka ei häviä kun funktiota $f(z)$ integroidaan yli pisteen $z_0$ kiertävän Jordan-polun. Yhtälön (5.6) voi siis kirjoittaa yhtäpitävästi muodossa

$$(\mathbf{5.7}) \qquad p(x) - \frac{1}{m} = -\frac{1}{2\pi}\int_{\zeta} e^{-ixz}\frac{dz}{1-\hat{\eta}(z)} + o(e^{-\beta x}) \text{ kun } x \to \infty,$$

joka vihdoin on jatkoa ajatellen sopiva muoto.

Seuraavaksi todetaan, että päälauseen 2 ehto (5.1) voidaan esittää muodossa $e^{\beta s}g(s) \in L^1(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |e^{\beta s}g(s)ds| &= \int_{-\infty}^{\infty} |e^{(\beta+\rho)s}(P(R > e^s) - P(MR > e^s))|ds \\
&= \int_{0}^{\infty} |t^{\beta+\rho}(P(R > t) - P(MR > t))|\frac{dt}{t} \\
&= \int_{0}^{\infty} |P(R > t) - P(MR > t)|t^{\rho+\beta-1}.
\end{aligned}$$

Näin ollen on sallittua käyttää Fubinin lausetta samankaltaisella tavalla kuin päälauseen 1 todistuksessa:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} e^{\beta u}|g(u)|du &= (1-\beta)\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{u}^{\infty} e^{(\beta-1)s}ds\right)e^{u}|g(u)|du \\
&= (1-\beta)\int_{-\infty}^{\infty} e^{(\beta-1)s}\left(\int_{-\infty}^{s} e^{u}|g(u)|du\right)ds \\
&= (1-\beta)\int_{-\infty}^{\infty} e^{\beta s}\left(\int_{-\infty}^{s} e^{-(s-u)}|g(u)|du\right)ds \\
&= (1-\beta)\int_{-\infty}^{\infty} e^{\beta s}K * |g(s)|ds.
\end{aligned}$$

Johtopäätös on $e^{\beta s}K * g(s) \in L^1(\mathbb{R})$. Nyt voidaan käyttää apulausetta 3.1. Olkoon $\varepsilon > 0$:

$$
\begin{aligned}
& e^{\beta(s+\varepsilon)} K * g(s+\varepsilon) \\
&= e^{\beta(s+\varepsilon)} \int_{-\infty}^{s+\varepsilon} e^{-((s+\varepsilon)-u)} g(u) du \\
&= e^{(\beta-1)\varepsilon} e^{\beta s} \int_{-\infty}^{s+\varepsilon} e^{-(s-u)} g(u) du \\
&\geq e^{(\beta-1)\varepsilon} e^{\beta s} \int_{-\infty}^{s} e^{-(s-u)} g(u) du \\
&= \theta(\varepsilon) e^{\beta s} K * g(s).
\end{aligned}
$$

Viimeisellä rivillä on valittu $\theta(\varepsilon) = e^{(\beta-1)\varepsilon}$ ja tällöin $\theta(\varepsilon) \uparrow 1$ kun $\varepsilon \downarrow 0$. Apulauseen 3.1 nojalla $e^{\beta s} K * g(s)$ on oleellisesti Riemann-integroituva. Tästä seuraa myöhemmin käytettävä tulos: $e^{\beta s} K * g(s) \to 0$ kun $s \to \infty$.

Päälauseen 1 todistuksessa osoitettiin, että kun $n \to \infty$ niin tuloksesta

$$
r(s) = g * \nu_{n-1}(ds) + \delta_n(s)
$$

seuraa

$$
K * r(s) = K * g * \nu(s).
$$

Esityksen (5.2.1) perusteella sama tulos voidaan kirjoittaa muotoon

$$
K * r(s) = K * g * \delta_0(s) + K * g * p(s).
$$

Lasketaan

$$
\begin{aligned}
g * \frac{1}{m}(s) &= \frac{1}{m} \int_{\mathbb{R}} g(s) ds \\
&= \frac{1}{m} \int_{\mathbb{R}} e^{\rho s} (P(R > e^s) - P(MR > e^s)) ds \\
&= \frac{1}{m} \int_{\mathbb{R}} t^{\rho-1} (P(R > t) - P(MR > t)) dt = C.
\end{aligned}
$$

Näin ollen voimme kirjoittaa

$$\textbf{(5.8)}\quad K * (r - C)(s) = K * g * \delta_0(s) + K * g * (p - \tfrac{1}{m})(s).$$

Määritellään esityksen (5.7) integraalitermi funktioksi $c$:

$$c(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{\zeta} e^{-izs} \frac{dz}{1 - \hat{\eta}(z)}.$$

Merkitään $z = x + iy$. Koska $1 - \hat{\eta}(z)$:llä on enintään äärellinen määrä nollakohtia alueessa $D$, on mahdollista valita niin pieni $\varepsilon > 0$, että kaikki $1 - \hat{\eta}(z)$ nollakohdat alueessa $D$ ovat välillä $\varepsilon < -y < \beta - \varepsilon$.

Nyt jos $s > 0$, niin on voimassa

$$|e^{-izs}| = e^{sy} \leq e^{-\varepsilon s}.$$

Puolestaan jos $s < 0$, niin on voimassa

$$|e^{-izs}| = e^{sy} \leq e^{-(\beta-\varepsilon)s}.$$

Termiä $e^{-izs}$ lukuunottamatta funktion $c(s)$ arvo on summa $1 - \hat{\eta}(z)$:n nollakohtien residyjen arvoista. Kyseiset arvot ovat äärellisiä ja niitä on äärellinen määrä, joten $c(s)$ on $O(e^{-\varepsilon s})$ kun $s \to \infty$ ja $O(e^{-(\beta-\varepsilon)s})$ kun $s \to -\infty$. Huomataan, että $O(e^{-\varepsilon s})$ on itseisarvoltaan pienempi kuin $o(e^{\beta s})$ kun $s \to \infty$ ja $O(e^{-(\beta-\varepsilon)s})$ puolestaan on itseisarvoltaan pienempi kuin $o(e^{\beta s})$ kun $s \to -\infty$. Kuten todettua, $e^{\beta s} g(s) \in L^1(\mathbb{R})$, joten konvoluutio $g * c$ on hyvin määritelty ja äärellinen. Näin ollen voimme hyödyntää Fubinin lausetta konvoluution $g * c$ laskemisessa:

$$
\begin{aligned}
g * c(s) &= \int_{\mathbb{R}} g(s-u)c(u)du \\
&= \int_{\mathbb{R}} g(s-u)\frac{1}{2\pi}\int_{\zeta} e^{-izu}\frac{dz}{1-\hat{\eta}(z)}du \\
&= \int_{\mathbb{R}} g(u)\frac{1}{2\pi}\int_{\zeta} e^{-iz(u+s)}\frac{dz}{1-\hat{\eta}(z)}du \\
&= \int_{\zeta} \frac{1}{2\pi}e^{-izs}(\int_{\mathbb{R}} e^{izu}g(u)du)\frac{dz}{1-\hat{\eta}(z)} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\zeta} e^{-izs}\frac{\hat{g}(z)dz}{1-\hat{\eta}(z)}.
\end{aligned}
$$

Määritellään $p_1$ seuraavasti:

$$p_1(s) = p(s) - m^{-1} + c(s).$$

Esityksen (5.7) ja $c(s)$:n määritelmän nojalla on voimassa

$$e^{\beta s}p_1(s) = o(1) \text{ kun } s \to \infty.$$

Voimme lisäämällä yhtälön (5.8) molemmille puolille termin $K * g * c(s)$ kirjoittaa

$$\textbf{(5.9)}\quad K * (r - C + g * c)(s) = K * g * \delta_0(s) + K * g * p_1(s).$$

Tutkitaan seuraavaksi yhtälön (5.9) oikean puolen konvoluutioiden käyttäytymistä kun $s \to \infty$. Kertomalla ensimmäisen konvoluution sopivasti termeillä $e^{-\beta s}$, $e^{\beta s}$, $e^{-\beta u}$ ja $e^{\beta u}$ voidaan kirjoittaa

$$
\begin{aligned}
K * g * \delta_0(s) &= e^{-\beta s}\int_{\mathbb{R}} e^{\beta(s-u)}K * g(s-u)e^{\beta u}\delta_0(du) \\
&= e^{-\beta s}e^{\beta s}K * g(s).
\end{aligned}
$$

Aiemmin osoitettiin, että $e^{\beta s}K * g(s) = o(1)$ kun $s \to \infty$. Näin ollen

$$K * g * \delta_0(s) = o(e^{-\beta s}) \text{ kun } s \to \infty.$$

Vastaavasti jälkimmäisen konvoluution voi kirjoittaa muotoon

$$K * g * p_1(s) = e^{-\beta s} \int_{\mathbb{R}} e^{\beta(s-u)} K * g(s-u) e^{\beta u} p_1(du).$$

Kun $u < M$ ja $s \to \infty$, niin $(s-u) \to \infty$ ja tällöin $e^{\beta(s-u)} K * g(s-u) \to 0$. Toisaalta kun $u \to \infty$ niin $e^{\beta u} p_1(u) \to 0$. Näin ollen

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\beta(s-u)} K * g(s-u) e^{\beta u} p_1(du) = o(1) \text{ kun } s \to \infty,$$

joten myös jälkimmäiselle konvoluutiolle on voimassa

$$K * g * p_1(s) = o(e^{-\beta s}) \text{ kun } s \to \infty.$$

Yhtälö (5.9) voidaan siis kirjoittaa muotoon

**(5.10)** $K * (C - r - g * c)(s) = o(e^{-\beta s})$ kun $s \to \infty$.

Merkitään vielä

$$r_1(s) = C - r(s) - 1_{s>0} g * c(s).$$

Toisin sanoen

$$r(s) = C - 1_{s>0} g * c(s) - r_1(s).$$

Yhtälön (5.10) vasemman puolen ja konvoluution $K * r_1(s)$ erotus on

$$\begin{aligned} & K * (C - r - g * c)(s) - K * r_1(s) \\ &= K * g * c(s) 1_{s<0} \\ &= \int_{-\infty}^{0} e^{-(s-u)} g * c(u) du \\ &= e^{-s} \int_{-\infty}^{0} e^{u} g * c(u) du \\ &= O(e^{-s}) \text{ kun } s \to \infty. \end{aligned}$$

$O(e^{-s})$ on itseisarvoltaan pienempi kuin $o(e^{-\beta s})$ kun $s \to \infty$, joten esityksestä (5.10) seuraa

**(5.11)** $K * r_1(s) = o(e^{-\beta s})$ kun $s \to \infty$.

Lopullisen tuloksen esittämiseen tarvitaan apulausetta 3.9. Osoitetaan seuraavaksi, että apulauseen 3.9 ehdot ovat voimassa.

$$\begin{aligned}\hat{K}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi t} e^{-t} dt = \int_{\mathbb{R}} e^{t(i\xi - 1)} dt \\ &= \frac{-1}{i\xi - 1} = \frac{1}{1 - i\xi} \neq 0 \ \forall \xi \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Asetetaan

$$w(z) = 1 - iz.$$

Tällöin $|w'(z)| = 1$, joten valitsemalla $a = \infty$, $p = 1$ ja $C > 1$ apulauseen ensimmäinen oletus on voimassa:

$$|w'(z)| < C(1 + |z|)^{p-1}, \ -a < \operatorname{Im} z < 0,$$

$$\lim_{\eta \downarrow 0} w(\xi - i\eta) = \lim_{\eta \downarrow 0} 1 - i\xi - \eta = 1 - i\xi = \frac{1}{\hat{K}(\xi)}.$$

Vielä pitää osoittaa, että $\operatorname{Re} r_1(s) = \operatorname{Re}(-r - g * c)(s)$ toteuttaa ehdon (3.9.1). Osoitetaan ehdon voimassaolo ensin $-r(s)$:lle ja sitten $-\operatorname{Re} g * c(s)$:lle.

Valitaan $x_0$ niin suureksi, että $y \leq e^{-\beta x_0/2} \leq \frac{1}{\rho} \log 4$. Tällöin $(e^{\rho y} - 1) \leq \rho y$ ja voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned}-r(x) - (-r(x+y) &= r(x+y) - r(x) \\ &= e^{\rho(x+y)} P(R > e^{x+y}) - e^{\rho x} P(R > e^x) \\ &\leq (e^{\rho y} - 1) e^{\rho x} P(R > e^x) \\ &\leq 3\rho y \cdot 2C.\end{aligned}$$

Toiseksi viimeisen rivin perustelu on, että $e^{\rho x} P(R > e^x)$ on (paljon) pienempi kuin $2C$, kun $C$ on yhtälössä (4.3) määritelty vakio.

$$\operatorname{Re} g * c(s) = \operatorname{Re}\left( \frac{1}{2\pi} \int_{\zeta} e^{-izs} \frac{\hat{g}(z)dz}{1-\hat{\eta}(z)} \right).$$

Kyseessä on äärellinen summa äärellisiä termejä, jotka ovat funktion

$$f(s) = e^{-izs} \frac{\hat{g}(z)dz}{1-\hat{\eta}(z)}$$

residyjä $1-\hat{\eta}(z)$:n nollakohdissa $z_1, z_2, \ldots, z_l$. Residyt ovat muotoa

$$\frac{1}{(j-1)!} \lim_{z \to z_k} \frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}} \left[ (z-z_i)^j (e^{-izs} \frac{\hat{g}(z)dz}{1-\hat{\eta}(z)}) \right],$$

jossa $z_k$ on $k$:s nollakohta ja $j_k$ on sitä vastaava kertaluku. Kunkin residyn arvo riippuu parametristä $s$ ainoastaan $e^{-izs}$:n $(j-1)$:n kertaluvun derivaatan kautta kun $z \to z_k$. Kukin residy on siis muotoa $c_{k,j}(-i)^{j-1}s^{j-1}e^{-iz_k s}$, jossa $c_{k,j}$:t ovat $s$:stä riippumattomia lukuja. Olkoon $j$ suurin kaikista $j_k$. Koska $y < 1$ niin $y^n \leq n$ kaikilla $n \geq 1$. Voidaan siis arvioida ylöspäin mm. seuraavalla tavalla

$$\begin{aligned}(x+y)^{j-1} - x^{j-1} &= \sum_{n=0}^{j-1} \frac{(j-1)!}{n!(j-1-n)!} x^{j-1-n} y^n - x^{j-1} \\ &= \sum_{n=1}^{j-1} \frac{(j-1)!}{n!(j-1-n)!} x^{j-1-n} y^n \\ &\leq j! x^j y.\end{aligned}$$

Kaikilla $z \in D$ on voimassa $\operatorname{Im} z < 0$. Näin ollen kaikilla $y > 0$ on voimassa $0 < e^{y \operatorname{Im} z_k} < 1$ ja toisaalta kun $x_0$:n asetetaan tarpeeksi suureksi niin kaikilla $z_k$ ja kaikilla $x > x_0$ on voimassa $e^{x \operatorname{Im} z_k} x^j \leq 1$. Näin ollen voidaan kunkin residyn kohdalla muodostaa seuraava epäyhtälö:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Re}(e^{-iz_k(x+y)}(x+y)^{j_k-1} - e^{-iz_k x}x^{j_k-1}) \\
&\le e^{x\,\mathrm{Im}\,z_k}(e^{y\,\mathrm{Im}\,z_k}(x+y)^{j-1} - x^{j-1}) \\
&\le e^{x\,\mathrm{Im}\,z_k}((x+y)^{j-1} - x^{j-1}) \\
&\le e^{x\,\mathrm{Im}\,z_k} j! x^j y \\
&\le j! y
\end{aligned}
$$

Myöskin on olemassa $B$, jolle on voimassa

$$c_{k,j} \le B \text{ kaikilla } k \in 1, \ldots, l.$$

Voimme siis kirjoittaa

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Re}(-g * c(x) - (-g * c(x+y)) &= \mathrm{Re}(g * c(x+y) - g * c(x)) \\
&= \mathrm{Re}\left( \frac{1}{2\pi} \int_\zeta e^{-iz(x+y)} \frac{\hat{g}(z)dz}{1-\hat{\eta}(z)} - \frac{1}{2\pi} \int_\zeta e^{-izx} \frac{\hat{g}(z)dz}{1-\hat{\eta}(z)} \right) \\
&\le lBj!y
\end{aligned}
$$

Asettamalla $A = lBj! + 6C\rho$ ja asettamalla $x_0$ niin suureksi, että $x > x_0$ niin on voimsssa sekä $e^{-\beta x/2} \le \frac{1}{\rho} \log 2$ että $z_k e^{x\,\mathrm{Im}\,z_k} x^j \le 1$ kaikilla aina $z_k$, voimme kirjoittaa

$$\mathrm{Re}\, r_1(x) - \mathrm{Re}\, r_1(x+y) \le Ae^{-\beta x/2},\ 0 \le y \le e^{-\beta x/2},\ x > x_0.$$

Tämä tarkoittaa, että $\mathrm{Re}\, r_1(s)$ toteuttaa ehdon (3.9.1), joten apulauseen 3.9 perusteella yhtälöstä (5.11) seuraa

**(5.12)** $\mathrm{Re}\, r_1(s) = O(e^{-\beta s/2})$ kun $s \to \infty$.

Yhtälöiden (5.10) ja (5.12) perusteella on nyt mahdollista kirjoittaa

$$
\begin{aligned}
r(s) &= e^{\rho s} P(R > e^s) \\
&= C - r_1(s) - 1_{s>0}\, g * c(s) \\
&= C - \frac{1}{2\pi} \mathrm{Re} \int_\zeta e^{-izs} \frac{\hat{g}(z)}{1-\hat{\eta}(z)} dz + O(e^{-\beta s/2}) \text{ kun } s \to \infty.
\end{aligned}
$$

Sijoittamalla tähän $t = e^s$ esitys tulee muotoon

$$t^{\rho}P(R > t) = C - \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{Re}\int_{\zeta} t^{-iz}\frac{\hat{g}(z)}{1-\hat{\eta}(z)}dz + O(t^{-\beta/2}) \text{ kun } t \to \infty. \qquad \square$$

**5.1 Integroituvuusehdon voimassaolon osoitus**

Päälause II:n ehtona on (5.1), siis että $e^{\beta s}g(s)$ on integroituva. Tämän voimassaolo tulee vielä todistaa tapauksessa, jossa $R$ toteuttaa satunnaisdifferenssiyhtälön $R =_L Q + MR$. Todistus on täysin analoginen sen kanssa, kuinka luvussa 4.1 todistetaan $g(s)$:n integroituvuus, termi $\rho$ korvataan nyt vain termillä $(\rho + \beta)$. Aiempaan nähden nyt pitää tehdä lisäksi oletukset (2.7)-(2.9), eli

$E|Q|^{\rho+\beta} < \infty$,
$E|M|^{\rho+\beta} < \infty$,
$EM^{\rho}\log^2 M < \infty$.

Apulauseen (3.4) nojalla integroituvuusehto (5.1) on yhtäpitävä seuraavan ehdon kanssa

$$\textbf{(5.13)} \qquad \frac{1}{\rho+\beta}E\left|(X^+)^{\rho+\beta} - (Y^+)^{\rho+\beta}\right| < \infty.$$

Yhtälön (5.13) vasen puoli on vakiota $1/(\rho+\beta)$ vaille $E_1 + E_2 + E_3 + E_4$, jossa

$E_1 = E1_{-Q<MR\le 0}(Q+MR)^{\rho+\beta}$,
$E_2 = E1_{0<MR\le -Q}(MR)^{\rho+\beta}$,
$E_3 = E1_{MR>0,Q>0}((Q+MR)^{\rho+\beta} - (MR)^{\rho+\beta})$,
$E_4 = E1_{0<-Q<MR}((MR)^{\rho+\beta} - (Q+MR)^{\rho+\beta})$.

$E_1 \le E|Q|^{\rho+\beta} < \infty$

$E_2 \le E(-Q)^{\rho+\beta} \le E|Q|^{\rho+\beta} < \infty$.

$E_3$:n ja $E_4$:n tapauksessa käytetään apulauseita 3.5 ja 3.6 samaan tapaan ja samoin perustein kuin luvussa 4.1.

Jos $\rho + \beta < 1$, niin apulauseen 3.6 nojalla

$E_3 \leq E|(Q+MR)-MR|^{\rho+\beta} \leq E|Q|^{\rho+\beta} < \infty.$

Kun $(\rho+\beta) \in (1,\infty)$, on voimassa

$E_3 \leq (\rho+\beta)c_{\rho+\beta-1}EQ^{\rho+\beta} + (\rho+\beta)c_{\rho+\beta-1}EQEM^{\rho+\beta-1}ER^{\rho+\beta-1}.$

Luvussa 4.1 osoitettiin $ER < \infty$. Jos $\rho+\beta < 2$ niin $R^{\rho+\beta-1} \leq R$ aina kun $R > 1$, joten tässä tapauksessa $ER^{\rho+\beta-1} < \infty$.

Jos $\rho+\beta \geq 2$, niin voimme hyödyntää Minkowskin epäyhtälöä kuten luvussa 4.1. Tulos on

$$ER^{\rho+\beta-1} \leq \frac{EQ^{\rho+\beta-1})}{\left((1-EM^{\rho+\beta-1})^{\frac{1}{\rho+\beta-1}}\right)^{\rho+\beta-1}} < \infty.$$

Äärellisyyden perusteena $EQ^{\rho+\beta-1} < \infty$ ja $EM^{\rho+\beta-1} < 1$, joista jälkimmäinen pätee koska on asetettu $\beta < 1$, jolloin $EM^{\rho+\beta-1} < EM^{\rho} = 1$.

Näin ollen kaikilla $\rho > 0$ ja kaikilla $\beta \in (0,1)$ on voimassa

$$E_3 \leq E|Q+MR-MR|^{\rho+\beta} = E|Q|^{\rho+\beta} < \infty.$$

Jos $0 < \rho+\beta < 1$,

$$\begin{aligned} E_4 &= E1_{0<-Q<MR}((MR)^{\rho+\beta} - (Q+MR)^{\rho+\beta}) \\ &\leq E1_{0<-Q<MR}(-Q)^{\rho+\beta} = E|Q|^{\rho+\beta} < \infty. \end{aligned}$$

Jos $\rho+\beta > 1$,

$$\begin{aligned} E_4 &\leq (\rho+\beta)E_{0<-Q<MR}\rho(-Q)(MR)^{\rho+\beta-1} \\ &\leq (\rho+\beta)E|Q|EM^{\rho+\beta-1}ER^{\rho+\beta-1} < \infty. \end{aligned}$$

Ehto (5.13) on siis voimassa, joten päälauseen 2 tulos on voimassa. Merkitsemällä $U_0 = t$ tuloksen voi esittää muodossa

$$U_0^{\rho}P(R > U_0) = C - \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{Re}\int_{\zeta} U_0^{-iz}\frac{\hat{g}(z)}{1-\hat{\eta}(z)}dz + O(U_0^{-\beta/2}) \text{ kun } U_0 \to \infty.$$

# LÄHDELUETTELO


**Athreya**, K.B; **Mcdonald**, D; **Ney**, P. (1978). Limit theorems for semi-markov processes and renewal theory for Markov chains. *The Annals of Probability* Vol. 6,s. 788-797.

**Feller**, William (1966). *An introduction to probability theory and its applications. Volume II.* John Wiley & Sons, Inc.

**Ganelius**, T.H (1962). The remainder in Wiener's Tauberian theorem. *Acta Universitatis Gothoburgensis*. *Math. gothoburgensia.* 1.

**Goldie**, Charles (1991). Implicit Renewal theory and tails of solutions of random equations. *The annals of Applied Probablility* 1991, Vol. 1, s.126-166.

**Holopainen**, Ilkka (2004). Mitta ja integraali, opetusmoniste.

**Kawata**, Tatsuo (1972). *Fourier analysis in probability theory.* Academic Press, New York and London.

**Nyrhinen**, Harri (2009). Riskiteoria, opetusmoniste.

**Palka**, Bruce (1995). *An introduction to complex function theorem.* Springer.

**Toivanen**, Tanja (2008). *Sijoitusriskit vararikkoteoriassa.* Pro gradu.

**Vervaat**, Wim (1979). On a stochastic difference equation. *Advances in Applied Probability*, Vol 11, 750-783.

**Väisälä**, Jussi. (2004). *Topologia I.* Limes Ry.