INTERPOLAATIO HARDYN AVARUUKSISSA

Pro gradu -tutkielma
Jarmo Mäkelä
Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
huhtikuu 2007

Sisältö

1 Johdanto

Hardyn avaruuksien (H^p) teorian lähtökohdat on löydettävissä 1920-luvulta, jolloin muun muassa matemaatikot G. H. Hardy ja J. E. Littlewood käyttivät klassisia menetelmiä joidenkin analyyttisten funktioiden tarkastelussa. Näiden funktioiden ominaisuuksien tarkastelu johti H^p-avaruuksien teorian muotoutumiseen.

1960-luvulla mielenkiinto H^p-avaruuksia kohtaan kasvoi funktionaalianalyyttisten menetelmien kehittymisen myötä. Tämä lähestymistapa nosti esiin uusia ongelmia sekä luonnollisesti laajensi käytettävissä olevien ratkaisumallien joukkoa. Hardyn avaruuksien teorian tutkiminen yhdistää mielenkiintoisella tavalla reaali- ja kompleksianalyysin sekä funktionaalianalyysin tuloksia.

Tämän tutkielman tavoitteena on tarkastella kompleksitason yksikkökiekon Hardyn avaruuksien $H^p(\mathbb{D})$, interpolaation ja Carlesonin mittojen välistä suhdetta. Tavalliseen tapaan rajoitutaan tutkimaan avaruuksia indeksin arvoilla $1 \leq p \leq \infty$.

Tutkielman toisessa luvussa käsitellään joitakin perustuloksia analyyttisistä ja harmonisista funktioista sekä tutustutaan hieman tarkemmin subharmonisiin funktioihin. Viimeksi mainitut tarjoavat yllättävän hyödyllisen lähestymistavan analyyttisten funktioiden käyttäytymiseen yksikkökiekon reunaa lähestyttäessä. Lisäksi esitellään Blaschken tulo, joka tulee olemaan tärkeässä asemassa koko työn kannalta.

Kolmannessa luvussa määritellään Hardyn avaruudet ja käytetään subharmonisten funktioiden tuloksia apuna syvennyttäessä H^p-avaruuksien teoriaan. Perustavanlaatuisesti ja laajemmin Hardyn avaruuksien teoriaa esittelevät Duren, Garnett, Koosis ja Rudin tässä tutkielmassa lähteinä käytetyissä teoksissa.

Hardyn avaruuksien lisäksi esiin kolmannessa luvussa nousevat myös Nevanlinnan avaruus ja F. Rieszin faktorointiteoreema sekä H^p-funktioiden käyttäytyminen lähestyttäessä yksikkökiekon reunaa. Viimeksi mainitusta suurin osa on Hardyn käsialaa, kuitenkin esimerkiksi Fatou osoitti, että ei-tangentiaalinen raja-arvo on olemassa melkein kaikkialla. Kolmannen luvun päättää lyhyt dualiteettia koskeva osio. Tässä tarvittavan dualiteettiyhtälön esittelivät ensimmäisinä Macintyre ja Rogosinski.

Neljäs luku esittelee interpolaation ongelmaa ja määrittelee sekä välttämättömät että riittävät ehdot sille, että interpolaatio-operaattori kuvaa H^p-avaruuden l^p-avaruuden jonoiksi. Pääosin tämä luku seuraa Durenin lähteenä käytettyä kirjaa, mutta teoreeman 4.9 todistus puolestaan pohjaa Wojtaszczykin teokseen.

Tasaisen interpolaation ongelman H^∞:ssä formuloi R. C. Buck. Joidenkin osittaisten ratkaisujen jälkeen Carleson ratkaisi teoreeman 4.13 tapauksessa $p = \infty$. Hieman myöhemmin Shapiro ja Shields esittivät yksinkertaisemman ratkaisun samaan ongelmaan ja laajensivat teoreeman arvoille $1 \leq p \leq \infty$. Nevanlinna ja Pick puolestaan karakterisoivat jonot $\{z_i\}$ sekä $\{w_i\}$, joiden välillä H^∞-interpolaatio on mahdollista.

Viidennessä luvussa tutustutaan yksikkökiekon Carlesonin mittoihin ja hyperboliseen metriikkaan sekä tarkastellaan erityisesti kyseisten mittojen ja interpolaation välistä yhteyttä. Luku seuraa lähteenä käytettyä Garnettin teosta. Kuudennessa luvussa kerrataan työn keskeisimmät tulokset ja luodaan lyhyt katsaus teorian laajentamiseen.

2 Subharmoniset funktiot ja Blaschken tulo

Luvun tarkoituksena on esitellä ja kerrata joitakin keskeisimpiä esitietoja sekä muutamia tärkeitä käsitteitä, jotka ovat tarpeen tarkasteltaessa H^p-avaruuksien teoriaa. Suurta osaa luvun tuloksista ei johdeta tai todisteta.

Tunnetuksi oletetaan funktioteorian perustulokset, kuten esimerkiksi Helsingin yliopiston kurssilla Funktioteoria I käsitellyt asiat. Aihepiiriin sopivia lähdeteoksia ovat esimerkiksi Olli Lehdon *Funktioteoria I ja II*, Lauri Myrbergin samanniminen teos ja Walter Rudinin *Real & Complex Analysis*. Lisäksi olisi suotavaa, että lukija olisi tutustunut L^p-avaruuksien teoriaan.

Merkintätapoja

$\mathbb{R}$	reaalilukujen joukko
$\mathbb{C}$	kompleksilukujen joukko
$\mathbb{D}$	kompleksitason avoin yksikkökiekko
$U(a,r)$	avoin, a-keskinen, r-säteinen kuula, pääsääntöisesti kompleksitason osajoukko
Ω	avoin, yhtenäinen alue, pääsääntöisesti kompleksitason osajoukko
∂E	joukon E reuna

2.1 Analyyttiset funktiot

Olkoon f kompleksiarvoinen funktio, joka on määritelty alueessa $\Omega \subset \mathbb{C}$ ja $z_0 \in \Omega$. Mikäli on olemassa raja-arvo $\lim_{w\to 0} \frac{f(z_0+w)-f(z_0)}{w} = f^{'}(z_0)$, niin lukua $f^{'}(z_0)$ sanotaan f:n kompleksiseksi derivaataksi pisteessä z_0.

Määritelmä 2.1. (analyyttiset funktiot) Oletetaan, että f on kompleksimuuttujan z funktio ja määritelty alueessa $\Omega \subset \mathbb{C}$. Funktiota f sanotaan analyyttiseksi (kirjallisuudessa myös holomorfiseksi), mikäli sillä on kompleksinen derivaatta jokaisessa Ω:n pisteessä.

Yleisellä tasolla analyyttiset funktiot muodostavat renkaan, jonka alkioiden summat ja tulot ovat edelleen renkaan jäseniä. Myös kahden analyyttisen funktion osamäärä on analyyttinen, mikäli tarkastelun ulkopuolelle rajataan jakajan nollakohdat (tietenkin supistetuimmassa muodossaan). Näiden ominaisuuksien lisäksi ketjuttamalla saadaan lisää analyyttisiä funktioita: jos f ja g ovat analyyttisiä, niin myös funktio $h = g \circ f$ on analyyttinen. Tällöin funktion g täytyy kuitenkin olla määritelty f:n arvojoukossa.

Monien muiden ominaisuuksien ohella eräs analyyttisten funktioiden merkittävä ominaisuus on se, että mielivaltaisessa alueessa määritelty analyyttinen funktio voidaan lokaalisti esittää suppenevana potenssisarjana. Vastaavasti jokainen suppeneva potenssisarja esittää suppenemiskiekossaan analyyttistä funktiota.

Potenssisarjaominaisuutensa perusteella analyyttisen funktion derivaatta on analyyttinen. Johtopäätös tästä ominaisuudesta onkin, että analyyttisillä funktioilla on kaikkien kertalukujen derivaatat, jotka on myös mahdollista esittää suppenevina potenssisarjoina.

Muita mielenkiintoisia analyyttisten funktioiden ominaisuuksia ovat esimerkiksi funktioiden nollakohtien ominaisuudet, joita käsitellään myöhemmin interpolointiteorian ohessa. Todettakoon nyt, että mikäli analyyttisen funktion nollakohdilla on kasautumispiste jossakin alueessa, kyseessä on vakiofunktio.

2.2 Harmoniset funktiot

Määritelmä 2.2. (harmoniset funktiot) Alueessa Ω määritelty, kaksi kertaa jatkuvasti derivoituva kompleksiarvoinen funktio $h : \Omega \to \mathbb{C}$ on harmoninen, jos se toteuttaa Laplacen yhtälön $\triangle h = \frac{\partial^2}{\partial x^2}h + \frac{\partial^2}{\partial y^2}h = 0$.

Reaaliarvoiseen harmoniseen funktioon h liittyy yhdesti yhtenäisessä alueessa Ω sen konjugaattifunktio $\tilde{h}$, joka toteuttaa h:n kanssa Cauchy-Riemann -yhtälöt $\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{h}}{\partial y}$ ja $\frac{\partial h}{\partial y} = -\frac{\partial \tilde{h}}{\partial x}$. Näin määriteltynä myös konjugaatti $\tilde{h}$ on harmoninen ja funktio $f = h + i\tilde{h}$ on analyyttinen.

Harmonisten funktioiden määritelmästä on siis päädytty analyyttisiin funktioihin, mutta itse asiassa määritelmän 2.2 ja yllä esitettyjen huomioiden perusteella analyyttiset funktiot ovat harmonisia.

Lause 2.3. ***(Poissonin integraali)*** *Olkoon f kompleksiarvoinen ja yksikkökiekon reunalla $\partial\mathbb{D}$ mitallinen funktio, joka toteuttaa ehdon $\|f\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|dt < \infty$ $\big(f \in L^1(\partial\mathbb{D})\big)$. Tällöin yksikkökiekossa oheisen kaavan mukaisesti määriteltyä funktiota $h(re^{i\varphi})$ sanotaan f:n Poissonin integraaliksi $P[f]$, missä $P(r, \varphi)$ on Poissonin ydin:*

$$h(re^{i\varphi}) = P[f](re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r, \varphi - t)f(t)dt, \qquad P(r, \varphi) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\varphi + r^2}.$$

Määritelty funktio h on yksikkökiekossa $\overline{\mathbb{D}}$ harmoninen. Mikäli f on myös jatkuva $\mathbb{D}$:n reunalla, niin voidaan asettaa $h(e^{i\varphi}) = f(e^{i\varphi})$, ja näin määriteltynä h on jatkuva myös suljetussa yksikkökiekossa $\overline{\mathbb{D}}$.[1] Edelleen Poissonin ydin voidaan esittää myös yhtäpitävässä muodossa

$$P(r, \varphi - t) = P(z, e^{it}) = \frac{1 - |z|^2}{|e^{it} - z|^2}, \qquad \text{missä} \qquad z = re^{i\varphi}.$$

Toisaalta harmoninen ja suljetussa yksikkökiekossa jatkuva funktio voidaan esittää kiekossa reuna-arvojensa $h(e^{i\varphi})$ Poissonin integraalina.

Lause 2.4. ***(keskiarvolause)*** *Sanotaan, että Ω:ssa jatkuvalla funktiolla f on keskiarvo-ominaisuus, jos jokaiselle $z \in \Omega$ on olemassa sellainen $r > 0$, että pätee*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z + re^{i\varphi})d\varphi.$$

Keskiarvo-ominaisuuden omaava funktio on harmoninen ja kaikilla harmonisilla funktioilla on keskiarvo-ominaisuus.[2]

2.3 Subharmoniset funktiot

Ennen subharmonisten funktioiden määrittelemistä palautetaan mieliin käsite puolijatkuvuus, joka esiintyy työkaluna usein muun muassa reaalianalyysin ja mittateorian piirissä. Olkoon $z_0 \in \Omega$. Tarkastellaan ehtoja

$$(a) \quad \limsup_{z \to z_0} f(z) \leq f(z_0)$$
$$(b) \quad \liminf_{z \to z_0} f(z) \geq f(z_0).$$

Reaaliarvoinen funktio f on Ω:ssa ylhäältä puolijatkuva, jos kaikilla $z_0 \in \Omega$ on voimassa (a), ja alhaalta puolijatkuva, mikäli (b) pätee kaikilla $z_0 \in \Omega$.

[1] Edellä mainitut ominaisuudet on todistettu lähteenä käytetyn Rudinin kirjan sivuilla 233-234.
[2] Rudinin teoksen sivu 237.

Määritelmä 2.5. (subharmoniset funktiot) Reaaliarvoinen funktio u on subharmoninen Ω:ssa, jos sillä on seuraavat ominaisuudet.

(1) $-\infty \leq u(z) < \infty$ kaikilla $z \in \Omega$.

(2) u on ylhäältä puolijatkuva.

(3) Kaikilla $\overline{U}(a,r) \subset \Omega$ pätee

$$u(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{i\varphi}) d\varphi.$$

(4) Yksikään integraaleista (3) ei ole $-\infty$.

Määritelmän 2.5 kohtien (1) ja (2) perusteella subharmoninen funktio on ylhäältä rajoitettu jokaisessa Ω:n kompaktissa osajoukossa. Tämän seurauksena integraalit (3) ovat aina olemassa ja edelleen ehdon (4) perusteella $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(a + re^{i\varphi})| d\varphi < \infty$.

Reaaliarvoiset harmoniset funktiot ovat subharmonisia, sillä ne toteuttavat kaikki annetut ehdot jatkuvuutensa ja keskiarvo-ominaisuutensa nojalla (lause 2.4).

Lause 2.6. *Alueessa Ω määritellyn subharmonisen funktion u ja monotonisesti kasvavan konveksin funktion γ yhdiste $\gamma \circ u$ on subharmoninen.*

Todistus. $\gamma \circ u$ on ylhäältä puolijatkuva, koska γ on jatkuva ja monotoninen. Lisäksi määritellään $\gamma(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} \gamma(x)$. Olkoon seuraavaksi $\overline{U}(a,r) \subset \Omega$. Tällöin

$$\gamma(u(a)) \leq \gamma \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{i\varphi}) d\varphi \right) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \gamma(u(a + re^{i\varphi})) d\varphi.$$

Ensimmäinen epäyhtälö pätee, koska u on subharmoninen. Jälkimmäinen epäyhtälö puolestaan pätee Jensenin epäyhtälön[3] perusteella, koska γ on konveksi funktio. □

Olkoon nyt f Ω:ssa analyyttinen funktio, joka ei ole identtisesti nolla. Funktion f logaritmifunktio $\log|f|$ on subharmoninen.[4]

Myös funktiot $\log^+ |f| = \begin{cases} \log|f|, & |f| > 1 \\ 0, & 0 \leq |f| \leq 1 \end{cases}$ ja $|f|^p$ $(0 < p < \infty)$ ovat subharmonisia. Subharmonisuus seuraa suoraan lauseesta 2.6, kun asetetaan $u = \log|f|$ ja $\gamma = \max(0,t)$ sekä jälkimmäisessä tapauksessa $u = \log|f|$ ja $\gamma = e^{pt}$.

Lause 2.7. *Olkoon K alueen Ω kompakti osajoukko ja h reaaliarvoinen ja jatkuva K:ssa sekä harmoninen joukossa $int(K)$ (tämä merkintä tarkoittaa joukon K sisäpisteiden joukkoa eli K:sta on poistettu sen reuna). Nyt Ω:ssa subharmoniselle funktiolle u, joka toteuttaa K:n reunalla ehdon $u(z) \leq h(z)$, on koko joukossa K voimassa epäyhtälö $u(z) \leq h(z)$.*

Todistus. Asetetaan $\tilde{u} = u - h$ ja tehdään vastaoletus, että $\tilde{u}(z) > 0$ jollakin $z \in int(K)$. Subharmonisen ja (reaaliarvoisen) harmonisen funktion erotuksena $\tilde{u}$ on ylhäältä puolijatkuva funktio K:ssa, joten sillä on K:ssa maksimi $m > 0$. Joukko $E = \{z \in K : \tilde{u}(z) = m\}$ on nyt avoimen joukon $\text{int}(K)$ epätyhjä, suljettu osajoukko ja erityisesti $d(E, \partial K) > 0$. Olkoon $z_0 \in \partial E$. Nyt voidaan valita sellainen $r > 0$, että suljettu kuula $\overline{U}(z_0, r) \subset \text{int}(K)$. Mutta joukko $\partial U \cap E^c$ on epätyhjä, jolloin

$$\tilde{u}(z_0) = m > \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{u}(z_0 + re^{i\varphi}) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\varphi}) d\varphi - h(z_0).$$

Viimeinen yhtäläisyys perustuu harmonisten funktioiden keskiarvo-ominaisuuteen (lause 2.4), ja se osoittaa, että $\tilde{u}$ on subharmoninen. Saatu epäyhtälö on kuitenkin ristiriidassa

[3] Jensenin epäyhtälö ja sen todistus löytyvät Rudinin kirjasta sivulta 62.
[4] Rudinin teoksen sivu 336.

subharmonisten funktioiden määritelmän 2.5 kohdan (3) kanssa, joten alkuperäinen väite pitää paikkansa.□

Reaaliarvoiset harmoniset funktiot siis rajoittavat ylhäältä subharmonisia funktioita. Harmonisten funktioiden tapaan subharmonisille funktioille pätee edellisen lauseen nojalla seuraava korollaari.

Korollaari 2.8. *Mikäli u on yksikökkiekossa $\mathbb{D}$ jatkuva subharmoninen funktio ja $0 \leq r < 1$, niin tällöin funktio $m(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\varphi})d\varphi$ on kasvava.*

Todistus. Olkoon $0 \leq r_1 < r_2 < 1$ ja h jatkuva kiekossa $|z| \leq r_2$, harmoninen sen sisäpisteissä sekä sama kuin u sen reunalla. Nyt $u(z) \leq h(z)$ kiekossa $|z| \leq r_2$ ja

$$m(r_1) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(r_1 e^{i\varphi})d\varphi = h(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(r_2 e^{i\varphi})d\varphi = m(r_2).$$

Täten on osoitettu, että $m(r)$ on kasvava funktio yksikkökiekossa $\mathbb{D}$.□

Subharmoninen funktio u saavuttaa supremuminsa yhtenäisessä, avoimessa alueessa Ω, jos ja vain jos se on vakiofunktio. Olkoon $\sup_\Omega u(z) = u(z_0) = m$, jolloin $u(z) \leq m$ kaikilla $z \in \Omega$. Nyt on olemassa jokin $r > 0$, jolla $U(z_0, r) \subset \Omega$ ja

$$0 = u(z_0) - m \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \big(u(z_0 + re^{i\varphi}) - m\big)d\varphi.$$

Ylläolevan epäyhtälön nojalla $u(z) = m$ kiekossa $U(z_0, r)$ ja joukko $A = \{z \in \Omega : u(z) = m\}$ on avoin. A on myös suljettu, koska u on ylhäältä puolijatkuva. Täten $A = \Omega$ ja u on vakiofunktio.

Subharmoniset funktiot käyttäytyvät siis suurelta osin samalla tavoin kuin harmoniset funktiot, mikä on luonnollinen seuraus subharmonisten funktioiden määritelmästä. Miten nämä kaksi funktioperhettä sitten eroavat toisistaan? Reaaliarvoisten harmonisten funktioiden todettiin jo sisältyvän subharmonisten funktioiden perheeseen. Seuraavaksi esitellään riittävä ehto sille, että funktio on subharmoninen, vaan ei harmoninen.

Lause 2.9. *Mikäli u on kaksi kertaa jatkuvasti derivoituva ja $\triangle u > 0$ alueessa Ω, niin u on Ω:ssa subharmoninen.*

Todistus. Tehdään vastaoletus, että u ei ole subharmoninen. Funktio u on kuitenkin kaksi kertaa jatkuvasti derivoituva, joten on olemassa sellainen reaaliarvoinen harmoninen funktio h, että funktiolla $u - h$ on (lokaali) maksimi jossakin alueen Ω sisäpisteessä. Kyseisessä pisteessä pätee $\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u-h) \leq 0$ ja $\frac{\partial^2}{\partial y^2}(u-h) \leq 0$, joten $\triangle(u) = \triangle(u-h) \leq 0$. Tämä on ristiriidassa alkuehtojen kanssa, joten lause pitää paikkansa.□

2.4 Blaschken tulo

Ennen Blaschken tulon määrittelyä on syytä todeta, mitä tarkoittaa tulon suppeneminen.

Olkoon $\{c_i\}$ kompleksilukujen muodostama jono. Sanotaan, että tulo $\prod_{i=1}^{\infty}(1+c_i)$ suppenee kohti lukua $c \in \mathbb{C}$, jos $c \neq 0$ ja $\lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n}(1+c_i) = c$. Jono $c_i \to 0$, kun $i \to \infty$. Kirjoitetaan kiekossa $U(0, \frac{1}{2})$ logaritmifunktio Taylorin sarjana:

$$|\log(1+z) - z| = \Big|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1} - z\Big| = \Big|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n (z)^{n+1}}{n+1}\Big| \leq |z|^2 \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{2}\Big)^n = |z|^2.$$

Tämän avulla saadaan arvio

$$\prod_{i=1}^{n}|1+c_i| = \exp\Big(\sum_{i=1}^{n}\log|1+c_i|\Big) \approx \exp\Big(\sum_{i=1}^{n}|c_i|\Big).$$

Ylläoleva tarkoittaa sitä, että tulon $\prod_i |1+c_i|$ suppeneminen on ekvivalenttia summan $\sum_i |c_i|$ suppenemisen kanssa. Erityisesti summa ei suppene jos $\prod_{i=1}^{n}(1+c_i) \to 0$, kun $n \to \infty$.

Määritelmä 2.10. (Blaschken tulo) Olkoon $m \in \mathbb{N}_+$ vakio ja $\{z_i\}$ yksikkökiekon $\mathbb{D}$ jono, joka toteuttaa Blaschken ehdon $\sum_i (1-|z_i|) < \infty$. Seuraavan lauseen nojalla tulo

$$B(z) = z^m \prod_i \frac{|z_i|}{z_i}\frac{z_i - z}{1-\overline{z_i}z}$$

suppenee $\mathbb{D}$:ssä. Näin määriteltyä funktiota $B(z)$ sanotaan Blaschken tuloksi. Voidaan olettaa, että kaikilla i on $z_i \neq 0$. Usein tulon edestä jätetään pois kerroin z^m.

Indeksin i joukko voi myös olla äärellinen, mutta useimmiten indeksi käy läpi koko joukon $\mathbb{N}$. Jokainen tulon tekijä $\frac{z_i - z}{1-\overline{z_i}z}$ on yksikkökiekossa analyyttinen ja $\left|\frac{z_i-z}{1-\overline{z_i}z}\right| < 1$, joten yksikkökiekossa $\mathbb{D} \ni z$ tulo $|B(z)| < 1$.

Lause 2.11. *Blaschken tulo suppenee itseisesti missä tahansa kiekossa $|z| \leq r < 1$, sen nollakohdat ovat pisteet z_i (sekä origo, mikäli $m > 0$) ja B(z) on analyyttinen funktio.*

Todistus. Olkoon $|z| \leq r < 1$ ja asetetaan $a_i = \left|\frac{z_i - z}{1-\overline{z_i}z}\right|$.

Nyt $0 < a_i \leq 1$ kaikilla i ja eksponenttifunktiolle on voimassa ehto $a_i \leq \exp(1-a_i)$. Edelleen $\prod_i a_i \leq \prod_i \exp(1-a_i) = \exp\sum_i (1-a_i)$. Lisäksi

$$\begin{aligned} 1 - a_i = 1 - \left|\frac{|z_i|}{z_i}\frac{z_i - z}{1-\overline{z_i}z}\right| &\leq \left|1 - \frac{|z_i|}{z_i}\frac{z_i - z}{1-\overline{z_i}z}\right| = \left|\frac{z_i - |z_i|^2 z - |z_i| z_i + |z_i| z}{z_i(1-\overline{z_i}z)}\right| \\ &= \left|\frac{z_i(1-|z_i|) + z|z_i|(1-|z_i|)}{z_i(1-\overline{z_i}z)}\right| = \left|\frac{(1-|z_i|)(z_i + |z_i| z)}{z_i(1-\overline{z_i}z)}\right| \leq \frac{1+r}{1-r}(1-|z_i|). \end{aligned}$$

Edellä osoitetun perusteella $\prod_i a_i \leq \exp\left(\frac{1+r}{1-r}\sum_i (1-|z_i|)\right)$, missä summa toteuttaa Blaschken ehdon. Jäljellä on siis osoittaa, että $\prod_i a_i \neq 0$.

Ylläolevan epäyhtälön ja summan suppenemisen seurauksena $\sum_i \left|1 - \frac{|z_i|}{z_i}\frac{z_i-z}{1-\overline{z_i}z}\right| < \infty$, joten tulon suppenemiskriteerin nojalla $\prod_i \left|\frac{|z_i|}{z_i}\frac{z_i-z}{1-\overline{z_i}z}\right| \neq 0$.

$B(z)$ (tai tarkemmin sanoen sen osatulot) suppenee itseisesti jokaisessa kiekossa $|z| \leq r < 1$, joten se on analyyttinen ja sen nollakohdat ovat pisteet z_i (kertaluvut huomioiden).□

Lause 2.12. *Vastaavasti* $\sum_i (1-|z_i|) < \infty$, *jos Blaschken tulo suppenee kiekossa* $|z| \leq r < 1$.

Todistus. Olkoon b_i nyt Blaschken tulon i:s tekijä. Blaschken tulon suppenemisen nojalla summa $\sum_i |b_i - 1| = \sum_i |1-b_i|$ suppenee. Lauseen 2.11 todistuksen tapaan

$$|1-b_i| = \left|1 - \frac{|z_i|}{z_i}\frac{z_i - z}{1-\overline{z_i}z}\right| = \cdots = \left|\frac{(1-|z_i|)(z_i + |z_i| z)}{z_i(1-\overline{z_i}z)}\right| \geq (1-|z_i|)\frac{1-|z|}{1+|\overline{z_i}z|} \geq \frac{1-r}{1+r}(1-|z_i|).$$

Yhdistetään saadut tulokset: $\prod_i |b_i| \approx \exp\Big(\sum_i |1-b_i|\Big) \geq \exp\left(\frac{1-r}{1+r}\sum_i (1-|z_i|)\right)$.

Mikäli $\sum_i (1-|z_i|)$ ei suppene vaan lähestyy ääretöntä, niin $\prod_i |b_i| \to \infty$. Tämä on ristiriita, koska alkuehdon nojalla $B(z)$ suppenee.□

2.5 Funktionaalianalyyttiset aputulokset

Banach-avaruuksien teoriaa käsitellään usein funktionaalianalyyttiseltä näkökannalta lineaarikuvausten avulla, ja vaikka tämän työn pääasiallinen sisältö esitelläänkin enemmän reaali- ja kompleksianalyyttiseltä puolelta, niin muutama todistus on esitettävissä huomattavasti elegantimmin seuraavien kahden ekvivalentin teoreeman avulla.

Avoimen kuvauksen ja suljetun kuvaajan lauseet on todistettu muun muassa Kari Astalan *Funktionaalianalyysin peruskurssin* luentomonisteessa.

Teoreema 2.13. ***(avoimen kuvauksen lause)*** *Olkoot X ja Y Banach-avaruuksia (täydellisiä normiavaruuksia) ja $T : X \to Y$ sellainen jatkuva lineaarikuvaus, että yksikköpallon kuvan sulkeuma $\overline{T(B_X)}$ sisältää jonkin Y:n avoimen kuulan. Näistä ehdoista seuraa, että $T(X) = Y$ ja on olemassa $r > 0$ siten, että $T(B_X) \supset r \cdot B_Y = \{y \in Y : ||y|| < r\}$.*

Teoreema 2.14. ***(suljetun kuvaajan lause)*** *Olkoot X ja Y Banach-avaruuksia sekä $T : X \to Y$ sellainen lineaarikuvaus, että joukko $\big\{(x, Tx) : x \in X\big\} \subset X \times Y$ on suljettu tulotopologiassa. Tällöin T on jatkuva.*

3 Hardyn avaruudet yksikkökiekossa

Tämän luvun keskeisin tavoite on määritellä Hardyn avaruudet $H^p(\mathbb{D})$ yksikkökiekossa ja tarkastella niiden perusominaisuuksia. Hardyn avaruuksien lisäksi käsitellään laajempaa Nevanlinnan avaruutta N.

Aluksi todettakoon, että mitallisen funktion f p-normi $||\cdot||_p$ $(1 \leq p < \infty)$ mitallisessa joukossa Ω (jonka mitta on positiivinen) on integraali $||f||_p = \left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{1/p}$. Arvolla $p = \infty$ normi määritellään kaavalla $||f||_\infty = \operatorname{ess\,sup}_\Omega |f|$. Edellä mainitut p-normit määrittelevät L^p-avaruudet siten, että $L^p(\Omega)$ sisältää kaikki funktiot, joilla normi $||\cdot||_p < \infty$.

Edellä kuvatut L^p-avaruudet ovat lineaariavaruuksia, mutta $||\cdot||_p$ ei ole normi, kun on $0 < p < 1$. Toisin sanoen vastaava avaruus L^p ei ole normiavaruus. Muun muassa tästä syystä tutkielmassa ei tarkastella Hardyn avaruuksia arvoilla $0 < p < 1$.

Arvoilla $1 \leq p \leq \infty$ puolestaan $||\cdot||_p$ on normi[5] ja $L^p(\Omega)$ on Banach-avaruus eli täydellinen normiavaruus. Näitä tuloksia tai niiden johtamiseen käytettäviä Hölderin ja Minkowskin epäyhtälöitä ei kuitenkaan todisteta tai muilla tavoin osoiteta tässä. Aihetta on esitelty tarkemmin ja monipuolisemmin Helsingin yliopiston luentokursseilla *Mitta ja integraali* sekä *Reaalianalyysi I*; myös Rudin käsittelee aihetta kirjansa *Real & Complex Analysis* luvussa 3: *L^p-Spaces* (sivut 61-75).

Yleisesti ottaen tästä eteenpäin ei myöskään puhuta mitallisista joukoista tai funktioista, vaan oletetaan näiden omaisuuksien olevan ilmeiset kontekstin perusteella. Lisäksi ilman erillistä mainintaa kaikkia funktioita ja funktioavaruuksia käsitellään yksikkökiekossa.

3.1 Avaruudet H^p ja N

Liitetään jokaiseen yksikkökiekossa jatkuvaan funktioon f funktioperhe $\{f_r\}$ $(0 \leq r < 1)$,

$$f_r(e^{i\varphi}) = f(re^{i\varphi}).$$

Olkoon m yksikköympyrän tavallinen Lebesguen mitta. Kirjoitetaan seuraavaksi L^p-avaruuksien normeja vastaavat normit funktioperheen $\{f_r\}$ alkioille ja esitellään lisäksi suure $||\cdot||_0$.

$$||f_r||_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\partial\mathbb{D}} |f_r|^p dm\right)^{1/p} \quad (1 \leq p < \infty) \qquad \text{ja} \qquad ||f_r||_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_\varphi |f(re^{i\varphi})| \qquad \text{sekä}$$

$$||f_r||_0 = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\partial\mathbb{D}} \log^+|f_r| dm\right)$$

Integraalit siis otetaan pitkin yksikkökiekon reunaa $\partial\mathbb{D}$. Luvussa 2.3 osoitettiin funktioiden $|f|^p$ $(0 < p < \infty)$ ja $\log^+|f|$ olevan subharmonisia, jos f on analyyttinen. Korollaarin 2.8 nojalla $||f_r||_p$ $(p = 0$ tai $1 \leq p < \infty)$ on näin ollen r:n funktiona kasvava. Täten voidaan määritellä Hardyn avaruuksien normit $||\cdot||_p$ ja suure $||\cdot||_0$ seuraavasti:

$$||f||_p := \sup\left\{||f_r||_p : 0 \leq r < 1\right\} = \lim_{r\to 1} ||f_r||_p.$$

Mikäli $p = \infty$, yhtälö pätee analyyttisten funktioiden maksimiperiaatteen nojalla.[6] Suure $||\cdot||_0$ ei ole normi, sillä se ei toteuta kolmioepäyhtälöä.

[5] Tällöin samaistetaan funktiot, jotka poikkeavat toisistaan vain nollamittaisessa joukossa.
[6] Rudinin teoksen sivu 212.

Huomio 3.1. Jatkossa käytetään sekä $L^p(\partial\mathbb{D})$- että Hardyn avaruuksien normeista merkintää $\|\cdot\|_p$. Pääsääntöisesti kyse on Hardyn avaruuden normista, mutta asian voi tapauskohtaisesti varmistaa siitä, missä avaruudessa funktiot on määritelty.

Määritelmä 3.2. (Hardyn avaruudet yksikkökiekossa) $H^p(\mathbb{D})$ $(1 \leq p \leq \infty)$ koostuu yksikkökiekossa $\mathbb{D}$ analyyttisistä funktioista f, jotka toteuttavat ehdon $||f||_p < \infty$.

Määritelmä 3.3. (yksikkökiekon Nevanlinnan avaruus) Funktioavaruus $N(\mathbb{D})$ puolestaan koostuu kaikista analyyttisistä funktioista f, joilla $||f||_0 < \infty$. Nevanlinnan avaruudesta käytetään myös merkintää $H_0 = N$.

Hardyn avaruuksille yksikkökiekossa on nyt annettu ensimmäiset määritelmät. Ensisilmäyksellä lukija voi pohdiskella kysymystä, miksi näennäisesti vain hieman muokattuun L^p-avaruuteen kannattaisi kiinnittää huomiota tai miksi H^p-avaruuksien määrittelyyn johtavassa esityksessä jokaiseen jatkuvaan funktioon liitettiin erillinen funktioperhe.

Huomionarvoisuus ja funktioperheen hyödyllisyys pohjaavat molemmat analyyttisten funktioiden käyttäytymiseen yksikkökiekon reunalla. Ajoittain on myös valaisevampaa tutkia funktioperheen ominaisuuksia lähestyttäessä yksikkökiekon reunaa, minkä lisäksi H^p-avaruuksista päädytään myöhemmin Carlesonin mittoihin ja interpoloiviin jonoihin, mutta ennen tätä on syytä hieman tarkastella H^p- ja N-avaruuksia sekä niiden funktioiden rakennetta.

3.2 Avaruuksien H^p ja N perusrakenne

Olkoon $\{f_n\}$ avaruuden H^p Cauchy-jono ja $|z| \leq r < R < 1$. Seuraavan epäyhtälön ensimmäinen kohta pätee Cauchyn kaavan, toinen L^p-avaruuksien teoriasta tutun Hölderin epäyhtälön ja viimeinen normin ominaisuuksien nojalla

$$(R-r)|(f_n-f_m)(z)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\mathbb{D}} |(f_n-f_m)_R|dm \leq \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\partial\mathbb{D}} |(f_n-f_m)_R|^p dm\right)^{1/p} \leq \|f_n-f_m\|_p.$$

Tästä päätellään jonon $\{f_n\}$ suppenevan lokaalisti tasaisesti kohti yksikkökiekossa analyyttistä funktiota f. Fatoun lemman nojalla kaikilla $R < 1$ pätee

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\partial U(0,R)} |(f-f_m)(z)|^p dm = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{\partial U(0,R)} |(f_n-f_m)(z)|^p dm \leq \lim_{n\to\infty} \|f_n-f_m\|_p^p.$$

Jokaisella $\epsilon > 0$ on olemassa sellainen n_ϵ, että kaikilla $n > n_\epsilon$ epäyhtälö $\|f_n - f_{n_\epsilon}\|_p < \epsilon$ on voimassa. Yhdistämällä tämä ylläolevaan tulokseen saadaan

$$\|f - f_{n_\epsilon}\|_p \leq \lim_{n\to\infty} \|f_n - f_{n_\epsilon}\|_p < \epsilon.$$

H^p on siis täydellinen, minkä lisäksi Minkowskin epäyhtälön nojalla kyseisen avaruuden funktiot toteuttavat kolmioepäyhtälön, joten H^p on Banach-avaruus eli täydellinen normiavaruus jokaisella $1 \leq p < \infty$. On helppo näyttää, että myös H^∞ on Banach-avaruus.

L^p-avaruuksien perusteorian nojalla on lisäksi selvää se, että $H^\infty \subset H^q \subset H^p \subset N$, jos $1 \leq p < q < \infty$. Viimeinen sisältyvyys seuraa suoraan logaritmifunktion konkaaviudesta.

Seuraavaksi on tarkoitus tarkastella funktioiden nollakohtia, mitä tavoitetta silmälläpitäen todistetaan ensin eräs hyödyllinen aputulos, joka tunnetaan myös Jensenin kaavana.

3.3 Nevanlinnan avaruuden nollakohdat

Teoreema 3.4. ***(Jensenin kaava)*** *Olkoon f kiekossa $U(0,R)$ analyyttinen funktio ja $f(0) \neq 0$ sekä $z_1, ..., z_n$ sen nollakohdat kiekossa $\overline{U}(0,r)$ $(0 < r < R)$ (kertaluvut huomioiden). Tällöin pätee*

$$|f(0)| \prod_{i=1}^{n} \frac{r}{|z_i|} = \exp\Big\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\varphi})|d\varphi\Big\}.$$

Todistus. Järjestetään nollakohdat siten, että $z_1, .., z_k \in U(0,r)$ ja $|z_{k+1}| = \cdots = |z_n| = r$. Asetetaan

$$g(z) = f(z) \prod_{i=1}^{k} \frac{r^2 - \overline{z_i}z}{r(z_i - z)} \prod_{i=k+1}^{n} \frac{z_i}{z_i - z}.$$

Näin määriteltynä g on analyyttinen kiekossa $U(0, r+\epsilon)$ jollakin $\epsilon > 0$, eikä g:llä ole kyseisessä kiekossa nollakohtia. Täten $\log|g|$ on kyseisessä kiekossa harmoninen[7] ja keskiarvo-ominaisuutensa nojalla $\log|g(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|g(re^{i\varphi})|d\varphi$. Funktion g määritelmästä saadaan nyt kaksi erillistä arviota:

$$|g(0)| = |f(0)| \prod_{i=1}^{k} \frac{r}{|z_i|} \qquad \text{ja}$$

$$\begin{aligned}
\log|g(re^{i\varphi})| &= \log\Big\{|f(re^{i\varphi})| \prod_{i=1}^{k} \Big|\frac{r - \overline{z_i}e^{i\varphi}}{z_i - re^{i\varphi}}\Big| \prod_{i=k+1}^{n} \Big|\frac{z_i}{z_i - re^{i\varphi}}\Big|\Big\} \\
&= \log|f(re^{i\varphi})| + \sum_{i=1}^{k} \log(1) + \sum_{i=k+1}^{n} \log\Big|\frac{re^{i\varphi_i}}{re^{i\varphi_i} - re^{i\varphi}}\Big| \\
&= \log|f(re^{i\varphi})| - \sum_{i=k+1}^{n} \log|1 - e^{i(\varphi - \varphi_i)}|.
\end{aligned}$$

Integroitaessa jälkimmäistä arviota yli φ:n välillä $[0, 2\pi]$ viimeisin termi häviää.[8] Yhdistämällä nyt saadut arviot $\log|g|$:n keskiarvo-ominaisuuteen saadaan haluttu tulos

$$\begin{aligned}
|f(0)| \prod_{i=1}^{k} \frac{r}{|z_i|} &= |g(0)| = \exp\Big\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|g(re^{i\varphi})|d\varphi\Big\} \\
&= \exp\Big\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\varphi})| - \sum_{i=k+1}^{n} \log|1 - e^{i(\varphi-\varphi_i)}|d\varphi\Big\} \\
&= \exp\Big\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\varphi})|d\varphi\Big\}. \square
\end{aligned}$$

Jensenin kaavaa käytetään välittömästi osoittamaan Nevanlinnan avaruuden funktioiden nollakohdille seuraava ominaisuus.

Lause 3.5. *Olkoon $f \in N$ määritelty yksikkökiekossa ja $f \not\equiv 0$. Funktion f nollakohdat (kertaluvut huomioiden) toteuttavat Blaschken ehdon: $\sum_i (1 - |z_i|) < \infty$.*

Todistus. Voidaan olettaa nollakohtia olevan äärettömästi, koska muutoin todistus on selvä. Lisäksi voidaan olettaa, että $f(0) \neq 0$, koska muutoin tarkasteltaisiin funktiota $f(z)/z^m$, missä f:llä olisi origossa kertaluvun m nollakohta. Olkoon $n(r)$ f:n nollakohtien lukumäärä

[7] Tämän osoittaminen jätetään lukijan harteille.
[8] Todistus löytyy Rudinin kirjan sivulta 307.

suljetussa kiekossa $\overline{U}(0,r)$. Kiinnitetään k ja valitaan $r < 1$, jolle pätee $n(r) > k$. Nyt Jensenin kaavasta saadaan epäyhtälö:

$$|f(0)| \prod_{i=1}^{n(r)} \frac{r}{|z_i|} = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\varphi})|d\varphi\right\}$$
$$\Rightarrow |f(0)| \prod_{i=1}^{k} \frac{r}{|z_i|} \leq \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+|f(re^{i\varphi})|d\varphi\right\}.$$

Epäyhtälön oikea puoli on ylhäältä rajoitettu kaikilla $0 < r < 1$, koska oletuksen mukaan $f \in N$. Täten on olemassa $c < \infty$, jolle arvio

$$\prod_{i=1}^{k} |z_i| \geq \frac{r^k |f(0)|}{c}$$

pätee kaikilla k:n arvoilla, kun $r \to 1$. Edelleen voidaan siis kirjoittaa

$$\prod_{i=1}^{\infty} |z_i| \geq \frac{|f(0)|}{c} > 0.$$

Tämä osoittaa, että tulo $\prod_i |z_i|$ suppenee, koska $|z_i| < 1$ kaikilla i. Edelleen kirjoitetaan $|z_i| \leq \exp(|z_i| - 1) \Rightarrow \prod_i |z_i| \leq \exp\left(-\sum_i (1-|z_i|)\right)$. Tämän tuloksen nojalla $\sum_i (1-|z_i|) < \infty$, koska muutoin tulo ei suppenisi.□

Tulos on varsin miellyttävä ja vihjaa selvästi Blaschken tulon vahvempaan läsnäoloon Hardyn avaruuksia tutkittaessa. Suora seuraus lauseesta 3.5 on, että ainoa yksikkökiekon funktio $f \in N$, jonka nollakohdat toteuttavat ehdon $\sum_i (1 - |z_i|) = \infty$, on $f \equiv 0$.

Nevanlinnan avaruuden funktioiden nollakohdat siis toteuttavat Blaschken ehdon. Erityisesti tämä siis pätee kaikille Hardyn avaruuksien funktioille. Mielenkiintoa nollakohtien tutkimiselle lisää se, että Hardyn avaruuden funktiosta voidaan erottaa nollakohdat ilman, että se vaikuttaa kyseisen funktion normiin.

Lause 3.6. *Valitaan mielivaltainen yksikkökiekon Nevanlinnan avaruuden funktio f, $f \not\equiv 0$, jonka nollakohdista muodostetaan Blaschken tulo B. Asetetaan nyt $g = f/B$, jolloin $g \in N$ ja $\|g\|_0 = \|f\|_0$ sekä edelleen, mikäli $f \in H^p$, niin $g \in H^p$ ja erityisesti $\|g\|_p = \|f\|_p$, kun $1 \leq p \leq \infty$.*

Todistus. Yksikkökiekossa $z \in \mathbb{D}$ Blaschken tulon arvoille pätee aina epäyhtälö $|B(z)| \leq 1$, joten $|g(z)| \geq |f(z)|$ kun $z \in \mathbb{D}$.

Oletetaan, että $f \in H^p$ ($p = 0$ tai $1 \leq p \leq \infty$). Olkoon $B_{s'}$[9] funktion f s:n ensimmäisen nollakohdan (järjestys mielivaltainen ja nollakohtien kertaluvut huomioiden) muodostama Blaschken tulo ja $g_s = f/B_{s'}$. Jokaisella s pätee $|B_{s'}(re^{i\varphi})| \to 1$ tasaisesti, kun $r \to 1$. Täten $\|g_s\|_p = \|f\|_p$. Monotonisen kovergenssin lauseen nojalla

$$\|g_r\|_p = \lim_{s\to\infty} \|(g_s)_r\|_p \leq \|f\|_p.$$

Viimeinen epäyhtälö pätee kaikilla $r < 1$, joten rajalla $r \to 1$ saadaan $\|g\|_p \leq \|f\|_p$. Yhdistämällä tämä todistuksen alussa tehtyyn huomioon saadaan $\|g\|_p = \|f\|_p$. □

Lemma 3.7. *Jokaiselle $f \in H^p$, $f \not\equiv 0$, $(1 \leq p < \infty)$, jonka nollakohdista on muodostettu Blaschken tulo B, on olemassa nollakohdaton funktio $h \in H^2$, jolle pätee $f = B \cdot h^{2/p}$. Erityisesti jokainen $f \in H^1$ muodostuu tulosta $f = gh$, missä tulon molemmat tekijät kuuluvat avaruuteen H^2.*

[9] Pilkun merkitys kaavassa selittyy sivulla 26.

Todistus. Lauseen 3.6 nojalla $f/B \in H^p$ ja $\|f\|_p = \|f/B\|_p$. Funktio f/B on siis nollakohdaton yhdesti yhtenäisessä alueessa $\mathbb{D}$, joten on olemassa analyyttinen funktio ϕ, jonka eksponenttifunktio $\exp(\phi) = f/B$.[10] Asetetaan nyt $h = \exp(p\phi/2)$, jolloin h on analyyttinen ja $|h|^2 = |f/B|^p$, joten $h \in H^2$ ja lauseen 3.6 mukaan $\|h\|_2^2 = \|f\|_p^p$, mistä ominaisuus $f = B \cdot h^{2/p}$ seuraa. Lemman ensimmäinen osa on nyt todistettu.

Jälkimmäisen osan osoittamiseksi käytetään jo osoitettua tulosta $f = (Bh) \cdot h$ $(f \in H^1)$, jolloin $g = Bh$ ja todistus on selvä.$\square$

3.4 H^p-funktiot yksikkökiekon reunalla

Hardyn avaruuksien funktioille on nyt esitetty monia mielenkiintoisia tuloksia, mutta funktioiden käyttäytyminen lähestyttäessä yksikkökiekon reunaa on jäänyt vaille huomiota.

Seuraavaksi paneudutaan tähän kysymykseen hieman tarkemmin. Aluksi annetaan muutama määritelmä ja tämän jälkeen tarkastellaan Hardy-Littlewoodin maksimaalifunktion Mf ja ei-tangentiaalisen maksimaalifunktion yhteyttä. Mf on muotoa:

$$Mf(e^{i\varphi}) = \sup_{I \ni e^{i\varphi}} \frac{1}{|I|} \int_I |f(t)| dt,$$

missä I on yksikkökiekon reunan kaari ja $|I|$ on kaaren pituus. Seuraavien maksimaalifunktion keskeisten ominaisuuksien todistukset löytyvät Rudinin teoksen sivuilta 138 ja 173.

Huomio 3.8.

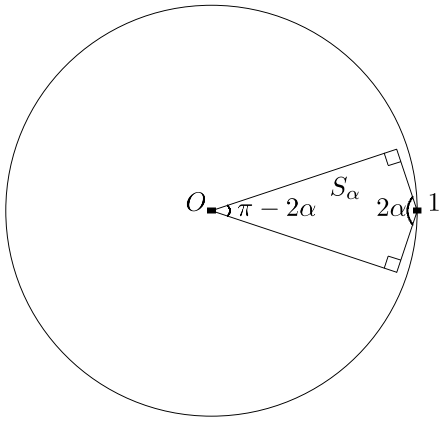
(1) Olkoon m tavallinen Lebesguen mitta, $f \in L^1(\partial\mathbb{D})$ ja $\lambda > 0$.

Tällöin $Mf < \infty$ melkein kaikkialla ja $m\big(\{e^{i\varphi} : Mf(e^{i\varphi}) > \lambda\}\big) \leq \dfrac{C_1}{\lambda}\|f\|_1$.

(2) Funktioille $f \in L^p(\partial\mathbb{D})$ $(p > 1)$ pätee $\|Mf\|_p \leq C_p\|f\|_p$

Merkintä S_α $(0 < \alpha < \pi/2)$ tarkoittaa joukkoa, joka syntyy yksikköympyrän pisteestä 1 muodostetun 2α:n suuruisen kehäkulman ja origosta muodostetun $\pi - 2\alpha$:n suuruisen keskuskulman sisään. S_α on "leijanmuotoinen" yksikkökiekon avoin osajoukko.

Merkintä $e^{i\varphi}S_\alpha$ puolestaan tarkoittaa S_α:n kiertoa origon ympäri kulman φ verran. Pistettä $e^{i\varphi}$ ei voi lähestyä alueessa $e^{i\varphi}S_\alpha$ tangentiaalisesti yksikkökiekon reunan suhteen.



[10] Tämän ominaisuuden todistus löytyy Rudinin kirjasta sivulta 274.

Määritelmä 3.9. (ei-tangentiaalinen raja-arvo) Yksikkökiekossa $\mathbb{D}$ määritellyllä funktiolla f sanotaan olevan ei-tangentiaalinen raja-arvo f^* pisteessä $e^{i\varphi}$, jos $f(z) \to f^*(e^{i\varphi})$, kun $z \to e^{i\varphi}$ alueessa $e^{i\varphi}S_\alpha$ $(0 < \alpha < \pi/2)$.

Määritelmä 3.10. (ei-tangentiaalinen maksimaalifunktio) Yksikkökiekossa $\mathbb{D}$ määritellyn funktion f ei-tangentiaalinen maksimaalifunktio $N_\alpha f$ määritellään yksikkökiekon reunalla $\partial\mathbb{D}$ kaavalla

$$(N_\alpha f)(e^{i\varphi}) = \sup\left\{|f(z)| : z \in e^{i\varphi}S_\alpha\right\}.$$

Teoreema 3.11. *Olkoon $0 < r < 1$ ja f funktion $g \in L^1(\partial\mathbb{D})$ Poissonin integraali. Tällöin jokaisella φ pätee $(N_\alpha f)(e^{i\varphi}) \le C_\alpha Mg(e^{i\varphi})$.*

Todistus. Poissonin integraalin määritelmän nojalla f on yksikkökiekossa harmoninen funktio, joten $\|f_r\|_1 < \infty$ jokaisella $r < 1$. Riittää osoittaa, että teoreema pätee, kun $\varphi = 0$. Nyt

$$f(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\mathbb{D}} P(r,-t)g(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\mathbb{D}} P(r,t)g(t)dt.$$

Poissonin ydin P on positiivinen, parillinen ja laskeva, kun $t \in [0,\pi]$, joten sitä voidaan approksimoida alhaalta jonolla laskevia yksinkertaisia funktioita $\phi_i(t) = \sum_{n=1}^{i} a_n \chi_{(-x_n,x_n)}(t)$, missä $0 \le a_i \le \frac{1}{2x_i}$ ja $0 < x_1 < \ldots < x_i < 1$. Poissonin ytimen ominaisuuksien nojalla

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\partial\mathbb{D}} \phi_i(t)dt = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{i} 2x_n a_n \le \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\mathbb{D}} P(r,t)dt \le 1.$$

Summa $\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{i} 2x_n a_n \le 1$ kaikilla i, joten

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\partial\mathbb{D}} \phi_i(t)g(t)dt\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\mathbb{D}} \phi_i(t)|g(t)|dt \le \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{i} 2x_n a_n \frac{1}{2x_n}\int_{-x_n}^{x_n} |g(t)|dt \le Mg(1).$$

Monotonisen konvergenssin lauseen nojalla $|f(r)| \le \frac{1}{2\pi}\int P(r,t)|g(t)|dt \le Mg(1)$.

Olkoon $z_0 = r_0 e^{i\varphi_0} \in S_\alpha$. Voidaan olettaa, että $\varphi_0 > 0$, koska tapaus $\varphi_0 = 0$ on jo käsitelty ja tapaus on symmetrinen oletuksen $\varphi_0 < 0$ kanssa. Lyhyt trigonometrinen laskutoimitus antaa ehdon $\tan(\alpha) \ge \frac{\varphi_0}{2\pi(1-r_0)}$.

Ongelmana on löytää parillinen funktio, joka on suurempi kuin $P(r_0, \varphi_0 - t)$ kaikilla t ja jonka integraali yksikkökiekon reunan yli on äärellinen. Muodostetaan seuraavanlainen funktio $\psi(t) = \sup\{P(r_0, \varphi_0 - s) : s > |t|\}$. Tällöin $\psi(t) = P(r_0, 0)$, kun $|t| \le \varphi_0$, ja $\psi(t) = P(r_0, t - \varphi_0)$, kun $|t| > \varphi_0$. Edellä johdetun trigonometrisen epäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{\partial\mathbb{D}} \psi(t)dt &= \frac{1}{2\pi}\int_{\varphi_0}^{-\varphi_0} P(r_0, t-\varphi_0)dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} P(r_0, 0)dt \le 1 + \frac{1}{\pi}\int_0^{\varphi_0} \frac{1+r_0}{1-r_0}dt \\ &\le 1 + 4\tan(\alpha) = C_\alpha.\end{aligned}$$

Samaan tapaan kuin edellä approksimoidaan funktiota $\psi(t)$ alhaalta joukolla laskevia vakiofunktioita. Tällöin $\frac{1}{2\pi}\int \psi(t)|g(t)|dt \le C_\alpha Mg(1)$ ja erityisesti $|f(z_0)| \le C_\alpha Mg(1)$. Piste z_0 valittiin mielivaltaisesti, joten epäyhtälö pätee kaikilla $z \in S_\alpha$. Näin ollen voidaan kirjoittaa $\sup_{z\in S_\alpha} |f(z)| = (N_\alpha f)(1) \le C_\alpha Mg(1)$.□

Korollaari 3.12. *Funktion $g \in L^p(\partial\mathbb{D})$ $(1 < p \le \infty)$ Poissonin integraalille $f = P[g]$ pätee epäyhtälö $\|N_\alpha f\|_p \le C_\alpha \|Mg\|_p$.*

Seuraavat lemmat 3.13 ja 3.14 voi johtaa myös korollaarista 3.12, mutta esitetään näille kuitenkin mielenkiinnon vuoksi hieman erilaiset todistukset.

Lemma 3.13. ***(Hardy-Littlewood)*** *Olkoon $h(re^{i\varphi})$ funktion $f \in L^p(\partial\mathbb{D})$ $(1 < p < \infty)$ Poissonin integraali ja asetetaan $F(\varphi) = \sup_{r<1} |h(re^{i\varphi})|$. Näin määriteltynä funktio $F \in L^p\big([0, 2\pi)\big)$, ja on olemassa vain p:stä riippuva vakio C_p, jolle $\|F\|_p \le C_p \|f\|_p$.*

Todistus. Jatketaan aluksi funktio f yksikkökiekon reunalla 2π-periodiseksi ja merkitään $\tilde{f}(t) = \int_0^t f(s)ds$. Suoritetaan osittaisintegrointi.

$$h(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r, \varphi - t) f(t)dt = \frac{1}{2\pi}\big[P(r, \varphi - t)\tilde{f}(t)\big]_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t\frac{\partial}{\partial t}\{P(r, \varphi - t)\}\frac{\tilde{f}(t)}{t}dt$$

Kiinteällä φ otetaan ylläolevasta itseisarvo ja, kuten teoreeman 3.11 todistuksessa, approksimoidaan Poissonin ydintä porrasfunktioilla $\phi_i(t)$ sekä käytetään tulosta $|\tilde{f}(t)/t| \le Mf(e^{i\varphi})$, jolloin

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{2\pi}\big[\phi_i(\varphi - t)\tilde{f}(t)\big]_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t\frac{\partial}{\partial t}\{P(r, \varphi - t)\}\frac{\tilde{f}(t)}{t}dt\right| \\
\le &\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|t\frac{\partial}{\partial t}\{P(r, \varphi - t)\}\right| Mf(e^{i\varphi})dt \\
\le &Mf(e^{i\varphi}) + \frac{2r}{1+r}Mf(e^{i\varphi}) < 2Mf(e^{i\varphi}).
\end{aligned}$$

Monotonisen konvergenssin lauseen nojalla $|h(re^{i\varphi})| \le 2Mf(e^{i\varphi})$. Yhdistämällä tämä huomion 3.8 kohdan (2) kanssa saadaan $\|h\|_p \le C_p\|f\|_p$, mikä pätee kaikilla h. Funktio F on funktioiden h_r supremumina mitallinen, joten lemma on näin saatu todistettua.□

Lemma 3.14. ***(Hardy-Littlewood)*** *Olkoon $f \in H^p(\mathbb{D})$ $(1 \le p \le \infty)$, ja määritellään funktio $F(\varphi) = \sup_{r<1} |f(re^{i\varphi})|$. Tällöin $F \in L^p\big([0, 2\pi)\big)$ ja $\|F\|_p \le C_p\|f\|_p$.*

Todistus. Asetetaan kiinnitetylle R funktio $g(z) = |f(Rz)|^{p/2}$. Näin määriteltynä $g(z)$ on subharmoninen. Lauseen 2.7 nojalla on olemassa yksikkökiekossa harmoninen funktio h, jolle $h(z) \ge g(z)$, kun $z \in \mathbb{D}$, ja $h(z) = g(z)$, kun $z \in \partial\mathbb{D}$. Täten lemman 3.13 nojalla funktiolle

$$G(\varphi) = \sup_{r<1} |g(re^{i\varphi})|$$

pätee $G \in L^2\big([0, 2\pi)\big)$ ja $\|G\|_2 \le C_2\|g\|_2$, joten $F_R(\varphi) = \sup_{r<1} |f(Rre^{i\varphi})|$ toteuttaa ehdon $\|F_R\|_p \le C_2^{2/p} \lim_{r\to R} \|f_r\|_p$. Annetaan nyt viimeisimmässä epäyhtälössä $R \to 1$, jolloin $F_R(\varphi) \to F(\varphi)$ ja vedotaan Lebesguen monotonisen konvergenssin lauseeseen, jonka nojalla todistus on selvä.□

Lause 3.15. *Olkoon $1 < p \le \infty$ ja f yksikkökiekossa harmoninen funktio, jolle pätee $\sup_{r<1} \|f_r\|_p < \infty$ (kyseessä on L^p-normi). Tällöin on olemassa yksikäsitteinen $g \in L^p(\partial\mathbb{D})$, jonka Poissonin integraali f on.*

Tämä lause on osa Rudinin teoksen *Real & Complex Analysis* teoreemaa 11.30 sivulla 247. Todistus jätetään osana huomattavasti laajempaa, harmonisia funktioita koskevaa kokonaisuutta lukijan harteille. Seuraaksi tutkitaan ei-tangentiaalista raja-arvoa, minkä jälkeen yhdistetään useat tämän luvun tulokset teoreemaksi 3.18.

Olkoon μ yksikkökiekon reunan positiivinen ja äärellinen Borel-mitta sekä m tavallinen Lebesguen mitta. Käytetään Poissonin ytimestä toista muotoa $P(z, e^{it}) = \frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}$, missä $z = re^{i\varphi}$. Merkitään

$$u(z) = P[d\mu] = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\mathbb{D}} P(z, e^{it})d\mu(e^{it}) \quad \text{ja} \quad (D\mu)(e^{i\varphi}) = \lim_{i\to\infty}\frac{\mu(I_i)}{m(I_i)},$$

missä joukot I_i ovat avoimia, $e^{i\varphi}$-keskisiä yksikkökiekon reunan kaaria, jotka suppenevat kohti pistettä $e^{i\varphi}$. On mahdollista osoittaa, että u on harmoninen. Fubinin lauseen nojalla

$$\begin{aligned}\|u_r\|_1 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |u(re^{i\varphi})| d\varphi \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\mathbb{D}} P(z,e^{it}) d|\mu(e^{it})|\, d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z,e^{it}) d\varphi\, d|\mu(e^{it})| = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\mathbb{D}} d|\mu(e^{it})| = \|\mu\| < \infty.\end{aligned}$$

Teoreema 3.16. *Olkoon μ kuten edellä ja $(D\mu)(e^{i\varphi}) = 0$ jollakin φ. Tällöin Poissonin integraalilla $u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\mathbb{D}} P(z,e^{it})d\mu(e^{it})$ on ei-tangentiaalinen raja-arvo 0 pisteessä $e^{i\varphi}$.*

Todistus. Olkoon φ sellainen, jolla ehto $(D\mu)(e^{i\varphi}) = 0$ toteutuu. Kiinnitetään $\epsilon > 0$.

Oletuksen $(D\mu)(e^{i\varphi}) = 0$ nojalla on olemassa sellainen I_{i_ϵ}, jolle $\mu(I_i) < \epsilon m(I_i)$ jokaisella $i > i_\epsilon$, missä yksikköympyrän kaaret I_i suppenevat kohti pistettä $e^{i\varphi}$.

Olkoon nyt μ_ϵ mitan μ rajoittuma kaareen I_{i_ϵ}. Asetetaan $\mu_{\overline{\epsilon}} = \mu - \mu_\epsilon$ ja merkitään vastaavia Poissonin integraaleja u_ϵ ja $u_{\overline{\epsilon}}$. Tällöin ei-tangentiaalisen raja-arvon suppenemisalueen $e^{i\varphi}S_\alpha$ ja joukon $\partial\mathbb{D} - I_{i_\epsilon}$ leikkaus on tyhjä. Näin ollen Poissonin ytimen ominaisuuksien nojalla

$$u_{\overline{\epsilon}}(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\mathbb{D}-I_{i_\epsilon}} P(z,e^{it})d\mu(e^{it})$$

suppenee tasaisesti kohti 0:aa, kun $z \to e^{i\varphi}$ alueessa $e^{i\varphi}S_\alpha$.

Seuraavaksi tarkastellaan u_ϵ:nin ylärajaa. Teoreema 3.11 pätee, vaikka funktion g tilalle sijoitetaan yksikköympyrän positiivinen (ja äärellinen) Borel-mitta. Tämän hieman vahvemman teoreeman todistus on analoginen teoreeman 3.11 todistuksen kanssa, minkä vuoksi se sivuutetaan. Täten alueessa $e^{i\varphi}S_\alpha \ni z$ pätee

$$u_\epsilon(z) \leq (N_\alpha u_\epsilon)(e^{i\varphi}) \leq C_\alpha(M\mu_\epsilon)(e^{i\varphi}) \leq C_\alpha\epsilon,$$

missä viimeinen arvio seuraa ehdosta $\mu(I_i) < \epsilon m(I_i)$. Tämän seurauksena saadaan arvio $\limsup_{z\to e^{i\varphi}} u_\epsilon(z) \leq C_\alpha\epsilon$ alueessa $e^{i\varphi}S_\alpha$.

Edelleen $u = u_\epsilon + u_{\overline{\epsilon}}$ ja ϵ voidaan valita mielivaltaisen pieneksi, joten $\lim_{z\to e^{i\varphi}} u(z) = 0$.□

Teoreema 3.17. ***(Fatou)*** *Olkoon $f \in L^1(\partial\mathbb{D})$. Tällöin f:n Poissonin integraalilla $P[f]$ on olemassa ei-tangentiaalinen raja-arvo $f(e^{i\varphi})$ melkein kaikkialla yksikkökiekon reunalla.*

Todistus. Lähes jokainen yksikköympyrän piste on funktion f Lebesguen piste. Tämä on todettu muun muassa Ilkka Holopaisen monisteen *Reaalianalyysi I* sivun 43 huomiossa 23.2.

Olkoon $e^{i\varphi}$ nyt f:n Lebesguen piste ja m sekä I_i kuten edellä. Voidaan olettaa, että on $f(e^{i\varphi}) = 0$, muutoin vähennetään funktiosta f vastaava vakio. Tällöin pätee seuraava ehto:

$$\lim_{i\to\infty} \frac{1}{m(I_i)}\int_{I_i} |f| dm = 0.$$

Määritellään lisäksi yksikköympyrän Borel-mitta μ seuraavasti:

$$\mu(E) = \int_E |f| dm.$$

Mitta μ toteuttaa teoreeman 3.16 ehdot. Yhdistämällä saadut tulokset huomataan, että $\lim_{i\to\infty} \left|\frac{\mu(I_i)}{m(I_i)}\right| = 0$. Toisin sanoen $(D\mu)(e^{i\varphi}) = 0$, ja näin ollen teoreeman 3.16 nojalla Poissonin integraalilla $P[d\mu]$ on olemassa ei-tangentiaalinen raja-arvo 0 pisteessä $e^{i\varphi}$. Sama pätee $P[f]$:lle, koska

$$|P[f]| \leq P[|f|] = P[d\mu].\square$$

Teoreema 3.18. *Olkoon $1 \leq p < \infty$ ja $f \in H^p(\mathbb{D})$. Tällöin*

(1) *ei-tangentiaaliset maksimaalifunktiot $N_\alpha f$ kuuluvat avaruuteen $L^p(\partial\mathbb{D})$ kaikilla $\alpha < 1$,*

(2) *ei-tangentiaaliset raja-arvot f^* ovat olemassa melkein kaikkialla $\partial\mathbb{D}$:ssä ja $f^* \in L^p(\partial\mathbb{D})$,*

(3) $\lim_{r\to 1} \|f^* - f_r\|_p = 0$ *ja*

(4) $\|f^*\|_p = \|f\|_p$.

Todistus. Aloitetaan kohdista (1) ja (2).

Olkoon aluksi $1 < p < \infty$. Määritelmänsä mukaisesti $f \in H^p$ toteuttaa lauseen 3.15 edellytykset, joten on olemassa yksikäsitteinen funktio avaruudessa $L^p(\partial\mathbb{D})$, jonka Poissonin integraali f on.

Teoreeman 3.17 nojalla ei-tangentiaaliset raja-arvot ovat olemassa melkein kaikkialla joukossa $\partial\mathbb{D}$. Lisäksi korollaarin 3.12 nojalla ei-tangentiaaliset maksimaalifunktiot $N_\alpha f \in L^p(\partial\mathbb{D})$, joten myös $f^* \in L^p(\partial\mathbb{D})$, koska $|f^*(e^{i\varphi})| \leq (N_\alpha f)(e^{i\varphi})$.

Tapaus $p = 1$. Tehdään f:lle lemman 3.7 mukainen jako $f = B \cdot h^2$, jolloin $h \in H^2(\mathbb{D})$ ja $|f| \leq |h|^2$. Edelleen $(N_\alpha f) \leq (N_\alpha h)^2$, joten ylläolevan mukaan $N_\alpha f \in L^1(\partial\mathbb{D})$, koska $N_\alpha h \in L^2(\partial\mathbb{D})$.

Vastaavasti B^*:n ja h^*:n olemassaolosta joukossa $\partial\mathbb{D}$ seuraa f^*:n olemassaolo ja erityisesti $|f^*| \leq N_\alpha f$, kun f^* on olemassa. Täten $f^* \in L^1(\partial\mathbb{D})$.

Seuraavaksi käsitellään kohdat (3) ja (4).

Suoraan määritelmistä saadaan, että $f_r \to f^*$ melkein kaikkialla ja $|f_r| \leq N_\alpha f$, joten (3) pätee dominoidun konvergenssin lauseen nojalla. Kohta (4) seuraa (3):sta suoraan kolmioepäyhtälön nojalla.$\square$

Korollaari 3.19. *Mikäli $f \in H^1$, niin f on f^*:n sekä Poissonin että Cauchyn integraali.*

Korollaari seuraa huomiosta, että $f_r(z) = f(rz)$, jolloin $f_r \in H(U(0, 1/r))$. Tällöin

$$f_r(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z, e^{it}) f_r(e^{it})dt \quad \text{ja} \quad f_r(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f_r(e^{it})}{e^{it} - z}dt,$$

jolloin teoreeman 3.18 kohdan (3) nojalla

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z, e^{it}) f^*(e^{it})dt \quad \text{ja} \quad f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f^*(e^{it})}{e^{it} - z}dt.$$

Tähänastisista tuloksista voidaan siis päätellä muun muassa se, että jokainen H^p funktio $(1 \leq p \leq \infty)$ on ei-tangentiaalisen raja-arvofunktionsa sekä Poissonin että Cauchyn integraali ja Hardy-Littlewoodin maksimaalifunktio rajoittaa kyseisten H^p funktioiden kasvua. Tämä seuraa korollaari 3.19:sta, teoreema 3.11:stä sekä siitä, että $H^1 \supset H^p$ $(1 < p \leq \infty)$.

Lemma 3.20. *Olkoon $f \in H^p$, kun $1 \leq p < \infty$. Tällöin pätee $|f(z)| \leq C_p \|f\|_p (1 - |z|^2)^{-1/p}$.*

Todistus. Olkoon aluksi $p = 1$, ja kirjoitetaan f ei-tangentiaalisen raja-arvofunktionsa Poissonin integraalina

$$\begin{aligned}|f(z)| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z, e^{it}) f^*(e^{it})dt\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1 - |z|^2}{|e^{it} - z|^2}|f^*(e^{it})|dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1 + |z|}{1 - |z|}|f^*(e^{it})|dt = \frac{1 + |z|}{1 - |z|}\|f^*\|_1 \leq \frac{2}{1 - |z|^2}\|f\|_1.\end{aligned}$$

Lemma siis pätee, kun $p = 1$. Seuraavaksi palautetaan mieliin, että $H^p \subset H^1$ jokaisella $p > 1$. Tämän nojalla funktiolle $g \in H^p$ pätee $g^p \in H^1$, jolloin

$$|g(z)^p| = |g(z)|^p \leq \frac{2}{1-|z|^2}\|g(z)^p\|_1 = \frac{2}{1-|z|^2}\|g(z)\|_p^p$$
$$\Rightarrow |g(z)| \leq \frac{C_p}{(1-|z|^2)^{1/p}}\|g(z)\|_p. \square$$

3.5 Hardyn avaruuden duaali

Hardyn avaruuksien dualiteetti johtaa omalta osaltaan varsin mielenkiintoisiin tuloksiin, mutta tämän työn kannalta duaaliavaruutta tarvitaan vain interpolaatiolauseen todistamiseen kappaleessa 4.4. Tämän vuoksi todistuksissa viitataan kirjallisuuteen.

L^p-avaruuksien teoriasta tuttu duaaliavaruuden käsite on mahdollista jatkaa H^p-avaruuksiin. Avaruuden H^p duaaliavaruus on H^q, missä eksponentit toteuttavat yhtälön $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, kun $1 < p < \infty$ (p ja q ovat toistensa konjugaatteja). Erityisesti H^2 on itsensä duaali.

Yleinen Banach-avaruus X on mahdollista jakaa erillisiin sivuluokkiin X/S kunkin suljetun aliavaruuden S suhteen. Erityisesti S toimii sivuluokkien neutraalialkiona, ja minkä tahansa sivuluokan $x+S$ normi määritellään seuraavasti $\|x+S\| = \inf_{y\in S}\|x+y\|$. Jokainen sivuluokka on itsessään Banach-avaruus.

X:llä operoivien lineaaristen funktionaalien joukkoa merkitään X^*. X:n aliavaruuden S annihilaattoriksi kutsutaan sitä X^*:n aliavaruutta $S^\perp$, jonka jäsenet $\phi \in S^\perp$ toteuttavat kaikilla $x \in S$ ehdon $\phi(x) = 0$.

Teoreema 3.21. *Avaruus $X^*/S^\perp$ on isometrisesti isomorfinen S^*:n kanssa, ja jokaiselle kiinnitetylle $\phi \in X^*$ pätee*

$$\sup_{x\in S, \|x\|\leq 1} |\phi(x)| = \min_{\psi \in S^\perp} \|\phi + \psi\|,$$

missä erityisesti minimi saavutetaan.

Todistus. Durenin teoksen sivu 110, teoreema 7.1.

H^p-avaruuden ($1 \leq p < \infty$) yleinen lineaarinen funktionaali ϕ voidaan esittää muodossa

$$\phi(f) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}} f(z)k(z)dz,$$

missä $k(e^{i\varphi}) \in L^q$ ja $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Funktionaalin esitys löytyy Durenin teoksen sivulta 113.

Avaruus H^{p*} on isometrisesti isomorfinen sivuluokan L^q/H^q kanssa ja H^p:n annihilaattori on isometrinen H^q:n kanssa.[11] Täten teoreeman 3.21 nojalla funktio $h \in L^q$ ja sen ydin k määrittävät saman H^p funktionaalin, jos ja vain jos $h - k \in H^q$ eli h ja k kuuluvat saamaan sivuluokkaan L^q/H^q.

Korollaari 3.22. *Kun $1 \leq p < \infty$, edellä esitettyjen huomioiden ja teoreeman 3.21 nojalla*

$$\sup_{f\in H^p, \|f\|_p\leq 1} \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\partial\mathbb{D}} f(z)k(z)dz\right| = \min_{g\in H^q}\|k-g\|_{L^q}.$$

Kutsutaan tätä dualiteettiyhtälöksi. Todistuksen voi lukea Durenin teoksen sivulta 130.

[11] Durenin teoksen sivu 112.

4 Interpolointiteoria

Yleisen interpolointiteorian tavoitteena on määritellä ja karakterisoida kaikki yksikkökiekon jonot $\{z_i\}$ ja kompleksitason jonot $\{w_j\}$, joiden välillä on voimassa riippuvuus $f(z_k) = w_k$ missä $f \in H^p$. Ongelmaan sisältyy lisäksi kaikkien interpoloivien funktioiden f löytäminen.

Näin abstraktiin ja laajaan kysymykseen ei ole olemassa kokonaisvaltaista ratkaisua, mutta tämän työn kannalta onkin riittävää tutkia interpolaatiota H^∞-avaruudessa sekä laajentaa saatuja tuloksia pätemään myös muihin H^p-avaruuksiin.

Interpolointiteorian yhteydessä käsitellään paljon jonoavaruuksia l^p $(1 \leq p \leq \infty)$, jotka ovat Banach-avaruuksia. Sanotaan, että jono $\{z_i\} \in l^p$ jos $\left(\sum_i |z_i|^p\right)^{1/p} < \infty$, kun $1 \leq p < \infty$, ja $\sup_i\{|z_i|\} < \infty$, kun $p = \infty$. Erityisesti $l^1 \subset l^p \subset l^q \subset l^\infty$, kun $1 < p < q < \infty$.

4.1 Interpoloivat jonot

Tutkittaessa interpoloivia funktioita ja jonoja sekä yleisesti H^p-interpolaatiota on usein hyödyllistä tarkastella asiaa lineaarioperaattorien laajemmasta näkökulmasta. Kiinnitetään p $(1 \leq p \leq \infty)$ ja $\{z_i\}$ sekä asetetaan lineaarioperaattori $T : f \to \{f(z_i)\}$, joka kuvaa funktion f kuvajonoksi $\{f(z_i)\}$.

Huomio 4.1. (interpoloivien funktioiden yksikäsitteisyydestä) Oletetaan, että jonolle $\{z_i\}$ on löydetty interpoloiva funktio $f \in H^p$. Kyseisen jonon Blaschken tulo B on nolla jonon jokaisessa pisteessä, joten myös funktio $f + Bg$, missä $g \in H^p$ on mielivaltainen funktio, on interpoloiva funktio jonolle $\{z_i\}$. Mikäli jono ei täytä Blaschken ehtoa, niin tällöin f on yksikäsitteinen.

Määritelmä 4.2. (interpoloivat jonot) Sanotaan, että $\{z_i\}$ on interpoloiva jono avaruudessa H^p, jos $T(H^p) \supset l^p$.

Ongelmana onkin löytää avaruuden H^p kuva $T(H^p)$ – kaikki jonothan eivät suinkaan ole interpoloivia. Tarkastellaan aluksi tilannetta, jossa $p = \infty$. Tässä tapauksessa funktiot f ovat rajoitettuja, joten $T(H^\infty) \subset l^\infty$ ja $T : H^\infty \to l^\infty$ on rajoitettu lineaarioperaattori sekä erityisesti interpoloiville jonoille pätee $T(H^\infty) = l^\infty$.

Yleisesti joidenkin jonojen kohdalla sisältyvyys $T(H^\infty) \subset l^\infty$ on aito, koska erittäin tiheän jonon $\{z_i'\}$ ja vahvasti oskilloivan jonon $\{w_i'\}$ välillä ei ole olemassa interpoloivaa funktiota $f \in H^\infty$. Onneksi jatkon kannalta mielenkiintoiset jonot eivät kuulu tähän joukkoon.

Määritelmä 4.3. (tasaisesti interpoloivat jonot) Jonoa $\{z_i\}$ sanotaan tasaisesti interpoloivaksi H^∞:ssä, jos $T(H^\infty) = l^\infty$.

Määritelmä on sinänsä turha, kun $p = \infty$, koska edellä huomattiin H^∞:ssä interpoloivien jonojen toteuttavan tasaisen interpoloituvuuden ehdot. Tasainen interpolointi lunastaa kuitenkin paikkansa tutkittaessa interpolointia muilla p:n arvoilla.

Jos $\{z_i\}$ on tasaisesti interpoloiva, niin jokaiselle jonolle $\{w_i\} \in l^\infty$ löytyy $f \in H^\infty$, jolle $f(z_i) = w_i$. Intuitiivisesti voidaan todeta, että jonon z_i pisteet eivät saa olla "liian lähellä" toisiaan, jotta jono olisi tasaisesti interpoloiva. Tämä ehto on mahdollista ilmoittaa konkreettisemminkin.

4.2 Tasaisesti separoituvat jonot

Määritelmä 4.4. (tasaisesti separoituvat jonot) Jono $\{z_i\}$ on tasaisesti separoituva, jos on olemassa $\delta > 0$, joka toteuttaa ehdon

$$\prod_{i \neq j} \left| \frac{z_i - z_j}{1 - \overline{z_i} z_j} \right| \geq \delta \quad \forall j.$$

Määritelmästä seuraa, että Blaschken tulo B, jonka nollakohdat ovat $\{z_i\}$, suppenee. Teoreema 4.9 tulee osoittamaan, että $\{z_i\}$ on tasaisesti interpoloiva H^∞:ssä, jos ja vain jos se on tasaisesti separoituva, minkä lisäksi näille kahdelle ehdolle esitetään vielä kolmas yhtäpitävä ehto. Ennen kyseisen teoreeman esittämistä ja todistamista tarkastellaan hetki tasaisesti separoituvia jonoja.

Tasaisesta separoituvuudesta ja erityisesti vastaavan Blaschken tulon suppenemisesta seuraa se, että kyseisen jonon täytyy toteuttaa Blaschken ehto $\sum_i (1 - |z_i|) < \infty$. Lisäksi käytetään merkintää $B_n(z) = \left(\frac{|z_n|}{z_n} \frac{z_n - z}{1 - \overline{z_n} z}\right)^{-1} B(z)$ eli tarkastelemme jonon $\{z_i\}$ Blaschken tuloa, josta on poistettu n:s tekijä ja jonka arvo otettu pisteessä z.

Seuraavan lauseen funktiota käytetään myöhemmin teoreeman 4.9 todistamiseksi.

Lause 4.5. *Olkoon jono $\{z_i\}$ tasaisesti separoituva, ja oletetaan, että $0 < |z_1| \leq |z_2| \ldots$. Tällöin on olemassa vakio $K_\delta > 0$, jolle pätee $Re\alpha_n(z_n) \leq K_\delta$ kaikilla n, missä*

$$\alpha_n(z) = \sum_{k \geq n} \frac{1 + \overline{z_k} z}{1 - \overline{z_k} z} (1 - |z_k|^2).$$

Todistus. Funktiolle α_n saadaan seuraavanlaiset arviot:

$$\alpha_n(z) = \sum_{k \geq n} \frac{1 - z_k \overline{z}}{1 - z_k \overline{z}} \frac{1 + \overline{z_k} z}{1 - \overline{z_k} z} (1 - |z_k|^2) = \sum_{k \geq n} \frac{1 - z_k \overline{z} + \overline{z_k} z - |z_k|^2 |z|^2}{|1 - \overline{z_k} z|^2} (1 - |z_k|^2) \quad \text{ja}$$

$$\mathrm{Re}\alpha_n(z) = \sum_{k \geq n} \frac{1 - |z_k|^2 |z|^2}{|1 - \overline{z_k} z|^2} (1 - |z_k|^2).$$

Lisäksi jokaisella $k \geq n$ on voimassa epäyhtälö

$$0 \leq 1 - 2|z_k|^2 + |z_k|^4 = 1 - |z_k|^2 (2 - |z_k|^2) \leq 1 - |z_n|^2 (2 - |z_k|^2) = 1 - 2|z_n|^2 + |z_n|^2 |z_k|^2,$$

joten $1 - |z_n|^2 |z_k|^2 \leq 2(1 - |z_n|^2)$ ja funktiolle $\mathrm{Re}\alpha_n(z_n)$ saadaan arvio

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\alpha_n(z_n) &= \sum_{k \geq n} \frac{1 - |z_k|^2 |z_n|^2}{|1 - \overline{z_k} z_n|^2} (1 - |z_k|^2) \leq 2 \sum_{k \geq n} \frac{1 - |z_n|^2}{|1 - \overline{z_k} z_n|^2} (1 - |z_k|^2) \\
&= 2 \sum_{k \geq n} \frac{1 - |z_n|^2 - |z_k|^2 + |z_n|^2 |z_k|^2}{|1 - \overline{z_k} z_n|^2} = 2 \sum_{k \geq n} \frac{|1 - \overline{z_k} z_n|^2 - |z_k - z_n|^2}{|1 - \overline{z_k} z_n|^2} \\
&= 2 \sum_{k \geq n} \left(1 - \left| \frac{z_k - z_n}{1 - \overline{z_k} z_n} \right|^2\right) \leq 2 - 4 \sum_{k > n} \log \left| \frac{z_k - z_n}{1 - \overline{z_k} z_n} \right| \\
&\leq 2 - 4 \log \left| \prod_{k \neq n} \frac{z_k - z_n}{1 - \overline{z_k} z_n} \right| \leq 2 - 4 \log \delta = K_\delta. \square
\end{aligned}$$

Korollaari 4.6. *Mikäli $\{z_i\}$ on tasaisesti separoituva, niin on olemassa i:stä riippumaton vakio A, jolle pätee*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(1 - |z_i|^2)(1 - |z_j|^2)}{|1 - \overline{z_j} z_i|^2} \leq A.$$

Todistus. Korollaari seuraa suoraan huomiosta, että epäyhtälön on osoitettu pitävän paikkansa lauseen 4.5 todistuksen yhteydessä, missä $A = 1 - 2\log\delta$. □

Seuraava lemma ja sitä seuraava lause ovat viimeiset tämän alaluvun tulokset.

Lemma 4.7.
$$\Big|\frac{\alpha-\beta}{1-\overline{\alpha}\beta}\Big| \geq \frac{|\alpha|-|\beta|}{1-|\alpha\beta|} \qquad \textit{jos } |\alpha|<1 \textit{ ja } |\beta|<1.$$

Todistus. Todistus on varsin suoraviivainen. Merkitään $a = \alpha$. Voidaan olettaa, että $a > 0$. Olkoon $0 < r < 1$ ja $0 \leq \varphi < 2\pi$. Tällöin

$$\Big|\frac{a-re^{i\varphi}}{1-are^{i\varphi}}\Big|^2 = \frac{a^2-2ar\cos(\varphi)+r^2}{1-2ar\cos(\varphi)+a^2r^2} = \frac{A+x}{B+x} = l(x), \qquad \text{missä}$$
$$A = \frac{a^2+r^2}{2ar} \leq \frac{1+a^2r^2}{2ar} = B \text{ ja } x = -\cos(\varphi).$$

Ongelmana on nyt etsiä l:n minimi, kun $|x| < 1$, mutta $l'(x) = \frac{B-A}{(B+x)^2} > 0$, joten minimi löytyy kohdasta $\varphi(-1) = \frac{(a-r)^2}{(1-ar)^2}$, mikä todistaa lemman. □

Lause 4.8. *Jono $\{z_i\}$ on tasaisesti separoituva, mikäli on olemassa sellainen vakio $c < 1$, että kaikilla i pätee: $1-|z_{i+1}| \leq c(1-|z_i|)$.*

Todistus. Ehdosta seuraa suoraan se, että $1-|z_j| \leq c^{j-i}(1-|z_i|)$, kun $j > i$. Erityisesti tämä tarkoittaa sitä, että $\sum_i(1-|z_i|) < \infty$. Tämän lisäksi on voimassa myös seuraavat kaksi epäyhtälöä, kun $j > i$,

$$|z_j|-|z_i| \geq (1-c^{j-i})(1-|z_i|) \quad \text{ja}$$
$$1-|z_jz_i| = 1-|z_j|+|z_j|(1-|z_i|) \leq (1+c^{j-i})(1-|z_i|).$$

Näiden tulosten ja lemman 4.7 nojalla voidaan kirjoittaa seuraava, kun $j > i$:

$$\Big|\frac{z_i-z_j}{1-\overline{z_j}z_i}\Big| \geq \frac{|z_j|-|z_i|}{1-|z_jz_i|} \geq \frac{1-c^{j-i}}{1+c^{j-i}} \Rightarrow \prod_{j\neq i}\Big|\frac{z_i-z_j}{1-\overline{z_j}z_i}\Big| \geq \prod_n\Big(\frac{1-c^n}{1+c^n}\Big)^2 > 0$$

Edellinen osoittaa jonon $\{z_i\}$ olevan tasaisesti separoituva. □

Mikäli lauseen 4.8 sarjalta olisi vaadittu $0 \leq z_1 < z_2 < \ldots$, niin ehto olisi myös ollut välttämätön. Tämän osoittaminen jätetään lukijan harteille.

4.3 Interpolaatio H^∞:ssä

Seuraavana teoreemana esitellään jo aiemmin mainittu tasaisen separoituvuuden ja tasaisen interpoloituvuuden välinen yhteys H^∞:ssä. Teoreeman todistuksen yhteydessä ja vastaisuudessa käytetään merkintää: $\delta_{ni} = \begin{cases} 1, & n=i \\ 0, & n\neq i \end{cases}$ (kyseessä on Kroneckerin delta).

Teoreema 4.9. *Seuraavat ehdot yksikkökiekon jonolle $\{z_i\}$ ovat yhtäpitävät:*

(1) *$\{z_i\}$ on tasaisesti interpoloiva jono H^∞:ssä;*

(2) $\inf_n |B_n(z_n)| = \delta > 0$, *eli jono $\{z_i\}$ on tasaisesti separoituva;*

(3) *on olemassa rajoitettu lineaarikuvaus $T' : l^\infty \to H^\infty$, jolle $T'(w)(z_i) = w_i$ kaikilla indeksin i arvoilla ja jokaiselle jonolle $w = \{w_i\} \in l^\infty$.*

Todistus. (1) $\Rightarrow$ (2). Luvussa 3 todettiin H^∞:n olevan Banach-avaruus (eli täydellinen normiavaruus). Oletetaan tunnetuksi, että myös l^∞ on Banach-avaruus $T : H^\infty \to l^\infty$, $f \to \{f(z_i)\}$ on jatkuva ja selvästi lineaarinen, minkä lisäksi $T(H^\infty) = l^\infty$, joten avoimen kuvauksen lauseen 2.13 ehdot täyttyvät.

Kyseisen teoreeman nojalla on olemassa sellainen vakio $r > 0$, että jokaisella $n \in \mathbb{N}$ on olemassa funktio $f_n \in H^\infty$, jolle pätee $\|f_n\|_\infty \leq r$ ja $f_n(z_i) = \delta_{ni}$. Nyt f_n voidaan kirjoittaa lauseen 3.6 nojalla muodossa $f_n = g_n \cdot B_n$, missä $g_n \in H^\infty$ ja $\|f_n\|_\infty = \|g_n\|_\infty$. Erityisesti kaikilla n pätee $|B_n(z_n)| = \frac{|f_n(z_n)|}{|g_n(z_n)|} \geq \frac{1}{r} = \delta > 0$, mistä todistuksen ensimmäinen osa seuraa.

(2) $\Rightarrow$ (3). Olkoon nollakohdat järjestetty siten, että $0 < |z_1| \leq |z_2| \leq \ldots$, ja määritellään

$$\phi_n(z) = \Big(\frac{1-|z_n|^2}{1-\overline{z_n}z}\Big)^2 \frac{B_n(z)}{B_n(z_n)} \cdot \exp(\alpha_n(z_n) - \alpha_n(z)), \text{ missä } \alpha_n \text{ on kuten lauseessa 4.5.}$$

Funktio $\phi_n(z)$ on analyyttisten funktioiden yhdisteenä analyyttinen. Lauseen 4.5 nojalla

$$\left|\Big(\frac{1-|z_n|^2}{1-\overline{z_n}z}\Big)^2\right| \leq \frac{2(1-|z_n|^2|z|^2)(1-|z_n|^2)}{|1-\overline{z_n}z|^2} = 2\big(\mathrm{Re}\alpha_n(z) - \mathrm{Re}\alpha_{n+1}(z)\big).$$

Lisäksi jono $\{z_i\}$ on tasaisesti separoituva, joten $\left|\frac{B_n(z)}{B_n(z_n)}\right| \leq \frac{1}{\delta}$, ja $\frac{B_n(z_i)}{B_n(z_n)} = \delta_{ni}$.

Määritellään kuvaus $T'(w_n) = \sum_n w_n\phi_n$ ja tutkitaan summaa $\sum_n |\phi_n(z)|$. Huomioiden yllä esitetyt seikat ja lause 4.5 saadaan

$$\begin{aligned}
\sum_n |\phi_n(z)| &\leq \sum_n \left|\Big(\frac{1-|z_n|^2}{1-\overline{z_n}z}\Big)^2 \frac{B_n(z)}{B_n(z_n)} \cdot \exp(\mathrm{Re}\alpha_n(z_n) - \mathrm{Re}\alpha_n(z))\right| \\
&\leq \sum_n 2\big(\mathrm{Re}\alpha_n(z) - \mathrm{Re}\alpha_{n+1}(z)\big)\frac{1}{\delta} \cdot \exp(K_\delta - \mathrm{Re}\alpha_n(z)) \\
&\leq \frac{2\exp K_\delta}{\delta} \sum_n \Big(\exp\big(\mathrm{Re}\alpha_n(z) - \mathrm{Re}\alpha_{n+1}(z)\big) - 1\Big)\exp(-\mathrm{Re}\alpha_n(z)) \\
&= \frac{2\exp K_\delta}{\delta} \sum_n \exp(-\mathrm{Re}\alpha_{n+1}(z)) - \exp(-\mathrm{Re}\alpha_n(z)) \\
&= \frac{2\exp K_\delta}{\delta} \Big(\lim_{n\to\infty} \exp(-\mathrm{Re}\alpha_{n+1}(z)) - \exp(-\mathrm{Re}\alpha_1(z))\Big) \\
&\leq \frac{2\exp K_\delta}{\delta} \Big(\lim_{|z_k|\to 1} \exp\Big(-\frac{1-|z_k|^2|z|^2}{|1-\overline{z_k}z|^2}(1-|z_k|^2)\Big)\Big) \leq \frac{2\exp K_\delta}{\delta} = C_\delta.
\end{aligned}$$

Näin ollen $\sum_n |\phi_n(z)|$ on ylhäältä rajoitettu, joten sitä on jokaisen funktion ϕ_n moduulikin ja $\phi_n \in H^\infty$ jokaisella n. Tämän nojalla myös operaattori T' on ylhäältä rajoitettu. Edellä osoitetun perusteella $\phi_n(z_n) = 1$ ja $\phi_n(z_i)_{i\neq n} = 0$, joten $\phi_n(z_i) = \delta_{ni}$. Täten T' täyttää (3) vaadittavat ehdot.

(3) $\Rightarrow$ (1). Teoreeman ehdon (3) mukaan kaikille $w \in l^\infty$ on olemassa lineaarikuvaus $T'(w)$, jolle $T(T'(w)) = w$. Täten $T(H^\infty) \supset l^\infty$ ja todistuksen viimeinen osa on selvä eli teoreema pitää paikkansa.$\square$

Teoreeman nojalla H^∞:ssä (tasaisesti) interpoloivat jonot ovat samalla myös tasaisesti separoituvia. Luvussa 4.4 laajennetaan luvatun mukaisesti tasaisesti interpoloivien jonojen määritelmä muihinkin H^p-avaruuksiin.

Ennen siirtymistä varsinaiseen interpolaatiolauseeseen, annetaan kuitenkin vielä yksi aputulos.

Lemma 4.10. *Olkoon a_{jk} sellaisia kompleksilukuja, että $a_{kj} = \overline{a_{jk}}$ ja $\sum_{j=1}^n |a_{jk}| \leq M$, kun $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Tällöin mille tahansa luvuille $x_1, \dots, x_n$ pätee*

$$\Big|\sum_{j,k=1}^n a_{jk} x_j \overline{x_k}\Big| \leq M \sum_{j=1}^n |x_j|^2.$$

Todistus. Muokataan lauseketta ja käytetään Cauchy-Schwarzin epäyhtälöä

$$\Big|\sum_{j,k=1}^n a_{jk} x_j \overline{x_k}\Big| \leq \sum_{j,k=1}^n (|a_{jk}|^{1/2}|x_j|)(|a_{jk}|^{1/2}|\overline{x_k}|) \leq \Big(\sum_{j,k=1}^n |a_{jk}||x_j|^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{j,k=1}^n |a_{jk}||x_k|^2\Big)^{1/2}$$
$$\leq \sum_{j,k=1}^n |a_{jk}||x_j|^2 \leq M \sum_{j=1}^n |x_j|^2. \square$$

4.4 Interpolaatiolause H^p-avaruuksille

Siirryttäessä tutkimaan interpolaatiota muihin yksikkökiekon H^p-avaruuksiin kuin H^∞:ään tarkastellaan eräänlaista painotettua interpolaatiota.

Määritelmä 4.11. (painotettu interpolaatio) Olkoon $\{z_i\}$ jono ja $T_p : H^p \to l^\infty$ lineaarioperaattori, joka on määritelty avaruudessa H^p $(1 \leq p \leq \infty)$ seuraavasti

$$T_p(f) = \big\{(1 - |z_i|^2)^{1/p} f(z_i)\big\}.$$

Tulkitaan, että $T_\infty = T$. Ensimmäinen kysymys painotetusta interpolaatiosta lienee se, miksi kuvajoukkoon on liitetty kerroin $(1 - |z_i|^2)$.

Lemman 3.20 nojalla on voimassa epäyhtälö $(1 - |z_i|^2)^{1/p}|f(z_i)| \leq C_p \|f\|_p$. Näin ollen interpolaatio on ylhäältä rajoitettu ja operaattori T_p on jatkuva.

Varoituksen sanana todettakoon, että yleisellä tasolla $T_p(H^p)$ ei välttämättä sisälly avaruuteen l^p, vaikka $\{z_i\}$ toteuttaisikin Blaschken ehdon.

Esimerkki 4.12. Olkoon $p = 1$ ja jono $\{z_k\}$ määritelty siten, että $z_k = 1 - k^{-2}$. Jono toteuttaa Blaschken ehdon, sillä $\sum_k (1 - |z_k|) = \sum_k k^{-2} < \infty$. Asetetaan $f(z) = (1 - z)^{-1/2}$ ja $g(z) = (1 - z)^{-1/4}$, jolloin $\|f\|_1 = \|g\|_2^2$. Kirjoitetaan $g(z)$ yksikkökiekossa Taylorin sarjana valinnalla $z_0 = 0$, $z = re^{i\varphi}$:

$$g(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(z - z_0)^n}{n!} g^{(n)}(z_0) = 1 + \sum_{n=1}^\infty \Big(\frac{z^n}{n!} 4^{-n} \prod_{k=1}^n (4k - 3)\Big) = 1 + \sum_{n=1}^\infty \Big(z^n \prod_{k=1}^n \frac{4k - 3}{4k}\Big).$$

Käytetään hyväksi tietoa, että $|1 + z|^2 = (1 + z)(1 + \overline{z})$, jolloin f:n normille löytyy yläraja

$$\|f\|_1 = \|g\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Big|1 + \sum_{n=1}^\infty e^{in\varphi} \prod_{k=1}^n \frac{4k - 3}{4k}\Big|^2 d\varphi \leq 1 + \sum_{n=1}^\infty \Big(\frac{4n - 3}{4n}\Big)^{2n} < \infty, \quad \text{mutta}$$

$$\sum_{k=1}^\infty |(1 - |z_k|^2) f(z_k)| \geq \sum_{k=1}^\infty (1 - |z_k|)|f(z_k)| = \sum_{k=1}^\infty (k^{-2})(k^{-2})^{-1/2} = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k} = \infty.$$

Lasku siis osoittaa sen, ettei kuva $T_1(H^1)$ sisälly avaruuteen l^1. Vastaavia funktioita löytyy myös muille p:n arvoille $(p < \infty)$.

Interpolointiteorian yksi keskeisimmistä tuloksista on seuraava H^p-avaruuksia koskeva interpolaatiolause. Kyseinen teoreema on H^p-interpolaation elegantein tulos, vaikka sen todistus onkin erittäin työläs.

Teoreema 4.13. ***(interpolaatiolause)*** *Olkoon* $1 \leq p \leq \infty$. *Nyt* $T_p(H^p) = l^p$, *jos ja vain jos* $\{z_i\}$ *on tasaisesti separoituva.*

Todistus. Tapaus $p = \infty$ pätee teoreeman 4.9 nojalla, joten olkoon $1 \leq p < \infty$. Osoitetaan ensin tasaisen separoituvuuden seuraavan ehdosta $T_p(H^p) = l^p$.

Hieman yleisemmin pätee, että mikäli $T_p(H^p) \subset l^p$, niin suljetun kuvaajan lauseen 2.14 nojalla T_p on rajoitettu operaattori, jos sen kuvaaja on suljettu. Tämän osoittamiseksi tulee näyttää, että $T_p f = w$, jos $f_n \to f$ avaruudessa H^p ja $T_p f_n \to w$ avaruudessa l^p ($w = \{w_i\}$).

Lemman 3.20 nojalla suppenemisesta $f_n \to f$ seuraa se, että $f_n(z_i) \to f(z_i)$ kaikilla i. Täten

$$(1 - |z_i|^2)^{1/p} f_n(z_i) \to (1 - |z_i|^2)^{1/p} f(z_i)$$

kaikilla i. Toisaalta suppenemisesta $T_p f_n \to w$ seuraa

$$(1 - |z_i|^2)^{1/p} f_n(z_i) = (T_p f_n)(z_i) \to w_i$$

kaikilla i. Raja-arvon yksikäsitteisyyden nojalla $(T_p f)(z_i) = w_i$ kaikilla i ja T_p on rajoitettu.

Kuvaus $T_p : H^p \to l^p$ ei välttämättä ole yksikäsitteinen, joten bijektiivisyyden takaamiseksi muodostetaan uusi kuvaus $T'_p : H_p/Ker(T_p) \to l^p$. Joukko $Ker(T_p)$ sisältää ne funktiot $f \in H^p$, jotka kuvautuvat avaruuden l^p neutraalialkioksi. Edelleen samaistetaan ne funktiot $f, g \in H^p$, joille on voimassa $f = gh$ jollakin $h \in Ker(T_p)$.

Tällöin T'_p kuvaa joukon $\{fh : h \in Ker(T_p)\}$ edustajan $f \in H^p$ jollekin $w \in l^p$ ja jokaiselle $w = \{w_i\} \in l^p$ on olemassa funktio $f \in H^p$, jolle kaikilla i pätee

$$(1 - |z_i|^2)^{1/p} f(z_i) = w_i.$$

Operaattori T'_p on yksikäsitteinen, joten on olemassa myös yksikäsitteinen käänteiskuvaus ${T'}_p^{-1} : l^p \to H^p/Ker(T_p)$, joka avoimen kuvauksen lauseen 2.13 nojalla on jatkuva. Erityisesti jokaiselle i on olemassa funktio $f_i \in H^p$, jolle pätee $f_i(z_j) = (1 - |z_i|^2)^{-1/p} \delta_{ij}$ ja $\|f_i\|_p \leq M_p$. Olkoon $n > i$ ja

$$F_{ni}(z) = f_i(z) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{1 - \overline{z_j} z}{z_j - z}.$$

Funktion f_i nollakohtien joukkoon kuuluvat pisteet z_j, missä $j \neq i$ eli lauseen 3.6 nojalla

$$f_i(z) = g_i(z) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{z_j - z}{1 - \overline{z_j} z},$$

missä $\|f_i\|_p = \|g_i\|_p$. Täten $\|F_{ni}\|_p = \|g_i\|_p = \|f_i\|_p \leq M$ ja $F_{ni} \in H^p$. Nyt yhtälöstä

$$|F_{ni}(z_i)| = (1 - |z_i|^2)^{-1/p} \Big| \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{1 - \overline{z_j} z_i}{z_j - z_i} \Big|$$

saadaan yläraja tulolle lemman 3.20 avulla

$$\Big| \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{1 - \overline{z_j} z_i}{z_j - z_i} \Big| = (1 - |z_i|^2)^{1/p} |F_{ni}(z_i)| \leq C_p \|F_{ni}\|_p \leq C_p M_p.$$

Annetaan $n \to \infty$ ja vaihdetaan epäyhtälön puolet kertomalla, jolloin

$$\frac{1}{C_p M_p} \leq \Big| \prod_{j \neq i} \frac{z_j - z_i}{1 - \overline{z_j} z_i} \Big| = |B_i(z_i)|,$$

mikä osoittaa $\{z_i\}$:n olevan tasaisesti separoituva, jos $T_p(H^p) = l^p$.

Käänteinen tapaus on hieman haastavampi. Aluksi osoitetaan sen pätevän, kun $p = 2$, mistä yleinen tapaus seuraa lemman 3.7 avulla. Alkuehtojen mukaan jono $\{z_i\}$ on tasaisesti separoituva, joten on olemassa $\delta > 0$, jolle pätee $\prod_{i \neq j} \left|\frac{z_i - z_j}{1-\overline{z_i}z_j}\right| \geq \delta$ kaikilla j. Asetetaan

$$(f,g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\varphi})\overline{g(e^{i\varphi})}d\varphi.$$

Alkuehdon nojalla $\{z_i\}$ on tasaisesti separoituva. Käytetään todistuksen loppuosan yhteydessä seuraavia merkintöjä ($i \leq s$), missä heittomerkkiä ($'$) käytetään sekaannusten välttämiseksi äärellisen tulon merkkinä:

$$B_i(z) = \prod_{j \neq i} \frac{z_j - z}{1-\overline{z_j}z} \quad \text{ja} \quad B_{s'}(z) = \prod_{j=1}^{s} \frac{z_j - z}{1-\overline{z_j}z} \quad \text{sekä} \quad B_{is'}(z) = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{s} \frac{z_j - z}{1-\overline{z_j}z}.$$

Ongelmana on siis osoittaa, että kun $\{z_i\}$ on tasaisesti separoituva, niin jonolle $\{w_i\} \in l^2$ on olemassa funktio $f \in H^2$, jolle pätee $T_2(f) = \{w_i\}$. Olkoon $w = \{w_i\} \in l^2$ ja

$$g_{is}(z) = \frac{(1-|z_i|^2)^{3/2}}{(1-\overline{z_i}z)^2}B_{is'}(z)^2 \quad \text{ja} \quad f_s(z) = \sum_{i=1}^{s} w_i \frac{g_{is}(z)}{B_{is'}(z_i)^2}.$$

Funktio $g_{is}(z_j) = 0$, kun $j \neq i$ ja $i, j \leq s$, joten

$$f_s(z_i) = w_i \frac{(1-|z_i|^2)^{3/2}}{(1-|z_i|^2)^2}\frac{B_{is'}(z_i)^2}{B_{is'}(z_i)^2} = \frac{w_i}{(1-|z_i|^2)^{1/2}} \quad \Leftrightarrow \quad (1-|z_i|^2)^{1/2}f_s(z_i) = w_i.$$

Nyt on $T_2(f_s) = \{w_i\}_{i=1}^{s}$. Tutkitaan seuraavaksi sen normia

$$\|f_s\|_2^2 = (f_s, f_s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_s(e^{i\varphi})\overline{f_s(e^{i\varphi})}d\varphi = \sum_{i,j=1}^{s} \frac{w_i\overline{w_j}}{B_{is'}(z_i)^2\overline{B_{js'}(z_j)^2}}(g_{is}, g_{js}).$$

Helposti nähdään, että

$$g_{is}(z) = \frac{(1-|z_i|^2)^{3/2}}{(z_i - z)^2}B_{s'}(z)^2, \quad \text{joten}$$
$$(g_{is}, g_{js}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\big((1-|z_i|^2)(1-|z_j|^2)\big)^{3/2}}{\big((z_i - e^{i\varphi})\overline{(z_j - e^{i\varphi})}\big)^2}|B_{s'}(e^{i\varphi})|^4 d\varphi.$$

Integraalissa on termi $|B_{s'}(e^{i\varphi})| = 1$ melkein kaikkialla $\partial\mathbb{D}$:lla, joten se häviää. Nyt voidaan suorittaa seuraavanlainen osamurtohajotelma:

$$\begin{aligned}
|(g_{is}, g_{js})| &\leq \left|\frac{z_j - z_i}{1-\overline{z_j}z_i}\right|^4 \frac{|(g_{is}, g_{js})|}{\delta^4} \\
&\leq \frac{\big((1-|z_i|^2)(1-|z_j|^2)\big)^{3/2}}{2\pi\delta^4|1-\overline{z_j}z_i|^4}\left|\int_0^{2\pi} \frac{2^3\big(|z_j - e^{i\varphi}|^4 + |z_i - e^{i\varphi}|^4\big)}{\big((z_i - e^{i\varphi})\overline{(z_j - e^{i\varphi})}\big)^2}d\varphi\right| \\
&= \frac{8\big((1-|z_i|^2)(1-|z_j|^2)\big)^{3/2}}{2\pi\delta^4|1-\overline{z_j}z_i|^4}\left|\int_0^{2\pi} \frac{(z_j - e^{i\varphi})^2}{(z_i - e^{i\varphi})^2} + \frac{\overline{(z_i - e^{i\varphi})}^2}{\overline{(z_j - e^{i\varphi})}^2}d\varphi\right| \\
&\leq \frac{8\big((1-|z_i|^2)(1-|z_j|^2)\big)^{3/2}}{2\pi\delta^4|1-\overline{z_j}z_i|^4}\left(\left|\int_0^{2\pi} \frac{(z_j - e^{i\varphi})^2}{(z_i - e^{i\varphi})^2}d\varphi\right| + \left|\int_0^{2\pi} \frac{(z_i - e^{i\varphi})^2}{(z_j - e^{i\varphi})^2}d\varphi\right|\right).
\end{aligned}$$

Integraalien käsittelyyn käytetään residueteoriaa.[12] Teorian mukaan $\mathbb{D}$:ssä meromorfisen funktion integraali kiekon reunaa pitkin on sama kuin $2\pi i$ kertaa funktion $\mathbb{D}$:ssä ja πi kertaa $\partial\mathbb{D}$:ssä sijaitsevien napojen residueiden summa.

[12] Rudinin kirjan sivu 224.

Molemmilla integraaleilla on yksi toisen kertaluvun napa, pisteissä $z = z_i$ ja $z = z_j$. Laskut ovat symmetriset, joten tehdään niistä vain toinen. Tarkastellaan funktion $h = (\frac{z_j - z}{z_i - z})^2$ residuen arvoa pisteessä $z = z_i$:

$$\operatorname{Res}_{z=z_i} h(z) = \lim_{z \to z_i} \frac{d}{dz}\left[(z - z_i)^2 \Big(\frac{z_j - z}{z_i - z}\Big)^2\right] = 2(z_i - z_j).$$

Lasketaan seuraavaksi residuet yhteen ja kerrotaan $2\pi i$:llä, jolloin

$$|(g_{is}, g_{js})| \leq \frac{8\big((1 - |z_i|^2)(1 - |z_j|^2)\big)^{3/2}}{\delta^4 |1 - \overline{z_j} z_i|^4} 4|z_j - z_i| \leq \frac{32}{\delta^4}\Big(\frac{(1 - |z_i|^2)(1 - |z_j|^2)}{|1 - \overline{z_j} z_i|^2}\Big)^{3/2}.$$

Korollaarin 4.6 avulla saadaan yläraja summalle $\sum_{i=1}^{s} |(g_{is}, g_{js})| \leq \frac{32 A^{3/2}}{\delta^4} = B$. Nyt normille $\|f_s\|_2$ voidaan lemman 4.10 nojalla kirjoittaa epäyhtälö

$$\|f_s\|_2^2 \leq \sum_{i,j=1}^{s} \frac{w_i \overline{w_j}}{\delta^4} |(g_{is}, g_{js})| \leq \frac{B}{\delta^4} \|w\|_2^2.$$

Täten f_s on tasaisesti rajoitettu avaruudessa H^2, joten on olemassa osajono f_{s_j}, joka suppenee lokaalisti tasaisesti kohti analyyttistä funktiota $f \in H^2$, jolle $T_2 f = w$ ja $\|f\|_2^2 \leq \frac{B}{\delta^4} \|w\|_2^2$. Jäljellä on enää todistaa (kun $p = 2$), että $T_2(f) \in l^2$ jokaisella $f \in H^2$.

Yleinen funktio f_s, joka saa T_2 interpolaatiossa arvot w_i pisteissä z_i, $i \leq s$, voidaan kirjoittaa muodossa $f_s = h_s - B_{s'} g$, missä $g \in H^2$ on mielivaltainen funktio ja h_s saa pisteissä z_i arvot $h_s(z_i) = (1 - |z_i|^2)^{-1/2} w_i$, kun $i \leq s$. Olkoon lisäksi h_s sellainen funktio, jonka H^2-normi on pienin mahdollinen $\|h_s\|_2 = \min_{g \in H^2} \|h_s - B_{s'} g\|_2$. Myös f_s on samaa muotoa kuin h_s, joten $\|h_s\|_2 \leq \|f_s\|_2 \leq C\|w\|_2$, kun $C = \sqrt{B}\delta^{-2}$.

Asetetaan $k_s(z) = \frac{h_s(z)}{B_{s'}(z)}$. Funktion f normin minimoiminen on ekvivalenttia tilanteen $\min_{g \in H^2} \|k_s - g\|_2$ kanssa, mutta h_s:n ominaisuuksien nojalla $\min_{g \in H^2} \|k_s - g\|_2 = \|k_s\|_2$. Lasketaan seuraavaksi $\phi(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}} k_s(z) f(z) dz$ ja sovelletaan Korollaaria 3.22. Funktiolla $k_s f$ on yksikkökiekossa s kappaletta ensimmäisen kertaluvun napoja $z = z_j$, missä $j \leq s$. Residueteorian nojalla

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_{z=z_j} k_s(z) f(z) &= \lim_{z \to z_j} \frac{(z - z_j) h_s(z)}{B_{s'}(z)} f(z) = \lim_{z \to z_j} \frac{(z - z_j) h_s(z)}{B_{js'}(z_j)} \frac{1 - \overline{z_j} z}{z_j - z} f(z) \\ &= -\frac{(1 - |z_j|^2)^{1/2} w_j}{B_{js'}(z_j)} f(z_j).\end{aligned}$$

Summataan residuet yhteen ja kerrotaan $2\pi i$:llä, jolloin funktionaali ϕ saa muodon

$$\phi(f) = -\sum_{i=1}^{s} \frac{w_i (1 - |z_i|^2)^{1/2}}{B_{is'}(z_i)} f(z_i).$$

Korollaarin 3.22 mukaisesti

$$\left|\sum_{i=1}^{s} \frac{w_i (1 - |z_i|^2)^{1/2}}{B_{is'}(z_i)} f(z_i)\right| \leq \|h_s\|_2 \|f\|_2 \leq C\|w\|_2 \|f\|_2,$$

missä riittää ottaa supremum yli kaikkien $w \in l^2$, joilla $\|w\|_2 \leq 1$. Tällöin saadaan

$$\left(\sum_{i=1}^{s} (1 - |z_i|^2) |f(z_i)|^2\right)^{1/2} \leq C\|f\|_2.$$

Näin ollen $T_2 f \in l^2$ jokaisella $f \in H^2$.

Osoitetaan seuraavaksi, että $T_p f \in l^p$ kaikilla $f \in H^p$, kun $\{z_i\}$ on tasaisesti separoituva. Funktiolle $f \in H^p$ kirjoitetaan $f(z) = B(z)\big(g(z)\big)^{2/p}$, kuten lemmassa 3.7. Näin ollen

$$\sum_i (1-|z_i|^2)|f(z_i)|^p \leq \sum_i (1-|z_i|^2)|g(z_i)|^2 \leq C^2\|g\|_2^2 = C^2\|f\|_p^p.$$

Toisin sanoen $\|T_p(f)\|_p \leq C^{2/p}\|f\|_p$, kun $f \in H^p$.

Lopuksi osoitetaan, että $T_p(H^p) \supset l^p$ $(1 \leq p < \infty)$, kun $\{z_i\}$ on tasaisesti separoituva.

Tässä kohdassa tapauksen $p = 1$ todistus eroaa yleisestä tapauksesta ja esitetään yleisen tapauksen jälkeen.

Olkoon $1 < p < \infty$ ja $w = \{w_i\} \in l^p$ sekä $g_s(z) \in H^p$ sellainen funktio, jonka H^p-normi on pienin mahdollinen, kun $g_s(z_i) = (1-|z_i|^2)^{-1/p}w_i$ $(i \leq s)$. Käytetään jälleen teoreemaa 3.22, jolloin g_s:n normille saadaan jollekin $f \in H^q$, $\|f\|_q = 1$ (q on p:n konjugaatti), yhtälö

$$\|g_s\|_p = \Big|\sum_{i=1}^{s} \frac{w_i(1-|z_i|^2)^{1/q}}{B_{is'}(z_i)} f(z_i)\Big|.$$

Lineaarioperaattorille T_p saadun normin ylärajan nojalla

$$\|g_s\|_p \leq \delta^{-1}\Big(\sum_{i=1}^{s}|w_i|^p\Big)^{1/p}\Big(\sum_{i=1}^{s}(1-|z_i|^2)|f(z_i)|^q\Big)^{1/q} \leq \delta^{-1}C^{2/q}\|w\|_p.$$

Rajalla $\lim_{s\to\infty} g_s \to g \in H^p$ ja $T_p(g) = w$ samoin argumentein kuin tapauksessa $p = 2$.

Olkoon nyt $p = 1$ ja $w \in l^1$ sekä $g_s(z) \in H^1$ sellainen funktio, jonka H^1-normi on pienin mahdollinen, kun $g_s(z_i) = (1-|z_i|^2)^{-1}w_i$ $(i \leq s)$. Tällöin jollekin $f \in H^\infty$ voidaan kirjoittaa

$$\|g_s\|_1 = \Big|\sum_{i=1}^{s} \frac{w_i}{B_{is'}(z_i)} f(z_i)\Big|, \quad \text{jolloin}$$

$$\|g_s\|_1 \leq \delta^{-1}\Big(\sum_{i=1}^{s}|w_i|\Big)\sup_z |f(z)| \leq \delta^{-1}\|w\|_1\|f\|_\infty$$

Koska edellä w on mielivaltainen jokaisella $1 \leq p < \infty$, on interpolaatiolause todistettu.$\square$

5 Carlesonin mitat

Carlesonin mitat näkivät päivänvalon 1960-luvun alkupuolella. Tuolloin ruotsalainen matemaatikko Lennart Carleson esitteli kyseiset mitat karakterisoidakseen kompleksitason avoimen yksikkökiekon jonot, joille H^∞-interpolaatio on mahdollista, sekä antaakseen ratkaisun Korona-teoreemaan.

Tämä teoreema ratkaisee ongelman, joka liittyy Banach-algebra H^∞:n maksimaalisten idealien $M_\zeta = \{f \in H^\infty : f(\zeta) = 0\}$ sulkeumaan ($|\zeta| < 1$) Gelfandin topologiassa. Toisin sanoen: ulottuuko sulkeuman vaikutusalue yksikkökiekon ulkopuolelle eli onko yksikkökiekolla "korona" (vertaa auringon korona)? Vastaus tähän kysymykseen on kielteinen.

Kyseistä teoreemaa ei tämän työn puitteissa käsitellä, mutta se löytyy todistuksineen muun muassa Durenin kirjasta *Theory of H^p Spaces* ja soveltuu esimerkiksi jatkolukemiseksi Carlesonin mitoista kiinnostuneelle lukijalle.

5.1 Carlesonin mittojen määritelmä

Interpolaatiolauseen eli teoreeman 4.13 todistuksessa osoitettiin, että mikäli $\{z_i\}$ on tasaisesti separoituva ja $f \in H^p$, niin

$$\Big(\sum_{i=1}^{\infty}(1-|z_i|)|f(z_i)|^p\Big)^{1/p} \le \Big(\sum_{i=1}^{\infty}(1-|z_i|^2)|f(z_i)|^p\Big)^{1/p} \le C\|f\|_p.$$

Toisin sanoen voidaan määritellä diskreetti mitta $\mu = \sum_i (1-|z_i|)\delta_{z_i}$ kaikilla i, jolloin

$$\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p d\mu(z) < \infty$$

jokaiselle funktiolle $f \in H^p$ ja erityisesti injektio $H^p \to L^p_\mu$ on rajoitettu. Mitalle δ_{z_i} pätee $\delta_{z_i}(A) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & z_i \in A \\ 0, & z_i \notin A. \end{array} \right.$

Luonnollisesti herää kysymys siitä, millä muilla mitoilla μ inkluusio $H^p \to L^p_\mu$ on rajoitettu. Triviaalisti avoimen yksikkökiekon tavallinen Lebesguen mitta on tällainen. Osoittautuu, että kyseiset ominaisuudet omaavien mittojen joukko on helppo karakterisoida: ne ovat niin sanottuja Carlesonin mittoja.

Määritelmä 5.1. (Carlesonin mitta) Avoimen yksikkökiekon äärellistä mittaa μ kutsutaan Carlesonin mitaksi, jos on olemassa sellainen vakio A, että $\mu(S) \le Ah$ jokaisella joukolla S (näitä joukkoja kutsutaan Carlesonin joukoiksi) muotoa

$$S = \{z = re^{i\varphi} : 1-h \le r < 1, \quad \varphi_0 \le \varphi \le \varphi_0 + h\}.$$

Lemma 5.2. *Olkoon μ yksikkökiekon positiivinen Borel-mitta ja $\alpha > 0$. Tällöin μ on Carlesonin mitta, jos ja vain jos on olemassa vakio A_α, jolle pätee*

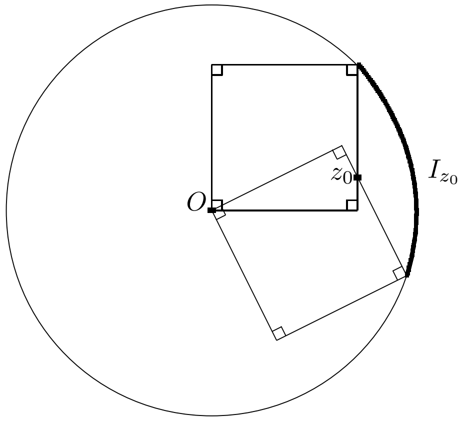
$$(*) \qquad \mu\big(\{z : |h(z)| > \lambda\}\big) \le A_\alpha \big|\{\varphi : (N_\alpha h)(e^{i\varphi}) > \lambda\}\big|, \quad \lambda > 0,$$

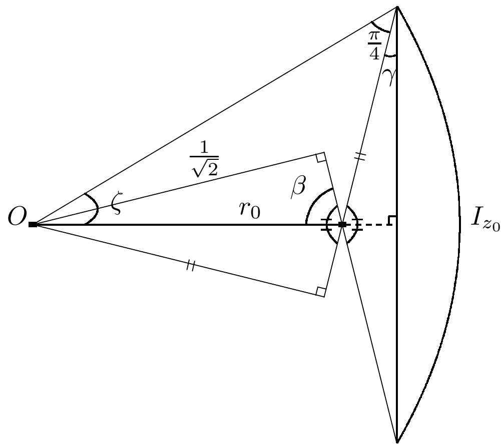
jokaisella yksikkökiekon harmonisella funktiolla h. $|\cdot|$ on välin $[0, 2\pi)$ Lebesguen mitta ja $N_\alpha h$ on ei-tangentiaalinen maksimaalifunktio kuten määritelmässä 3.10.

Todistus. Vakio α voidaan kiinnittää, koska todistus on identtinen sen jokaiselle arvolle. Valitaan $\alpha = \pi/4$.

Merkitään $N_\varphi = \{e^{i\varphi} : (N_{\pi/4}h)(e^{i\varphi}) > \lambda\}$ ja $H_\lambda = \{z : |h(z)| > \lambda\}$.

Olkoon piste $z_0 = r_0 e^{i\varphi_0} \in H_\lambda$ mielivaltainen. Nyt voidaan määritellä maksimaalinen yksikkökiekon reunan kaari I_{z_0}, jolle pätee $z_0 \in \{e^{i\varphi} S_{\pi/4} : \varphi \in I_{z_0}\}$. Tällöin on myös voimassa ehto $(N_{\pi/4}h)(e^{i\varphi}) > \lambda$, kun $\varphi \in I_{z_0} \subset N_\varphi$.





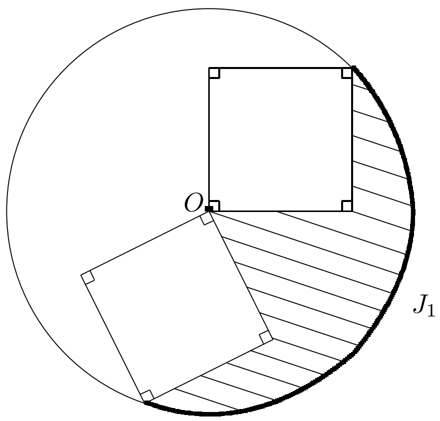
Kaaren I_{z_0} keskipiste on $e^{i\varphi_0}$ ja pituus voidaan laskea oikeanpuoleisen kuvan perusteella seuraavasti: $\beta = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}r_0}\right)$, $\gamma = \pi/2 - \beta$ ja $\zeta = \pi/4 - \gamma$ sekä $|I_{z_0}| = 2\zeta$.

$$|I_{z_0}| = \frac{\pi}{2}, \quad r_0 \le \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{ja} \quad |I_{z_0}| = 2\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}r_0}\right) - \frac{\pi}{2}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} < r_0 < 1$$

Ongelmana on nyt peittää z_0 jollakin Carlesonin joukolla. Kaaren pituudelle pätee epäyhtälö $|I_{z_0}| \ge (1 - r_0)$, ja tarkoitusperiimme sopii muutenkin seuraavanlainen Carlesonin joukko

$$T_{z_0} = \{z = re^{i\varphi} : r_0 \le r < 1, \quad \varphi_0 - \frac{1-r_0}{2} \le \varphi \le \varphi_0 + \frac{1-r_0}{2}\}.$$

Nyt $z_0 \in T_{z_0} \subset \{e^{i\varphi} S_{\pi/4} : \varphi \in I_{z_0}\}$. Piste z_0 valittiin mielivaltaisesti, joten jokainen piste $z \in H_\lambda$ voidaan peittää Carlesonin joukolla, jonka projektio yksikkökiekon reunalle sisältyy joukkoon N_φ.



Muodostetaan vastaavat joukot I_z jokaiselle pisteelle $z \in H_\lambda$. Yhdiste näistä joukoista $\bigcup_{z \in H_\lambda} I_z \subset N_\varphi$ on avoin ja peittää yksikkökiekon reunan $\partial\mathbb{D}$ tai koostuu numeroituvan monesta erillisestä, avoimesta osakaaresta J_j.

Mikäli koko yksikkökiekon reuna $\partial\mathbb{D}$ peittyy, niin $\mu\big(\{z : |h(z)| > \lambda\}\big) \le \mu(\mathbb{D})$ ja vastaavasti $A_\alpha\big|\{\varphi : (N_\alpha h)(e^{i\varphi}) > \lambda\}\big| = 2\pi A_\alpha$. Tällöin $(*)$ saa muodon $\mu(\mathbb{D}) \le 2\pi A_\alpha$ ja lemma pätee.

Olkoon J_1 nyt jokin näistä kaarista, eli J_1 on avoin ja maksimaalinen. Tällöin edellä olevasta kuvasta nähdään, että alueessa $\bigcup_\varphi \{e^{i\varphi} S_{\pi/4} : \varphi \in J_1\}$ on funktio $h(z) \le \lambda$ raidoitetun alueen ulkopuolella. Raidoitettu alue voidaan peittää äärellisen monella, sisäpisteiltään erillisellä Carlesonin joukolla T_{1k}, missä yhdistettä $\bigcup_k T_{1k}$ vastaava yksikkökiekon reunan kaari sisältyy joukkoon J_1.

Nyt $H_\lambda \subset \bigcup_{jk} T_{jk}$. Täten voidaan johtaa tulos

$$\mu\big(\{z : |h(z)| > \lambda\}\big) \le \sum_{jk} \mu\big(T_{jk}\big) \le A \sum_j |J_j| \le A\big|\{\varphi : (N_{\pi/4}h)(e^{i\varphi}) > \lambda\}\big|,$$

ja epäyhtälö $(*)$ toteutuu.

Oletetaan nyt, että $(*)$ pitää paikkansa. Olkoon T_{z_0} mielivaltainen Carlesonin joukko, missä $z_0 = r_0 e^{i\varphi_0}$ ja $T_{z_0} = \{z = re^{i\varphi} : r_0 \le r < 1, \quad \varphi_0 - \frac{1-r_0}{2} \le \varphi \le \varphi_0 + \frac{1-r_0}{2}\}$. Piste z_0 määräytyy tässä joukon T_{z_0} mukaan. Olkoon I_{z_0} tätä joukkoa vastaava yksikköympyrän kaari sekä h funktion f Poissonin integraali, missä $f(e^{i\varphi}) = 2\pi\lambda\chi_{I_{z_0}}(e^{i\varphi})$, $\|f\|_1 \le \lambda(1 - r_0)$. Alueessa T_{z_0}

$$h(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\mathbb{D}} P(r, \varphi - t) f(t)dt \ge \lambda \int_{I_{z_0}} \frac{1 - r_0^2}{(1 - r_0)^2} dt \ge \lambda \frac{1 + r_0}{1 - r_0}(1 - r_0) > \lambda,$$

joten alkuperäisen epäyhtälön, teoreeman 3.11 ja huomion 3.8 kohdan (1) nojalla

$$\begin{aligned}\mu(T_{z_0}) &\le \mu(\{|h(z)| > \lambda\}) \le A\big|\{\varphi : (N_{\pi/4}h)(e^{i\varphi}) > \lambda\}\big| \le A\big|\{\varphi : C_{\pi/4} M f(e^{i\varphi}) > \lambda\}\big| \\ &\le \frac{AC_{\pi/4}C_1}{\lambda}\|f\|_1 \le AC(1 - r_0). \square\end{aligned}$$

5.2 Hyperbolinen metriikka

Luvussa 5.1 osoitettiin harmonisten funktioiden ja Carlesonin mittojen välinen yhteys sekä viitattiin interpolaation ja kyseisten mittojen väliseen suhteeseen. Vaikka $\sum_i (1 - |z_i|)\delta_{z_i}$ on Carlesonin mitta, jono $\{z_i\}$ ei välttämättä ole interpoloiva. Interpoloituvuuden toteuttamiseksi tulee jonon olla vielä erillinen hyperbolisessa metriikassa.

Määritelmä 5.3. (hyperbolinen metriikka) Yksikkökiekon kahden mielivaltaisen pisteen z_i ja z_j välinen hyperbolinen etäisyys on

$$\rho(z_i, z_j) = \inf_\gamma \int_\gamma \frac{2|dz|}{1 - |z|^2},$$

missä γ on mielivaltainen paloittain derivoituva polku kyseisten pisteiden välillä.

Selvästikin $\rho(z_i, z_j) = \rho(z_j, z_i)$ ja $\rho(z_i, z_j) = 0$, jos ja vain jos $z_i = z_j$. Kolmioepäyhtälö $\rho(z_i, z_j) \le \rho(z_i, z_k) + \rho(z_k, z_j)$ puolestaan pätee seuraavan havainnon nojalla. Kahden polun yhdiste on edelleen polku, ja vaatimus, että pisteiden z_i ja z_j välisen polun tulee kulkea z_k:n kautta, vain karsii potentiaalisten polkujen määrää. Täten ρ on metriikka.

Ensimmäinen hyperbolista metriikkaa koskeva tulos on origon ja mielivaltaisen pisteen z välinen etäisyys. Symmetrian nojalla lyhin polku näiden pisteiden välillä on suora jana eli

$$\rho(0, z) = \int_0^{|z|} \frac{2dt}{1 - t^2} = \log\Big(\frac{1 + |z|}{1 - |z|}\Big).$$

Kahden yksikkökiekon mielivaltaisen pisteen z_i ja z_j välinen etäisyys on hieman hankalampi. Yksikkökiekon jatkuva bijektio itselleen ei vaikuta metriikkaan, koska polkujen γ minimi voi sisältää käänteiskuvauksen bijektiosta.

Mikäli siis löydetään jatkuva bijektio, joka kuvaa pisteen z_i origoon, niin ongelma palautuu origon ja jonkin kolmannen pisteen väliseksi etäisyydeksi. Möbiuskuvaukset täyttävät annetut ehdot, ja sopiva kuvaus onkin seuraava: $\gamma_i(z) = \frac{z_i - z}{1-\overline{z_i}z}$, jolloin $\gamma_i(0) = z_i$ ja $\gamma_i\big(\gamma_i(z_j)\big) = \gamma_i\big(\frac{z_i - z_j}{1-\overline{z_i}z_j}\big) = z_j$:

$$\rho(z_i, z_j) = \int_{\gamma_i} \frac{2|dz|}{1-|z|^2} = \int_0^{|\gamma_i(z_j)|} \frac{2dt}{1-t^2} = \log\Big(\frac{1+|\gamma_i(z_j)|}{1-|\gamma_i(z_j)|}\Big).$$

Ylläolevasta yhtälöstä nähdään, että γ_i määrittelee hyperbolisen metriikan täydellisesti. Mikäli $\rho(z_i, z_j) = a$, niin $|\gamma_i(z_j)| = \frac{e^a-1}{e^a+1}$. Täten $\rho(z_i, z_j) > 0$, jos ja vain jos $|\gamma_i(z_j)| > 0$. Edelleen $|\gamma_i(z_j)| > 0$, jos ja vain jos $|z_i - z_j| > 0$.

5.3 Carlesonin teoreema

Teoreema 5.4. ***(Carleson)*** *Olkoon μ yksikkökiekon positiivinen mitta. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät.*

(1) *μ on Carlesonin mitta kiekossa $\mathbb{D}$, kuten määritelmässä* 5.1.

(2) *Funktiolle $f \in H^p$ $(1 \le p < \infty)$ pätee* $\int_{\mathbb{D}} |f|^p d\mu \le C\|f\|_p^p$.

(3) *Jollakin p $(1 \le p < \infty)$ $f \in L^p_\mu$ jokaisella $f \in H^p$.*

Todistus. Oletetaan ehdon (1) pätevän. Tehdään ehdon (2) integraalille vakiomuotoinen distribuutio, käytetään ehtoa (1) ja lemmaa 5.2 sekä teoreemaa 3.18:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}} |f|^p d\mu &= \int_0^\infty \mu\{z : |f(z)|^p > t\}dt \le \int_0^\infty A_\alpha\big|\{\varphi : (N_\alpha f^p)(e^{i\varphi}) > t\}\big|dt \\ &= A_\alpha \int_{\partial\mathbb{D}} (N_\alpha f^p)(e^{i\varphi})dm = A_\alpha \int_{\partial\mathbb{D}} (N_\alpha f)^p(e^{i\varphi})dm = A_\alpha\|N_\alpha f\|_p^p \\ &\le A_\alpha C_{p,\alpha}\|f^*\|_p^p \le C\|f\|_p^p.\end{aligned}$$

Ylläolevan perusteella (2) seuraa ehdosta (1). Mikäli puolestaan (2) pätee, niin (3) on selvä.

Oletetaan, että (3) pätee jollakin p. Tällä p:n arvolla $H^p \subset L^p_\mu$ ja kyseiset avaruudet ovat Banach-avaruuksia. Suljetun kuvaajan lausetta 2.14 käyttämällä voidaan näyttää, että kuvaus $T : f \to f$ on rajoitettu $H^p \to L^p_\mu$. Tällöin

$$\|f\|_{L^p_\mu} = \|Tf\|_{L^p_\mu} \le \|T\|\|f\|_p \le C_T\|f\|_p.$$

Olkoon $T_{z_0} = \{z = re^{i\varphi} : r_0 \le r < 1, \quad \varphi_0 - \frac{1-r_0}{2} \le \varphi \le \varphi_0 + \frac{1-r_0}{2}\}$ mielivaltainen Carlesonin joukko ja m tavallinen Lebesguen mitta. Muodostetaan seuraavanlainen funktio

$$f(z) = \Big(\frac{1-|z_0|^2}{(1-\overline{z_0}z)^2}\Big)^{1/p}.$$

Kyseinen funktio f on analyyttinen ja

$$\|f\|_p^p = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{1-|z_0|^2}{|1-\overline{z_0}e^{i\varphi}|^2}d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{1-|z_0|^2}{|z_0-e^{i\varphi}|^2}d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\mathbb{D}} P(z_0, e^{i\varphi})d\varphi = 1,$$

joten $f \in H^p$. Funktio $P(z_0, e^{i\varphi})$ on Poissonin ydin. Toisaalta joukossa $z \in T_{z_0}$ pätee

$$\overline{z_0}z \in \{z = re^{i\varphi} : r_0^2 \leq r < 1, \quad -\frac{1-r_0}{2} \leq \varphi \leq \frac{1-r_0}{2}\}.$$

Täten $|1 - \overline{z_0}z| < \sqrt{2}(1 - |z_0|)$ ja funktiolle f saadaan alaraja.

$$|f(z)|^p = \frac{1 - |z_0|^2}{|1 - \overline{z_0}z|^2} > \frac{(1+r_0)(1-r_0)}{2(1-r_0)^2} \geq (1-r_0)^{-1}.$$

Saadun alarajan sekä operaattorin T ja funktion f normien nojalla

$$\begin{aligned}\mu(T_{z_0}) &= \int_{T_{z_0}} d\mu \leq (1-r_0)\int_{T_{z_0}} |f(z)|^p d\mu \leq (1-r_0)\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p d\mu \\ &= (1-r_0)\|f\|_{L^p_\mu}^p \leq (1-r_0)(C_T\|f\|_p)^p \leq (1-r_0)C_T^p.\end{aligned}$$

Kyseinen epäyhtälö vastaa Carlesonin mitan määritelmää 5.1, joten ehto (1) pätee.□

Seuraavaksi tarkastellaan Carlesonin mittojen ja interpoloivien jonojen välistä suhdetta.

Teoreema 5.5. *Seuraavat ehdot yksikkökiekon jonolle $\{z_i\}$ ovat yhtäpitävät.*

(1) $\{z_i\}$ *on interpoloiva avaruudessa* $H^\infty(\mathbb{D})$.

(2) *a)* *Jonon* $\{z_i\}$ *alkioille pätee* $\rho(z_i, z_j)_{i \neq j} \geq a > 0$ *ja*

b) $\sum_i (1 - |z_i|)\delta_{z_i}$ *on Carlesonin mitta.*

Todistus. (1) $\Rightarrow$ (2). Aluksi muistutetaan, että H^∞:ssä interpoloiva jono on

teoreeman 4.9 nojalla tasaisesti separoituva. Edelleen tasaisesti separoituva jono toteuttaa Blaschken ehdon eli $\sum_i (1 - |z_i|) < \infty$. Täten $\mu(\mathbb{D}) = \sum_i (1 - |z_i|)\delta_{z_i}(\mathbb{D}) < \infty$ ja μ on Carlesonin mitta. Jono $\{z_i\}$ toteuttaa jokaisella $i \neq j$ ehdon $\left|\frac{z_i - z_j}{1 - \overline{z_i}z_j}\right| \geq \delta$, joten se on erillinen hyperbolisen metriikan mielessä.

(2) $\Rightarrow$ (1). Olkoon $B(z)$ jonon $\{z_i\}$ Blaschken tulo ja vakio a kuten ehdossa (2). Tulon tekijöille pätee hyperbolisen metriikan määritelmän nojalla

$$\left|\frac{z_i - z_j}{1 - \overline{z_i}z_j}\right| \geq \frac{e^a - 1}{e^a + 1} = b > 0.$$

Logaritmifunktion sarjakehitelmän nojalla arvoilla $0 < b^2 < t < 1$ pätee

$$\frac{-\log(t)}{1-t} = \sum_{n=1} \frac{(1-t)^{n-1}}{n} \leq \sum_{n=1} \frac{(1-b^2)^{n-1}}{n} = \frac{-\log(b^2)}{1-b^2}.$$

Tämän nojalla $-\log(t) \leq \frac{-\log(b^2)}{1-b^2}(1-t) = \frac{2\log(b^{-1})}{1-b^2}(1-t)$. Asetetaan t:n paikalle Blaschken tulon i:nnen tekijän itseisarvon toinen potenssi ja summataan yli i:n:

$$\begin{aligned}-\log|B(z)|^2 &= -\log\prod_i \left|\frac{z_i - z}{1 - \overline{z_i}z}\right|^2 = \sum_i -\log\left|\frac{z_i - z}{1 - \overline{z_i}z}\right|^2 \\ &\leq \frac{2\log(b^{-1})}{1-b^2}\sum_i 1 - \left|\frac{z_i - z}{1 - \overline{z_i}z}\right|^2 = \frac{2\log(b^{-1})}{1-b^2}\sum_i \frac{(1-|z_i|^2)(1-|z|^2)}{|1 - \overline{z_i}z|^2}.\end{aligned}$$

Ongelmana on siis osoittaa, että $\{z_i\}$ on tasaisesti separoituva eli $\inf_j |B_j(z_j)| \geq \delta > 0$. Tämä on ekvivalentti ehdon $\sup_j -\log|B_j(z_j)|^2 \leq M < \infty$ kanssa, ja yllä johdettua epäyhtälöä voidaan käyttää, koska $\rho(z_i, z_j) \geq a > 0$.

Olkoon $z_j = r_j e^{i\varphi_j}$ jonon $\{z_i\}$ mielivaltainen piste. Voidaan olettaa, että $r_j > \frac{1}{2}$, koska jonon $\{z_i\}$ pisteet ovat kiekossa $\overline{U}(0, \frac{1}{2})$ tasaisesti separoituvat. Muutoin jonolla olisi kiekossa kasautumispiste, eivätkä pisteet olisi enää erilliset hyperbolisessa metriikassa.

Edellä mainittua tarkoitusta silmälläpitäen muodostetaan alueet T ja T_n $(n \geq 0)$:

$$\begin{aligned} T &= \{z = re^{i\varphi} : (2r_j - 1) \leq r < 1, \quad \varphi_j - (1 - r_j) \leq \varphi \leq \varphi_j + (1 - r_j)\} \quad \text{ja} \\ T_n &= \{z = re^{i\varphi} : 1 - 2^{-n} \leq r < 1, \quad \varphi_j - 2^{-n-1} \leq \varphi \leq \varphi_j + 2^{-n-1}\}. \end{aligned}$$

Selvästi $T_n \supset T_{n+1}$, minkä lisäksi jokaisella kiinteällä z_j on olemassa sellainen $N < \infty$, että $T_N \supset T \supset T_{N+1}$. Tällöin myös $(1 - r_j) > 2^{-N-2}$. Mikäli jono $\{z_i\}$ on tasaisesti separoituva alueessa $T_0 \backslash T_1$, se on saman laskun nojalla tasaisesti separoituva alueessa $\mathbb{D} \backslash T_0$.

Jaetaan alue T_0 osiin T, $T_N \backslash T$ ja $T_n \backslash T_{n+1}$, $n \in [0, N-1]$. Näiden osien yhdiste peittää joukon T_0, minkä lisäksi saadaan seuraavanlaiset epäyhtälöt

$$\begin{aligned} T : \sum_{\substack{z_i \in T \\ i \neq j}} \frac{(1 - |z_i|^2)(1 - |z_j|^2)}{|1 - \overline{z_i} z_j|^2} &\leq \sum_{\substack{z_i \in T \\ i \neq j}} \frac{(1 - |z_i|)(1 + |z_i|)(1 - |z_j|)(1 + |z_j|)}{(1 - |\overline{z_i} z_j|)^2} \\ &\leq \sum_{\substack{z_i \in T \\ i \neq j}} \frac{4(1 - |z_i|)(1 - |z_j|)}{(1 - |z_j|)^2} \leq \frac{4}{1 - r_j} \sum_{\substack{z_i \in T \\ i \neq j}} (1 - |z_i|) \leq \frac{4}{1 - r_j} A(2 - 2r_j) \leq 8A \\ T_N \backslash T : \sum_{z_i \in T_N \backslash T} \frac{(1 - |z_i|^2)(1 - |z_j|^2)}{|1 - \overline{z_i} z_j|^2} &\leq \frac{4}{1 - r_j} \sum_{z_i \in T_N \backslash T} (1 - |z_i|) \leq \frac{4}{1 - r_j} \frac{A}{2^N} < 16A \\ T_n \backslash T_{n+1} : \sum_{z_i \in T_n \backslash T_{n+1}} \frac{(1 - |z_i|^2)(1 - |z_j|^2)}{|1 - \overline{z_i} z_j|^2} &\leq \sum_{z_i \in T_n \backslash T_{n+1}} \frac{2(1 - |z_i|)}{|z_i - z_j|^2} \\ &\leq \sum_{z_i \in T_n \backslash T_{n+1}} \frac{4(1 - |z_i|)}{|(1 - 2^{-n}) - (1 - 2^{-N})|^2} \leq \Big(\frac{2^N}{2^{N-n} - 1}\Big)^2 \frac{4A}{2^n}. \end{aligned}$$

Merkitään $C_{ij} = \frac{(1-|z_i|^2)(1-|z_j|^2)}{|1-\overline{z_i} z_j|^2}$. Yhdistetään ylläolevat tulokset ja annetaan $|z_j| \to 1$, eli $N \to \infty$ (muutoin todistus on selvä)

$$\sum_{\substack{z_i \in T_0 \\ i \neq j}} C_{ij} = \sum_{\substack{z_i \in T \\ i \neq j}} C_{ij} + \sum_{z_i \in T_N \backslash T} C_{ij} + \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} \sum_{z_i \in T_n \backslash T_{n+1}} C_{ij} \leq 24A + 4A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 32A.$$

Täten jonon $\{z_i\}$ mielivaltaiselle jäsenelle z_j pätee $\sum_{i \neq j} C_{ij} \leq 32A < \infty$, joten Blaschken tulolle pätee $|B_j(z_j)| \geq \delta > 0$, ja näin ollen $\{z_i\}$ on interpoloiva avaruudessa H^∞.$\square$

Teoreeman 5.5 nojalla voidaan todeta, että jonon $\{z_i\}$ interpoloituvuus on vahvempi ehto kuin vaatimus siitä, että $\sum_i (1 - |z_i|)\delta_{z_i}$ on Carlesonin mitta. Esiin nouseekin välittömästi kysymys siitä, millaisen yksikkökiekon $\mathbb{D}$ jonon karakterisoi ehto: $\sum_i (1 - |z_i|)\delta_{z_i}$ on Carlesonin mitta (ilman lisäoletuksia).

Lause 5.6. *Olkoon $\{z_i\}$ sellainen yksikkökiekon $\mathbb{D}$ jono, että $\sum_i (1 - |z_i|)\delta_{z_i}$ on Carlesonin mitta. Tällöin $\{z_i\}$ on korkeintaan äärellisen monen $H^\infty(\mathbb{D})$:ssä interpoloivan jonon yhdiste.*

Todistus. Jaetaan aluksi kompleksitason yksikkökiekko sisäpisteiltään erillisiin osajoukkoihin S_{nk}, missä $n \geq 0$ ja $0 \leq k \leq 2^n - 1$, seuraavasti

$$S_{nk} = \{z = re^{i2\pi\varphi} : 1 - \frac{1}{2^n} \leq r < 1 - \frac{1}{2^{n+1}}, \quad \frac{k}{2^n} \leq \varphi \leq \frac{k+1}{2^n}\}.$$

Tällöin $\bigcup_{n,k} S_{nk} = \mathbb{D}$ ja jokainen joukko S_{nk} sisältyy Carlesonin joukkoon S'_{nk}, missä

$$S'_{nk} = \{z = re^{i2\pi\varphi} : 1 - \frac{2\pi}{2^n} \leq r < 1, \quad \frac{k}{2^n} \leq \varphi \leq \frac{k+1}{2^n}\},$$

kun $n \geq 3$ ja $S'_{nk} = \mathbb{D}$, kun $n = 0, 1, 2$. Lopputodistus tehdään tapauksessa $n \geq 3$, mutta tapausten $n = 0, 1, 2$ todistukset ovat vakioita vaille samat.

Joukon S_{nk} läpimitta

$$\operatorname{diam}(S_{nk}) < \Big((2^{-n-1})^2 - (\pi 2^{-n+1})^2\Big)^{1/2} = \Big(4(1+\pi^2)2^{-2n}\Big)^{1/2} < \frac{7}{2^n}.$$

Nyt jokaiselle joukolle S_{nk} pätee seuraavanlainen epäyhtälö

$$\frac{2\pi}{2^n} A \geq \mu(S'_{nk}) \geq \mu(S_{nk}) = \sum_i (1 - |z_i|)\delta_{z_i}(S_{nk}) \geq \frac{1}{2^{n+1}} \sum_i \delta_{z_i}(S_{nk}) = \frac{\#\{z_i \cap S_{nk}\}}{2^{n+1}}.$$

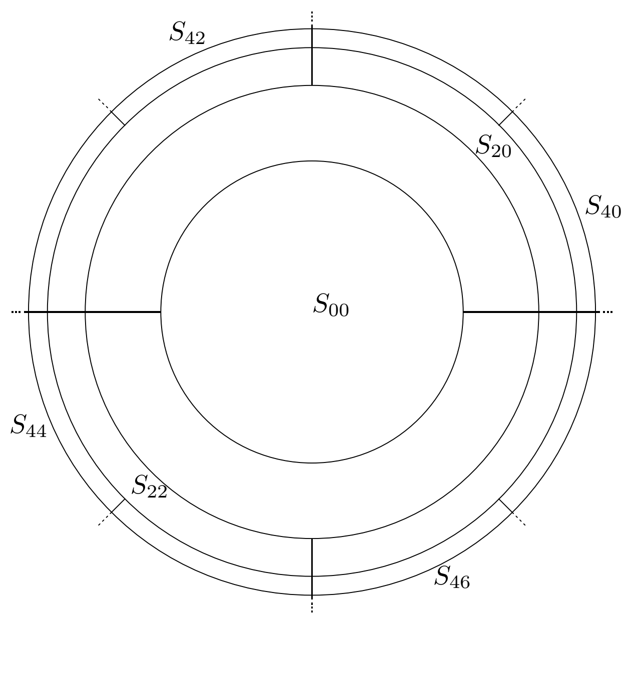
Mikäli joukko S_{nk} ei sisällä yhtäkään jonon z_i pistettä, niin kyseisen joukon kohdalla todistusta ei tarvitse jatkaa. Oletetaan, että joukko $S_{nk} \cap \{z_i\}$ on epätyhjä. Tällöin epäyhtälö saadaan muotoon $\#\{z_i \cap S_{nk}\} \leq \frac{Ah}{1-h2^{-n}} \leq 4\pi A < \infty$. Toisin sanoen joukko S_{nk} sisältää korkeintaan C-kappaletta jonon $\{z_i\}$ jäsentä. C valitaan kokonaisluvuksi.

Jonon $\{z_i\}$ pisteitä joukossa S_{nk} merkitään z_j^{nk}, missä $j \in [1, C]$ (järjestys voidaan muodostaa esimerkiksi valitsemalla ensin piste, jolla on pienin argumentti, ja jos näitä on useita, valitaan niistä se, jonka itseisarvo on pienin). Jokainen z_i on jokin z_j^{nk}.

Muodostetaan jonot $J_j^{00}, J_j^{01}, J_j^{10}, J_j^{11}$ seuraavasti:

$$J_j^{00} = \{z_j^{(2n)(2k)}\}, \qquad J_j^{01} = \{z_j^{(2n)(2k+1)}\},$$
$$J_j^{10} = \{z_j^{(2n+1)(2k)}\}, \qquad J_j^{11} = \{z_j^{(2n+1)(2k+1)}\}.$$

Esimerkiksi J_1^{00} sisältää pisteet $z_1^{nk} \in S_{nk}$, missä sekä n että k ovat parillisia (mikäli pisteet ovat olemassa). Jokainen piste z_i valitaan täsmälleen kerran. Oheiseen kuvaan on merkitty ne alueet, joista J_j^{00} poimii pisteet z_j^{nk}. Kuvio jatkuu yksikkökiekon reunalle asti.



Olkoon $z_j^{ml} \in S_{ml}$ jonon J_j^{00} mielivaltainen piste. Kuvan perusteella on selvää, ettei jonon J_j^{00} pisteitä sijaitse joukoissa S_{nk}, joilla on joukon S_{ml} kanssa yhteinen kosketuspiste (piste, jonka mielivaltainen ympäristö leikkaa molempia joukkoja). Symmetrian nojalla tämä pätee myös muille jonoille J_j (jätetään yläindeksit pois).

Olkoon $z = re^{i\varphi} \in S_{nk}$ ja $w = se^{i\psi} \in S_{ml}$ jonon J_j kaksi mielivaltaista pistettä. Symmetriasyistä voidaan olettaa, että $r \leq s$. Tällöin pätee joko I tai II

$$I: \quad s - r > \frac{1}{2^{n+2}} \quad \text{(pisteet ovat eri annuluksissa) tai}$$

$$II: \quad n = m \geq 2 \quad \text{ja} \quad |\psi - \varphi| \geq \frac{1}{2^n} \quad \text{lisäksi voidaa olettaa, että} \quad \varphi = -\psi$$

$$\text{(pisteet ovat saman annuluksen eri Carlesonin joukoissa).}$$

Hyperbolisen metriikan määritelmän 5.3 yhteydessä huomattiin, että pisteiden z ja w välisen hyperbolisen etäisyyden määrittelee täydellisesti funktio $\left|\frac{z-w}{1-\overline{z}w}\right| = \gamma_z(w)$. Nyt

$$I: \quad \gamma_z(w) = \left|\frac{z-w}{1-\overline{z}w}\right| \geq \frac{s-r}{1-rs} > \frac{2^{-n-2}}{1-(1-2^{-n})(1-2^{-n-2})} = \frac{2^{-n-2}}{5 \cdot 2^{-n-2} - 2^{-2n-2}} \geq \frac{1}{5}$$

$$II: \quad \gamma_z(w) = \left|\frac{z-w}{1-\overline{z}w}\right| \geq \left|\frac{r(e^{i\varphi} - e^{i\psi})}{1-rs}\right| \geq \left|\frac{r(\varphi - \psi)}{2(1-rs)}\right| \geq \frac{(1-2^{-n})2^{-n-1}}{(1-(1-2^{-n})^2)}$$

$$= \frac{(1-2^{-n})2^{-n-1}}{2^{-n+1} - 2^{-2n}} = \frac{1-2^{-n}}{4-2^{-n+1}} > \frac{1}{5}.$$

Täten jonon J_j kahden mielivaltaisen pisteen välinen hyperbolinen etäisyys on aina positiivinen. Edelleen teoreeman 5.5 nojalla jokainen J_j on interpoloiva ja jono $\{z_i\}$ on korkeintaan $4C$ interpoloivan jonon yhdiste.$\square$

Vastaavasti $\mu = \sum_i (1 - |z_i|)\delta_{z_i}$ on Carlesonin mitta, jos $\{z_i\}$ on äärellisen monen interpoloivan jonon yhdiste. Tämän osoittamiseksi riittää todeta, että jokaista interpoloivaa jonoa $\{z_{i_j}\}$ vastaava mitta μ_i toteuttaa Carlesonin mitan määritelmän 5.1 ehdon jollakin $A_i < \infty$. Nyt summa $\sum_i A_i = A < \infty$, koska interpoloivia jonoja on äärellinen määrä ja erityisesti $\mu(S) \leq Ah$ jokaisella Carlesonin joukolla S. Täten μ on Carlesonin mitta.

6 Lopuksi

Tämän tutkielman tarkoituksena on ollut johdonmukaisesti rakentaa työkaluja, joita käytetään yhdistämään interpolaatio yksikkökiekon Hardyn avaruuksissa Carlesonin mittoihin.

Lukijalle on muodostunut kuva Hardyn avaruuksien perusrakenteesta sekä niiden vaikutuksesta yksikkökiekon jonoihin. Erityisesti H^∞-interpolaation, tasaisesti separoituvien jonojen ja Carlesonin mittojen välinen suhde on ollut keskeisessä asemassa.

Työssä on poikkeuksetta käsitelty lähtöjoukkona kompleksitason yksikkökiekkoa, vaikka tulokset on mahdollista esittää myös ylemmässä puolitasossa. Yleisemmin H^p-funktioiden teoriaa on myös tutkittu alueissa, joiden reuna on Jordan-käyrä.

Tutkielman keskeisimpinä tuloksina voidaan pitää interpoloituvuuden ekvivalenttiutta tasaisen separoituvuuden kanssa sekä toisaalta jonon $\{z_i\}$ H^∞-interpoloituvuuden vastaavuutta seuraavien ehtojen kanssa: $\sum_i (1 - |z_i|)\delta_{z_i}$ on Carlesonin mitta ja jono $\{z_i\}$ on erillinen hyperbolisen metriikan mielessä.

Erään mielenkiintoisen lisän tutkimukseen toisivat Hardyn avaruudet arvoilla $0 < p < 1$. Kolmioepäyhtälöhän ei tällöin toteudu, mutta muun muassa interpolaatio on edelleen mahdollinen, ja luvun 5 tulokset pätevät. Näillä arvoilla tulokset muodostavat oman erilaisen maailmansa, jossa todistukset edellyttävät muun muassa Fréchet-avaruuksien tuntemista.

Indeksin p arvojen laajentamisen lisäksi yksikkökiekosta voidaan siirtyä ylempään puolitasoon. Tällöin Carlesonin joukoiksi voidaan valita sopivat suorakulmiot ja hyperbolinen metriikka muuntuu luontevasti vastamaan ylemmän puolitason Blaschken tuloa. Toisaalta H^p-avaruuksia on mahdollista tutkia myös yleisissä alueissa, joiden reunat ovat riittävän sileitä. Edelleen Carlesonin mitoista päädytään teoriaa kehittämällä ja soveltamalla Koronateoreemaan.

Tietenkään laajojen kokonaisuuksien kasvattaminen ei ole ainoa keino lisätä tutkittavaa materiaalia. Rajoittumalla avaruuteen H^2 ja käsittelemällä sen suhdetta L^2:een sekä erityisesti tarkastelemalla H^2-funktioiden Taylorin kertoimia päädytään rikkaaseen teoriaan.

Lähteet

ASTALA, KARI: Funktionaalianalyysin peruskurssi (luentomoniste).
Helsingin yliopisto, 2003.

DUREN, PETER L. : Theory of H^p Spaces.
Volume 38 in Pure and Applied Mathematics,
Academic Press Inc., New York, 1970.

GARNETT, JOHN: Bounded Analytic Functions.
Academic Press Inc., New York, 1981.

HOLOPAINEN, ILKKA: Mitta ja integraali (luentomoniste)
Helsingin yliopisto, 2002.

HOLOPAINEN, ILKKA: Reaalianalyysi I (luentomoniste)
Helsingin yliopisto, 2002.

KOOSIS, PAUL: Introduction to H_p Spaces.
London Mathematical Society Lecture Notes Series 40,
Cambridge University Press, Cambridge, 1980.

LEHTO, OLLI: Funktioteoria I ja II.
Limes ry, Helsinki, 1982.

MYRBERG, LAURI: Funktioteoria I ja II.
Limes ry, Helsinki, 1971.

RUDIN, WALTER: Real & Complex Analysis (third edition).
McGraw-Hill Series in Higher Mathematics,
McGraw-Hill Inc., Boston, Massachusetts, 1987.

WOJTASZCZYK, P. : Banach Spaces for Analysts.
Cambridge studies in advanced mathematics 25,
Cambridge University Press, Cambridge, 1991.