Aritmetiikasta algebraan

Muutoksia osaamisessa peruskoulun päättöluokalla 20 vuoden aikana

Helsinki 2009

Tutkimuksia 309

Liisa Näveri

Aritmetiikasta algebraan

Muutoksia osaamisessa peruskoulun päättöluokalla 20 vuoden aikana

Esitetään Helsingin yliopiston käyttäytymistieteellisen tiedekunnan suostumuksella julkisesti tarkastettavaksi Helsingin yliopiston päärakennuksen Pienessä juhlasalissa, Fabianinkatu 33, perjantaina 20. marraskuuta 2009 klo 12

Helsinki 2009

Ohjaajat:	*Professori emeritus* *Erkki Pehkonen* *Helsingin yliopisto*
	Professori emerita *Maija Ahtee* *Jyväskylän yliopisto*
Esitarkastajat:	*Dosentti* *Raimo Kaasila* *Lapin yliopisto*
	Dosentti *Timo Tossavainen* *Joensuun yliopisto*

Kustos:	*Professori* *Markku Hannula* *Helsingin yliopisto*
Vastaväittäjä:	*Dosentti* *Harry Silfverberg* *Tampereen yliopisto*

ISBN 978-952-10-5758-8 (nid)
ISBN 978-952-10-5759-5 (pdf)
ISSN 1795-2158
Yliopistopaino
2009

University of Helsinki
Faculty of Behavioral Sciences
Department of Applied Sciences of Education
Research Report 309

Liisa Näveri

From Arithmetic to Algebra
Changes in the skills in comprehensive school over 20 years

Abstract

In recent decades we have emphasized the understanding of calculation in mathematics teaching. Many studies have found that better understanding helps to apply skills in new conditions and that the ability to think on an abstract level increases the transfer to new contexts.

In my research I take into consideration competence as a matrix where content is in a horizontal line and levels of thinking are in a vertical line. The know-how is intellectual and strategic flexibility and understanding. The resources and limitations of memory have their effects on learning in different ways in different phases. Therefore both flexible conceptual thinking and automatization must be considered in learning.

The research questions that I examine are what kind of changes have occurred in mathematical skills in comprehensive school over the last 20 years and what kind of conceptual thinking is demonstrated by students in this decade. The study consists of two parts. The first part is a statistical analysis of the mathematical skills and their changes over the last 20 years in comprehensive school. In the test the pupils did not use calculators. The second part is a qualitative analysis of the conceptual thinking of pupils in comprehensive school in this decade.

The study shows significant differences in algebra and in some parts of arithmetic. The largest differences were detected in the calculation skills of fractions. In the 1980s two out of three pupils were able to complete tasks with fractions, but in the 2000s only one out of three pupils were able to do the same tasks. Also remarkable is that out of the students who could complete the tasks with fractions, only one out of three pupils was on the conceptual level in his/her thinking. This means that about 10% of pupils are able to understand the algebraic expression, which has the same isomorphic structure as the arithmetical expression. This finding is important because the ability to think innovatively is created when learning the basic concepts.

Keywords: arithmetic, algebra, competence

Helsingin yliopisto
Käyttäytymistieteellinen tiedekunta
Soveltavan kasvatustieteen laitos
Tutkimuksia 309

Liisa Näveri

Aritmetiikasta algebraan
Muutoksia osaamisessa peruskoulun päättöluokalla 20 vuoden aikana

Tiivistelmä

Viime vuosikymmeninä on korostettu enenevässä määrin ymmärrystä painottavaa matematiikanopetusta. Tutkimukset ovat osoittaneet, että tällä on vaikutusta tietojen ja taitojen käytettävyyteen uusissa tilanteissa, mikä nopeasti lisääntyvän tiedon aikakautena onkin tarpeen.

Osaaminen on tiedollista ja strategista joustavuutta ja ymmärtämistä. Tutkimuksessa tarkastellaan osaamista kompetenssi-ajattelun mukaisesti matriisina, siten että horisontaalisuunnassa ovat sisältöalueisiin liittyvät aspektit ja vertikaalisuunnassa ovat ajattelun tasot. Uuden käsitteen oppiminen on oppijalle aina luova prosessi. Muistin mahdollisuudet ja rajoitukset vaikuttavat oppimiseen – eri vaiheissa eri tavoin. Siksi oppimisprosessissa tulee huomioida sekä joustavuutta lisäävä käsitteellinen ajattelu että tiedon automatisoituminen.

Tutkimusongelmina tarkastellaan edellä kuvatussa viitekehyksessä, millaisia muutoksia on havaittavissa peruskoulun päättöluokkalaisten matematiikan osaamisessa viimeisten 20 vuoden aikana ja millaista käsitteellistä ajattelua on havaittavissa peruskoulun päättöluokkalaisilla 2000-luvulla. Oppilaat vastasivat testikysymyksiin ilman laskinta. Tutkimus on kaksiosainen. Ensimmäisessä osassa kartoitetaan produktityyppisestä tutkimusaineistosta matematiikan osaaminen 1980- ja 2000-luvuilla ja niissä tapahtuneita muutoksia. Tutkimuksen toisessa osassa määritetään peruskoulun 2000-luvun alun päättöluokkalaisten käsitteellistä ajattelua. Tutkimus on tutkimusmetodologisesti mixed methods design-tutkimus.

Taustamuuttujista peruskoulun päättöluokkalaisten matematiikan todistusarvosanojen keskiarvoissa todettiin tilastollisesti erittäin merkitseviä eroja ajallisessa tarkastelussa tyttöjen hyväksi samalla kun pojilla todettiin parempi osaamisen taso. Produktityyppisessä tarkastelussa 1980-luvun ja 2000-luvun tulosten keskiarvot poikkesivat tilastollisesti erittäin merkitsevästi matematiikan rakenteita mittaavissa osioissa. Suurimmat muutokset olivat numero-osaamisen alueella murtoluvuissa, missä 1980-luvulla kaksi kolmesta osasi murtolukujen peruslaskutoimituksiin liittyvät tehtävät, 2000-luvulla ne osasi joka kolmas. Merkittävää on lisäksi, että tutkimuksen perusteella 2000-luvulla heistä, jotka osasivat murtolukujen peruslaskutoimitukset, vain joka kolmas oli ajattelussaan käsitteellisellä tasolla ja kaksi kolmesta oli proseduraalisella tasolla. Tämä tarkoittaa, että valmiudet ymmärtävään oppimiseen rakenteiltaan isomorfisissa algebran lausekkeissa ovat samaa luokkaa riippuen lausekkeen abstraktiotasosta. Tähän tulisi kiinnittää huomiota, koska kyky innovatiiviseen ajatteluun luodaan jo peruskäsitteitä opittaessa.

Avainsanat: aritmetiikka, algebra, osaaminen, oppimisprosessi

Esipuhe

Nuorena opettajana 1970-luvun lopussa ja 1980-luvun alussa ajattelin, kuten yleisesti tuolloin ajateltiin, oppimisen olevan sitä, että näytämme oppilaille miten toimintoja ja käsitteitä käytetään ja että he oppivat toistamalla niitä. Eteneminen tapahtui työkirjatyyppisiä oppikirjoja käyttäen ja etenemistä seurattiin lukukauden aikana formatiivisin ja summatiivisin kokein. Eriyttäminen tapahtui peruskoulun yläasteella tasokursseilla. Niin sanotun uuden matematiikan (New Math) avulla haluttiin vahvistaa yleisellä tasolla tapahtuvaa ajattelua. Kuitenkin 1980-luvulla jouduttiin pettymään siihen, miten heikosti suoraan yleisessä muodossa opittu asia siirtyi uusiin konteksteihin. Behaviorismin näkökulmasta tarkasteltuna miten olisi voinutkaan? Lisäksi vähentyneen konkreetin laskemisen takia pelättiin numerotaidon heikkenevän.

Vuonna 1985 siirryttiin tasokursseista tuntikehysajatteluun. Tämän tuomat tuntimuutokset matematiikan osalta näkyivät myös muuttuneina sisältöinä. Eriyttämiseen pyrittiin tasokursseista luopumisen jälkeen oppikirjoissa eritasoisilla tehtävillä. Osaamiseen ei tuolloinkaan oltu tyytyväisiä ja muutama vuosi myöhemmin nimetyn Leikolan komitean loppumietinnössään vuonna 1989 esittämät ehdotukset matemaattis-luonnontieteellisen yleissivistyksen kohentamiseksi huomioitiin seuraavassa vuoden 1994 opetussuunnitelmauudistuksessa.

Vuosien mittaan ”uusi oppimiskäsitys” tuli esille tihenevästi konstruoinnin asteen vaihdellessa esityksissä uusbehavioristisesta maltillisesta konstruoinnista radikaaliin. Oppilaita kannustettiin ilmaisemaan omia ajatuksiaan ja käsityksiään asioista. Oppiminen nähtiin oppilaan aktiivisena ajatteluna. Tästä syystä vuosien saatossa myös opetussuunnitelmien perusteet ovat muuttuneet sisältöjä luettelevista prosesseja painottaviksi. Vuoden 1994 opetussuunnitelmassa todettiin, että matematiikan tulee kehittää oppilaan luovaa ja täsmällistä ajattelua, ohjata oppilasta löytämään ja muokkaamaan ongelmia ja etsimään ratkaisuja niihin. Aikaisempien selkeiden sisältöluetteloiden sijaan me Suomen matematiikanopettajat mietimme, mitä on luova ajattelu matematiikassa, mitä on matemaattinen ajattelu.

Olin vuonna 1981 laatinut Veli-Matti Harjun kanssa auskultointivuotenani opetusneuvos Reino Seppälän ehdotuksesta mittarin, jota on käytetty tässä tutkimuksessa. Keräsimme myös tuona vuonna kuusi vuotta myöhemmin täydennetyn aineiston, jota käytän tässä tutkimuksessa vertailuaineistona. Kiitos professori emeritus Erkki Pehkosen aineisto oli vielä kahdenkymmenen vuoden kuluttua käytettävissä. Tutkimukseen osallistuneiden koulujen rehtorit, matematiikan opettajat ja tutkimukseen osallistuneet oppilaat ovat tuolloin, kuten myös vuonna 2003, myötämielisellä suhtautumisellaan testiin edesauttaneet työni toteutumista.

Oppiminen on edellytys kehittymiselle sekä yksilö- että yhteiskunnan tasolla. Aika-ajoin on syytä katsoa taaksepäin ja todeta, millaista osaamista on saatu aikaan. Tutkimukseni on nyt valmis tarkastettavaksi. Tavoitteeni on ollut tutkimukseni kautta osallistua yhteiskunnalliseen keskusteluun matematiikan oppimisesta ja tulevaisuudessa tarvittavan matematiikan osaamisen laadusta.

Tutkimukseni lähtökohta 1980-luvulla oli opetusneuvos Reino Seppälän ehdotus tutkia peruskoululaisten päässälaskuvalmiuksia, jotta saataisiin myöhemmin mahdollisuus tarkistaa laskimien käyttöönottamisen vaikutus. Omistan tutkimukseni hänen muistolleen.

Kiitos tutkimukseni ohjaajille, professori emerita Maija Ahteelle ja professori emeritus Erkki Pehkoselle. Käytin paljon aikaanne. Opettajan ja tutkijan roolien erottaminen ei aina ollut minulle helppoa. Kiitos professori Markku Hannulalle rakentavista parannusehdotuksista sekä toimimisesta jatko-opintojeni valvojana.

Kiitos esitarkastajille, dosentti Raimo Kaasilalle ja dosentti Timo Tossavaiselle arvokkaista kommenteistanne. Olen pääsääntöisesti huomioinut ne lopullisessa versiossa. Siltä osin, kun olen pitäytynyt omassa näkökannassani, olen terävöittänyt esitystäni.

Kiitos myös Soveltavan kasvatustieteen laitoksen johtajalle, professori Juhani Hytöselle, tutkimukseni hyväksymisestä laitoksen julkaisusarjaan, sekä amanuenssi Kari Pereniukselle avusta työni loppuvaiheessa, kuten myös englanninkielisen abstraktin tarkastaneelle Julie Uusinarkaukselle.

Kiitos läheisilleni tuesta vuosia kestäneen työni aikana. Kiitos – poikani – että jaksoitte kuunnella ja kommentoida ajatuksiani.

Kelloniemessä 26. 09. 2009

Liisa Näveri

Sisällys

1 Johdanto

Kahdenkymmenen viime vuoden aikana oppimiseen liittyvä keskustelu on monipuolistunut useastakin näkökulmasta. Opettajanäkökulmasta tämä näkyy keskusteluna oppimiskäsityksistä painopisteen siirtyessä opettajajohtoisesta ulkoa ohjatusta oppimisesta oppilaan sisäisen oppimisprosessin tarkasteluun. Tähän ovat johtaneet niin oppimisen tutkimuksessa saadut tulokset kuin yhteiskunnalliset muutoksetkin (esim. von Wright 1996).

Aina 1940-luvulta lähtien on korostettu enenevässä määrin ymmärrystä painottavaa matematiikanopetusta. Tutkimukset ovat osoittaneet, että tällä on positiivinen vaikutus osaamiseen sekä tietojen ja taitojen käyttämiseen uusissa tilanteissa. (Grouws & Cebulla 2000, 13.) Tällaisen ymmärtämistä painottavan osaamisen merkitys on kasvanut, sillä toimiminen kompleksisessa, alati muuttuvassa yhteiskunnassa vaatii yksilöltä yhä enemmän taitoa itse ohjata ja säädellä omia ajatteluprosessejaan. Työelämän tehokkuusvaatimukset kohdistuvat valmiuksiin vastata jatkuvaan muutokseen. Tämä näkyy eri instanssien tarpeena kilpailla tehokkuudella, nopeudella ja joustavuudella, minkä hallinta vaatii erityisiä taitoja, muun muassa älyllistä pääomaa (esim. Kosonen 1995).

Tiedon määrän kasvu ja tarve ymmärtää yhä monimutkaisempia ilmiöitä on osoittanut perinteisten 1970- ja 1980-luvuilla käytettyjen opetus- ja oppimiskäytäntöjen rajallisuuden (Bereiter & Scardamalia 1994). Kuinka koulutusjärjestelmä kykynee vastaamaan tähän oppimisen laadullisen kehittämisen haasteeseen? Mitkä ovat ne keinot, joilla päästään ymmärtävään ajatteluun ja tiedon soveltamiseen uusissa olosuhteissa, uutta kehittävään ja arvioivaan osaamiseen?

Vielä 1980-luvun koulumaailmassa laajalti käytettyyn behavioristiseen traditioon liittyvä oppimiskäsitys selitti taitojen oppimisen assosiaatioteorialla niin sanottujen yhteisten elementtien ja ärsykevihjeiden avulla. Bruner (1960, 17) kutsui tällaista, esimerkiksi syntaktiseen lukemiseen ja laskemiseen taitona liittyvää siirtovaikutusta erityiseksi kohdistetuksi siirtovaikutukseksi. Käsitys oppimisesta on tästä laajentunut ja tarkentunut. Siksi myös siirtovaikutusta koskeva tutkimus tulisi nostaa uudelleen esille tämänhetkisen oppimisen tutkimuksen näkökulmasta (esim. McKeough ym. 1995). Ensisijaiseksi tavoitteeksi tulisi ottaa opittujen tietojen ja taitojen käytettävyys myös uusissa olosuhteissa (vrt. Rauste-von Wright & von Wright 1998, 45).

Tulevaisuudessa tarvittava syitä ja seurauksia ymmärtävä ajattelu poikkeaa empiristisestä tunnuspiirteiden luokitteluun perustuvasta ajattelusta (Miettinen 1995). Siksi tarvitaan kehittyneempiä ajattelun muotoja ja abstraktin tason ajattelua, mikä voi Brunerin mukaan ilmetä ei-erityisenä kohdistamattomana yleisenä periaatteiden ja asenteiden siirtymisenä, sekä vertauskuvallisena siirtymisenä, jolloin prosessit siirtyvät analogisina eri oppimistilanteissa (Bruner 1960, 17).

Oppiminen konstruoimalla tapahtuu aina jossakin kontekstissa ja opitun käyttäminen on mahdollista samassa kontekstissa. Numeerisen kontekstin lisäksi tutkimukseni kohdistuu Brunerin määrittämiin ei-erityisiin yleisiin periaatteisiin matematiikan kontekstissa, mikä aihealue toteutuu algebrassa. Siinä oppija voi löytää lukujen ja niiden ominaisuuksien avulla yleistettyjä ominaisuuksia (esim. Hautamäki ym. 2000). Algebran kautta oppilaat oppivat käsittelemään ei-numeerisia symboleja, joten he voivat oppia ymmärtämään ja käsittelemään sellaisia asioita, joita ei voida suoraan havaita. Kun tämän on oppinut, on Hautamäen mukaan samalla oppinut käsittelemään erästä tietämisen abstraktia maailmaa, jossa oliot toimivat sääntöjen mukaan. MacGregor korostaa myös algebran merkitystä ongelmien ratkaisumenetelmissä (MacGregor ym. 1994, 318).

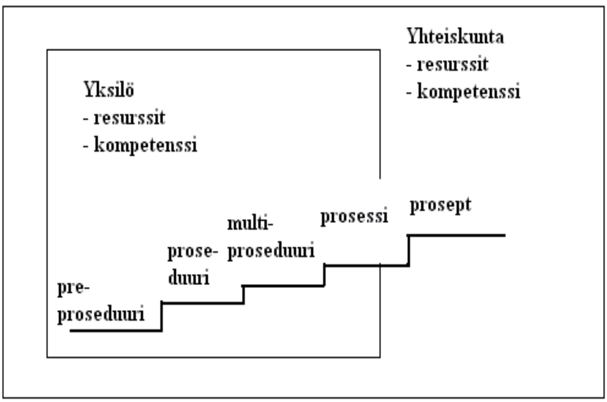
Tutkimukseni juontaa Paasosen (1979) laskintutkimuksesta, missä peruskoulun neljäsluokkalaisilla todettiin laskimen käytön parantaneen oppimistuloksia numeerisen laskemisen, matemaattisten periaatteiden ja suuruusluokan arvionnin alueilla. Nyt vuosikymmeniä myöhemmin asiaa on syytä tarkastella uudelleen. Tätä ennakoiden kerättiin opetusneuvos Reino Seppälän ehdotuksesta 1980-luvun alussa aineisto. Siinä käytetty mittari on laadittu Paasosen (1979) laskintutkimuksen mittarin pohjalta. Vuonna 2003 keräsin vertailuaineiston samalla instruktiolla, samoissa olosuhteissa. Kaikki testit tehtiin ilman laskinta. Lisäksi 2000-luvun testissä oli lopussa tehtäviä, jotka mahdollistavat käsitteellisen ajattelun tarkastelun.

Tutkimuksessani mittari on muodostettu Paasosen (1979) laskintutkimuksessa käytetyn mittarin aihealueista sovellettuna peruskoulun päättöluokkalaisille. Alueet valittiin alkuperäiseen mittariin ja siten myös tutkimuksessani käytettyyn mittariin siten, että laskimen runsaan koulukäytön ajateltiin vaikuttavan niihin, kuten numeerinen osaaminen, matematiikan rakenteet ja suuruusluokkien arviointi.

Pitkästä aikavälistä johtuen ja useiden eri alueilla tapahtuneiden muutosten (kuten opetussuunnitelmallisten painotusten ja oppimiskäsityksen vaihtumisen) vuoksi tätä tutkimusta ei voida kuitenkaan pitää laskintutkimuksena, vaan tärkeämmiksi näkökulmiksi nousevat Usinskin ja Bellin (1976) esittämät kysymykset: Onko ilman laskinta laskeminen säilyttämisen arvoinen taito? Mikä on numerolaskennan merkitys käsitteenmuodostuksessa abstraktilla tasolla? Mikä auttaa matematiikan rakenteiden oppimisessa? Tarkennettuina kysymyksinä tarkastelen tutkimuksessani: Mikä on osaamisen taso aritmetiikassa ja algebrassa 2000-luvulla verrattuna 1980-lukuun ja millaista käsitteellistä ajattelua on 2000-luvulla?

Ongelmanratkaisussa toteutuvat matemaattisen ajattelun keskeiset sisällöt (esim. Kilpatrick 2003), eräänä näistä oppijan henkilökohtaiset *resurssit*, joilla tarkoitetaan ongelmanratkaisijan käytettävissä olevia tietoja ja taitoja. Hjelmquistin (1982) mukaan näyttäisi ”tärkeältä tutkimustehtävältä etsiä siltaa kognitiivisen muistin- ja ongelmanratkaisututkimuksen välille. Näyttää suotavalta laajentaa psykologista ongelmanratkaisututkimusta niiden tutkimusalueiden suuntaan, jotka kohdistuvat tiedon osuuteen ihmisen informaation käsittelyssä.” (Hjelmquist ym. 1982, 127.) Tämä tutkimus pyrkii täyttämään sitä aukkoa.

Kuviossa 1 esittelen tutkimuksen viitekehyksen. Siinä oppiminen käsitetään trialogina, mihin hermeneuttisena kokonaisvaltaisena ilmiönä liittyy sisäisen, *yksilöllisen* näkökulman ja *yhteisöllisen* näkökulman lisäksi *näiden välistä toimintaa välittävä* luovuuden sisältämä näkökulma. Ensinmainittujen muotojen suhdetta toisiinsa kuvaa välittyneisyyden käsite (Silvonen 2004, 57). Näitä yksilön ja yhteisön välillä olevia ihmisen luomia kommunikaation välineitä, jotka voivat olla myös symbolisia, kutsutaan artefakteiksi. Paavola ja Hakkarainen korostavat oppimisessa kolmen metaforana monologisen, mielensisäisen näkökulman ja dialogisen, osallisuusnäkökulman lisäksi tarvittavaa välittyneisyyttä, kohteellisuutta ja käsitteellisiä (sekä muita toimintaa välittäviä) artefakteja sisältävää näkökulmaa (Paavola & Hakkarainen 2007). Sekä yksilö- että yhteisönäkökulmasta tarkastellaan osaamista *kompetenssina*, mikä määritellään osaamisena suhteessa tavoitteisiin riittävällä ymmärryksen tasolla tietyssä kontekstissa. Korostaakseni oppimisprosessia kokonaisuutena, olen luvussa 3 palauttanut lukijan mieleen muistin merkityksen oppimisen eri vaiheissa. Nykyisin painotettavan ymmärtävän komponentin lisäksi tiedon automatisoitumisella on tärkeä merkityksensä uuden oppimisessa.



Kuvio 1. Tutkimuksen yleiskuva (mukailtu Tallin ym. artikkelista 1999).

Käsitteellisen ajattelun tasoa tarkastellaan Tallin ja Grayn käsitteellisen muutoksen teorian viitekehyksessä (luku 6). Tämän teorian mukaan alkeellisten strategioiden monipuolistuttua kompleksisimmiksi strategioiksi prosessit kapseloituvat käsitteelliselle tasolle. Tästä juontuu nimitys *prosept* (vrt. kuvio 1). Proseptiin liittyy kyky takaisinpäin ajatteluun, mikä on edellytys joustavaan ja luovaan ajatteluun.

Yhteisönäkökulmaan liittyy myös opetussuunnitelmanäkökulma, millä tarkoitetaan tarkasteluajankohtina käytössä olleiden opetussuunnitelman perusteiden mukaista opetusta käytettävissä olevilla resursseilla. Vertailemalla eri ajankohtia saadaan perspektiiviä paitsi osaamiseen myös opetussuunnitelmien vaikuttavuuteen tarkastelemalla, päästäänkö resurssien puitteissa tavoitteisiin nähden riittävälle tasolle ja sellaiselle ymmärtävän oppimisen tasolle, joka luo käyttökelpoista tietoa tulevaisuuden tarpeisiin.

Kvalitatiivisen ja kvantitatiivisen pääparadigman välillä käydään keskustelua. Tutkimusten design voi sisältää myös erilaisia määrällisten ja laadullisten tutkimusmenetelmien triangulaatioita. Tässä tutkimuksessa olen käyttänyt kolmanneksi pääparadigmaksikin kutsuttua, mixed methods tutkimusparadigmaa (vrt. Onwuegbuzie ym. 2006), jolloin tutkimuksessa ei pitäydytä vain yhteen teoriaan liittyvään käsitejärjestelmään, vaan käytetään joustavasti eri näkökulmia. Lisäarvo kolmannesta paradigmasta perinteisiin paradigmakäsittelyihin verrattuna on määrällisen ja laadullisen tutkimuksen metodologian yhdistämisen tuoma joustavuus (Onwuegbuzie ym. 2006) sekä samanaikaisesti hankittu määrällisiä ja laadullisia tutkimusmenetelmiä käyttävä aineisto. Verrattuani määrällisessä tarkastelussa produkti- ja kompetenssityyppistä osaamista 20 vuoden aikana, osoittautuvat puutteet käsitteellisessä ajattelussa yhdeksi muutosta selittäväksi tekijäksi.

Luku 2

Tutkimuksen lähtökohtia

2.1 Luvuista muuttujiin

Muuttujan kehittyminen on – ehkä – tärkeimpiä tapahtumia ihmiskunnan historiassa. Sen hallinta pysyy merkittävimpänä saavutuksena myös yksilön kehityksessä.

Nunn 1919

Historiallis-empiirisissä oppimistraditioissa kontekstuaalisuutta voidaan pitää myös ajallisena kategoriana. Voidaan puhua historiallisesta kontekstista tai laajentaen ajallisesta kontekstista. Tällä tarkoitetaan kyseessä olevan ilmiön tarkastelua ajan funktiona. Yllä mainittu matemaatikko Percy Nunnin (1870–1944) sitaatti tuo esille muuttujakäsitteen kehittymisen merkityksen niin yhteisöjen kuin yksilönkin näkökulmasta. Yhteisöjen kehittymisen kannalta voidaan tarkastella muuttujan kehittymistä numeerisesta kontekstista alkaen sekä muuttuja-käsitteen kehittymistä ja merkitystä eri aikoina. Yksilönäkökulmassa voisi kysymyksen muotoilla, mikä on muuttujan käytön merkitys ihmisen ajattelussa ja mitkä seikat tukevat ajattelun kehittymistä abstraktille tasolle?

Kulttuurin kannalta relevantti tieto on yleensä syntynyt tarpeen sanelemana luovana ongelmanratkaisuprosessina. Sama kehitys on käyty läpi yhteisöissä ja lopulta yksilöissä (esim. Kieran 1992; Sfard & Linchevski 1994; Persson 2005). Käsitteen kulttuurisen kehitysvaiheen tunteminen voi auttaa yksilön ajattelutapojen tunnistamisessa.

Algebran kehityksessä on havaittu kolme eri vaihetta. Lainaan laajalti Boyerin (1994, 2000) esitystä tästä kehityksestä. Ensimmäistä vaihetta aina 1500-luvulle asti kutsutaan retoriseksi algebraksi. Symboleja ei tuolloin käytetty, vaan kaikki ongelmatilanteet ratkaistiin ilman kirjoitettua muuttujaa. Retorinen algebra on verbaalista ja se on havaittavissa oppilaiden ajattelussa ennen symbolien käyttöönottoa. Sen voidaan myös sanoa olevan proseduraalista (Persson 2005, 14). Viitteitä samanlaisena toistuvan tilanteen merkitsemisestä kuitenkin jo esiintyi 1500-luvulla. Tätä vaihetta luonnehditaan muutamien lyhenteiden käyttämisenä merkittäessä toistuvia määriä ja operaatioita. Seuraava vaihe, synkopoitu algebra on retorisen algebran lyhennetty muoto, missä sana korvattiin merkillä, niin että verbaalisia ja symbolisia merkkejä käytettiin kombinaatioina (synkopoitu) (ks. esim. Sfard 1995). Kolmantena vaiheena kehittyi koulualgebraa vastaava symbolinen algebra Francois Vièten (1540–1603) ansiosta. Hänen työnsä ongelmatilanteisiin liittyvien merkintätapojen yleistämisessä oli niin merkityksellistä, että häntä kutsutaan tästä syystä ”Algebran isäksi”. Viète kehitti symbolisen algebran 1500-luvun lopussa. Hän ei käyttänyt kirjaimia ainoastaan tuntemattomien symboleina yhtälöissä, vaan myös muuttujina funktioissa sekä parametreinä. Perssonin (2005, 14) mukaan kaksi ensimmäistä kehitysvaihetta ovat proseduraalisia ja kolmas vaihe on konseptuaalinen.

Edellä kuvattu kehitys osoittaa aritmetiikan olleen yhtenä lähtökohtana algebran kehittymiselle ja samanlaisten tilanteiden merkitseminen uudella symbolilla laajentaen näin algebra-käsitettä (Boyer 2000). Merkintöjä muuttujan käyttöön johtaneista kehitysvaiheista ja muuttujan käytöstä on viimeisen tuhannen vuoden ajalta. Prosessi on ollut kompleksinen ja vaikea. Näyttää perustellulta olettaa, että aika tarvittiin käymään läpi jokin tai joitakin vaativia kognitiivisia haasteita.

Aritmetiikkaa ei käytetty vielä tuolloin samassa laajuudessa kuin nykyisin. Negatiivisten lukujen kehittyminen ei ollut ongelmatonta. Stifelin negatiivisista luvuista käyttämä nimitys ”numeri absurdi” kuvaa aikaa, jolloin ei tunnettu negatiivisten lukujen roolia konkreeteissa tilanteissa. Vasta Gigardin vuonna 1629 julkaisemassa kirjassa ”Invention nouvelle en l´algebre” sallittiin yhtälössä myös negatiivisia arvoja positiivisten arvojen lisäksi, jolloin lukusuora-ajattelu vahvistui. (Boyer 2000.)

Toinen aikaa vienyt askel algebran kehityksessä on ollut muuttujan käsitteen erottaminen tuntemattoman käsitteestä. Yhtälöratkaisun kehittyminen ajallisesti on ollut riippuvainen algebran kehittymisestä. Vasta tämän jälkeen ongelmanratkaisun strategiat alkoivat kehittyä yhtälönratkaisun kehittymisen myötä. Yhtälön käyttäminen ongelmien ratkaisemisessa on peräisin Descartesilta (1596–1650). Jo hän yritti luoda yleispätevän menetelmän ongelmatilanteiden ratkaisemiseksi algebrallisten yhtälöiden avulla. Vaikka yhtälön käyttö lähtökohtana ongelmanratkaisulle on vain yksi ongelmanratkaisun muoto, sillä on keskeinen merkitys matematiikan ja luonnontieteiden opiskelussa. Tästä esimerkkinä on yhtälönratkaisun tarpeen luoma algebran kehittyminen. Koska tuntemattoman ja muuttujan erottaminen algebran kehityksessä on ollut ajallisesti pitkä, voidaan otaksua, että myös yksilön kehityksessä niiden erottaminen toisistaan on vaativa prosessi. Voikin kysyä, tuleeko koulumaailmassa yhtälönratkaisussa tuntemattomaan ja muuttujaan liittyvä ongelmakenttä riittävästi esille? Jääkö oppijalle riittävän monipuolinen mielikuva ”kirjainlaskemisen” erilaisista ilmentymistä? Ja mikä on yhtälönratkaisun suhde edellisiin?

Algebran historia on rikasta monella tavalla. Paitsi, että voidaan seurata numeerisen esityksen kehittymistä symboliseksi esitykseksi eri ilmenemismuodoissaan, nähdään myös algebrallisten käsitteiden ja symbolien kompleksisuus muodostumisensa aikana. Muuttujan käsitteen historiallinen tarkastelu on hyödyllistä tässä suhteessa myös yksilönäkökulman kannalta (Bednarz, Kieran & Lee 1996, 5; Kieran 1992). Myös Sfardin ja Linchevskin (1994) mukaan yksilön algebrallinen kehitys seuraa suurelta osalta historiallista kehitystä ja sen eri askeleet täytyy käydä läpi järjestyksessä. Ensin algebra nähdään yleistettynä aritmetiikkana operationaalisella tasolla ja vasta tämän jälkeen nähdään rakenteelliset muodot eri ilmentymineen. Toinen perusta algebran historian tuntemiseen tulee siitä, että se voi auttaa oppilaiden ennakkokäsityksien hahmottamisessa. Cornellin yliopistossa vuonna 1993 järjestetyssä seminaarissa (Third International Seminar on Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics) laadittiin lista niistä konstruktivistisen opettamisen ja oppimisen lähtökohdista, joista seminaariin osallistujat olivat yksimielisiä ja listatuksi tuli muunmuassa yhdenmukaisuus oppilaiden ennakkokäsityksissä ja tieteenhistorian selitysmalleissa.

Edellisistä poiketen Radford (1997) ja van Amerom (2003) eivät näe algebran kehittymisen vaiheiden yhteyttä yksilön kehittymiseen, vaan heidän mielestään lyhenteiden käyttöönottamisen merkitys tulee kirjapainotyön näkökulmasta (Persson 2005, 15). On lähtökohta muuttujan käyttöönotolle ollut kumpi tahansa edellä kuvatuista, on sen merkitys matematiikan kehittymiselle ja yksilön ajattelun kehittymiselle kiistaton. Edellä kuvattu jaottelu on tutkimukseni tarkastelun lähtökohta aritmetiikan ja algebran kontekstissa. Käsittelen sitä lähemmin luvussa 7, joka on otsikoltaan ”Aritmetiikka algebran ymmärtämisen apuna”.

2.2 Matemaattinen osaaminen

Osaaminen voidaan arvioida ajattelun eri tasoja arvioimalla. Siksi tässä esityksessä osaamista tarkastellaan produktityyppisen osaamisen lisäksi ajattelun tasoina. Ajattelu tapahtuu aina jossakin kontekstissa. Siksi käsitteet ja niiden muodostuminen ovat tutkimuksen painopistealueena. Uuden prosessin tai käsitteen oppiminen on oppijalle aina luova prosessi. Uutta luovan tiedon lisäksi muistinvaraiselle tiedolle vastakkaisena voidaan pitää loogista, johdettavissa olevaa tietoa, joka linkittyy monipuolisesti ja riittävän yleisellä tasolla mielessä ja siten lisää mielen ”näennäistä joustavuutta”. Matemaattisen ajattelun katsotaan edellyttävän taitoa ajatella loogisesti ja toisaalta myös kehittävän tätä taitoa (ks. esim. Silfverberg 1999, 117). Tähän perustuu matematiikan merkitys ajattelulle. Algebra yleistettyinä matematiikan struktuureina mahdollistaa symbolisen kielen käytön. Algebran merkitys on myös yhtäsuuruuksissa ja yhtälöissä sekä lukujoukkojen välisten suhteiden määrittämisessä funktioina sekä matemaattisessa mallintamisessa (esim. Crawford 2001, 192). Nämä näkökohdat määrittelevät koulualgebran.

Tarkastelen tutkimuksessa aritmetiikan ja algebran osaamista sekä aritmetiikan merkitystä aritmeettisen algebran rakenteiden oppimisessa, niin kutsuttuna esialgebrana. Tutkimuksen empiirinen lähtökohta on 1980-luvun alkupuolen behavioristisen ajan käsityksessä osaamisesta produktina. Osaamiskäsitettä laajennetaan aineiston mahdollistamissa puitteissa kompetenssi–ajattelun ja ajattelun laadullisen tutkimisen suuntaan. Oppimisprosessin avaaminen ja sen tunteminen ovat mahdollistaneet myös osaamisen tarkemman tarkastelun. Kun ymmärrämme enemmän siitä, miten oppiminen tapahtuu, voimme myös täsmällisemmin seurata osaamista sen eri alueilla.

Osaamisesta voidaan puhua kompetenssina, millä tarkoitetaan osaamista suhteessa tavoitteisiin riittävällä ymmärryksen tasolla. Tämä määrittely vastaa Taatilan (2004) määritelmää, jonka mukaan kompetenssilla tarkoitetaan yleisesti yhteensopivuutta kykyjen ja tavoitteiden välillä. Edelleen hän tuo esille, että kompetenssi-sana on usein suomennettu osaamiseksi, mutta edellä olevan määritelmän perusteella ”kyvykkyys” voisi olla parempi käännöstermi. Kyvykkyys ja kyky liittyvät tiettyyn sisältöalueeseen ja siten kompetenssi on tavoitteidenmukaista kyvykkyyttä tietyllä sisältöalueella. Kompetenssikäsitteestä voidaan erottaa paitsi edellä kuvattu yksilöllinen näkökulma, missä ilmenee yksilön tavoitteellisuus, myös yhteisöllinen näkökulma, missä tavoitteet asetetaan yhteiskunnan suunnasta.

Oppimisen hierarkisuudesta ja sitä kautta osaamisen tasoista keskustellaan tänä päivänä. Keskustelu kohdistuu oppimisen kaikkiin osatekijöihin. Myös osaamisen arvioinnin tulisi kohdistua kaikkiin näihin osatekijöihin kompetenssiajattelun mukaisesti. Perustelen näin tutkimuksen rajaamista siten, että se sisältää myös oppimistarkastelun. Jos osaamista tarkastellaan liian karkealla jaottelulla, ei kompetenssityyppisestä osaamisesta saada tietoa, ja siten oppimista tukeva arviointi ei ole mahdollista. Osaamisen tarkastelussa tulee siten huomioida kaikki ajattelun eri tasot. Schoenfeldin mukaan perustason osaamiseen ei vaikuta, mitä oppimiskäsitystä on toteutettu, sensijaan käsitteelliseen ymmärtämiseen ja ongelmanratkaisuun, korkeamman tason ajatteluun asialla on merkitystä (Schoenfeld 2002).

Kilpatrick, Swafford ja Findell (2001) määrittelevät matemaattisen osaamisen viiden toisiinsa kietoutuvan ominaisuuden avulla

- käsitteiden, operaatioiden ja relaatioiden käsitteellisenä ymmärtämisenä,
- prosessien ja proseduurien sujuvuutena,
- strategisena osaamisena,

- loogisen ajattelun ja päättelyn, reflektoinnin ja todistamisen sujuvuutena.

Lisäksi ominaisuuksiin kuuluu yritteliäisyys, mikä voidaan määritellä matematiikan kokemisena järkevänä, hyödyllisenä ja arvokkaana yhdistettynä käsitykseen ahkeruuden merkityksestä ja omiin kykyihin uskomisena.

Kilpatrick & al. liittää edellämainitut viisi ominaisuutta ongelmanratkaisuun (Kilpatrick, Swafford, & Findell 2001, 421). Tutkimuksen mukaan näin määritelty osaaminen edistää käsitteiden joustavaa käyttöä ja tehokkuutta (Stein, Boaler & Silver 2003, 255–256). Tässä tutkimuksessa käsitellään edellä mainituista osaamisen osatekijöistä käsitteellistä osaamista, proseduraalista sujuvuutta ja loogista ajattelua. Painopiste on siten strategisten ratkaisujen sijasta käsitteellisessä osaamisessa.

Samoin kuin Kilpatrick, myös Mouwitz (2003) korostaa staattisen tietokäsityksen sijaan osaamista prosessina. Osaamisen ajatellaan olevan tällöin käsitteellistä ja strategista joustavuutta ja ymmärtämistä. Mouwitz liittää osaamiseen kompetenssiajattelun, mihin hän sisällyttää tiedon käytettävyyden. Tutkimuksessani kytken osaamisen kompetenssi-ajatteluun lisäten siihen edellä kuvattujen ominaisuuksien lisäksi tavoitteellisuuden.

2.3 Katsaus aikaisempiin tutkimuksiin

2.3.1 Suomalaisoppilaiden matemaattinen osaaminen

Suomalaiset oppilaat ovat olleet mukana erilaisissa kansainvälisissä arviointitutkimuksissa 1960-luvulta lähtien. Ensimmäinen matematiikkatutkimus (FIMS) järjestettiin vuonna 1964 ja toinen (SIMS) vuosina 1981–1982. Toiseen matematiikan kansainväliseen koulusaavutustutkimukseen vuosina 1981–1982 osallistui jo yli 125 000 oppilasta noin 20 maasta. Tehtävät luokiteltiin niiden vaatiman matemaattisen ajattelun tasojen Wilsonin luokituksen mukaisiin neljään luokkaan: laskutaitoa, ymmärtämistä, soveltamista ja analysoimista vaativiin tehtäviin. Koska soveltamis- ja analysointitehtäviä on vaikea erottaa toisistaan, niin kaksi viimeksimainittua oli yhdistetty yhdeksi korkeampaa matemaattista ajattelua vaativaksi luokaksi. Suomalaisten oppilaiden osaamisen taso oli osallistujamaiden keskitasoa. Lähes kaikilla osa-alueilla menestyminen oli muihin osanottajamaihin verrattuna heikointa korkeampaa matemaattista ajattelua vaativassa luokassa. Parasta menestyminen oli laskutaitoa mittaavissa tehtävissä. (ks. esim. Kallonen-Rönkkö 1998.) Yhteisten tehtävien takia 1960-luvun ja 1980-luvun osaamista saatettiin seitsemäsluokkalaisten osalta vertailla joiltain osin. Tuolloin havaittiin osaamisen parantuneen algebran ja geometrian alueella, sensijaan aritmetiikan alueella tulokset olivat heikentyneet 1960-lukuun nähden. (ks. esim. Kallonen-Rönkkö 1998.) Muutkin peruskoulua koskevat tutkimukset osoittivat 1980-luvulla, että ajattelua, ymmärtämistä ja soveltamista vaativissa tehtävissä on suurempia puutteita kuin mekaanisten laskutehtävien hallitsemisessa (mm. Haapasalo 1992; Kangasniemi 1989; Kupari 1981ab, 1983, 1988, 1993; Malinen 1993). Yrjönsuuren (1989, 1990) mukaan lukiolaistenkin ajattelu oli tuolloin pääasiassa rutiininomaista algoritmista ajattelua. Haapasalo (1997) näki suurimpana huolenaiheena sen, että oppilaat eivät juuri lainkaan ymmärrä matematiikkaa ja sen tietorakenteita, vaan yrittävät pelkästään toistaa tuttuja, prototyyppisiä toimintoja tai algoritmeja. Näihin haasteisiin alettiin Suomessa etsiä ratkaisuja kognitiivisen psykologian tarjoamasta näkökulmasta matematiikan oppimisessa ja opetuksessa (mm. Keranto 1985; Kupari 1982; Leino 1987; Lehtinen 1989). Vuoden 1994 opetussuunnitelmassa tämä painotus näkyi matemaattisen ajattelun korostamisena.

Kupari (1993, 91–93) on tutkinut, vaikuttiko tasokursseista luopuminen vuonna 1985 peruskoulun matematiikan osaamiseen, ja on vertaillut vuosien 1979 ja 1990 aineistoja. Testi muodostui niistä sisältöalueista, jotka sisältyivät molempina tarkasteluajankohtina opetusohjelmaan. Peruskoulun päättöluokkalaisten osaamisen todettiin näillä sisältöalueilla pysyneen samalla tasolla. Samoina aikoina vuosina 1979 ja 1990 kerättyjen kansallisten tutkimusaineistojen perusteella Kupari toteaa yhdeksänsien luokkien oppimistulosten pysyneen kutakuinkin samoina siten, että yhdeksäsluokkalaiset paransivat tuloksiaan geometriassa, soveltavassa matematiikassa ja peruslaskutaitojen alueella, mutta tulokset huononivat selvästi lineaarisia funktioita käsittelevissä tehtävissä. (Kupari 1993, 86, 92–96.) Samansuuntaisen kuvan peruskoulun päättöluokkalaisten osaamisesta antaa Kuparin (1993) tutkimus, jonka mukaan oppilailla ilmeni puutteita muun muassa käsitteellisen osaamisen tasolla. Tämä näkyi siten, että oppilaat eivät hallinneet tiedonosien välisiä yhteyksiä (Kupari 1993). Havaittu kehitys on Kuparin mielestä huolestuttavaa siksi, että käsitteiden hallinta on keskeistä soveltamis- ja ongelmanratkaisutaitojen kehittymiselle. Kuparin tutkimusten perusteella 90-luvun ensimmäisen puoliskon aikana matematiikan osaamisessa peruskoulun yhdeksännellä luokalla ei ole havaittavissa yleisesti muutosta. Keskimääräiset tulokset heikkenivät lievästi laskutoimitusten ja algebran kohdalla, mutta paranivat Kuparin tutkimuksen mukaan funktio-opin, yhtälöiden ja soveltavan matematiikan sisältöalueilla. (Kupari 1996, 441.)

Kassel-projektissa tutkittiin vuosina 1993–1996 peruskoulun yläasteen oppilaiden matematiikan oppimistasoa Suomen lisäksi 15 maassa. Kassel-testien tuloksista tehtiin Suomessa erikseen eurooppalainen vertailu, johon Suomen lisäksi osallistuivat Englanti, Kreikka, Norja, Saksa ja Unkari (Soro 1997; Soro & Pehkonen 1998). Tutkituista sisältöalueista algebran ja geometrian testeissä muiden osallistujamaiden yhteispistemäärät olivat tilastollisesti merkitsevästi paremmat kuin tilaston häntäpäätä edustaneilla Suomella ja Norjalla (Soro & Pehkonen 1998). Huolestuttavaa on, että tuon tutkimuksen mukaan osaaminen kasvoi suomalaisilla oppilailla toisen tutkimusvuoden aikana hitaammin kuin englantilaisilla, saksalaisilla ja unkarilaisilla oppilailla, joilla osaamistason kasvu oli yli puolitoistakertainen suomalaisten oppilaiden osaamiseen verrattuna. Tutkimuksen perusteella suomalaiset oppilaat olivat algebran ja funktioiden osaamisessa noin yhden lukuvuoden jäljessä tutkimukseen osallistuneiden maiden oppilaiden keskiarvosta. Suomalaisten koululaisten algebran osaamisen taso on myös useissa muissa tutkimuksissa todettu 1990-luvulla pudonneen (Kupari 1993, 1997, 1999; Soro 1997, 27; Korhonen 2001; Mattila 2002). TIMMS 1999-tutkimuksessa tutkittiin opetussuunnitelmapohjaista osaamista. Siinä määriteltiin Kuparin, Reinikaisen, Nevanpään ja Törnroosin (2001) mukaan matematiikan ja luonnontieteiden opetussuunnitelmia jäsentäviksi tekijöiksi muun muassa sisältöalueet ja suoritusodotukset. Sisältöalueihin kuului muun muassa algebra. Suoritusodotusten pääluokat olivat tietäminen, perusmenetelmien käyttö, tutkiminen ja ongelmanratkaisu, matemaattinen päättely ja viestintä. Oppilaat jaettiin matematiikan osaamisen perusteella viiteen suoritustasoon. Taso 5, mihin sijoitettiin 10 % parhaiten sijoittuneista, kuvasi parasta tasoa ja taso 1 heikointa matematiikan osaamisen tasoa. Tasolle 5 sijoittui Suomen oppilaista 6 %, kun parhaiten menestyneen Singaporen oppilaista sijoittui tälle tasolle 46 %. Algebra oli ainoa sisältöalue, jossa Suomen suoritustaso jäi selvästi OECD-maiden keskiarvon alapuolelle. (Kupari ym. 2001, 23.)

PISA (Programme for International Students Assessment) -tutkimusohjelmaan osallistui suomalaisia yhdeksäsluokkalaisia vuosina 2000, 2003 ja 2006. Vuonna 2000 matematiikka oli sivualue, sensijaan vuonna 2003 painopistealue. Vuoden 2003 tutkimusohjelman tavoitteena oli arvioida nuorten tietoja, taitoja ja valmiuksia tulevaisuuden osaamisvaatimusten näkökulmasta (Kupari ym. 2003). Matematiikan lukutaidolla (mathematical literacy) tarkoitetaan tässä yhteydessä ”oppilaiden kykyä hyödyntää matemaattisia tietojaan ja taitojaan suhteessa tulevaisuuden haasteisiin”. Tulevaisuuden haasteisiin määriteltiin kuuluvan muun muassa omien matemaattisten ajatusten viestiminen toisille ja matemaattisten ongelmien asettaminen, muotoileminen ja ratkaiseminen erilaisissa tilanteissa, eli kehittyneemmät ajattelun tasot. Vuoden 2003 PISA-tutkimuksessa Suomi oli OECD-maiden paras ja toiseksi paras kaikista osallistujista (Kupari ym. 2004). Tyttöjen ja poikien erot suorituksissa olivat vähäiset.

Vuoden 2003 PISA-tutkimuksessa laskimien käyttö oli sallittua, mistä syystä tulokset numerokäsittelyn osaamisessa eivät ole vertailukelpoisia tutkimukseni tulosten kanssa. Suuri osa PISA-tehtävistä vaati erilaisten diagrammien tai taulukoiden käyttöä ja tavallisesti tehtävissä vaaditut laskutoimitukset eivät olleet monimutkaisia (Törnroos 2007). Verrattaessa TIMSS 1999-tutkimukseen suomalaiset osasivat jakolaskua varsin heikosti ilman laskinta, mutta PISA 2003-arvioinnissa jakolaskua vaativa ongelma osattiin ratkaista varsin hyvin laskimen kanssa (Törnroos 2007). Tehtäviä analysoidessaan Törnroos on havainnut, että suomalaiset oppilaat osaavat hyvin esimerkiksi murtolukujen esitysmuodot ja laskutoimitusten tuloksen likiarvoisen arvioinnin, mutta itse laskutoimitusten suorittaminen ilman laskimen apua osataan selvästi heikommin. Tämä tulos pätee sekä 7. että 8. luokan oppilaisiin. Tutkimuksessani tarkastelen, mikä on tässä suhteessa tilanne peruskoulun päättävien osalta, kun peruslaskutoimitukset usein kerrataan 9. luokan aikana.

PISA-tutkimuksessa ongelmanratkaisun (problem solving) on määritelty tarkoittavan yksilön kykyä käyttää kognitiivisia prosesseja aitojen, oppiainerajat ylittävien ongelmatehtävien kohtaamisessa ja ratkaisemisessa, missä ratkaisuun johtava reitti ei ole välittömästi nähtävissä ja missä mahdollisesti käyttökelpoiset osaamisalueet tai oppisisällöt eivät rajoitu yksinomaan matematiikan, luonnontieteiden tai lukemisen arviointialueeseen (Kupari ym 2004). Näin määritellen suomalaisten nuorten taidot ovat tutkimukseen osallistuneiden maiden parhaimmistoa todenmukaisissa arkielämän osaamistarpeita ja valmiuksia vaativissa tilanteissa.

Opetussuunnitelmia tarkastellen tulokset eivät yllätä (Törnroos 2007). Ongelmanratkaisua on painotettu mekaanista laskuharjoittelua vähentämällä (Anon. 1985, Anon. 1994). Myös Korhosen (2006) mukaan PISA 2003-tutkimuksen tulokset ovat valitun koulutuspolitiikan mukaisia ja oppilaat oppivat opetussuunnitelmassa painotettuja asioita, mille hän pitää vastakohtana rutiininomaista aritmetiikan ja algebran laskutaitoa. Suomessa yliopisto- ja korkeakouluopettajat ovat kritisoineet PISA-kokeen matemaattista sisältöä. Heidän mukaansa PISA-tulokset eivät kerro taidoista monen jatko-opintojen kannalta tärkeän matematiikan sisällön, esimerkiksi numerokäsittelyn ja algebran, kohdalla (Astala ym. 2005). Jos opetussuunnitelmaperustaisella oppimisella on edellä kuvatut seuraukset, niin tulisiko mekaanista harjoittelua uudelleen painottaa laskurutiinin saavuttamiseksi? Vai olisiko mahdollista saavuttaa oppiminen, joka sisältää molemmat aspektit – sekä ongelmanratkaisutaidot ja matematiikan rakenteiden ymmärtämisen, että sujuvan laskemisen taidon?

2.3.2 Aritmetiikka-algebra -alueen käsitteenmuodostamiseen liittyviä suomalaisia tutkimuksia

Luvuissa 5 ja 6 käsiteltäviä algebran oppimiseen vaikuttavia tekijöitä on tutkittu 2000-luvulla seuraavissa erillisissä suomalaisissa väitöstutkimuksissa: Merenluoto (2001) on käsitellyt lukioikäisten murtolukukäsitteen hallintaa, Hihnalan (2005) tutkimuksen mukaan peruskoululaiset eivät pääse algebran osaamisessa käsitteelliselle tasolle, Hassisen (2006) väitöstutkimuksen aihe on algebran ymmärtämiseen tähtäävä aloitus ja Attorpsin (2006) tutkimuksen perusteella opettajaksi opiskelevien yhtälökäsite on jäänyt puutteelliselle, joustamattomalle tasolle. Käsittelen seuraavassa mainittuja tutkimuksia erikseen.

Merenluoto (2001) käsittelee väitöskirjatyössään osaamisen taustoja tarkastellessaan käsitteellisiä muutoksia reaalilukualueella. Näissä muutoksissa aikaisemman tiedon todettiin ohjaavan uuden tiedon rakentumista, vaikkakin se saattaa Merenluodon mukaan tuottaa myös systemaattisia väärinkäsityksiä uuteen tietoon. Tutkimuksessa todettiin lukukäsitteen laajentamista rationaalilukuihin ja irrationaalilukuihin rajoittavan useimmilla tutkituilla opiskelijoilla ”seuraava luku” – ajattelu, joka perustuu luonnollisten lukujen käsitteeseen. Merenluoto (2001, 58) toteaa, että matematiikan käsitteiden operatiivinen suorittaminen on helpompi saavuttaa, kun taas strukturaalinen käsittäminen on kognitiivisesti vaativampi ja runsasta harjaannusta edellyttävä toiminto. Suurin osa tutkituista laajan matematiikan opiskelijoista (N = 640) näyttää olleen alkuvaiheessa lukukäsitteen laajentamisen suhteen ja tiedot näyttävät jääneen useimmilla opiskelijoilla irrallisiksi tiedon osiksi. (Merenluoto 2001, 157–159.) Lukio-opiskelijoiden murtolukukäsitteen kehittymättömyyttä selittää Hihnalan (2005) tulos peruskouluikäisten ajattelun tasosta aritmetiikassa ja algebrassa. Hän on väitöskirjatutkimuksessaan raportoinut peruskoululaisten matemaattisen ajattelun kehittymisestä siirryttäessä aritmetiikasta algebraan tarkastellen näin aluetta, joka asettuu edellisessä kappaleessa mainittujen tutkimusten välimaastoon. Tutkimuksen pohjana on käytetty muun muassa algebrallista ajattelua ja sen eroja aritmeettiseen ajatteluun tutkineita Stacey ja MacGregoria (1997), sekä Herscovicsin ja Linchevskin (1994) näkemyksiä ja erittelyjä. Tutkimuksen mukaan oppilaiden ajattelu on proseduurimaista, mikä on vaikeuttanut objektitasoista käsitteenmuodostusta esimerkiksi murtolukujen kohdalla. Lisäksi tutkimuksen mukaan peruskoulun kuudes-, seitsemäs- ja kahdeksasluokkalaisten osaamisessa algebran ja yhtälöiden alueella ei ole merkittävää eroa, mistä johtuen Hihnala päätyy suosittamaan algebran opettamisen ajankohdan aikaistamista.

Hassinen on kehittänyt opetusmallin peruskoulun 7. luokan algebran opetuksen aloitukseen. Kokeilussa toteutettiin seuraavia periaatteita: ”Koulumatematiikka” pyrittiin korvaamaan ”oikealla” matematiikalla kytkemällä luonnollista kieltä ja intuitiivista ajattelua algebrallisiin lausekkeisiin ja pyrittiin näin korvaamaan oppilaiden epämuodollinen matematiikka. Kokeilussa säännöt opittiin käyttötilanteissa aikaisemmin opitun pohjalta ja säännöt nostettiin esiin suorituksen jälkeen. Algebraa ei opiskeltu erillisinä sisältöalueina, vaan lausekkeiden kirjoittamista, arvon laskemista, laskutoimituksia ja yhtälön käyttöä ongelmanratkaisussa opiskeltiin samanaikaisesti (Hassinen 2006). Tällainen objektitason ajattelu on tärkeä yhtälöiden objektitason saavuttamiseksi, millä alueella on todettu puutteita Attorpsin (2006) väitöstutkimuksen perusteella. Hän on väitöskirjatutkimuksessaan tutkinut opettajiksi opiskelevien käsityksiä yhtälöistä. Lähtökohtana ovat opettajien omilta kouluajoilta saamat kokemukset oppimisesta. Tutkimustulokset osoittivat, että yhtälöitä ei käsitetä staattisina matemaattisina entiteetteinä objektitasolla, vaan käsitykset yhtälöistä liittyvät yhtälöiden ratkaisuprosesseihin, proseduureihin. Samoin opettajat käsittävät algebran opetuksen operationaalisena toimintana sen strukturaalisen rakenteen sijaan. Tulos proseduurimaisesta ajattelusta on yhtenevä edellä mainituissa tutkimuksissa todettujen aihealueiden proseduurimaisen ajattelun kanssa.

Luku 3

Oppiminen ja muistin merkitys oppimisessa

3.1 Oppimis- ja tiedonkäsitys muutoksen alla

Kautta historian on kysymys oppimisen luonteesta ollut kiinnostuksen kohteena. Ihmis- ja tietokäsitys ovat kunakin aikana säädelleet käsitystä siitä, miten opitaan. Tieto- ja oppimiskäsityksen yhteys ovat perusteena oppimisen tarkasteluun ja sitä kautta, miten osaamista mitataan. Muuttunut käsitys tiedon luonteesta on viime vuosikymmenien aikana vaikuttanut suuresti oppimisen tutkimukseen ja oppimisen tuloksellisuuden, eli osaamisen tarkasteluun. Kahdenkymmenen viime vuoden aikana keskustelua oppimiskäsityksestä on käyty ilman, että on päädytty yhteen yhtenäiseen oppimisen teoriaan. On käyty läpi keskustelu Locken ”Tabula rasasta” Derridan dekonstruktioon. Painopisteen ollessa 1970- ja 80-luvuilla behavioristinen on sen jälkeen keskusteluihin noussut oppimisen tutkiminen ajattelua painottavana kognitiivisena taitona. Oppimisen painopistettä on haluttu siirtää oppimisprosessiin ohjauksellisuuden ja vuorovaikutuksen asteen vaihdellessa eri suuntauksissa radikaalista sosiokulttuuriseen (Steffen & Galen 1995).

Oppimisen toimintamekanismien, ajattelun ja ymmärtämyksen tutkiminen on noussut keskeiseksi. Sen selvittäminen, mitkä tekijät tukevat ymmärtävää oppimista, oppimisen siirtymistä uusiin konteksteihin ja sitä kautta käytettävissä olevan tiedon joustavuuteen, on noussut tutkimuksessa keskeiseksi. Huolestuneita on oltu ymmärtämistaitojen riittämättömästä kehittymisestä (esim. Rauste-von Wright & von Wright 1994).

Käsittelen tässä luvussa oppimiskäsityksen vaihtelua tutkimukseni aineiston hankinta-aikoina 1980-luvulta 2000-luvulle lähtien toisaalta behaviorismin periaatteista päätyen hermeneutiikan spiraaleihin, toisaalta korostaen oppimisprosessin kokonaisvaltaisuutta ja siinä muistin merkitystä, eri prosessin vaiheissa eri tavoin.

3.1.1 Käsityksiä oppimisesta ja sen kehityksestä

Oppimiselle on ollut ominaista 1980-luvun koulumaailmassa saada aikaan muutoksia ulkoisessa havaittavassa käyttäytymisessä. Behavioristisessa oppimiskäsityksessä perinteinen tapa oppia on ollut, että opettaja demonstroi, kuinka tietty ongelma ratkaistaan. Tavoitteena on ollut selvittää proseduurin vaiheet, jotta oppilas voi suorittaa saman proseduurin itsenäisesti. Sen jälkeen oppilas harjoittelee käyttämällä proseduuria ratkaistessaan vastaavanlaisia ongelmia. (Stigler & Hiebert 1997, 18.) Tämä behavioristinen paradigma on ollut vallalla oppimisen tutkimisessa aina 1960-luvulle saakka ja opetuskulttuurissa aina 1980-luvulle saakka. Oppiminen määriteltiin tuolloin ”muutoksiksi yksilön käyttäytymisessä tietyssä tilanteessa, jonka muutoksen aiheuttavat hänen toistuvat kokemuksensa” (Hilgard & Bower 1975, 17). Myös tutkimukseni vanhemman aineiston keräämisaikana, 1980-luvun alussa, opetuksessa oli Suomessa vallalla behavioristinen oppimiskäsitys. Opetus-oppimisprosessi nähtiin pitkälti tiedon siirtämisenä opettajalta oppilaalle sekä taitojen harjoittelemisena. Opetuksen tavoitteet pyrittiin määrittämään etukäteen yksityiskohtaisesti ja selvästi, mieluiten behavioristisella eli näkyvällä käyttäytymisen tasolla. Tietoa jäsennettiin kuten taitojakin, yksinkertaisesta alkaen ja kohti monimutkaista edeten, perustaidoista kohti ymmärtämistä. (von Wright 1996.)

Uusbehavioristinen kanta vuosisadan loppupuoliskolla oli edellä kuvattua maltillisempi. Tutkimuksen tasolla behavioristisen oppimiskäsityksen rinnalla käytiin kuitenkin jo keskustelua vaihtoehtoisista oppimisen malleista. Behavioristisesta oppimiskäsityksestä avautui tie kognitiivis-konstruktiivisen oppimisen teorialle, kun ärsykkeen ja reaktion välinen ”musta laatikko” haluttiin avata. Tästä syystä voidaan sanoa, että oppimisen tutkimuksessa yhä enemmän alaa valtaavan kognitiivisen teorian juuret ovat syvällä behavioristisessa tutkimusperinteessä (ks. Kauppila 1999, 51).

3.1.2 Konstruktivistinen oppimiskäsitys

Yksilö havainnoi ympäristöään ja käsittelee havaintojaan valitsemalla, muistamalla ja ajattelemalla. Uusi tieto muokkautuu vuorovaikutuksessa ympäristön kanssa (ks. esim. Rauste-von Wright & von Wright 1994, 17). Tätä näkemystä kutsuttiin alkuun kognitiiviseksi oppimiskäsitykseksi sanan kognitio viitatessa tiedon hankkimiseen, tietämiseen ja tuottamiseen liittyviin sisäisiin prosesseihin (ks. esim. Miettinen 1995). Nimitys oli kuitenkin oppimista ajatellen suppea sikäli, että se ei huomioinut oppijan motivaatiota, emootioita eikä arvoja keskittyen tiedollisiin kognitiivisiin prosesseihin. Niinpä vähitellen otettiin käyttöön nimike ”konstruktivistinen oppimiskäsitys”, mistä näkee käytettävän myös nimitystä kognitiivinen konstruktivismi.

Kognitiivis-konstruktiivinen oppimiskäsitys on kehittynyt eri tieteistä. Taustalta löytyy useita kognitiivisia rakenteita ja skeemoja ja erilaisia vivahteita koskevia teorioita. Se voidaan ymmärtää tietoteoreettisena käsitteitä painottavana tai oppimispsykologisena kognitioon perustuvana suuntauksena. Oleellisena teorioissa pidetään sitä, että oppija rakentaa tiedon oman ajatteluprosessinsa kautta ja että tämä prosessi rakentuu oppijan omalle käsitykselle oppimisen lähtötilanteessa. Näin kuvatusta oppimisesta käytetään yleisesti konstruktivistinen oppimiskäsitys nimitystä (ks. esim. Rauste-von Wright & von Wright 1994; Kaartinen 1996).

Kognitiivis-konstruktiivisen näkemyksen pohjalta oppiminen voidaan määritellä prosessina, jossa ihminen valikoi ja tulkitsee informaatiota. Tätä hän ottaa vastaan aistien avulla, omien odotustensa, aikaisempien tietojensa ja omien tavoitteiden pohjalta. (Miettinen 1995; Kauppila 1999, 53.) Jarvis (1994) määrittelee oppimisen prosessiksi, jossa kokemus ensin konstruoidaan ja sen jälkeen muunnetaan tiedoiksi, taidoiksi, asenteiksi, arvoiksi, emootioiksi, käsityksiksi ja uskomuksiksi.

Kognitiivis-konstruktiivista oppimiskäsitystä voidaan kaikkein yleisimmässä merkityksessä luonnehtia niin, että rakennetaan uutta tietämystä ja ymmärrystä sen pohjalle, mitä jo tiedetään (esim. Piaget 1952, 1973a, b, 1977, 1978; Vygotsky 1962/82). Tästä näkemyksestä seuraa, että oppimisessa tulee lähtökohdaksi ottaa ne käsitykset ja uskomukset, joita oppijoilla on (Bransford ym. 2000). Kun lapsi opettelee lukemaan tai laskemaan, jo yksinkertaisten tekstien ymmärtäminen tai laskutoimituksen tekeminen on hänelle ongelma ongelmanratkaisumielessä ja tulisi ratkaista ongelmanratkaisun keinoin. Lapset eivät voi ymmärtää lukemaansa tekemättä päätelmiä ja käyttämättä hyväkseen heillä jo olevaa informaatiota, joka ylittää tekstissä olevan informaation (Resnick 1987). Von Wrightin (1996) mukaan sellaisten taitojen, kuten lukemisen tai laskemisen, oppiminen ei etene yksinkertaisten taitojen harjoittelusta kohti korkeamman tason prosesseja, vaan ajattelulla on tärkeä merkityksensä oppimisen kaikissa vaiheissa. Hän toteaa:”Ajattelu ei ole perusopetuksen tuotosta vaan alusta pitäen olennainen osatekijä yhtä hyvin taitojen kuin tietojenkin oppimisessa.”, mikä asia tulisi huomata mekaanisesta laskemisesta puhuttaessa.

3.1.3 Konstruoinnin laajuus

Oppimisessa prosessoitavan tiedon luonne tulee huomioida. Arkielämässä kuulee usein sanottavan:”Ensin on opittava työkalu, jotta voidaan ratkaista ongelmia”. Tällaiseen heuristiikkojen, tiedon ja taidon erottamiseen liittyy vaara tiedon liittymisestä muistinvaraisesti. Paitsi, että muistinvarainen tieto ei ole välttämättä ymmärrettyä tietoa, niin myös oppija saa pinnallisen oppimisen mallin, joka saattaa siirtyä muuhunkin oppimiseen ja on vaikeasti muutettavissa. Voi kysyä, prosessoidaanko tietoa vai tiedolla? Prosessoinnin tulisi näkyä oppimisessa useassa eri merkityksessä. Yhtä tärkeitä ovat prosessointi käsitteen muodostamisvaiheessa ja toisaalta käsitteitä käytettäessä kuin strategioissakin. Myös matemaattisen tiedon rakentamisessa tulisi näkyä edellä kuvatut merkitykset.

Tieto on osittain käsitteissä – tarkemmin sanottuna käsityksissä käsitteistä. 1980-luvun ajattelua tiedon liittymisestä tähän prosessointiin kuvaa seuraava lainaus kirjassa ”Johdatus kognitiiviseen psykologiaan”. Siinä esitetään, että muodollista operationaalista ajattelua ei voida harjoitella ennen kuin siihen on edellytyksiä:”Sen sijaan, että pyrittäisiin vaikuttamaan suoraan operatiiviseen kykyyn (mm. harjoittamalla päätelmien tekoa) pitäisi parantaa oppilaan mahdollisuuksia käyttää tätä kykyä sen esiintyessä antamalla oppilaalle runsaasti sisältöön liittyvää tietoa.” (Hjelmquist, Sjöberg, Montgomery, Lehti 1982.) Samaa merkitystä, joka konstruoidessa ja prosessoidessa on unohtua, kuvaa toteamus:”Uusi oppimisen tutkimus ei väitä, etteivät faktat olisi tärkeitä ajattelun ja ongelmanratkaisun kannalta” (vrt. Chi ym. 1994). Toisin sanoen ongelmanratkaisussa strategiat eivät yksin riitä, ajatuksilla tulee olla myös sisältö. Kuitenkaan tieto ei saa olla staattisena faktatietona, vaan lähtökohtana tulee olla käsitteenmuodostumisprosessit ja käsitteiden väliset yhteydet. Vain käsitteelliseen muutokseen johtavat oppimismenetelmät voivat olla tehokkaita. Tulkintoja sisältöjen merkityksen tärkeydestä aiheuttaa kokonaisvaltaisessa oppimisessa Leinon ja Leinon (1997) mukaan se, tulkitaanko sisällöt ennaltamäärätyiksi opetuskohteiksi sekä niihin liittyviksi osaamistavoitteiksi, vai tulkitaanko sisällöt vain esimerkinomaisiksi kohdemahdollisuuksiksi, joilla harjoitutetaan ongelmanratkaisutaitoja. Tämä muutos näkyy myös 1980- ja 1990-lukujen opetussuunnitelmien perusteita vertailtaessa.

3.1.4 Oppimisen kolme metaforaa

Metafora – vertauskuva – on tapa kuvata käsityksiä oppimisesta. Oppimismetafora pidättäytyy tiukasta paradigma-ajattelusta, vaikkakin ajattelussa on tunnistettavissa piirteitä varhaisemmasta oppimiskäsitysajattelusta. Tähänastiset metaforat ovat tuoneet oppimiskeskusteluun tärkeän ulottuvuuden mahdollistamalla oppimisen tutkimisen kokonaisvaltaisena tarkastellessaan tietoa mielessä-maailmassa dikotomian avulla. Vallalla olevat käsitykset oppimisesta on perinteisesti jaettu kahteen metaforaan; tiedonhankintametaforaan (acquisition metaphor) ja osallisuusmetaforaan (participation metaphor) (Sfard 1998). Jaottelu perustuu kahteen perustapaan ymmärtää oppiminen. Jaottelun oikeutusta lisää se, että sen perustana ei ole vain oppimisteorioiden ryhmittely, vaan taustalla on kaksi erilaista tapaa ymmärtää ihmisen kognitiivisen toiminnan perusteet ylipäänsä. (Paavola & Hakkarainen 2007, 26.)

Osallisuusmetaforassa keskeistä on tiedon esiintyminen jossakin kontekstissa, koska oppiminen nähdään tässä metaforassa kulttuurisidonnaisena tapahtumana. Metaforan näkemykset pohjautuvat situationaalisen oppimisen teorioihin, joita on alun perin kehitetty kuvaamaan kulttuurin siirtämistä sukupolvelta toiselle sosiaalisessa kontekstissa. (ks. esim. Paavola ym. 2002; Hassinen 2006.) Koska tieto on tässä metaforassa maailmassa – ei mielessä, tulee siihen liittyä tiedonhankintametafora. Mielen ajatellaan olevan eräänlainen säiliö, jota opittaessa täytetään tiedolla (Bereiter 2002). Tähän liittyvän tiedonhankintametaforan ongelmat liittyvät tiedon käytettävyyteen, jos ei asiasta oppimisen yhteydessä huolehdita. Tarkasteltaessa tiedonhankintametaforaa mieli-maailma-näkökulmasta ollaan eräässä oppimisen ”kipupisteessä”. Molempien puolien liittyminen käsitteeseen on ymmärtävän, muistin kapasiteetin rajoitukset huomioonotettava välttämättömyys. Hakkarainen (2005) arvioi osallistumisnäkökulman oppimisen olevan konservatiivista, koska se pitäytyy kulttuurin perinnössä sallimatta perinteen muuttamista tai innovaatioiden tuottamista ennen kuin vasta vahvasti sosiaalistuneessa perinteessä (Engeström 1999; Engeström & Virkkunen 2000; Hakkarainen ym. 2004). Vaikka oppimisessa on aina kysymys johonkin yhteisöön kasvamisen ja osallistumisen prosessista, liittyy siihen aina myös yksilöllisiä ja mielensisäisiä eli mentaalisia prosesseja (Sfard 1998). Edellä esitellyistä syistä johtuen aikaisempien oppimiseen liittyvien metaforien riittävyys voidaan kyseenalaistaa (vrt. Hakkarainen, Palonen & Paavola 2002; Paavola, Lipponen & Hakkarainen 2004).

Hakkarainen tutkimusryhmineen ovat ottaneet käyttöön kolmannen metaforan (vrt. Paavola, Lipponen & Hakkarainen 2004; Paavola & Hakkarainen 2004) yhteisönäkökulmasta tarkasteltuna. He kutsuvat tätä tiedonluomisen metaforaksi. Metafora ei tyydy jo olemassa olevaan tietoon, vaan näkee oppimisen parhaimmillaan prosessina, jossa syntyy uutta tietoa, uusia oivalluksia yksilötasolla ja uusia sosiaalisia käytäntöjä yhteisönäkökulmasta. Jos tiedonhankinta on mielen sisäinen yksinpuhelu eli *monologinen* prosessi ja osallistumisnäkökulma edustaa mielen ja ympäristön välistä *dialogia*, niin tiedonluomista voidaan luonnehtia *trialogiseksi* prosessiksi.

Keskeisenä perusteena kolmannen vertauskuvan erottamiselle pidetään sitä, että innovatiivisen tietoyhteisöjen malli ei selity kummallakaan Sfardin esittämällä metaforalla (Paavola, Lipponen & Hakkarainen 2002; Paavola & Hakkarainen 2004; Hakkarainen, Lonka & Lipponen 2004; Hakkarainen, Palonen, Paavola & Lehtinen 2004; Paavola & Hakkarainen 2005). Oppimisessa perinteisesti korostettavien ihmisen mielessä olevien tietorakenteiden merkitystä voidaan arvostella siitä, että ne näkevät mielen pelkästään tiedolla täytettävänä säiliönä ja toisaalta osallistumismetaforaa voidaan arvostella siitä, että se korostaa yhteisöjen merkitystä oppimisessa mielen ulkopuolisena prosessina. Tiedonluomisvertauskuvassa korostetaan näiden kahden mainitun metaforan vuorovaikutusta välittävien artefaktojen välityksellä (Paavola & Hakkarainen 2005, 29). Artefaktit voivat olla niin konkreettisia kuin kuvitteellisiakin. Bereiter (2002) korostaa käsitteellisten artefaktien roolia. Lisäksi Nonakan ja Takeuchin mallissa välittävien artefaktien kehittämisen nähdään tapahtuvan ekplikoimalla hiljaista tietoa yhteiseen käyttöön abduktiiviseen ajatteluun liittyvän käänteisen prosessin avulla.

Kolmea metaforaa ei voi pitää toisiaan poissulkevina, vaan eri oppimisen vaiheissa niillä on eri painotus. Siten oppiminen ei ole vain ihmisen mielen sisäinen monologi, ei myöskään yhteisössä tapahtuva dialogi, vaan siihen liittyy myös yksilön vuorovaikutus yhteisön kanssa käsitteellisten artefaktojen välityksellä (Hakkarainen, Lonka & Lipponen 2004). Tiedonluomismetaforan käyttö tukee myös peirceläistä Tallin kolmen maailman mallin käyttöä tutkimuksessa siksi, että päinvastoin, kuin Popperilla, Tallin mallissa maailmoja voidaan käsitellä paitsi erillisinä, niin niiden voidaan myös ajatella limittyvän toisiinsa. (Hähkiöniemi 2006.) Tässä mallissa ajatellaan käsitteiden voivan syntyä läheisessä ja monitahoisessa vuorovaikutuksessa ympäristön kanssa. Limittyminen tekee mahdolliseksi deduktiivista päättelymallia ”heikompien” päättelymallien (induktiivisen päättelyn ja erityisesti luovuudelle tärkeän abduktiivisen päättelyn) luomat yhteydet.

3.1.5 Konstruktivismin kritiikkiä

Konstruktivismi oppimisen lähtökohtana tai tapa, jolla sitä sovelletaan, on saanut myös kritiikkiä osakseen. Muun muassa Miller (1989) esittää, että maininta oppilaiden ennakkokäsitysten ”vakavasti ottamisesta” ei riitä epistemologiseksi lähtökohdaksi. Kritiikki kohdistuu tapaan ja tasoon, millä ennakkokäsityksiä on huomioitu, ei itse konstruktivismiin. Kun tietämys oppilaan ennakkokäsityksistä ja ajattelusta lisääntyy, pystytään nämä ottamaan huomioon opetuksessa nykyistä paremmin. Vain ne menetelmät, joissa pyritään ja päästään käsitteelliseen muutokseen, voivat saada aikaan muutoksen ajattelussa. (Novak 1998, 2002.) Ilman että tätä hyväksytään, päädytään pinnalliseen, nopeasti unohtuvaan tietoon, koska oppijalla ei ole omista käsityksistä johtuen mahdollisuutta liittää tietoa omaan tietoverkkoonsa ja tieto jää siten irralliseksi ja muistinvaraiseksi.

Sahlberg (1996) on tuonut esille oppimiskäytäntöjen suhteen opettamiskäytäntöihin. Vaikka Sahlbergin mukaan konstruktivistinen lähestymistapa on lupaava oppimista tarkastellessa, on sen soveltaminen opettamiseen paljon ongelmallisempaa. Hänkään ei esitä kritiikkiä itse konstruktivismia vastaan, vaan siihen, miten yksilö saadaan otetuksi riittävästi huomioon kollektiivissa, ja tavoitteet saavutettua tietyissä aika- ja resurssirajoissa. Rauste-von Wrightin ja Soinin (2003) mukaan tähän päästään siten, että opetussuunnitelmaan ei kirjata sisältöluetteloja opetussuunnitelman perusteiden kakkostason tavoitteisiin, vaan kirjataan ne ”keskeiset ideat” ja toimintavalmiudet, joihin oppimisella pyritään. Tällaisen ilmiökeskeisen opetussuunnitelman rakentaminen vaatii heidän mukaansa puolestaan ”keskeisten ideoiden” perusehtojen riittävän selkeää analyysia, jotta vältytään sirpaleisuudelta. Keskeiset ideat saavutetaan samanlaisella prosessoinnilla ylätasolta aina alatason prosesseihin asti. Täten vältetään perinteinen tavoitteiden muuntuminen ”matkan varrella” eli se, että ylätavoitteista siirrytään oppiaineiden luetteloihin ja niiden sisällä tapahtuviin jaksotuksiin (Rauste-von Wright ym. 2003). Menetelmällisesti tätä auttavat esimerkiksi perusopetuksen päättöarvioinnin kriteerien (1999) esille nostamat oppilaan omaan konstruointiin tähtäävät menetelmät myös sisällöistä puhuttaessa, millä asialla korostetaan perustietojen monipuolista hallintaa ja oppimisen kokonaisvaltaista luonnetta.

3.2 Muistin merkitys ajattelussa ja oppimisessa

"Cogito, ergo sum"

Descartes 1637

Tämä tutkimus ei ole muistitutkimus. Muistin mahdollisuudet ja rajoitukset vaikuttavat kuitenkin oppimiseen – eri vaiheissa eri tavoin, ja siksi tarkastelu on tarpeen. Oppijan muisti asettaa oppimiseen rajoituksia niin sisällöllisesti kuin ajallisesti. Muistin toimintojen mieleenpalauttamisella korostan oppimisen prosessin kokonaisvaltaisuutta.

Vaikka luku alkaa kartesiolaisella lainauksella aineen ja hengen duaalisuudesta, missä aine ja henki käsitetään toisistaan riippumattomasti olemassaoleviksi perusoleviksi, ei tässä pureuduta aineen ja hengen maailmojen suhteeseen. Keskeisimmäksi nostan antikartesiolaisen Peircen korostaman ihmisen kognition välittyneisyyden merkkien avulla. Lähtökohtana ovat triadiset merkit ja merkkiprosessit, jotka muodostavat perustan inhimillisen toiminnan ymmärtämiselle (Paavola & Hakkarainen 2007, 5). Merkin triadisuudella tarkoitetaan merkkiä, sitä tarkoittavaa objektia ja merkin vaikutusta.

Oppiminen on kokonaisvaltainen prosessi, johon liittyvät ajattelun elementit oppimisen affektiivista puolta unohtamatta. Oppimisen konstruoiminen on metafora, kielikuva, jolla ihmisen tiedonhankintaprosessia verrataan rakentamiseen. Tämän mukaan ihminen rakentaa aktiivisesti omaa ymmärrystään ja tulkintojaan konstruktivistisen tiedonkäsityksen eli konstruktivistisen epistemologian mukaisesti (ks. esim. Tynjälä 1999) käyttäen toimintoihin myös havaintoa, mielikuvitusta, ajattelua, muistia, älyä, järkeä ja ymmärrystä. (Niiniluoto 1990, 140.) Onnistuessaan tällaisen ajattelutoiminnan seurauksena tietoaines lisääntyy, ymmärtäminen paranee, havaintojen teko kehittyy, taidot paranevat vähentäen virheitä ja nopeuttaen suorituksia. Ongelmien ratkaisemisen kyky kehittyy ja toiminnan joustavuus lisääntyy. Kuitenkin tulee huomata, että oppija muokkaa tietoainesta aikaisempien tietojensa, uskomustensa ja arvojensa pohjalta (Lehto 1997) ja muodostaa näiden pohjalta käsityksensä asioista. Bartlett (1932) käytti muistia koskevissa tutkimuksissaan merkityksellisiä tekstejä tutkiessaan havainnointia ja mieleenpalauttamista. Kokeiden keskeisiä tuloksia oli, että muisti palauttaa siitäkin huolimatta, että käytettiin merkityksellisiä tekstejä, vain harvoin alkuperäisen materiaalin muuttumattomana mieleen. (Bartlett 1932.) Pyrkiessään muistamaan uutta ainesta ihminen tekee siitä itselleen merkityksellisen eli rekonstruoi sen tavalla, jonka pystyy itselleen selittämään.

Kognitiivinen psykologia pyrkii selittämään ihmisen oppimiseen liittyviä tiedonkäsittelyn vaiheita. Hermeneuttisen kognitiivis-konstruktiivisen oppimisen peruskäsite on ymmärtäminen, joka liittyy saadun tai hankitun informaation vastaanottamiseen oppimistilanteessa (Miettinen 1995, 70–78; Kauppila 1999, 52). Tällainen ymmärtävän oppimisen tavoitteellisuus on perusteltavissa, sillä oppilaat, jotka muistavat tietoja ja proseduureja ymmärtämättä niitä, eivät ole varmoja, milloin ja miten heidän tulisi käyttää tietojansa ja siitä syystä heidän oppimisensa on pinnallista (Bransford, Brown & Cocking 1999; NCTM 2000, 20).

Ympäristön muuttuessa yhä tietointensiivisemmäksi kyvylle valikoida ja käsitellä monipuolista tietoa ja reagoida siihen asetetaan yhä suurempia haasteita. Muistin merkitys tässä toiminnassa on lisännyt tarvetta oppia ymmärtämään muistamisen taustalla olevia mekanismeja sekä niitä rajoituksia, joita tähän toimintaan sisältyy. Muistilla on suuri merkitys ihmisen ajattelussa. Tiedon käsittelyä – tiedon tallentamista ja mieleen palauttamista – kuvataan usein prosessina, joka kattaa tiedon vastaanottamisen, työstämisen sekä tiedon käyttämisen. Muistin osuus tässä prosessissa on keskeinen. Muistin avulla menneisyys kaikissa eri muodoissa voi vaikuttaa nykyisyyteen (Kauppila 1999) ja tulevaisuuteen. Muistin avulla ihminen voi palata menneeseen. Muistinsa avulla ihminen pyrkii rakentamaan kuvaa maailmasta kokemuksiinsa, käsityksiinsä ja uskomuksiinsa nojaten. Ihmisellä on tarkoitus (intentio) saada maailma jäsentymään siten, että hän pystyy suhteuttamaan kokemukset toisiinsa ja tekemään tarkoituksenmukaisia toimintapäätöksiä (Ahonen 1994*)*. Ihminen pyrkii selittämään saamansa kokemukset itselleen ymmärrettävästi pyrkien ymmärtämään kokonaisuuksia.

3.2.1 Työmuistin merkitys oppimisessa

Onnistuneessa oppimisprosessissa tietoisuuden aste vaihtelee prosessin eri vaiheissa. Kun tietoisesti ajattelemme jotain ongelmaa, käytämme työmuistiamme, joka pystyy hetkellisesti ottamaan käyttöönsä pitkäaikaismuistista tarvittavat komponentit niin tietojen, strategioiden kuin metataitojenkin alueilta, käsittelemään aiemman tiedon ja yhdistelemään sen uuteen tietoon sekä muokkaamaan tiedon pitkäkestoiseen muistiin säilöttäväksi (Baddeley 1986, 2000). Tällä on merkitystä oppimistilanteissa, joissa esimerkiksi käsiteltävänä olevan tai muistettavan aineksen laajuus rajoittaa sen kertaamista kokonaisuudessaan ja kertaamatta jäänyt tietoaines häviää.

Muistissa ei voida työstää samanaikaisesti kuin muutamaa informaatioyksikköä (engl. chunk) kerrallaan (Baddeley 2000; Silfverberg 1999, 126–127).

Tarvittava kapasiteetti vaihtelee sekä muistia rasittavan tehtävän laadun mukaan että muistettavan materiaalin mukaan (Kantanen & Nybo 2000; Silfverberg 1999, 127). Toinen vaikuttava tekijä on oppijalla käytettävissä olevien tiettyä aihetta koskevien informaatioyksiköiden laajuus.

Työmuistin lisäksi keskeinen osuus muistitoiminnoissa on keskusyksiköllä ja sen merkityksellä tarkkaavaisuuteen ja tilanteenmukaisen reagoinnin kannalta oleelliseen informaatioon (Alho, Näätänen & Lang 1996). Keskusyksikön toiminta on kontrolloitua prosessointia ja näin erotettavissa toiston myötä automatisoituneista toiminnoista, jotka vievät vähän resursseja eivätkä kuormita työmuistia (Kantanen & Nybo 2000).

3.2.2 Automatisoituminen

On useita oppimisen teorioita, missä tietoisuuden aste vaihtelee prosessin eri vaiheissa. Ymmärtämiseen liittyy tietoinen ajattelu, mutta se, ja siis myös ymmärtäminen, ei oppimisessa riitä. Tarvitaan myös automatisoitumista. Automatisoitumisella tarkoitan sitä, että vakioisissa olosuhteissa tapahtuneen toiston ansiosta tehtävän suorittaminen helpottuu olennaisesti eikä kuormita enää samalla tavalla muistia, kuin automatisoitumaton tieto (Saariluoma 1994). Tämä on välttämätöntä tiedon käsittelyssä työmuistin rajoitukset huomioon ottaen, jotta vapautettaisiin kapasiteettia uuden oppimiseen (vrt. edellinen kappale). Tällainen automatisoitunut tieto tulee perustua ymmärtävään kokemukseen. Sen perustelut tulee olla palautettavissa muistista tarvittaessa ja siksi erotan automatisoitumisen mekaanisesta laskemisesta.

Premissien rooli tulee automatisoitumisessa tärkeäksi. Käsitteistä täytyy oppia, mitä ominaisuuksia käsitteeseen kuuluu, mutta myöskin, millä ehdolla ja missä olosuhteissa ne ovat voimassa. Määrittelen mekaanisen, rutiininomaisen oppimisen muistinvaraiseksi oppimiseksi, mihin ei kuulu ymmärtävää komponenttia ja siten mekaaninen oppiminen tulee erottaa automatisoitumisesta. Silloin mekaanisen laskemisen vastakohta ei ole soveltaminen, vaan ymmärtävä laskeminen.

Oikein käytettynä automatisoituminen on hyvin tehokas menetelmä, mutta sitä tietä on mahdollista omaksua myös täysin vääriä toimintatapoja (Saariluoma 1994). Automatisoituminen on välttämättömyys työmuistin pienen kapasiteetin takia, mutta jos se jää ymmärtämättömäksi mekaaniseksi oppimiskeinoksi, se saattaa luoda virheellisiä uskomuksia, koska voimme muistaa yhtä hyvin oikeita kuin vääriäkin asioita. Ero mekaanisen ja automatisoituneen tiedon välillä määriteltiin edellä siten, että mekaaninen laskeminen on muistinvaraista, ei ymmärrykseen perustuvaa. Automatisoituminen tarkoittaa myöskin kapasiteettia vähän kuluttavaa ajattelua, mutta siihen liittyy tietoisuus asian oikeasta suorittamisesta. Jos oppilaat tottuvat drillaamaan proseduureja ilman, että ovat missään vaiheessa ymmärtäneet asiaa, on ymmärtämisen tason saavuttaminen myöhemminkin vaikeaa (Hiebert 2003, 17). Tällä asialla on saattanut olla vaikutusta tyttöjen opiskelutottumuksiin. Jos he ovat alakoulussa saaneet vankan laskurutiinin ja arviointi on tyttöjen osalta antanut hyviä arvosanoja, on kehittyneempiä ajattelun taitoja vaikea omaksua myöhemmin, kun kokemus siitä, mitä oppiminen on, perustuu rutiinitekemiseen. (vrt. Hannula 2001.)

Galperinin ”Henkisten toimintojen asteittaisen muodostumisen” –teoriassa tietoisuuden taso vaihtelee alkaen orientoitumisvaiheen ennakkokäsitysten selvittämisestä sisäistyen konkreetin toiminnan, verbaalisen vaiheen ja sisäisen puheen eli ajatteluvaiheen jälkeen, mikä näkyy toimintojen lyhentymisenä, lujittumisena ja lopulta automatisoitumisena. (Galperin 1957, 214–215; 1979.) Luvussa 6 esiteltävästä Tallin oppimisen mallista Galperin malli poikkeaa siten, että malli ei korosta sisäistyneeseen komponenttiin kuuluvien ominaisuuksien julkituomista. Galperinin mallin tavalla kehittynyt automatisoitunut tieto voi olla lähtökohta hiljaisen tiedon syntymiselle.

Toinen merkittävä näkökulma Galperinin malliin liittyy Vygotskin lähikehityksen vyöhyke-käsitteeseen. Zinchenkon (1995) mukaan välittyneisyyden välikappaleet ovat merkki, sana ja symboli ja että merkki ei ole luonnon neutraali entiteetti, vaan kulttuurinen tuote. Galperinin mallin mukaan lähikehityksen vyöhykkeellä oppiminen alkaa vuorovaikutuksessa orientoitumisvaiheella ja materiaalisella toiminnalla. Siten materiaaliset välineet, merkit ja symbolit eivät toimi yksinään, vaan edellyttävät vuorovaikutusta tullakseen omaksutuiksi. (Silvonen 2004.)

3.2.3 Kapseloituminen

Kapseloitumista voidaan tarkastella sekä yhteisön, että yksilön kannalta. Kapseloitunut hiljainen tieto edustaa tietämystä, joka syntyy kun yleinen tieto on muuttunut asiantuntijuuden kehityksen myötä yksilön henkilökohtaiseksi tietämykseksi organisoituen niiden ongelmien ympärille, joita asiantuntija työssään ratkaisee (Bereiter 1992). Tällaista tietoa edustaa niin kutsuttu kapseloitunut tieto (Boshuizen & Schmidt 1992). Se on tiettyyn sisältöalueeseen liittyvää käsitteellistä tietoa, johon kuuluvat prosessit ovat automatisoituneet. Tähän liittyvää asiantuntijuutta kutsutaan adaptiiviseksi asiantuntijuudeksi, jolle on tyypillistä säännöllinen pyrkimys toimia oman suorituskyvyn ylärajalla, muuntaa uusien ongelmien käsittelyyn vaadittavia taitoja asteittain rutiineiksi ja käyttää näin vapautuvia resursseja jälleen uuden kehittelyyn (Hakkarainen 2007). Kääntäen saadaan hiljainen tieto käyttöön, kun käsitteeseen liittyvät ominaisuudet tiedostetaan ja puretaan auki.

Luku 4

Matematiikan opetussuunnitelmat 1980- ja 1990-luvuilla – muutoksia 20 vuoden aikana

Yhteiskunta määrittää opetussuunnitelman perusteiden avulla koulutuksen tavoitteet poliittis-taloudellisen järjestelmän säätelemänä yhteiskunnan tarpeet huomioiden (Rauste-von Wright ym. 2003). Opetussuunnitelmat säätelevät opetusta ja sitä kautta oppimista yhteiskunnan harkitsemien reunaehtojen ja myöntämiensä resurssien puitteissa. Valtakunnan opetussuunnitelman perusteissa kuvataan opetuksen ja koulukasvatuksen tavoitteet. Tämän pohjalta opettaja suunnittelee opetusryhmilleen toteutettavan opetussuunnitelman ja kokemuksensa perusteella muuttaa ja etsii toimivia käytäntöjä. Tässä tulee huomioida, että toteutettu opetussuunnitelma on aina opettajan tulkinta koulukohtaisesta opetussuunnitelmasta ja opetussuunnitelman perusteista. Tämä on perusteluni tarkastella tutkimuksessani myös opetussuunnitelmauudistuksia tarkasteluajanjaksolla. Jos opetussuunnitelmilla ei uskota olevan vaikutusta opetukseen ja sitä kautta oppimiseen, niin niiden asema on syytä kyseenalaistaa. Toisaalta vuodesta 1994 lähtien on opetussuunnitelmissa korostettu oppimiseen liittyvää ja sitä tukevaa näkökulmaa (Halinen 2008).

Viime vuosikymmeninä on opetussuunnitelman perusteiden tarkastelu matematiikan opetukselle asetetuista tavoitteista voitu jakaa pääperiaatteissaan kahteen luokkaan. Toinen juontuu Unescon matematiikanopetuksen tavoitteistosta, missä esitetään tavoitteena opettaa perusstruktuurien ja laajojen avainkäsitteiden yhtenäistämää matematiikkaa sekä kehittää käsitteellistä, merkityksellistä matematiikkaa. Toisaalta tavoitteistossa on kirjattu tavoitteeksi määrittää yhteiskuntamme keskivertokansalaiselle asetettava matemaattinen tavoitetaso (ks. esim. Paasonen 1979). Samaan jakoon (hyöty- ja sivistystavoitteet) on päätynyt vuonna 1987 matematiikan ja luonnontieteellisen opetuksen tilaa tutkimaan asetettu matemaattis-luonnontieteellisen perussivistyksen komitea (ns. Leikolan komitea) tulkitessaan, että yleissivistykseen kuuluu sekä ammattisivistykseen kuuluvia asioita, että jokaisen kansalaisen ammatin ulkopuolella elämässään tarvitsemia tietoja ja taitoja (Komiteamietintö 1988, 26–27) viimeksimainitun korostuessa 2000-luvulla. Myös Gjone (2001) kutsuu näitä kahta dimensiota hyöty- ja sivistysdimensioksi.

Matematiikanopetusta sääteli 1970-luvulla Peruskoulun opetussuunnitelmakomitean mietinnön (Komiteamietintö 1970: A4 ja A5, POPS I ja II) pohjalta vuonna 1972 vahvistettu opetussuunnitelma. Vastaavasti 1980-luvulla opetus pohjautui Peruskoulun matematiikan oppimäärä ja oppimääräsuunnitelmaan vuodelta 1982 ja Peruskoulun opetussuunnitelman perusteisiin vuodelta 1985. Näistä ensinmainitussa matematiikan perussivistyksen molempia dimensioita painotettiin asettamalla matematiikan opetuksen kognitiivisiksi tavoitteiksi ”yksilön kehittymisen ja muuttuvan yhteiskunnan tarpeiden kannalta tarkoituksenmukaisen tiedon ja taidon hankkiminen sekä itsenäisen matemaattisen tiedon hankintaan ja käyttöön tarvittavien työskentelytapojen ja menetelmien omaksuminen”. Kuitenkin tuolloin, kuten vielä vuonna 1985 opetussuunnitelman tiedolliset tavoitteet asetettiin pääasiassa oppimäärän muodossa tarkkoine sisältöineen. Vasta vuoden 1994 peruskoulun opetussuunnitelman perusteissa tarkoista sisältöluetteloista luovuttiin ja painotettiin oppimista prosessina.

Tässä luvussa seurataan kahdenkymmenen vuoden aikana tapahtunutta vuoropuhelua opetussuunnitelman rakenteen, oppimisnäkemyksen, tavoitteiden ja sisältöjen sekä keskeisten matematiikan oppimiseen vaikuttavien tekijöiden näkökulmasta ja diskussiossa palataan tarkastelemaan opetussuunnitelman vaikuttavuutta osaamiseen.

4.1 Curriculum – Lehrnplan -opetussuunnitelmien perusteissa

Opetussuunnitelma on koulun opetustyötä säätelevä toimintasuunnitelma. Sen pohjalta koulu laatii oman vuotuisen lukusuunnitelmansa ja opettajat kurssi- ja tuntisuunnitelmansa. Opetussuunnitelmat erotetaan usein sen perusteella, onko painopisteenä oppisisältö ja opetuksen järjestäminen vai korostetaanko oppilaan oppimistapahtumaa. Edellinen kiteytyy Herbartin (1776–1841) systemaattisen opetussuunnitelmaopin Lehrplan-käsitteeseen, jossa on etualalla opetussuunnitelman laadinta oppiaineiden ja oppiaineksen esittämisen pohjalta. (Rauste-von Wright ym. 2003.)

Suomessa kouluhallitus vahvisti vuonna 1972 opetussuunnitelman rakenteen ja nimesi Peruskoulun opetussuunnitelman mietinnöt eli POPS I ja II:n valtakunnallisen opetussuunnitelman asemaan. Siinä keskityttiin eurooppalaiseen tapaan herbartilaisittain opetussuunnitelmaorganisaation rakentamiseen. Se oli tarkka kuvaus koulutyön yleisistä järjestelyistä, oppiaineista, niiden viikko- ja kokonaistuntimääristä sekä oppimääristä, arvostelusta, tukiopetuksen antamisesta ja oppilaan ohjauksesta. Kukin koulu laati opetussuunnitelmaan erityisenä koulukohtaisena osana kutakin lukuvuotta varten työsuunnitelmaksi tuolloin kutsutun lukusuunnitelman. Tässä työsuunnitelmassa kirjattiin opetussuunnitelman periaatteet yksityiskohtaisesti koulun tasolla. Tunnusomaista tuon ajan matematiikanopetuksessa olivat työkirjatyyppiset oppikirjat ja spiraalimaisesti etenevä opetus.

Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet vuonna 1985 oli edelleen puhdasoppinen Lehrplan-tyyppinen oppisisällöt tarkasti määrittelevä opetussuunnitelma. Peruskouluasetuksen (718/84) 27§:n mukaisesti opetussuunnitelman perusteet sisälsivät koulutyön yleistä järjestelyä, oppiaineita, opetukseen käytettävää tuntimäärää ja tarvittaessa oppiaineittain arvostelua, tukiopetuksen antamista ja oppilaanohjausta ohjaavat raamit (Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet 1985). Näin ajateltiin saavutettavan peruskoululaissa koulukasvatukselle asetetut yleiset tavoitteet.

Vuoden 1985 koululainsäädännössä vahvistettiin ja selkiinnytettiin opetussuunnitelman asemaa ja eri hallinnontasojen tehtäviä. Toimivaltuuksia tarkistettiin ja kunnille annettiin entistä selkeämpi velvollisuus laatia ja kehittää peruskoulunsa opetussuunnitelmaa Lehrplan-ajattelun hengessä. Yhteiskunnallisesti ajatellen koulutuksen sisällön lähtökohtana pidettiin yhteiskunnan toimivuuden ja kehityksen koulutukselle asettamia tarpeita. Näitä tarpeita käsiteltiin opetussuunnitelman perusteiden mukaan sekä senhetkisestä tilanteesta että sen arvioidusta tulevasta kehityksestä käsin, koska yhtenä koulutuksen tärkeimpänä tehtävänä pidettiin yhteiskunnan perustoimintojen jatkuvuuden turvaamista. (Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet 1985.) Komiteanmietinnön (1988, 1989) mukaan nämä opetuksen perustana olleet edelläkuvatut yleiset tavoitelauseet eivät kuitenkaan toteutuneet käytännön opetuksessa, mikä vaikuttikin tavoitteellisina muutoksina tuleviin opetussuunnitelman perusteisiin.

Matemaattis-luonnontieteellisen perussivistyksen komitean (ns. Leikolan komitean) ja Matematiikan opetuksen kehittämistyöryhmän esitykset olivat vuoden 1994 opetussuunnitelman valmistelun pohjana (Kupari 1993, 1999). Vuoden 1994 opetussuunnitelmassa tapahtui voimakas periaatteellinen muutos edelliseen opetussuunnitelmaan nähden. Opetussuunnitelman kehittämistä dynaamisena prosessina korostettiin ja opetussuunnitelman tuli reagoida jatkuvasti muun muassa arviointituloksiin ja ympäristössä tapahtuviin muutoksiin. Asetettujen tavoitteiden ajateltiin osoittavat kehittämisen suuntaa. Yhtenä kehittämisen alueena vuoden 1994 suunnitelmassa oli oppilaskeskeisyyden korostaminen opetuksessa. Opetussuunnitelmassa duaalisuus jatkui, sillä kaikille oppilaille tuli perusteiden nojalla tarjota mahdollisuus hankkia peruskoulun aikana sellaiset matemaattiset perustiedot ja –taidot, jotka loisivat pohjaa jatko-opinnoille ja antaisivat valmiudet selviytyä jokapäiväisissä toiminnoissa ja työelämässä. (Peruskoulun opetussuunnitelma 1994, 74.)

Toiseksi valtavirraksi opetussuunnitelmien kehityksessä muodostui viime vuosisadan lopulla Rousseaun ajatusten pohjalta ns. curriculum vitae-ajattelu, missä lapsen kokonaisvaltainen kehittyminen ja siihen liittyen oppimistoiminnot olivat kasvatuksen kohteena. Varsinaisen opetussuunnitelman muodon tämä ajattelu sai Deweyn ansiosta 1900-luvun alussa, jolloin termiä ”curriculum” jo käytettiin tarkoittamaan lapsen oppimiskokemusten suunnittelua. (ks. esim. Rauste-von Wright ym. 2003.)

Vuoden 1994 opetussuunnitelmauudistuksen keskeisiä päämääriä oli myös valinnaisuuden lisääminen. Koulukohtaista opetussuunnitelmaa korostettiin ja koulujen päätäntävaltaa lisättiin huomattavasti (Seppälä 2002). Opetushallitus antoi opetussuunnitelman perusteet, joissa se määritteli vain opetuksen tavoitteet ja keskeiset sisältöalueet. Tämän kehyksen pohjalta kunnan ja sen opettajien tuli suunnitella kouluissa toteutettava opetussuunnitelma. Yhtenä keskeisenä ajatuksena oli tehdä näin opetussuunnitelmasta dynaaminen koulun kehittämisen työkalu, jolloin kunnalle, koululle ja opettajille annettaisiin aikaisempaa suurempi rooli opetuksen suunnittelussa ohjaamalla päätäntävaltaa sinne, missä itse toiminta tapahtuu. Korhosen (1999) mukaan Peruskoulun opetussuunnitelman perusteissa 1994 tavoitteena oli korostaa, jo selvästi oppilaskeskeisesti, ajattelun taitoja, menetelmiä ja prosesseja mekaanisen laskennan kustannuksella (Korhonen 1999, 15).

Edellä ilmenevät ne vaiheet, jotka on käyty läpi peruskoulun opetussuunnitelmien perusteissa 1970- ja 1980-luvuilla. Tänä aikana on kehitetty hallinnollinen järjestelmä peruskoulun toteuttamiseksi ja siihen liittyen ohjeita opetuksen toteuttamiseksi. 1990-luvulla on opetussuunnitelmatasolla siirrytty curriculum-henkiseen opetussuunnitelmaan. Kupari (1999, 44–53) on nimennyt vuodesta 1994 lähtien kulunutta aikaa ”kansallisten päättötavoitteiden” ajaksi, millä tarkoitetaan tavoitteiden suuntaisten opetussuunnitelmien toimivuuden arvioinnin aikakautta. Korostetusti tavoitteet olivat tarkasteluajanjaksolla duaaliset siten, että jatko-opintokelpoisuutta tuotiin esille sivistyselementin ohella.

4.2 Oppimisnäkemys opetussuunnitelmissa

Opetussuunnitelman pohjana käytettiin 1980-luvulla Peruskoulun opetussuunnitelmakomitean mietintöä (Komiteamietintö 1970: A4 ja A5, POPS I ja II). Koulukasvatukselle asetettuna yleisenä tavoitteena korostettiin tiedollista ja älyllistä kasvatusta. Vaikka tavoitelauseet ovat varsin samansuuntaisia kaksikymmentä vuotta myöhemmin, on tavassa, miten niihin ajateltiin päästävän, eroja.

Kuvan 1970- ja 1980-luvun opetuksesta antaa se, että metodiset uudistukset rajoittuivat käytännössä suurelta osin oppilaiden itsenäisen työskentelyn lisääntymiseen työkirjatyyppisen materiaalin tullessa vallitsevaksi (Paasonen 1979). Opettajan tehtävä oli antaa opetustilanteen alussa tarpeelliset tiedot ja koota opittu asia opetustilanteen lopussa. Tuon ajan käsitys oppimisesta ja opetuksen suunnittelusta oli selväpiirteistä; suunnitelma laadittiin etukäteen yksityiskohtaisesti taulunkäyttösuunnitelmineen. Opetuksen lähtökohtana ajateltiin olevan tavoitteiden tarkka määrittäminen ja niihin johtavan reitin yksityiskohtainen etukäteissuunnittelu. Virheellisen suorituksen analysointia ei pidetty suositeltavana virheellisen toimintatavan eliminoimiseksi. Tuolloisessa oppimisnäkemyksessä tavoitteet määritettiin yleisimmin ”käyttäytymistavoitteina” eli suoritteina, joihin oppimisprosessin tulisi johtaa. (Rauste-von Wright ym. 2003.) Työkirjoista ja spiraaliperiaatteesta luovuttiin 1980-luvulla. Vanhoja hyviä perustaitoja korostettiin. (Seppälä 2002.) Hän toteaa myös oppikirjoissa käyttöön otetun behavioristisen tyylin tuottaneen hallaa erityisesti matematiikassa, koska oppikirjoissa keskityttiin vain perustaitoihin ja helppoihin, mallin mukaisiin sovelluksiin.

Vaikka käsitys siitä, miten ihminen rakentaa tietämystään, alkoi tutkijoiden piirissä täsmentyä jo viime vuosisadan alkupuolella, ylsivät sen vaikutukset koulumaailmaan vasta paljon myöhemmin. Konstruktivismi on kognitiiviseen psykologiaan perustuviin pääperiaatteisiin nojautuva oppimisnäkemys, joka sisältää erilaisia painotuksia ja tulkintoja. Behavioristiseen ajatteluun verrattuna opetussuunnitelmaa ei pidetä opetus-oppimisprosessia yksityiskohtaisesti määräävänä ohjelmana, vaan kasvatuksen tavoitteita ja niiden saavuttamisen ehtojen tarkasteluna. (Rauste-von Wright ym. 2003.) Erilaiset painotukset ja tulkinnat jakavat kognitiivisia suuntauksia. Ne ovat antaneet opetussuunnitelmiin irrallisia iskusanoja, joiden sirpaleinen luonne on heijastunut opetukseen ja oppimiseen, kuten murrosvaiheessa usein, jolloin näkemysten muuttuminen erilaisten suuntausten välillä on tyypillistä (Lehtinen 1997).

Oppimiskäsityksen merkitys koulutuksen järjestämisessä tiedostetaan. Tämän seuraukset opetussuunnitelmalle eivät kuitenkaan aina ole selviä. Ilman ymmärtämystä konstruktivismin olemuksesta saattaa tietojen, taitojen, ajattelutoimintojen ja ongelmanratkaisun ohjaamisen yhdistäminen johtaa edellä mainittuun rutinoitumiseen perusosaamisen osalta. Opetussuunnitelmatasolla vuoden 1985 vaihetta voidaan kutsua ”ongelmanratkaisun vaiheeksi”, sillä taustana tälle uudelle painotukselle oli USA:n matematiikan opettajajärjestön (NCTM) ongelmanratkaisua korostava toimintaohjelma, jonka painotukset haluttiin perustaksi myös Suomen matematiikan opetussuunnitelmien perusteissa (Kupari 1999, 50).

4.3 Opetussuunnitelman ylä- ja alatason tavoitteiden selkeys

Peruskoulun opetussuunnitelmien perusteet ovat olleet kaksijakoisia koko tarkasteluajanjakson, sillä kaikista on tunnistettavissa ylä- ja alatason tavoitteet. Peruskoulun opetussuunnitelman ensimmäinen osa POPS I kuvasi yhteiskunnan yleisiä koulutuksen arvopäämääriä, toinen osa POPS II taas keskittyi sisällölliseen ja ajalliseen ohjeistamiseen.

Peruskoulun matematiikanopetuksen tavoitteista on kirjattu Mietinnössä (1970 II, 140–141) kahdella tasolla. Toisaalta edistämään kokonaiskehitystä ohjaamalla oppilaat omaksumaan tarkoituksenmukaista tietoa ja taitoa ja toisaalta omaksumaan tiedon hankintaan ja käyttöön tarvittavia työskentelytapoja ja menetelmiä. Kokonaiskehityksen tavoitteita on arvioitu useassakin yhteydessä (ks. esim. Kyöstiö 1970). Toteamuksena on usein, että näiden tavoitteiden yhteys käytännön opetussuunnitelmaan jää avoimeksi. Tavoitteet ovat yleisesti hyväksyttävissä, mutta yleisyydessään, kuten Leino (1975a, 15) toteaa, ne eivät sellaisenaan karakterisoi matematiikanopetusta eivätkä anna pohjaa esimerkiksi oppiaineksen valinnalle ja painotukselle.

Peruskoulun opetussuunnitelman perusteissa vuonna 1985 tuotiin esille matematiikan opetuksen rooli edelleen kaksijakoisena. Yleiset tavoitteet uutta luovana keksivänä toimintana sekä matematiikan käyttömahdollisuuksiin perehtymisenä luovat pohjan yksilön kehitysmahdollisuuksien huomioonottamiselle matematiikan opetuksessa. (Anon 1985.) Tavoitteet olivat kannatettavia, mutta käyttäjälle ei ole välttämättä välittynyt käsitystä menetelmällisistä mahdollisuuksista sisältöluetteloita lukiessaan runsaan sisältöosion takia.

Hakkarainen (2002) kritisoi opetussuunnitelmien aikaisempaa normirakennetta. Hän pitää mahdottomana, että ainesisältöjä opettamalla voitaisiin toteuttaa opetussuunnitelman yleiset periaatteet ja tukea oppilaan persoonallisuuden kehittymistä. Tiedon erottaminen heuristisista prosesseista johtaa vääriin oppimistapoihin, pinnalliseen oppimiseen. Tietoa, taitoa ja ongelmanratkaisua ei voi erottaa. Tiedollinen pohja tulee rakentaa ongelmanratkaisun keinoin itsenäisen näkemyksen kehittämiseksi. Jos tieto, taito ja heuristiikat eivät ole erillisiä, oppilas saa valmiuksia ymmärtävään oppimiseen myös matematiikan kontekstissa. Tällöin ylä- ja alatason tavoitteet ovat samat, eivätkä jää erillisiksi.

Opetussuunnitelmissa mainituilla resursseilla tarkoitetaan sekä yksilön pääomaa, että yhteisön pääomaa, minkä Goodson (1995) näkee lähtökohtana prosesseja painottavalle oppimiselle. Alkuvaiheessa on hänen mukaansa tärkeintä varmistaa opiskelussa tarvittavien perustaitojen hallinta. Myöhemmin keskeisiksi tulisi nousta erilaisten tiedonhankinnan keinojen oppiminen, tiedon käsittelytaidot sekä itsenäinen työskentely (Goodson 1995). Näin kirjattuna on vaara ymmärtää Goodsonin sanoma perustaitojen hallinnasta staattisena tietojen hallintana. Oikean opiskelun mallin saamiseksi tulisi tiedonhankinnan keinot hahmottaa samanlaisena ylätasolta aina alatason prosesseihin asti. Vastaavasti de Lange (1996) korostaa matematiikan opetuksen kontekstilähtöisyyttä vastapainona niin sanotun uuden matematiikan käsitteiden määrittelyyn perustuvalle lähestymistavalle, mistä asiasta Suomessakin on kokemuksia 1970-luvulta. Hänen mielestään perinteisessä matematiikan opetuksessa on järjestys ollut ”ensin matematiikka, sitten sovellukset” (de Lange 1996, 56). Tästä ajattelusta voidaan luopua näkemällä, että myös matematiikan sisällön oppiminen on soveltamista, yhdistämistä, yleistämistä ja luovuutta.

4.4 Ohjaus valtakunnallisissa opetussuunnitelmien perusteissa

Suomessa siirryttiin vuoden 1985 opetussuunnitelman perusteissa 1970-luvun valvovasta ohjauksesta tavoiteohjaukseen (Malinen 2008). Vuoden 1985 tavoiteopetussuunnitelmassa toteutettiin kasvatuspsykologiaan pohjautuvaa didaktiikan sovellutustutkimusta nimeltä tavoiteoppimiskokeilu eli MLS-projekti (mastery learning science). Projektin taustana on Bloomin työryhmän teoria tavoitteiden taksonomiasta, missä kaikki oppilaat pyritään saamaan samojen perustavoitteiden hallinnan tasolle.

Keskustelua käytiin siitä, voidaanko tavoitteeksi ottaa koulutuotosten tasa-arvo vai koulutusmahdollisuuksien tasa-arvo (Malinen 2008). Niinpä peruskoulun opetussuunnitelman perusteissa (1994, 74) perustavoiteoppimisajattelussa asetetut tavoitteet päädyttiin tarkoittamaan suuntaa-antaviksi. Siirtymistä perustellaan opetussuunnitelman perusteissa seuraavasti: ”Monet opetussuunnitelmateoriat asettavat kyseenalaiseksi viime vuosikymmeninä opetussuunnitelmien laadinnan pohjana käytetyn tavoiteoppimisen ideologian. Opetussuunnitelma on nykykäsityksen mukaan dynaaminen prosessi, joka reagoi jatkuvasti muun muassa arviointituloksiin ja ympäristön muutoksiin.” Perussisällöistä ja perusvalmiuksista käytetty luettelomainen esitystapa saattoi kuitenkin antaa normatiivisena harhaanjohtavan kuvan perustavoitteista.

Opetushallituksen koulutuksen ja tutkimuksen kehittämissuunnitelmassa vuosille 2007–2012 (Halinen 2008) mainitaan ohjausjärjestelmän kehittäminen suhteessa laissa, asetuksissa ja opetussuunnitelman perusteissa ilmaistuihin tavoitteisiin. Keskeisenä ajatuksena ohjausjärjestelmässä on kansallisen ohjauksen ja tuen kehittävä – ei kontrolloiva – arviointi. Vaikka kunnilla on vastuu ja itsenäistä päätösvaltaa opetuksen järjestämisestä ja opettajilla tärkeä rooli opetussuunnitelma-asioissa kaikilla tasoilla, korostetaan joustavaa vuorovaikutusta kansallisella, kunnallisella ja koulun tasolla. Mainitussa kehittämissuunnitelmassa korostetaan yksittäisistä oppiaineista monipuolisen matemaattis-luonnontieteellisen osaamisen tarvetta opettajien perus- ja täydennyskoulutuksessa. Nähtäväksi jää, miten osaamiseen tulevat vaikuttamaan arviot vuoden 2004 perusopetuksen perusteista, joiden mukaan puolet kouluista ja kolmasosa kunnista pitää hyvän osaamisen kuvausten vaatimustasoa liian korkeana (Halinen 2008). Toinen näkökohta, joka kehittämissuunnitelmassa ei tule esille, on koulutusketjun katkeamattomuudesta huolehtiminen yhtenäisen peruskoulun lisäksi peruskoulun ja toiseen asteen oppilaitosten välillä.

4.5 Sisältövertailu aritmetiikka-algebra-alueella

Tässä luvussa tarkastellaan aritmetiikka-algebra-alueen sisältöjä esille tulleiden ominaisuuksien näkökulmasta opetussuunnitelmien perusteissa. 1980-luvulla, vanhemman aineiston hankinta-aikana, noudatettiin opetuksessa peruskoulun opetussuunnitelmakomitean mietinnön, POPS I :n ja II:n matematiikanopetuksen tavoitteita, jotka olivat varsin yleisellä tasolla. Niitä on täsmennetty ja eritelty lähemmin niin sanotussa perusoppiainesmuistiossa (Muistio 1976). Siinä on myös kiinnitetty huomiota matematiikan mahdollisuuksiin peruskoulun tiedollisen kasvatuksen formaaleihin tavoitteisiin pyrittäessä (Leino ym. 1978; Paasosen 1979). Opetussuunnitelmassa näkyy matematiikan jakaminen kahteen osaan; puhdas (teoreettinen) matematiikka, edellä peruslaskutavat ja kaavat, missä korostuu ”matematiikka työkaluna”-metafora. Toisaalta sovellettu (käytännöllinen) matematiikka näkyy ongelmatehtävissä ja sovellustehtävissä, mitkä oppikirjoissa tarkoittivat usein sanallisia tehtäviä. Tosin Seppälän (2002) mukaan soveltaminen ja perinteinen ongelmanratkaisu sanojen varsinaisessa merkityksessä jäivät tuolloin vielä vähäisiksi.

Vuoden 1985 peruskoulun opetussuunnitelman normirakenteen tarkkuus ilmenee ohjeistuksesta, missä todettiin laskutoimitusten mekaanisen harjoittelun merkityksen väheneminen laskimien yleistymisen myötä, toisaalta korostettiin laskutoimitusten ja niiden välisten yhteyksien ymmärtämistä sekä peruslaskutoimitusten sujuvaa osaamista myös päässälaskuna. Lisäksi tämän todettiin koskevan käsitteenmuodostustapahtuman järjestelmällistä ohjaamista kunkin oppilaan oppimisedellytysten mukaisesti. Erityisesti yhteen- ja kertolaskun harjoittelua automatisoitumiseen asti korostettiin perusteena, että muuttujan lausekkeiden laskutoimitukset edellyttävät niiden varmaa osaamista. Huomio kiinnittyy vähennys- ja jakolaskun maininnan puuttumiseen tässä yhteydessä. Jälkimmäisen puuttuminen ilmeisesti perustellaan myös rationaalilausekkeiden jättämisellä pois peruskoulun opetussuunnitelman tavoitteista. Tähän, kuten muihinkin sisällöllisiin supistuksiin jouduttiin, koska vuonna 1985 tuntijaossa yläasteen matematiikasta vähennettiin yksi viikkotunti, siis

38 oppituntia vuodessa (ks. esim. Kupari 1999; Seppälä 2002). Tällöin joukko-oppi, logiikka, vektorit ja epäyhtälöt poistettiin ja funktio-oppia, yhtälöitä, todennäköisyyslaskentaa, rationaalilausekkeita ja polynomilaskentaa supistettiin sisällöltään.

Algebrallisten lausekkeiden oppimista vuoden 1985 opetussuunnitelma kuvailee yksityiskohtaisesti tuoden esille yleistys-käsitteen tulkinnan: ”Esimerkiksi samankantaisten potenssien kertomisessa tavoitteena on suoritus potenssin määritelmän avulla, samalla kun pyritään ”yleistykseen eksponentit lasketaan yhteen”. Laskusäännöt opetetaan pääasiassa sanallisessa muodossa, mutta kaavojen esittämisellä ja lausekkeiden muodostamisharjoituksilla pyritään totuttamaan oppilaita matematiikan symbolikielen lukemiseen ja käyttämiseen.” Ymmärtämiseen liittyvän nykykäsityksen mukaan ei tunnu perustellulta käyttää tässä esitettyä käsitteenmuodostustapahtuman vaihtamista sanalliseen yleistystulkintaan, joka jää muistinvaraiseksi ilman ”säännön” johtamista määritelmästä käsin. Miten johdonmukaiselta oppilaasta mahtaakaan tuntua potenssikäsittelyyn liittyen ”kertolaskussa lasketaan yhteen, ja potenssiin korotuksessa kerrotaan”? (Anon. 1985.) Vaikka yleinen toteamus ”käsitteenmuodostustapahtuman järjestelmällistä ohjaamista kunkin oppilaan oppimisedellytysten mukaisesti” kuulostaa varsin kehittyneeltä nykyisen tietämyksen valossa, paljastaa sen sanallinen tulkinta, ettei kyse ole opetussuunnitelmatasollakaan varsinaisesta käsitteenmuodostamisprosessista.

Vuoden 1985 opetussuunnitelman perusteissa ongelmakeskeistä lähestymistapaa ja soveltamista korostettiin entisestään. Mutta perusteiden mukaan sitä ei tulisi tehdä laskutaidon kustannuksella, vaan varma mekaaninen laskutaito tulisi säilyttää tavoitteena. Sisältöalueet tuotiin vuoden 1985 peruskoulun opetussuunnitelman perusteissa esille varsin normatiivisina oppiaineksen esittelyn ollessa 10 sivun mittainen. Merkittävä muutos vuoden 1985 opetusjärjestelyissä oli yläasteen tasokurssien poistaminen, minkä vastapainoksi oppilasryhmiä pienennettiin tuntikehysjärjestelmällä. Etu pienistä ryhmäkoista jäi lyhytaikaiseksi 1990-luvun alun lamatalkoiden tähden.

Vuoden 1994 peruskoulun opetussuunnitelman uudistusten taustalla ovat olleet monet peruskoulua koskettaneet rakenteelliset ja matematiikkaan sisällöllisesti vaikuttaneet uudistukset (Pehkonen & Seppälä 2007). Edelliseen opetussuunnitelman perusteisiin verrattuna tuotiin esille matematiikan struktuurin rakentumisen ja kokonaisuuksien hallinnan merkitys. Varsinaisia sisältöluetteloita perusteissa ei ollut. Vuoden 1994 perusteissa matematiikan tavoitteet ovat varsin yleisellä tasolla (Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet 1994, 74).

Luku 5

Matemaattinen tieto

Seuraavat kolme lukua ”Matemaattinen tieto”, ”Käsitteellinen muutos” ja ”Aritmetiikka algebran ymmärtämisen apuna” muodostavat kokonaisuuden, jossa määritellään tutkimuksessa käytettävät käsitteet. Luvussa 5 tarkastellaan, millaista matemaattista tietoa on ja miten se on nähtävä tutkimuksen kontekstissa. Luku 6 on keskeinen teorian kannalta määritellessään, miten käsitteet muodostuvat aritmetiikan ja algebran alueilla. Jaottelua käytetään tulososiossa tarkasteltaessa oppilaiden käsitteellisen ajattelun tasoa murtolukualueella. Luku 7 on synteesi kahdesta edellisestä luvusta.

Tutkimukseni yhtenä tavoitteena on matemaattisen osaamisen tarkastelu. Luvussa 2 matemaattiseen osaamiseen määriteltiin kuuluvaksi käsitteellinen ymmärtäminen. Tarkastelen seuraavassa tiedon luonnetta yleisesti ja matemaattisen tiedon luonnetta tarkemmin. Tiedon luonteen määrittelyssä esiintyy vaihtelua objektiivisesta subjektiiviseen. On suuntauksia, joissa koko objektiivisen tiedon olemassaolo kiistetään ja ajatellaan, että jokainen yksilö rakentaa oman subjektiivisen todellisuutensa. Luonnontieteiden oppimisen kannalta tulisi asia nähdä siten, että on olemassa ajattelusta riippumaton todellisuus. Näkökulmallisista eroista johtuen tämä objektiivisen todellisuuden ymmärtäminen tosin voi olla suhteellista. Samoin on matematiikassa. Matematiikka ei tutki pelkästään ympäröivää fysikaalista todellisuutta, vaan myös käsitteellisiä riippuvuussuhteita. Matematiikassa on tietoa, joka eroaa luonnontieteellisestä tiedosta tämän objektiivisen todellisuuden suhteellisuuden osalta. Jos tieto kohdistuu siihen, miten asiat ovat, puhutaan tosiasioista. Tällaisia on matematiikassa.

5.1 Matematiikan filosofiasta

Matematiikan filosofian tärkeimpinä koulukuntina pidetään tavallisesti platonismia, intuitionismia ja formalismia (esim. Niiniluoto 1990, 191). Niiniluodon mukaan ontologisina teeseinä matemaattisten olioiden olemassaolosta ne vastaavat kolmea päälinjaa; yleiskäsitteet ovat olemassa itsenäisesti ihmisestä riippumatta omassa ideamaailmassaan, ne ovat ihmisen mielessä, tai ne ovat kielellisinä merkkeinä, sanoina tai äänteinä.

Platonin luolavertauksen tapaan matemaattisia objekteja voidaan löytää ajatuksella käsitettävissä olevasta maailmasta, ei vain konkreettisesta maailmasta. Ne ovat olemassa toisessa, muuttumattomassa ja ihmisestä riippumattomassa todellisuudessa (esim. Pekonen 2000). Matematiikan tutkimilla objekteilla on itsenäinen, ihmisestä riippumaton olemassaolonsa kuten aito tieto (kreik. episteme), joka Platonin esityksen mukaan koskee ihmisjärjen avulla tajuttavia yliaistillisia muuttumattomia ideoita. Mallina toimii tällöin se varma ja eksakti tieto, jota meillä on esimerkiksi geometrisistä objekteista ja niiden ominaisuuksista. (Niiniluoto 1990, 239.)

Formalisti pyrkii aksiomatisoimaan matematiikan. Niiniluodon (1990) tulkinnan mukaan Curryn radikaalin formalismin mukaan matematiikan tutkimuskohteen muodostavat merkkijärjestelmät ja niiden puitteissa suoritettavat operaatiot. Tämän mukaan esimerkiksi aritmetiikka ei ole lukuja koskeva tiede (kuten realistit sanovat) eikä ihmismielessä olevia mentaalisia konstruktioita koskeva tiede (kuten intuitionistit väittävät), vaan sen kohteena on numeroita tai numeraaleja koskeva tiede. Formalismille vaihtoehtoinen lähestymistapa on intuitionismi. Intuitionistit pitävät matematiikkaa ihmisen tai ”luovan subjektin” mielessään suorittamien konstruktioiden tutkimuksena (Niiniluoto 1990). Oleellista tässä Pekosen (2000) mukaan kuitenkin on, että intuitionisti hyväksyy vain sellaiset matemaattiset konstruktiot, jotka voidaan johtaa äärellisiä päättelyketjuja käyttäen ja turvautumatta ”intuition vastaisiksi” katsottuihin aksiomiin.

Käsitys tiedosta ja sitä kautta myös todellisuudesta säätelee toimintatapojamme matematiikan olemuksen ymmärtämisessä. Tietoteorian merkitys tulee koulumaailmassa esille tarkasteltaessa, minkälaiset käsitteet ja periaatteet parhaiten edistävät matematiikan oppimista. Pekonen (2000) kysyy, mikä on matematiikan opettajien filosofia. Hän esittää opetukseen tuotavaksi eri filosofisten koulukuntien näkemykset monipuolisesti. Pekonen esittää, että analyysin perusasioista, kuten yhtälöiden ratkaisemista, voitaisiin opettaa konemaisen formaalisesti, kun taas perinteisiin euklidisen geometrian konstruktio- ja todistustehtäviin tuntuisi paremmin sopivan platonistinen lähestymistapa. Pekosen (2000) mukaan paras mahdollinen opetus toisi esiin eri puolia matematiikan filosofisesta perinteestä. Kuitenkin oppilaiden tulisi kehittyä sekä taidoissa että ymmärtämisessä, joten tehokkain lähestymistapa on rakentaa ymmärtämystä oppilaiden kokemuksiin perustuen oppimisen alusta alkaen (Hiebert 2003, 18). Suomen peruskoulussa on todettu osaamisessa ongelmia algebran alueella (Kupari 1993; Soro & Pehkonen 1998). Resurssikysymysten harkinnan lisäksi on syytä huolella tutkia, mikä merkitys edellä esitellyillä lähestymistavoilla on oppimiseen. Intuition varaan rakennettu numero-osaaminen ja mekaaninen yhtälönratkaisu eivät ole riittäviä ymmärtävän oppimisen näkökulmasta ja toisaalta formaali lähestyminen voi jäädä ulkokohtaiseksi. Mietittäväksi jää, miten oppiminen on riittävän joustavaa ja mitkä lähestymistavat ovat vaihtoehtoisia tutkimuksen kontekstin alueella.

Tieto määritellään klassisesti platonilaisittain kolmen ehdon avulla: ”Tieto on hyvin perusteltu tosi uskomus” (esim. Niiniluoto 1990). Usko asian totuudenmukaisuuteen yhdistää tiedon ja uskomuksen. Uskomus on subjektiivista tietoa, joka perustuu yksilön kokemuksiin, havaintoihin ja tiedostamiseen. (Kangasniemi 1989.) Näin onkin joillain tiedon alueilla. Hermeneuttisen tietokäsityksen mukaan ilmiö on ymmärretty vasta, kun se sijoitetaan mielessä johonkin syy-yhteys-ketjuun, ympäröiviin havaintoihin ja kun se on loogisessa suhteessa henkilön muihin tietoihin. Oppimisen kannalta keskeistä on kuitenkin se, että oppijan käytettävissä oleva tieto on aina subjektiivista, vaikka yksilö pyrkiikin omassa tietorakenteessaan riippumattoman todellisuuden kuvaamiseen (Rauste-von Wright & von Wright 1994). Ihmiselle merkityksellistä ja käyttökelpoista on vain sellainen tieto, minkä hän pystyy liittämään aikaisempaan tietoverkkoonsa. Ihminen voi omaksua vain sellaista informaatiota, jolla on tarttumapintaa hänen aikaisempiin tietoihinsa tai uskomuksiinsa, muuten hän ei pysty ymmärtämään sitä.

Edellä kuvatut matematiikan filosofian tärkeimmät koulukunnat toteutuvat Popperin kolmen maailman mallissa; maailma 1 fyysisenä, perusmatematiikkaan tulkittuna konkreettisesti havaittavina asioina kuten lukumäärinä ja maailma 2 mentaalisena, kuten käsityksinä lukumääristä. Maailma 3 on ajattelun tuottama abstrakti maailma kuten platonilainen ajatusten synnyttämä abstrakti tieto (Popper 1994; Hakkarainen ym. 2000; Bereiter 2002). Bereiterin (2002) oppimisteoriassa pyritään maailman 2 ”tuotteet, oliot – entiteetit” nostamaan maailman 3 tasolle myös koulumaailmassa, mikä algebran ymmärtävää oppimista ajatellen onkin välttämätöntä. Tarkasteltaessa tietoa eri maailmoista ja sen oppimista tulee tiedon luonne huomioida. Jos esimerkiksi oppimisen tilannesidonnaisuudella tarkoitetaan näkemystä, jonka mukaan oppimista tapahtuu vain siinä kontekstissa, missä työskennellään, rajataan tällä tiedon käyttömahdollisuuksia.

Popperin kolmea maailmaa vastaamaan Tall (2004) on kehittänyt laadullisen ajattelun mallin matematiikan kolmesta maailmasta havainnon, toiminnan ja reflektoinnin pohjalta.

Algebran ymmärtävässä ajattelussa tarvitaan käsittelyä näissä kaikissa kolmessa maailmassa. Tallin mallissa voidaan käsitellä myös maailmojen suhdetta toisiinsa, vaikkakin kaikkia voidaan ajatella myös itsenäisinä (ks. esim. Hähkiöniemi 2006, 36). Käsitteellis-havainnollinen maailma (conceptual-embodied world) ilmentää havaitsemista, kuvailemista, määrittelemistä ja johtopäätöksien tekoa mielen tasolla. Toimintapohjaisessa proseptuaalis-symbolisessa maailmassa (proseptual-symbolic world) käsitteet ovat tiivistyneet prosessien ja objektimuotojen duaaleiksi. Lisäksi on formaaleihin määritelmiin ja todistuksiin pohjautuva formaalis-aksiomaattinen maailma (formal-aksiomatic world).

5.2 Konseptuaalinen ja proseduraalinen tieto matematiikassa

Oppimisen näkökulmasta on tarpeen tutkia kognitiivisia taitoja eli toimintasääntöjen (proseduraalista tietoa tallentavien käsiterakenteiden) oppimista ja niiden käyttöä ongelmanratkaisutilanteissa (ks. esim. Rauste-von Wright ym. 2003). Mainitut käsiterakenteet liittyvät konseptuaaliseen tietoon. Tietokäsitteessä tehty ero konseptuaalisen eli käsitteellisen (tietämystiedon, ”knowing what”) ja proseduraalisen eli menettelytapoja koskevan tiedon (taitotiedon, ”knowing how”) välillä on perusteltua matematiikan maailmojen näkökulmasta. Lisäksi tulee erottaa pre- ja postproseduraalinen eli automatisoitunut tieto.

Lyhyt- ja pitkäkestoisen muistin rakenteen ja toiminnan käsittelyn yhteydessä (luku 3) tulivat ilmi ymmärtävään joustavaan oppimiseen johtavan ajattelun rajat. Toisaalta tietoisen ajattelun lisäksi tarvitaan ajoittain työmuistin kapasiteettia vähän kuluttavaa ajattelua, toisaalta proseduraalisen sujuvuuden lisäksi käsitteellistä ymmärrystä, strategista kompetenssia ja sujuvaa päättelyä (Kilpatrick, Swafford & Findell 2001, 423). Matematiikanopetuksessa tätä tiedon duaalisuutta (konseptuaalinen vs. proseduraalinen tieto) ovat tutkineet muun muassa Hiebert ja Lefevre (1986). Tämä duaalisuus ilmenee siten, että toisaalta opittavan asian merkityksen ymmärtämisen avulla parannetaan pysyvyyttä ja yleistettävyyttä, toisaalta oppiaineksen joidenkin elementtien harjoituksen ja ylioppimisen painottaminen vapauttaa kognitiivisia resursseja vaativampien tehtävien työstämiseen. (Hjelmquist ym. 1982.) Ylioppimisella tarkoitetaan tässä asian sisäistämisen ja harjoittelun mukanaan tuomaa näennäisesti vaivatonta proseduurin käyttämistä – tiedon automatisoitumista.

Hiebert ja Lefevre (1986) määrittelevät konseptuaalisen tiedon olevan tietoa riippuvuuksista, mikä liittyy käsitetietoon. Proseduraalinen tieto koostuu heidän mukaansa kahdesta erillisestä osasta. Ensimmäisen osan muodostavat matematiikan formaalin kielen symboliset esittämisjärjestelmät ja toisen osan algoritmit, proseduurit ja säännöt matemaattisten ongelmien ratkaisemiseksi. (ks. myös Joutsenlahti 2005, 85.) Käsitetiedon karttumisella tarkoitetaan tässä tiedonalueen käsitteiden ja niiden välisten yhteyksien eli käsitesuhteiden oppimista ja sitä kautta tapahtuvaa tietorakenteiden kehittymistä. Silfverberg määrittelee lisäksi menetelmätiedon lisääntymisellä erilaisten toimintojen ja taitojen oppimiseen käytettävää syntaktista formaalia symbolijärjestelmää ja algoritmista menetelmällistä tietoa (Silfverberg 1999, 65).

Omaa käsitystäni konseptuaalisesta (K) ja proseduraalisesta (P) tiedosta vastaa alla oleva Kadijevichin ja Haapasalon määritelmä. He ovat todenneet, että myös perinteisesti määriteltyyn konseptuaaliseen tietoon saattaa liittyä dynaamisia piirteitä. Siihen liitetään ajatteleminen, tiedostaminen ja ymmärtävä elementti riippumatta siitä, puhutaanko käsitteistä vai algoritmeista:

> *Konseptuaalinen tieto (K) merkitsee erityisen semanttisen tietoverkon tuntemista ja taitavaa, tietoista liikkumista sen osasta toiseen. Tietoverkon elementteinä voi olla eri esitysmuodoissa annettuja käsitteitä, sääntöjä (algoritmeja, proseduureja jne.) ja jopa ongelmia (ratkaistu ongelma saattaa johtaa uuteen käsitteeseen tai sääntöön). (Kadijevich & Haapasalo 2001, 156–157.)*

Ymmärtäminen liittyy konseptuaaliseen tietoon. (ks. esim. Joutsenlahti 2005, 85). Proseduraaliseen tietoon liittyy sujuva, ei-tietoinen käyttäminen samoilla alueilla:

> *Proseduraalinen tieto (P) merkitsee dynaamista ja menestyksekästä relevanteissa esitysmuodoissa olevien sääntöjen, algoritmien ja proseduurien käyttämistä. Tämä vaatii yleensä paitsi tietoa käytetyistä objekteista, niin myös tietoa niitä kuvaavien esitysmuotojen muodosta ja syntaksista. (Kadijevich & Haapasalo 2001, 156–157.)*

Haapasalon (2001) mukaan proseduraalinen tieto ei välttämättä sisällä määritelmässä mainittujen ominaisuuksien tietoista ajattelemista. Konseptuaalinen ja proseduraalinen tieto eroavat juuri toiminnallisuuden, tietoisen ajattelun ja automatisoitumisen suhteen (ks. esim. Saariluoma 1994).

Edellä esitettyjä määritelmiä käyttäen konseptuaalisella ja proseduraalisella tiedolla on duaalinen yhteys. Teoriat niiden keskinäisestä järjestyksestä ja painotuksesta vaihtelevat. Erilaiset painotukset ovat ymmärrettävissä proseduraalisen tiedon ja konseptuaalisen tiedon käsittämisenä muistissa eri asteisena tietoisuuden ja automatisoitumisen vaihteluina. Opetuksen kannalta on kiintoisa proseduraalista tietoa (P) edeltävän ymmärtävän komponenttin sisältämä konseptuaalinen tieto (K): K on välttämätön, mutta ei riittävä ehto P:lle (Byrnes & Wasik 1991; Kadijevich & Haapasalo 2001). Tällöin proseduraalinen tieto ei jää ilman kontrollia muistin varaan, vaan sen perustelut on aina palautettavissa mieleen. Tällaisten konseptuaalista kehittymistä korostavien opetustavoitteiden ymmärtäminen helpottaa matematiikan oppimista silti uhraamatta proseduraalista taitavuutta (Hiebert 2003, 16). Myöskin niiden oppilaiden, jotka ovat kehittyneet ymmärtävässä käsitteellisessä ajattelussa aikaisessa asian käsittelyvaiheessa, on todettu saavuttaneen parhaan proseduraalisen tiedon myöhäisemmässä vaiheessa (Grouws & Cebulla 2000, 15), mutta proseduraalinen välitön drillaaminen eli mekaaninen proseduurin toistaminen vaikeuttaa asian käsitteellistä hahmottamista myöhemmin (Hiebert 2003, 17).

Toinen näkökulma on, että vaikka havaintoon ja toimintaan perustuva käsitteenmuodostus alkaakin proseduraalisella tiedolla (P), siihen voi myöhemmin tulla mukaan ymmärtävä komponentti (K) kehittymisen tai uuden näkökulman myötä. Näin ajatellen P on välttämätön, mutta ei riittävä ehto K:lle (Kline 1980; Kitcher 1983; Vergnaud 1990; Tall & Gray 1993; Sfard 1994).

Ymmärtävä ja pysyvä oppiminen on mahdollista vain silloin, kun konseptuaalinen ja proseduraalinen tieto liittyvät kiinteästi toisiinsa ja tukevat toistensa muodostumista. Piagetilaisessa mielessä tämä tarkoittaa muun muassa sitä, että proseduraalista tietoa kuvaavat kielelliset ja symboliset esitykset (representaatiot) sekä niiden syntaksit syntyvät konseptuaalisen tiedon pohjalta (Haapasalo 1997), joko edeltäen tai seuraten niitä. P edellyttää tavallisesti näiden esitystapojen pohjana olevien tietojärjestelmän syntaksien ja esitysmuotojen ymmärtämistä, mutta ei sen sijaan välttämättä näiden ominaisuuksien tietoista ajattelemista, ainakaan mikäli suoritus on automatisoitunut. P ”juoksee” usein automaation tasolla tiedostamattomasti, kun taas K vaatii tietoista ajattelua. (Haapasalo 2005.)

5.3 Oppimisen kehityksellinen ja koulutuksellinen lähestymistapa

On tuskin vain yhtä vastausta kysymykseen, miten konseptuaalinen ja proseduraalinen tieto vuorottelevat ajattelussa. Konseptuaaliseen tietoon liittyy ymmärtävä komponentti, mutta onko tämä välttämätön tai onko se riittävä ehto proseduraaliselle ajattelulle? Ymmärtäminen tapahtuu vaiheittaisena. Miten konseptuaalinen tieto muuttuu proseduraaliseksi? Onko oppimista ilman konseptuaalista tietoa? Näiden mekanismien ymmärtäminen auttaisi oppimisessa ja opettajaa työssään oppimisympäristöjen suunnittelussa. Kognitiotieteen alueella konseptuaalisen tiedon ja proseduraalisen tiedon välisiä suhteita on tutkittu ja raportteja eri yhteyksistä on runsaasti (Gelman & Meck 1986; Schoenfeld 1986; Skemp 1987; Sfard 1994; Kadijevich & Haapasalo 2001).

Konseptuaalisen komponentin sisältymisestä eri tiedon lajien vuorottelussa ovat raportoineet muun muassa Hiebert ja Leferve (1986). Dynaamisesta interaktivaatiosta ovat raportoineet Byrnes ja Wasik (1991). Heidän mukaansa konseptuaalinen tieto on välttämätön, mutta ei riittävä ehto proseduraaliselle tiedolle. Vielä kolmantena yhdistelmänä on esitetty geneettinen teoria, missä proseduraalinen tieto on välttämätön, mutta ei riittävä ehto konseptuaaliselle tiedolle (Kline 1980; Kitcher 1983; Vergnaud 1990; Sfard 1994). Oppimisen näkökulmasta näistä voidaan erottaa kaksi lähestymistapaa. Kehityksellisessä lähestymistavassa (vrt. Eskelinen 2005) konseptuaalinen tieto kehittyy proseduraalisen tiedon avulla. Koulutukselliseksi lähestymistavaksi (vrt. Eskelinen 2005) voidaan kutsua oppimistapaa, missä konseptuaalinen tieto on edellytyksenä proseduraalisen tiedon muodostumiselle. Opittava käsite säätelee jonkin verran sitä, kumpi lähestymistavoista on perustellumpi. Perusteita on sekä kehitykselliselle että koulutukselliselle lähestymistavalle.

Pasi Eskelinen (2005) on väitöskirjassaan tutkinut, miten eri lähestymistavat ja reflektiivisen viestinnän tuki vaikuttavat opiskelijoiden tieto- ja oppimiskäsityksiin. Ryhmiin jako tapahtui koulutuksellisen vs. kehityksellisen lähestymistavan näkökulmasta. Vaihtoehtoisista mahdollisista näkökulmista hän esittää spontaaniin proseduraaliseen tietoon pohjautuvan kehityksellisen lähestymistavan olevan sekä kognitiivisten että affektiivisten muuttujien kannalta oppimiselle otollinen kehysteoria. Myös koulutuksellinen lähestymistapa on perusteltavissa ja se vaatii Eskelisen (2005) mukaan kognitiivisten ja emotionaalisten muuttujien käsittelyssä kouluttajilta suurta herkkyyttä.

Tärkeää on ymmärtävän komponentin sisältävän konseptuaalisen tiedon kuuluminen oppimisprosessiin. Vain näin oppijan on mahdollista nähdä uuden tiedon yhteys hänellä jo olevaan tietoon, joten uusi tieto ei jää kiinnittymättömänä irralliseksi. Jos tieto ei ole saanut kosketuspintaa oppijan aikaisempaan tietoon, jää se irralliseksi ja ongelmanratkaisutilanteissa oppija ei näe yhteyttä ratkaistavana olevaan tehtävään (Holland, Holyak, Nisbett & Thagard 1986; Perkins 1987; Rauste-von Wright & von Wright 1994; Lipponen & Hakkarainen 1998).

Luku 6

Käsitteellinen muutos

Waern (1976) on todennut, että oppilaat, jotka formaalin ajattelun hallinnan lisäksi ”tiesivät” enemmän tekstin käsittelemästä aiheesta, ymmärsivät myös tekstin paremmin. Tämä ”aiheesta tietäminen” liittyy käsitteiden hallintaan. Mehän emme vain ajattele, vaan ajattelemme jotakin. Ajatuksilla on aina sisältö. Tästä syystä käsitteet ja niiden sisältö, intensio ja ala, ekstensio ovat ajattelussa keskeisiä. Käsitteeseen liittyvän käsiteparin ekstensio-intensio otti käyttöön Carnap (ks. esim. Niiniluoto 2002, 17). Hänen mukaansa käsitteen alaan kuuluvat kaikki ne oliot, joista voidaan käyttää kyseisen käsitteen nimeä. Käsitteen intension, sisällön, muodostavat ne tunnusmerkit (ominaisuudet ja suhteet), joiden perusteella ratkaistaan, kuuluuko jokin olio kyseisen käsitteen alaan vai ei. Käsitteen intensio määrää, mikä on käsitteen ekstensio.

Ajattelemme käsitteillä, tarkemmin sanottuna käsityksillä käsitteistä. Ihminen yhdistää aikaisempia käsityksiään, kokemuksiaan ja asenteitaan, ja muodostaa mielikuvan asiasta. Mielikuvana voidaan pitää myös sellaista sisäistä kokemusta, jolla ei ole konkreettia vastinetta. Kokemus on yksi oppimisprosessin lähtökohdista. Niiden perusteella muodostamme käsityksen asioista. Mielikuvien avulla on mahdollisuus irrota kokonaan ympäröivästä todellisuudesta. Mielikuvilla ja käsityksillä on tärkeä tehtävä ajatteluprosessin osana. (Saariluoma 1994.) Oppimisen tutkijat kutsuvat tällaisia ihmisten käsityksiä näiden ilmiöiden mentaalisiksi malleiksi (ks. esim. Johnson-Laird 1983; Vosniadou & Brewer 1992; Tynjälä 1999). Parhaimmillaan oppimisessa on kysymys mentaalimallin avulla tapahtuvasta ajattelun ja toiminnan vuorovaikutuksesta. Ajatellessaan ihminen muodostaa maailmasta ja sen eri ilmiöistä käsityksiä ja nämä käsitykset ohjaavat hänen toimintaansa. (Arendt 1978.) Tarkastelen tässä luvussa käsitteellisen muutoksen teorioita ja miten käsitykset matemaattisista käsitteistä voivat ilmetä.

6.1 Piagetin reflektiivinen abstrahointi

Konstruktivistiset oppimisen teoriat nojaavat Piagetin teoriaan abstrahoinnista. Piagetin määrittämissä empiirisessä, pseudo-empiirisessä ja reflektiivisessä abstrahoinnissa viimeksimainitussa aktien osuus vähenee siten, että prosessin lähteenä on havainnoitsija ja tapahtuma on täysin sisäinen. Tässä aktilla tarkoitetaan objekteihin kohdistuvaa konkreettista operaatiota, joka alkuvaiheessa suoritetaan tarkkojen ohjeiden mukaan. Prosessilla tarkoitetaan sisäistynyttä aktia, jota voidaan manipuloida ja jonka kykenee suorittamaan käänteisesti, mikä on keskeinen vaihe luovuuteen tähtäävässä abduktiivisessa ajattelussa.

6.2 Sfardin reifikaatioteoria

Tieto on osittain käsitteissä sekä käsitteiden välisissä yhteyksissä ja toiminnoissa. Jotta pystyisimme käyttämään niitä joustavasti ja monipuolisesti, tulisi käsitteiden olla muuta kuin ominaisuuksien luetteloita. Matematiikassa käsitteet määritellään huomattavan tarkasti, vaikkakin tiettyyn käsitteeseen liittyvät määritelmät voivat kehittyä ja siten muuttua. Aritmetiikan ja algebran käsitteille on ominaista kaksitahoisuus, missä käsitteen kehittyessä siirrytään operationaalisesta näkemyksestä strukturaaliseen (Sfard 1991). Analogisesti aritmeettisten lukujen ja lausekkeiden kanssa myös algebrallinen lauseke voidaan nähdä sekä strukturaalisena objektina että operationaalisena suoritettavana tehtävänä.

Ohessa esiteltävä Sfardin käsitteelliseen muutokseen liittyvä reifikaatioteoria kuuluu teorioihin, joissa ymmärtämisprosessin prosessi- ja objektitulkinnat vuorottelevat ymmärtämyksen kasvaessa. Tällaisia teorioita Joutsenlahti (2005, 67) kutsuu dialektisiksi teorioiksi. Sfardin (1991) ja Sfardin ja Linchevskin (1994) matemaattisten käsitteiden kehittymistä selittävässä teoriassa muutos esitetään vaiheittaisen mallin avulla. Käsitteeseen tutustutaan operaatioiden avulla. Toiminnan, toiminnan tarkastelun ja harjaantumisen myötä päästään strukturaaliseen, käsitteelliseen tasoon. Teoria kuvaa käsitteen oppimisen kolmivaiheisena hierarkisena tapahtumana, missä oppija siirtyy ylemmälle tasolle kehittyessään. Siirtyminen operationaaliselta tasolta strukturaaliseen vaatii sekä operationaalista taitavuutta että esistrukturaalista näkemystä (Merenluoto 2001, 12). Operationaalinen ja strukturaalinen ymmärtäminen nähdään tämän teorian mukaan duaalina, missä kumpikin vaihe ovat tärkeitä käsitteen ymmärtävälle oppimiselle.

Useat tutkijat ovat käyttäneet matemaattisten käsitteiden kaksitahoisuudesta raportoidessaan eri käsitteitä; prosessi ja objekti tai produkti (Tall 1991 b; Kaput 1994; Dubinsky 1994) sekä duaalimalli (Sfard 1991). Kaksitahoisuudella tarkoitetaan, että matemaattiseen käsitteeseen liittyy kaksi erilaista puolta, operationaalinen ja käsitteellinen tai strukturaalinen. Käsitteen omaksumiselle molemmat vaiheet ovat välttämättömät. Osa matemaattisista käsitteistä voidaan siis tulkita sekä operationaalisina prosesseina, mistä Sfard käyttää nimitystä operationaalinen ajattelu, ja toisaalta strukturaalisina objekteina eli käsitteinä. Viimeksimainitusta Sfard käyttää nimitystä strukturaalinen ajattelu. Tällaisessa strukturaalisessa ajattelussa matemaattinen entiteetti, asia tai olio nähdään objektina, määriteltynä staattisena rakenteena (ks. esim. Merenluoto 2001, 25).

Sfardin reifikaatioteorian ensimmäisessä prosessimaisen käsitteen sisäistämisen (interiorisaatio) vaiheessa oppijan proseduraaliset taidot kehittyvät ja hän alkaa löytää yleistyksiä ja yhteyksiä muihin käsitteisiin joko konkreettisten tai abstraktimman käsitteen tapauksissa mentaalisten kuvien avulla. Toista vaihetta kutsutaan käsitteen tiivistymiseksi (kondensaatio). Sfardin (1991) esittämässä kuvauksessa tälle tasolle on ominaista oppilaan kyky kuvata prosesseja niitä aktiivisesti suorittamatta, pitkähköt prosessit tiivistyvät yksiköiksi ja opiskelija kykenee ajattelemaan niitä mentaalisina kokonaisuuksina suorittamatta konkreettisia prosesseja. Tiivistymisvaiheessa huomio kiinnittyy itse prosessista siihen liittyviin muihin olioihin ja olioiden keskinäisiin suhteisiin. Niitä voidaan verrata ja yleistäminen on mahdollista. (ks. esim. Merenluoto 2001, 30.) Tämä on merkittävää algebran kannalta. Sfard (1991) on antanut kolmannelle ja vaativimmalle käsitteen rakentumisen vaiheelle nimen reifikaatio (käsitteen strukturoituminen). Tällöin oppija kykenee ymmärtämään käsitteen itsenäisenä objektina. Tämä strukturoitunut prosessi toimii uusien operaatioiden kohteena ja muodostuu lähtökohdaksi uudelle reifikaatioon johtavalle prosessille (Sfard & Linchevski 1994).

Vastaavanlaisia teorioita on esittänyt Tall ym. (1999). Malleille on yhteistä käsitteellä operoiminen, käsitteen ja siihen liittyvien lähikäsitteiden yhteyksien vahvistuminen ja kolmannessa vaiheessa kokonaiskuvan muodostaminen kyseisestä matemaattisesta käsitteestä ja sen käyttäminen objektin tavoin. Kahdessa ensimmäisessä vaiheessa käsite hallitaan operationaalisesti ja ymmärretään prosessiksi numeerisen tason operaatioissa. Strukturaaliselle tasolle ei ole mahdollista siirtyä ilman operationaalista sujuvaa käyttöä. Kolmannessa vaiheessa strukturaaliselle tasolle siirryttäessä käsite ymmärretään objektina. Tästä seuraa, että jos edellä kuvattu käsitteen muodostumisprosessi on jäänyt kesken ja oppilas tuntee käsitteen, mutta siihen liittyvät ominaisuudet yksipuolisesti tai ei tunne käsitteen yhteyksiä muihin käsitteisiin, voi hänelle syntyä tunne matematiikan osaamisesta, mutta hän ei silti osaa ratkaista tehtäviä (Hiebert & Lefevre 1986, 9). Tällöin hänen osaamisensa on korkeintaan ymmärtävää tasoa, mutta käsitteen käyttäminen ja soveltaminen uusiin tilanteisiin on puutteellista.

6.3 Aritmetiikasta algebraan siirtyminen

Peruskoulun oppikirjoissa käytetään nimitystä ”algebra” tarkoittamaan eriasteisten polynomien ja niihin liittyvien laskutoimituksien laskusääntöjä ja ensimmäisen asteen yhtälöitä. Yhteisenä piirteenä algebran sisällöissä on, että niissä käytetään kirjainsymboleita kuvaamaan sekä lukuja että suureita. Nimityksiä käytetään matematiikan opetussuunnitelmissa (esim. Kouluhallitus 1985; Opetushallitus 1999b) ja matematiikan opetusta käsittelevässä kirjallisuudessa (mm. Kieran 1994; Bednarz ym. 1996). Sama lukuihin liittyvä tulkinta algebralle on muun muassa Rojanolla ja Choikella. Rojano (1996) määrittelee algebran aritmetiikan laajennukseksi ja Choike (2000, 561) määrittelee algebran prosessiksi, jonka avulla järjestetään se aritmetiikka, jota tarvitaan tuntemattomien suureiden ratkaisemiseen.

Peruste oppijan arkikäsityksen tiedostamisen tärkeydestä tulee sen tiedon lisääntymisen kautta, miten oppiminen tapahtuu. Muuttunut käsitys tiedon luonteesta ja käsitysten merkitysten tiedostaminen oppimisprosessissa on johtanut siihen, että behavioristisen tiedon siirtämisen ei katsota tuovan laadukasta oppimista. Tällä tarkoitetaan, että oppimistapahtuman oletetaan tarjoavan ja oppijalta odotetaan yhä enemmän kokonaisuuksiin tähtäävää tiedostavaa oppimista. Leen (1996) mukaan tämä tulkittuna tutkimuksen kontekstiin tarkoittaa, että eräs tapa algebran ymmärtävään oppimiseen lähtee arkikäsityksenä luvuista ja niiden perustoiminnoista, jotka yleistettynä antavat ymmärryksen algebrallisille rakenteille.

Määrittelen tässä tutkimuksessa samalla tasolla tapahtuvan rakenteeltaan samanlaisen tiedon siirtymisen analogiaksi ja yleisemmälle tasolle tapahtuvan tiedon siirtymisen abstraktiotason nostamiseksi. Vertailen tulososiossa näillä kahdella tasolla tapahtuvaa strukturaalista osaamista ja käsitteiden hallintaa, millä tarkoitan käsitteellisen muutoksen prosessin tarkastelua, käsitteiden välisiä suhteita sekä laadullisia muutoksia.

Aritmeettisen algebran eli numeerisella ja yleisellä tasolla tapahtuvien rakenteiltaan samanlaisten lausekkeiden siirtymistä on tutkittu paljon viime vuosikymmeninä. Näiden käsitysten välillä on Sfardin mukaan syvä ontologinen kuilu (Sfard 1991, 4). Kieran (1992) pitää syynä tähän ensiksikin symbolista algebraa vastaavien numeeristen rakenteiden osaamattomuutta, eli numeerisella tasolla kesken jäänyttä käsitteenmuodostusprosessia. Toiseksi syyksi hän näkee sellaisen aritmetiikan opetuksen, missä tähdätään laskuprosessin tuloksiin rakenteellisten aspektien sijasta. (Kieran 1989, 1990, 1992). Kieran (1992) puhuu proseduraalisista (procedural) ja rakenteellisista (structural) algebrallisista operaatioista. Hän määrittelee proseduraalisen algebrallisen operaation viittaavan luvuista yleistettyihin operaatioihin ja rakenteellisen algebrallisen operaation viittaavan, ei lukuihin, vaan algebrallisiin ilmauksiin (Kieran 1992, 392).

Kuvaillessaan vaikeuksia, joita opiskelijalla voi olla hänen siirtyessään aritmetiikasta algebraan, Sfard (1991, 1994), Kieran (1989, 1992) ja Herscovics (1989) kirjaavat lukuisia esteitä. Opiskelijoilla on vaikeuksia hahmottaa algebrallista lauseketta vastauksena, koska he ovat tottuneet näkemään vastauksen tiettynä lukuarvona. Linchevski ja Herscovics (1996) pitävät syynä vaikeuksiin oppilaiden puutteellista operaatio-struktuuri-dualismin hahmottamista. Kykenemättömyyttä spontaanisti operoida tuntemattomalla eli kynnystä siirtyä algebralliseen tarkasteluun aritmeettisen tarkastelun sijasta pidetään kognitiivisenä esteenä, kuiluna aritmetiikan ja algebran välillä (Herscovics & Linchevski 1994). Jos tarvittavaa näkökulman vaihtamisen tärkeyttä ei tuoda esille, niin oppilaat käyttävät sääntöjä ja proseduurimaista laskemista ilman että ymmärtävät, mikä näihin sääntöihin on johtanut ja mihin nämä tekniikat perustuvat.

Lisäksi on huomattu, että algebran opiskelun alkuvaiheessa käsitteet muuttuja ja yhtälön tuntematon menevät monilta oppilailta sekaisin. Kieranin (1992, 412) mukaan siinä vaiheessa, kun yhtälöiden ratkaisutekniikoita on jonkin verran harjoiteltu, oppilaat tulkitsevat lausekkeen usein yhtälöksi. Myös Edwards (2000) toteaa saman ongelman. Attorps (2006) on väitöstutkimuksessaan todennut monen ruotsalaisen opettajan sekoittavan lausekkeen ja yhtälön käsitteet. Lähtökohtana Stacey ja McGregor (1997) korostavat opetussuunnitelman ohjaavaa roolia tuotaessa esille aritmetiikan ja algebran välistä yhteyttä ja algebrassa symbolien merkitystä eri konteksteissa.

Sfard (1991) pitää käsitteen muodostumisprosessin vaiheita hierarkisina. Käsittelen tämän hierarkisuuden Tallin matemaattisen ajattelun mallin yhteydessä luvussa 6**.** Oppimisprosessi voi harvoin toteutua niin omaehtoisesti, että käsitteenmuodostusprosessin vaiheet eivät häiritse toisiansa ja lähikäsitteiden muodostumista. Tästä syystä osa tiedosta on muistinvaraisena ja tästä syystä proseduuri yleisellä tasolla voi kehittyä ennen numeerisen tason proseduurin kapseloitumista, kuten seuraavassa kappaleessa tullaan näkemään.

Tiedostetaanko abstraktiotason kohottamisen vaativuus suhteessa analogisella tasolla tapahtuvaan oppimiseen, mitä aritmetiikan ja aritmetiikasta algebraan siirtymiseen vaaditaan? Vai onko käsitys, että algebrassa vain aletaan soveltaa aritmetiikan proseduureja muuttujiin eli kirjainlukuihin, minkä epäilyn Hihnala tuo esille tutkimuksessaan (Hihnala 2005, 25). Lisäksi tulisi tarkastella, tuodaanko opetuksessa riittävän hyvin esille muuttujan eri roolit?

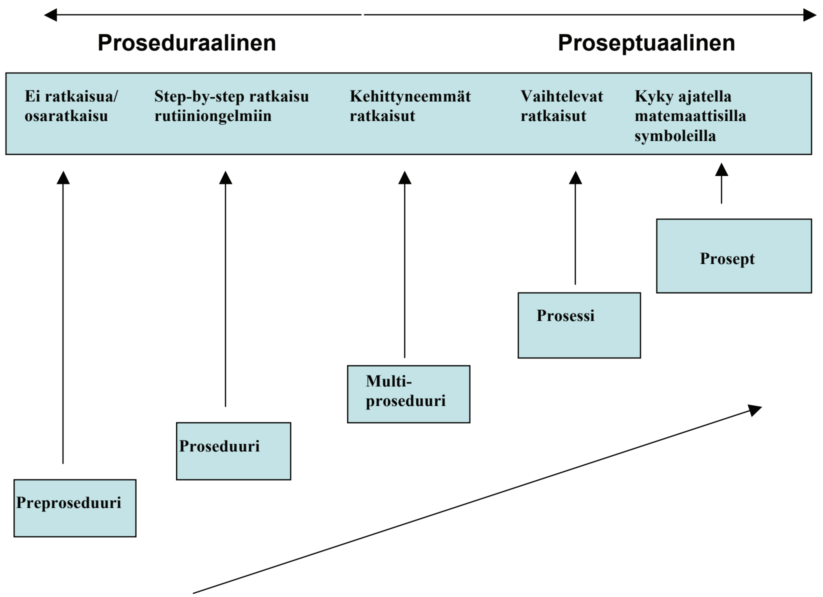
6.3.1 Prosept

Kapseloituminen voidaan liittää edellä kuvattuun piagetilaiseen ja sfardilaiseen ajatteluun ja tiedon hierarkisuuteen. Ilmiöt ovat osa yleisempää kognitiivisen kehityksen prosessi-objekti-teoriaa (Dienes 1960; Piaget 1985; Dubinsky 1991; Sfard 1995). Mallit pohjautuvat Piagetin ajatuksiin, ne ovat hierarkkisia ja niissä edetään tiettyjen vaiheiden kautta. Gray ja Tall (Tall ym. 1991; Gray & Tall 1993; Gray ym. 1997) ovat tutkineet lukukäsitettä ja siihen liittyvää prosessia aritmetiikan opiskelussa. Teorian mukaan käsitteen muodostuminen alkaa yksinkertaisella tasolla tapahtuvana proseduurina. Harjaantumisen myötä proseduuri kehittyy monipuolisempien strategioiden avulla kompleksiseksi proseduuriksi. *Pro*seduraalista ja kon*sept*uaalista käsitteeseen liittyvää ominaisuuskimppua he kutsuvat nimellä *prosept*. Gray ja Tall (1993) määrittelevät termin ´prosept´ tarkoittavan mentaalista objektia, joka koostuu prosessista, tämän tuotoksena syntyneestä käsitteestä sekä jompaa kumpaa edellä mainituista kuvaavasta symbolista (ks. myös Haapasalo 2003). Prosept voi tarkoittaa samaan aikaan mentaalista objektia, siihen liittyvää prosessia, prosessin lopputulosta tai joitain tähän objektiin liittyviä riippuvuuksia.

Grayn ja Tallin käsitteenmuodostuksen malliin kuuluvaa kolmea vaihetta ilmentää esimerkiksi Thomasin ja Tallin artikkeli (1997), jossa kuvataan yhteenlaskuun liittyviä ajattelumalleja: Ensimmäisessä vaiheessa käytetään yksinkertaista proseduuria laskemalla fyysisiä objekteja alkaen joka laskun 1:stä (count-all). Toisessa vaiheessa käytetään kehittyneempiä kompleksisia proseduureja erilaisten strategioiden avulla (esimerkiksi count-both, count-on tai count-on from larger). On todettu myös strategioita, missä yhdistetään proseduraalinen ja objektitason ajattelu. Esimerkiksi yhteenlaskussa 3+4 voidaan ajatella ”yksi vähemmän kuin 8, joten se on 7” (derived fact). Harjoituttaminen tuo sujuvuutta proseduurin käyttöön, kunnes sen hahmottaa proseduurin sijasta käsitteellisenä objektina (known fact). Prosessin kiirehtiminen tukee muistinvaraista laskemista, mistä Tall toteaa, että yhteenlaskun 3+4 voi toki ”known fact”-tyyppisesti todeta ”kolme plus neljä on seitsemän” kahdella eri tavalla, muistinvaraisesti tai merkityksellisellä tavalla (Tall 1993, 234). Muistinvaraisesti oppiminen ei tue vastauksen suuruusluokan arvioimisen mahdollisuutta eikä joustavaa laskemista. Muistinvarainen laskeminen paljastuu epäonnistumisena uusissa tehtävissä. Jos tehtävän on suorittanut merkityksellisellä tavalla, tukee se ymmärtämistä ja strategian voi siirtää analogisiin tilanteisiin.

Kuvio 1 kuvaa tätä kehitystä vaiheittain. Preproseduurivaihe kuvaa tilannetta, jossa proseduuri jo nähdään tarpeellisena ja tapaillaan alkeellisen proseduurin ratkaisutapoja. Thomas ja Tall käyttävät termiä ´proseduuri´ laskutoimitukselle, kun taas termi ´prosessi´ sisältää joko useita eritasoisia proseduureja, joilla on sama vaikutus tai useita peräkkäisiä proseduureja. Prosessin kapseloitumisella he tarkoittavat samaan aikaan mentaalista objektia, siihen liittyvää prosessia, prosessin lopputulosta tai joitain tähän objektiin liittyviä riippuvuuksia, siis proseptia. Saadaan esitys, jossa edellämainitut ovat kapseloituneet (encapsulated) symboliseksi esitystavaksi, mikä taas on alku uudelle syklille. (Gray & Tall 1993.) Ajattelu kehittyy eri tason proseduurien ja prosessien kapseloituessa objektiksi. Prosessissa yhdistyvät kaikki alkeelliset proseduurit ja kompleksiset proseduurit, joilla on sama vaikutus. Edellä kuvatun esimerkin kaltaisten kokonaislukujen yhteenlaskujen käyttäminen kehittää oppijan yhteenlaskuproseduureja monipuolisemmiksi ja summa objektina-tyyppinen ajattelu tulee mahdolliseksi. Ajattelun tulee antaa kehittyä yksilöllisesti. Jos oppilasta kiirehditään, kun hän käyttää kehittymättömiä proseduureja, saattavat kehittyneemmät proseduurit ja kapseloituminen jäädä tapahtumatta tai kapseloituminen tapahtuu liian aikaisin. Tällöin hän päätyy käyttämään kehittymättömiä proseduureja ja päätyy pintasuuntautuneeseen oppimiseen.

Matemaattiset käsitteet, joilla on dualistinen luonne sekä proseduurina että objektina, koetaan vaikeiksi, jollei tätä tuoda riittävän selvästi esille opetuksessa ja jollei prosessille anneta riittävästi aikaa. Esimerkkejä tällaisista käsitteistä ovat negatiiviset luvut ja murtoluvut. Miinusmerkki laskutoimituksen merkkinä, toisaalta luvun etumerkkinä ja erotuksen merkkinä voivat olla sekottavia ilman riittävää asiaan paneutumista. Murtolukuja proseptina käsitellään luvussa 6.3.2.



Kuvio 2. Käsitteenmuodostumisprosessi spektrinä (Gray, Pitta, Pinto & Tall 1999, 121)

Kun ajattelu on joustavaa, käytetään vaihdellen ”lauseke objektina” -ajattelua ja laskemista proseduurina. Tärkeää on, että oppilas tottuu käyttämään näitä molempia tarvittaessa ja näkee, kumpaa tarvitaan kyseisessä tilanteessa. Vaikka proseduuriajattelu tehtävän vastauksen saamiseksi laskinaikakautena on menettänyt merkityksensä, nähdään, miten lukukäsitteen ja lausekkeiden rakenteiden ymmärtäminen vaatii tietyn prosessin. Automatisoitunut, käsitteelliseen ajatteluun perustuva laskeminen ei ole mahdollista ilman edellä kuvattua ketjua.

Proseptin merkitys matematiikassa on myös joustavuus. Laskijan tulee pitää mielessään proseptiin liittyvät eri mahdollisuudet ja luotailla, mikä muoto vie häntä eteenpäin ongelmanratkaisussa. Tällainen joustava ajattelu on eräs tärkeimmistä ominaisuuksista, joita menestyksekäs ongelmanratkaisija tarvitsee (Kiesswetter 1983; Pehkonen 2003).

Tietoisten, mentaalisten käsitteellisten ja proseduraalisten ominaisuuksien kimppu, joka liitetään tiettyyn symboliin, on Tallin edellä määrittelemä prosept. Lukija oppii tulkitsemaan symbolin kautta tilanteita niiden ominaisuuksien avulla, jotka hän liittää tähän symboliin. Haapasalo (2003) käyttää näistä ominaisuuksista nimitystä ”ilmentymät”. Proseptin olemus on mentaalinen, kunkin omien kokemuksien muokkaama. Vaikka näihin ilmentymiin liittyvien kokemusten korostetaan olevan kullekin ihmiselle omansa, voidaan niiden toisaalta luonnehtia liittyvän kulttuurisesti hyväksyttyyn tiedonalaan. Itse kukin pystyy tunnistamaan omassa kokemuksessaan ilmentymät niin, että ne eivät jää vain henkilökohtaisiksi, vaan niiden avulla pystymme selviämään eteen tulevista tilanteista siinä kulttuurissa ja kontekstissa, missä olemme.Voidaan sanoa, että kyse on myös ihmiskunnan kokemuksen muistista.

6.3.2 Murtoluku proseptina

Monet tutkijat pitävät suhdetta koulumatematiikan keskeisenä relaationa.Vaikka suhdeajattelua korostetaan yhtenä tärkeimmistä formaalin ajattelun komponenteista, kyseisen taidon kehittyminen on todettu luultua hitaammaksi. Murtolukukäsitteeseen liittyvän suhdeajattelun on todettu olevan ongelmallinen. (Riddle & Rodzwell 2000, 202.)

Tallin mukaan murtolukujen prosept voidaan monissa tapauksissa ilmaista käyttämällä käsiteluokkia, kuten vaikkapa murtoluvulle ½ :

- objektikäsite:ilmaus ´puoli´ (verbaalisena, kuvallisena tai symbolisena)
- operaatiokäsite:´puolet jostakin´
- suhdekäsite (riippuvuuskäsite): lukujen 1 ja 2 suhde tai jakolasku 1:2 jakolaskun tuloksen ½ kuuluessa objektikäsitteisiin.

Edellisestä laajentaen kaikkien ekvivalenttisten murtolukujen joukko, joiden arvo on ½, eli

- murtolukujen ekvivalenssiluokat.

Näiden kaikkien periaatteiden rinnakkainen oppiminen vaatii paljon harjaantumista, jotta vältetään liian aikainen kapseloituminen (vrt. Johnson & Lauten 2000, 102). Koska suhdeajattelu on avainkäsite matematiikan ja luonnontieteiden opetuksessa aina ala-asteelta yliopistoon, tulisi sen oppimiseen panostaa nykyistä enemmän.

Murtoluku-proseptin oppimista voi auttaa murtoluvun eri ilmentymien rinnakkainen esilletuominen opetuksessa. Tärkeää käsitteen oppimisessa ovat käsitteen eri esitysmuotojen väliset yhteydet. Murtolukuihin liittyvät vaikeudet ymmärtää, kun tietää murtoluku-proseptin vaativan useita käsitteellisiä kapseloitumisia; kokonaislukukäsitteen, yhteenlaskun kokonaislukujen summana, tulon käsitteen yhteenlaskun toistona, yhtäsuuriin osiin jakamisen ja murtoluvun käsitteen. Suhde-käsitteen oppimista vaikeuttaa vielä se, että suhteelta puuttuu konkreetti kohde, voidaan vain esittää tietyn suhteen eri ilmenemismuotoja. Murtolukukäsite, kuin myös murtolukuihin liittyvät ominaisuudet opitaan ymmärtämään prosessien, vertailun ja objektisoitumisen kautta yleisen proseptteorian tavoin lähtien alkeellisista proseduureista.

6.4 Käsitys – oppijan mielikuva käsitteestä

Vaikka opetussuunnitelmien oppimisnäkemys painottaa nykyisellään prosessointia (luku 4), tulee huomata, että ajattelu tapahtuu henkilökohtaisilla käsityksillä käsitteistä. Myös Bransford korostaa tiedon merkitystä puhuttaessa ajattelusta ja ongelmanratkaisusta todetessaan, että tutkittaessa eri aloihin liittyvää asiantuntemusta on todettu, että asiantuntijoiden kyky ajatella ja ratkaista ongelmia perustuu vankkaan aihealuetta koskevaan tietopohjaan (Bransford 2000). Staattisen tietokäsityksen sijaan korostetaan dynaamista käsitystä käsitteestä ja sen muodostumisesta. Tutkimuksissa on osoitettu ”käyttökelpoisen tiedon” olevan muutakin kuin pelkkä luettelo toisiinsa liittymättömiä tosiasioita. Bransford kuvailee asiantuntijoiden tietokäsitystä siten, että tieto on järjestäytynyt keskeisten käsitteiden ympärille, se on ehdollistunut määrättyihin tilanteisiin, joissa sitä voidaan soveltaa, ja se tukee ymmärtämistä ja siirtovaikutusta (muihin tilanteisiin) enemmän kuin pelkkää muistamiskykyä. (Bransford 2000.) Tällaisen kontekstisidonnaisen käsitteen lisäksi konkreettisiin havaintoihin perustuvat yleistetyt käsitteet ja niin sanotut tieteelliset käsitteet ovat merkityksellisiä ajattelun välineitä.

Käsitykset (conceptions) ymmärretään yksilön tietoisina uskomuksina, joille yleensä voidaan antaa myös perustelu (Pehkonen 2003). Näiden tulisi olla lähtökohta ymmärtävälle oppimiselle, koska vain tiedostamalla käsityksensä oppilas voi tarvittaessa muuttaa niitä. Oppilaalla oleva havaintokuva ja sen muuntuminen käsitteelliseksi objektiksi ja skeemaksi on Piagetin, Sfardin ja Tallin teorioiden mukaisesti koko tiedon prosessoinnin kannalta keskeisiä toimintoja.

Saariluoman (1998) mukaan sana ei viittaa suoraan tarkoittamaansa olioon, vaan käsitteen tai ajatussisällön kautta. Näiden tehtävä on antaa havaintokuvalle merkitys. Eri käsitteiden välillä on ihmisen muistissa merkitykseen perustuvia yhteyksiä, eri ihmisillä erilaisia. Voidaan puhua käsityksistä. Kieli on sekä ajattelun että ilmaisun väline. Näin ihmisen tieto maailmasta on lukuisa määrä käsityksiä ja niiden välisiä suhteita. (Marton & Booth 1997; Attorps 2006.) Ne ovat sidoksissa käsitteisiin, joita siis tarvitaan luokitteluun ja vuorovaikutukseen, jotta ajattelu ja ilmaisu olisi jäsenneltyä.

Vaikka Vygotskin aikana käsitteenmuodostus ei vielä ollut siinä merkityksessä, kuin nykyisin, oli hänen työllään suuri merkitys. Hän sitoi kielen ajatteluun käsitteiden kautta kulttuurisidonnaisen kehityksen tuloksena. Vygotsky (1982, 158–159) erottelee arkikäsitykset ja tieteelliset käsitteet. Arkikokemuksista juontuvat käsitykset ovat lähtökohta ajattelulle. Niihin uuden opittavan asian tulisi kiinnittyä myös silloin, kun arkikäsityksistä joutuu luopumaan tieteellisen käsitteen hyväksi. Engeström (2000) näkee käsitteenmuodostuksen psykologisen tutkimuksen näiden empiiristen, arkikäsityksistä lähtevien käsitteiden ominaisuuksien luokittelumekanismien analysointina.

Ymmärtävän käsitteellisen oppimisen lähtökohta on Vygotskin (1982) mukaan kuvallinen mentaalimalli. Tätä mallia oppija peilaa ja muokkaa suhteessa ympäristöönsä. Jos mallilla on kosketuspintaa oppijan tietoverkkoon, laajentaa se hänen ymmärtämystään asiassa. Tämä pätee myös matematiikan käsitteisiin. Oppijan kielellis-loogisen kehittymisen kannalta on välttämätöntä, että hän oppii kuvailemaan matemaattisia käsitteitä ja määritelmiä omin sanoin sekä viestimään formaalissa muodossa esitettyjä (matemaattisia) ilmauksia tavanomaista verbaalista kieltä käyttäen (Haapasalo 1997). Vain sellainen tieto on käytettävissä, joka on olemassa osana semanttista verkkoa. Sanat ovat tällaisen ajattelun ilmentymiä.

6.5 Käsitekuva ja Tallin kolme maailmaa

Peruste oppijan arkikäsityksen tiedostamisen tärkeydestä tulee sen tiedon lisääntymisen kautta, miten oppiminen tapahtuu. Muuttunut käsitys tiedon luonteesta ja käsitysten merkitysten tiedostaminen oppimisprosessissa on johtanut siihen, että behavioristisen tiedon siirtämisen ei katsota tuovan laadukasta oppimista, mikä tarkoittaa, että oppimistapahtuman oletetaan tarjoavan ja oppijalta odotetaan yhä enemmän kokonaisuuksia hahmottavaa tiedostavaa oppimista. Leen (1996) mukaan tulkittuna algebran kontekstiin tähän päästään lähtemällä arkikäsityksistä luvuista ja niiden perustoiminnoista, ja jotka yleistettyinä antavat ymmärryksen algebrallisille rakenteille.

Tarkastellessaan mielikuvia käsitteistä Tall ja Vinner (1981) määrittelivät käsitekuvan (concept image) sisältävän kaikki ne kognitiiviset rakenteet, jotka yksilö assosioi tiettyyn käsitteeseen. Ne voivat sisältää mielikuvia, tulkintoja käsitteestä ja käsitteeseen liittyvistä ominaisuuksista, ja ne rakentuvat kokemuksen kautta koko elämänhistorian aikana. Käsitekuva ei ole ristiriidassa Tallin teorian prosept-käsitteen kanssa, vaan proseptin käsitekuvan ajatellaan viittaavan symboliin, joka linkittyy käsitteeseen liittyviin prosesseihin ja kognitiivisiin rakenteisiin. Vaikka mielessä ei tällöin ole välttämättä konkreettista objektia, niin käsitteeseen liittyvää symbolia voi manipuloida mentaalisen objektin tavoin. Tosin on todettu, että oppilaille ei ole helppoa kääntää matematiikan kieltä tavalliseksi tulkintoja sisältäväksi puheeksi ja toisaalta kääntää tekstiä matematiikan kielelle (Olteanu 2000, 15).

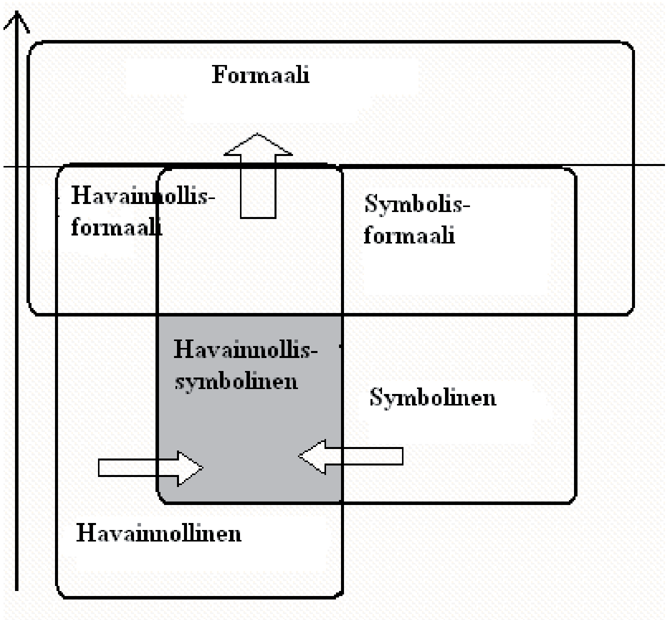
Tall määrittelee matemaattisen tiedon luonteen kolmen maailman avulla. Käsitteen rakentuminen havainnoista, toiminnasta, objekteista, määritelmistä ja päättelyn eri lajeista sijoittaa käsitteen eri maailmoihin. Edellä kuvattu lähtökohdaltaan toiminnallinen käsite, kuten laskeminen, kuuluu eri maailmaan kuin käsitteen määritelmästä lähtevä. Näin saadaan lähtökohdiltaan kaksi erilaista matematiikan kehityslinjaa:

- Käsitteellis-havainnollinen, joka pohjautuu havaintoon ja reflektioon kyseisten objektien ominaisuuksista, mikä tarkoittaa abstraktien käsitteiden ilmentymiä tuttuina kuvina
- Duaalinen proseptuaalis-symbolinen, joka kasvaa toiminnan kautta ja jossa proseduurit symboloituvat käsitteiksi .

Näistä kahdesta kehityslinjasta on johdettavissa formaaleihin määritelmiin ja todistuksiin pohjautuva formaalis-aksiomaattinen maailma:

- Aksiomaattis-formaalinen, joka lähtien konstruoiduista määritelmistä päättelyllä ja loogisella ajattelulla johtaa formaaleihin käsitteisiin. (Tall 1995.)

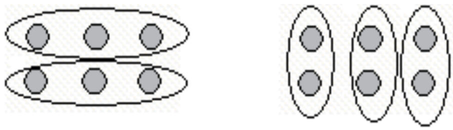
Edellä kuvatut termit on lyhennetty seuraavassa esityksessä havainnolliseksi, symboliseksi ja formaaliksi.



Kuvio 3. Yhteydet Tallin kolmen matematiikan maailmojen kombinaatioiden välillä (Tall 1995).

Vaakaviivan yläpuolella ovat formaalis-aksiomaattiseen maailmaan liittyvät matemaattisen käsitteet. Kuviota voidaan tulkita esimerkiksi siten, että jos oppilas on konstruoinut luonnolliset luvut tiivistämällä laskemisproseduurit lukukäsitteeksi, niin hän voi johtaa murtolukukäsitteen joko jakamalla havainnollisesti joukkoja tai objekteja yhtäsuuriin osiin, jolloin ollaan havainnollisessa maailmassa. Toisaalta murtolukukäsite voi kapseloitua uuden proseduurin seurauksena, jolloin liikutaan symbolisessa maailmassa. Vastaavasti kokonaisluvut voidaan havainnoida joko positiivisina tai negatiivisina lukuina havainnollisessa maailmassa tai operaationa siirryttäessä lukusuoralla oikealle tai vasemmalle symbolisessa maailmassa.

Kuten edellä todettiin, on käsitteitä ja lakeja, jotka voidaan konstruoida vaihtoehtoisilla tavoilla. Havainnollistaminen saattaa auttaa oppijaa hahmottamaan tilanteen helpommin, kuten seuraavassa kertolaskun vaihdantalakia ilmentävästä kuvassa nähdään. Kahdessa rivissä kolme objektia havaitaan samaksi määräksi kuin kolmessa sarakkeessa kaksi objektia ja siten havaitaan kertolaskun vaihdannaisuus.



Kuvio 4. Havainnollistaminen kertolaskun vaihdantalaissa.

Konkreetin kuvion perusteella on helpompi hahmottaa laki $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$. Formaalissa muodossa oleva kertolaskun vaihdantalaki $a \cdot b = b \cdot a$ on kognitiivisesti vaativampi konstruoida (luku 10). Algebran oppimisen tulisi näin ollen olla pitkällinen prosessi, joka alkaa lukujen ominaisuuksiin ja laskutoimituksiin liittyvästä havainnoinnista ja toiminnoista.

Vaikka rakenteita voidaan havainnollistaa pienten kokonaislukujen avulla, niin suurten lukujen merkitys ilmenee preproseduuri- ja proseduurivaiheessa tarpeena löytää kehittyneempiä proseduureja. Myös Zazkis (2001) on tuonut esille suurien lukujen merkityksen siirryttäessä aritmetiikasta algebraan. Kuitenkin suuria lukuja käytettäessä opetuksessa tulee olla tilanneherkkyyttä. Eihän esimerkiksi kertolaskujen $28759 \cdot 953246$ ja $953246 \cdot 28759$ suorittaminen vaihdantaominaisuuden nähdäkseen ole oppilaita motivoivaa (Tall 2006).

6.6 Luovuus abstrakteissa käsitteissä

Vaikka ihmisellä olisi kuinka paljon tietoa, ei hänellä välttämättä ole luovuutta. Jos hänen muistissaan oleva tieto on luokiteltuna ilman yhteyksiä muihin käsitteisiin, ei hän pysty käyttämään tietoaan (Raudsepp1984). Ajattelusta tekee luovemman sellainen ajattelu, jossa käsitteet eivät ole staattisia, vaan käsitteisiin liittyvät myös niiden väliset suhteet. Useimmiten luovuus esitetään toimintona, jossa yksilö tuottaa jotakin uutta ja ennaltamääräämätöntä (esim. Bergström 1985). Muisti, joka ei ole joustava, varastoi tiedon tiukkarajaisesti käsitteen määritelmään. Raudseppin mukaan luovalla joustavalla muistilla on liikkuvat rajat, niin että asiat yhdistyvät keskenään. Paitsi joustavuuteen, niin muisti liittyy luovuuteen myös tietomäärän suhteen. Mitä enemmän muistissamme on jäsentynyttä tietoa, sitä enemmän kykenemme yhdistämään eri asioita toisiinsa.

Käsitteen merkitys oppijalle riippuu siitä, millaisia kokemuksia hänellä on käsitteestä ja mitä ominaisuuksia hän liittää siihen. Niiden varaan hän rakentaa mielikuvansa käsitteestä. Käsitteiden oppimiseen liittyvä ajatus, jonka mukaan käsitteiden hallinta tarkoittaa kykyä määritellä niitä, on vajavainen, vaikkakin abstraktin käsitteen ollessa kyseessä tämä voi olla lähtökohta määrittelylle. Yhtä tärkeää on osata käsitteisiin liittyviä ominaisuuksia mahdollisimman monipuolisesti ja myöskin osata käsitteiden yhteydet muihin aihepiirin käsitteisiin. Jotta käsite olisi mahdollisimman käyttökelpoinen, on käsitteen ominaisuuksien kimpun oltava riittävän tiheä.

Abduktiiviseen ajatteluun liitettyä käsitteenmuodostusta ja joustavaa muistin käyttöä pidetään luovuudelle tärkeinä ominaisuuksina. Loogisuutta pidetään usein tälle vastakohtana. Totta onkin, että sen vahvuudet ovat toisaalla. Luovuus perustuu usein havaintojen ja kokemuksen synnyttämään intuitioon. Kaiken tulee kuitenkin olla selitettävissä. Tähän auttaa logiikka.

Peirce korostaa päättelyä ja käsitteellisyyttä tietoteoriassaan. Induktiivista ja abduktiivista päättelymallia käytetään luomaan uusia yhteyksiä. Uudet ideat haetaan abduktiivisesti, minkä jälkeen niitä testataan ja todennetaan käyttämällä deduktiivista päättelyä. (Paavola 2003, 2004.) Abduktion käyttökelpoisuus uuden luomisessa selittyy proseptin avulla siten, että käsitteeseen liittyvästä ominaisuuskimpusta havaitaan yhteys lähikäsitteisiin käänteisellä päättelyllä (Paavola & Hakkarainen 2004; Hakkarainen & Paavola 2007, 12). Trialogisuuskäsitteen keskeisenä periaatteena on Peircen välittyneisyystulkinta, mikä abstraktilla tasolla tarkoittaa edellä kuvatulla tavalla tapahtuvaa luovuutta.

6.7 Kritiikkiä proseduuri-objekti-ajattelusta

Hassinen (2006) yhtyy Confreyn ja Costan (1996) kritiikkiin matemaattisten objektien ottamisesta keskeiseksi metaforaksi kuvattaessa matemaattisen ajattelun kehittymistä. Hän kirjoittaa: ”He eivät kiellä matemaattisten objektien merkitystä sinänsä, kritiikki kohdistuu objekteihin matematiikan oppimista määrittävinä ydinasioina, siis että oppiminen nähdään matemaattisten objektien konstruointina. He katsovat objektiajattelun ongelmiksi muun muassa sen, että matematiikka nähdään hierarkkisena, matemaattista ajattelua kehitetään käymällä läpi hierarkkinen sarja vaiheita, joissa edellisen vaiheen prosessista muodostuu seuraavan vaiheen objekti, vaiheesta toiseen siirryttäessä oppija kohtaa episteemisiä esteitä tai kognitiivisia kuiluja.” (Hassinen 2006, 151.) Näin ajatellen matematiikan käsitteen näkeminen objektina on yksipuolista. Proseptiin liittyvä joustavuus käsitteen käyttämisestä tilanteen vaatimalla tavalla joko proseduurina tai objektina jää huomioimatta. Laskeminen ei ole proseduraalista siirtymistä objektista toiseen vaan käsitteellisen ja proseduraalisen tiedon vuorottelua. Tilanteelle edulliseen valintaan auttaa monipuolisen proseptin hallitseminen, millä tarkoitetaan niiden mahdollisuuksien hallitsemista, jotka liittyvät käsiteobjektiin. Monipuolinen prosept auttaa näkemään ongelman ratkaisemiseen liittyvät vaihtoehdot ja valitsemaan ratkaisun kannalta onnistuneen reitin. Tall (1999) käyttää tästä nimitystä proseptuaalinen ajattelu (proceptual thinking).

Toinen näkökulma proseduuri-objekti-keskusteluun on se, että toiminnan tarkastelu, reflektointi ja siihen viittaaminen on mahdollista vain jos kohde nähdään objektina. Matematiikan alueelta esimerkkinä voisi mainita yhtälö-käsitteen. Niin kauan kuin algebrallinen lauseke nähdään proseduurina, nähdään myös matemaattinen lause eli yhtälö proseduurina. Vasta lausekkeen hahmottaminen objektina mahdollistaa niiden merkitsemisen yhtäsuuriksi ja tarkastelun yhtäsuuruuksina. Lisävaikeutena yhtälöihin liittyy kirjainsymbolin merkityksen tulkinta. Lausekkeen yleinen muuttujasymboli pitäisi yhtälössä tulkita tuntemattomana. Pitäisi puhua myös muuttuja-proseptista, jonka monipuolinen hallinta vasta tekee yhtälö-käsitteen ymmärtämisen mahdolliseksi.

Kolmas merkittävä oppimiseen liittyvä näkökulma on edellä mainittujen semanttisten struktuurien toimiminen itsenäisinä eri kokoisina tietopaketteina (chunk). Oppimisen eteneminen on mahdollista vain, jos käsiteltävään asiaan ei joka kerta sitä käytettäessä tarvita samaa työmuistin kapasiteettia, vaan sen tarve vähenee vapauttaen kapasiteettia uuden ajattelulle. Objektikäsitteeseen verkoiksi linkittyneet semanttiset ylä- ja alakäsitteet voivat toimia tällaisten itsenäisten tietopakettien tavoin (vrt. Haapasalo 1992). Jos tiedot, taidot ja ongelmanratkaisussa käytettävät heuristiikat erotetaan toisistaan, joudutaan ongelmiin sekä työmuistin kapasiteetin että pinnallisten oppimistapojen kanssa. On pikemminkin harjoiteltu ongelmien ratkaisemista kuin opittu matematiikkaa ongelmanratkaisun kautta (mm. Pehkonen 1990, 1995; Schoenfeld 1992). Myös matematiikan sisältöjen opiskelu tulee nähdä ongelmanratkaisuna. Silloin opetussuunnitelman perusteiden yleistä ja sisältöosaa ei tarvitse nähdä erillisinä, vaan oppimiskäsitys toteutuu samanlaisena kaikilla tasoilla ja oppimisen strategiat siirtyvät samanlaisina riippumatta, opetellaanko matematiikan käsitettä, vai opitaanko matematiikan käsitettä soveltamalla sitä. Sen sijaan tulee huomata, että ei ole sama, opitaanko matematiikan avulla, vai opitaanko matematiikkaa.

Luku 7

Aritmetiikka algebran ymmärtämisen apuna

Mason (2007) korostaa yleistämisen merkitystä algebran oppimisessa. Hän pitää pyrkimystä yleistämiseen ihmisen ajattelussa ominaisena piirteenä. Mitä on yleistäminen? Mikä on yleistämisen ja abstraktiotason nostamisen ero? Määrittelen yleistämisen tarkoittavan toisaalta analogista tapausta eri kontekstissa ja toisaalta abstraktitason nostamista lainalaisuuksien siirtämisessä ajattelussa yleisemmälle tasolle. Ensinmainittu toteutuu algebran kontekstissa rakenteiltaan samanlaisissa lausekkeissa ja jälkimmäinen siirryttäessä esimerkiksi aritmetiikan rakenteista vastaaviin rakenteisiin muuttujan lausekkeissa.

Aikaisemmat tutkimukset ovat keskittyneet sanallisten ongelmien ratkaisuissa käytettyihin malleihin (esim. MacGregor & Stacey 1993), yhtäsuuruusmerkin käyttämiseen (esim. Kieran 1981), funktioiden piste-piste-muodosta funktion lain symboliseen muotoon siirtymisen tarkasteluun (esim. Ryan & Williams 1998), lineaaristen yhtälöiden ratkaisemiseen (esim. Linchevski & Herscovics 1994) tai funktioihin ja niiden kuvaajiin (esim. Herscovics 1989). Ruotsissa on tutkittu algebran osaamista suhteessa opetussuunnitelmiin (Olteanu 2000, 2001; Olteanu, Grevholm & Ottosson 2003). Useissa maissa on raportoitu kognitiivisesta kuilusta, joka aritmetiikan ja algebran välillä on todettu olevan (ks. esim. Bednarz, Radford, Janvier & Lepage 1992). Aihe on koettu niin tärkeäksi, että The International Comission on Mathematical Instruction (ICMI) on 12th ICMI kokouksessaan vuonna 2004 ottanut yhdeksi aiheekseen "The Future of the Teaching and Learning of Algebra".

Algebran eri esitysmuotojen ymmärtämyksellä on merkitystä opetukseen, koska opettajien käsitykset algebran sisällöistä ja algebran opettamisesta vaikuttavat heidän tapaansa opettaa (Attorps 2006). Vaikka opettajilla on koulukohtaisten opetussuunnitelmien taustalla samat opetussuunnitelman perusteet, poikkeavat heidän toteutuksensa sen näkemyksen perusteella, mikä käsitys heillä on algebrasta.

Peruskoulun algebran osaamisen Suomessa on todettu olevan proseduraalista osaamista (Hihnala 2005). Mitä ovat opittavat käsitteet ja käsitteellinen tieto algebrassa ja miten ne opitaan? Hassinen (2006) kysyy aiheellisesti, mikä yhteys on yhtälön algebrallisen ratkaisemisen osaamisella ja yhtälökäsitteen ymmärtämisellä? Edellyttääkö yhtälön ratkaiseminen yhtälökäsitteen ymmärtämistä, tai kääntäen, edellyttääkö käsitteen ymmärtäminen proseduurien hallintaa?

7.1 Perusteet algebralliselle ajattelulle

Kun uusi käsite muodostuu, on prosessi oppijalle luonteeltaan luova. Se ei voi olla toistava. Luvussa 5 käsiteltiin matemaattisen tiedon olemusta lähtien sen filosofisista perusteista. Algebrallisen tiedon syntyä voidaan tarkastella formalismin lisäksi platonismin tai intuitionismin näkökulmista. Lähdettäessä kummasta tahansa ajattelutavasta, tavoitteena on muodostaa mielikuva, joka vastaa käsitettä mahdollisimman hyvin ja joka auttaa oppilasta selittämään ongelmatilanteet oppijan mielestä riittävällä tasolla. Tieto ei ala käsitteistä, vaan käsitteet ovat mentaalisten prosessien tuotteita (Freudenthal 1996). Skeema-ajattelun mukaisesti käsitteen muodostuminen ei ole rakenteeltaan assosiaatioketju, jossa yksi jäsen tuottaa seuraavan, vaan se on useista rinnakkaisistakin proseduureista koostuva ominaisuuskimppu. Käsitteet ovat saarekkeita, joihin liitetään ominaisuuksia ja toimintoja. Käsitteen symbolina toimii sana tai sovittu merkki. Ajattelu ei kuitenkaan tapahdu sanoilla, vaan niiden merkityksillä, yleistyksillä ja deduktiivisessa ajattelussa symbolien rakenneketjujen johtamisella. Jotta alussa esitettyihin kysymyksiin voidaan vastata, seurataan esityksessä ajattelun kehittymistä aritmetiikasta algebraan Sfardin ja Tallin teorioiden pohjalta (ks. esim. Sfard 1994; Tall 1997).

Luvussa 6 käsiteltiin summalausekkeen kehittymistä laskutoimituksesta objektiksi. Aritmetiikassa tavoitteena on useimmiten saada lasketuksi lausekkeelle arvo. Tarkastellessaan algebran oppimisessa vastaavaa summalauseketta Jockusch ja McKnight (1978) havaitsivat, että yksi vaikeimmista asioista symbolista esitystapaa opeteltaessa on mieltää, mikä on proseduuri esimerkiksi lausekkeelle 3+x. Analogisena aritmetiikan kanssa sellaista ei ole.

Kuinka sitten algebraa voidaan oppia? Jotta aritmetiikka auttaisi algebran oppimista, tulisi esimerkeissä korostaa numeerisella tasolla lausekkeiden rakenteita, ei tulosta (Sfard 1995; Linchevski 1994). Oppilaan tulisi huomata lainalaisuudet riippumatta, mitä lukuarvoja tai suuruusluokkia käytetään. Ajattelu on tässä oppimisen vaiheessa algebran kehitysvaiheisiin rinnastettuna synkopoitua algebraa, mitä luonnehdittiin (luku 2) lyhenteiden käyttämisenä toistuviin määriin ja operaatioihin. Samoin on tapahduttava ajattelussa. Niin kauan kun oppilas jakaessaan lukua itsellään ajattelee algoritmia, ei lausekkeen rakenteellinen ymmärtäminen ole mahdollista. Vasta kun hän ajattelee lauseketta ”*joku* luku jaettuna itsellään”, rakenteet tulevat lukuarvoja tärkeämmiksi ja ajattelu yleisellä tasolla on mahdollista. Sana *joku* edustaa tässä muuttuvaa lukua, jota voi varioida termien efektien pysyessä samana. Algebrallisessa ajattelussa tavoitteena on vaikutukseltaan samanlaisten eri rakenteisten lausekkeiden rinnastaminen. Tall (2006) puhuu samasta *efektistä* (effect) verratessaan lausekkeita, joilla on sama vaikutus. Vaikka lausekkeet ovat proseduureina erilaiset, niillä voi olla samanlainen *efekti*-vaikutus. Analogisena Tallin prosept-teorialle Davis (1984) on määritellyt proseduurin vaiheittaisena algoritmina ja termin prosessi sisältävän useita erilaisia proseduureja, joilla on sama efekti. Algebrassa esimerkiksi $2(a+3)$ ja $2a+6$ ovat eri proseduureja, mutta efektiltään samoja (Tall 1997). Algebrassa on kysymys siitä, että nähdään efektiltään samojen vastaavuus.

7.2 Kirjainsymbolit ymmärtämisen apuna algebran oppimisessa

Algebraa kuvataan usein valtatienä korkeampaan matematiikkaan, ei vähiten siksi, että se on varustettu kielellä, jolla matematiikkaa ajatellaan.

Stacey ym. 2004

Sfard (1991, 1995) kuvaa teoriassaan (luku 6) kolmea vaihetta, jotka liittyvät algebran lausekkeen rakentamiseen. Ensimmäinen vaihe on retoriseen algebraan rinnastettavissa olevaa lukujen manipulointia toistuvina proseduureina. Toinen Sfardin teorian taso on tiivistäminen, missä prosessi tehdään mukautuvammaksi. Prosessin sujuva käyttö on tunnusomaista. Sfardin teorian kolmannessa askeleessa, reifikaatiossa, otetaan suuri ontologinen askel. Reifikaatiossa tulkitaan laskennalliset operaatiot pysyviksi objektimaisiksi entiteeteiksi (Sfard 1994). Ajallisessa kehityksessä näkyvät symbolisessa algebrassa kaikki Sfardin käsitteenmuodostuksen vaiheet; kolmessa askeleessa yksilö siirtyy operationaalisesta orientaatiosta – esimerkiksi näkökulmasta, että x+8 on proseduuri, rakenteelliseen orientatioon nähden lausekkeen x+8 objektina. Sfard, Kieran ja Herscovics viittaavat tämäntapaiseen problematiikkaan kuvatessaan vaikeuksia, joita opiskelijoilla on heidän siirtyessään aritmetiikasta algebraan (Herscovics 1989; Kieran 1989, 1992; Sfard 1991, 1994; Malara 1992).

7.3 Miten algebraa opitaan?

Mietittäessä algebran oppimista ja opettamista, tulee lähtökohdaksi tutkimuksen perusteella ottaa matemaattisen käsitteenmuodostuksen duaalisuuteen liittyvät teoriat. Tämä näkyy numerosymbolien yleistämisenä kirjainsymboleiksi, algebrallisten lausekkeiden proseduurimaista vahvistamista eri konteksteissaan ja algebrallisen lausekkeen kapseloitumista objektiksi. Rajoitan käsittelyni lähtökohdaksi aritmeettisen algebran käsittelemättä muita lähestymistapoja, kuten esimerkiksi monin kohdin hyödyllistä geometrista lähestymistapaa algebran oppimiseksi.

Käsitteenmuodostuksen teoriat näkyvät esimerkiksi Fosterin (1994) tutkimuksessa muodoltaan erilaisista lineaarisista yhtälöistä:

□ □ □ (A)

□ □□□ (B)

□□□ □ (C)

Aloittelija ymmärtää ne erilaisina proseduureina.Yhtälö (A) voidaan suorittaa millä tahansa yhteenlaskuproseduurilla. Yhtälö (B) vaatii vähintään ”päällelaskemis-proseduuria” ja yhtälö (C) vaatii tätä proseduuria ennen käytettäväksi yhteenlaskun vaihdannaisuutta. Yhtälöt (B) ja (C) ovat ekvivalentteja, mutta tarvitsevat eritasoista prosessointia. Prosept-ajattelun kehittyessä oppija ei näe eri proseduureja erillisinä, vaan siirtyy sujuvasti tarvittaessa efektiltään vastaavaan muotoon. Yleistetty aritmetiikka muodostuu näin oppijalle luonnolliseksi. Algebralliset ilmaukset on nähtävä objekteina, prosepteina, jotta niihin liittyviä proseduureja voidaan käyttää abduktiivisen ajatteluin tavoin käänteisesti. (Tall & Thomas 1997.)

Johdettaessa tästä yleisempiä algebrallisia rakenteita, kehitys voi tapahtua kahdella eri tavalla (Tall & Thomas 1997). Algebra voidaan käsittää kognitiivisen struktuurin laajennuksena ja toisaalta uudelleen konstruoimisena, mikä on kognitiivisesti vaikeampi (Harel & Tall 1991). Tämä johtaa kahteen erimuotoiseen algebraan, aritmetiikasta yleistetyn algebran laajentamiseen ja toiseen määritelmiin ja deduktiiviseen ajatteluun pohjautuvaan.

Lakien ja todistusten merkitys muuttuu riippuen kumpaa kehityslinjaa tarkastellaan. Ensinmainitussa lait liittyvät aritmetiikan operaatioihin, esimerkiksi yleistettyyn muotoon yhteen- ja kertolaskun vaihdannaisuudesta. Jälkimmäisessä uudet ominaisuudet johdetaan deduktiivisesti. Olen seuraavissa kappaleissa käsitellyt aritmeettistä algebraa ja deduktiivista algebraa vielä erikseen.

7.3.1 Aritmeettinen algebra

Kiinnostus algebrassa kohdistuu yleisellä tasolla oleviin rakenteisiin. Tähän tutustuminen ja ymmärtämiseen perustuva oppiminen on kuitenkin aloitettava konkreetista ympäristöstä, mikä tarkoittaa esimerkiksi numeerista kontekstia. Sfardin ja Linchevskin (1994) mukaan algebrallisten rakenteiden kehittyminen tulisi aloittaa operationaalisista (prosessi-orientoituneista) käsitteistä päätyen rakenteellisiin käsitteisiin. Väheksymättä geometrian merkitystä olen tutkimukseeni valinnut näkökulmaksi aritmetiikan osaamisen merkityksen algebran rakenteiden ymmärtämiseksi. Aritmetiikka on ensimmäinen ja resursseiltaan laajin matematiikan osa-alue alkeisopetuksessa. Siten sen merkitys algebran oppimiseen on suurin ja siksi myös luontevin. Aritmeettisten laskutoimitusten yhteydessä esille tullut (luku 6) prosept-käsite, joka kerää kaikki efektiltään samat proseduurit, voidaan yleistää myös algebran käsitteisiin.

Oppilaiden tulisi kehittyä käyttämään algebran lausekkeita joustavasti ja luovasti automatisoitumisen asteelle asti, koska muistikapasiteettia vaativa varsinainen fokus lausekkeiden käytössä on objektitasolla. Havainnollistavaa kontekstia mietittäessä tulisi huomioida, että sen tulee olla käyttökelpoinen kaikilla lukualueilla. Väärin muodostuneen tai muodostetun skeeman poisoppiminen on työlästä ja aiheuttaa tarpeettomia ristiriitoja.

7.3.2 Algebran objektitason ajattelu

Vaihtaminen operationaalisesta lähestymisestä strukturaaliseen lähestymistapaan objektitasolle ei ole riippuvainen, käytetäänkö numero- vai kirjainsymboleja, vaikkakin tutustuminen rakenteisiin tulisi aloittaa numerosymboleista. Enemmänkin on kysymys kyvystä nähdä prosessi (esimerkiksi ”lisää lukuun 5”) uutena entiteettinä, objektina ja kykynä operoida tällä objektilla (esimerkiksi ”lausekkeen arvo on 5+x”). Oppilas, joka ei kykene ajattelemaan strukturaalisesti, näkee esityksen x+5 vain laskennallisena proseduurina päätyen usein vastaukseen 5x (Sfard 1991). Oppilaat näkevät yhtäsuuruusmerkin signaalina tehdä jotain mieluummin kuin että se olisi yhtäsuuruus vasemman ja oikean puolen välillä (Kieran 1992, 398).

Objektitasoa olevia funktiota, mallintamista ja yhtälöitä on käytetty läpi vuosisatojen. Ne ovat kehittyneet pitkässä prosessissa. Koulumaailmassa yhtälön aikaista käyttöönottoa perustellaan motivoivilla seikoilla. Yhtälöratkaisun esille ottamista ennen algebrallisen käsittelyn joustavaa hallintaa tulisi harkita. Funktioissa, malleissa ja yhtälöissä algebrallinen lauseke on objektitasoa ja yhtälön rakenteen ymmärtäminen on Sfardin ja Tallin teorioiden pohjalta mahdollista vasta, kun oppilas käsittelee algebran lauseketta objektina.

Edellä on esitelty keinot algebran harjoitteluun yleistämällä proseduureja ja kapseloimalla ne objekteiksi. Näin rakennetaan ymmärrystä kirjainsymbolista eri käyttömerkityksissään. Näiden objektien (funktio, malli, yhtälö) rakentuminen ei ole hierarkista. Kuitenkin kaikki erilaiset aspektit ovat tarpeen algebran oppimisessa. Voisiko puhua Tallin termein algebra-proseptistä, mikä takaa joustavuuden siirryttäessä tarkastelussa yhdestä näkökulmasta toiseen?

7.3.3 Deduktiivinen algebra

Ihmisen tiedonkäsittely ei nojaa yksinomaan mielikuviin vaan myös kykyyn luoda ja käyttää symbolista informaatiota (Kaufmann 1985). Matematiikassa on myös järjestelmiä, joissa symboleihin liittyvät käsitteet määritellään huomattavan tarkasti niin sanottuihin luonnollisen kielen taustalla oleviin käsitteisiin verrattuna ja joissa prosessointi pidättäytyy tiukasti logiikan sääntöihin, määritelmiin ja käsitteiden välisiin suhteisiin. Päätteleminen kuuluu näihin. Päätteleminen luokitellaan usein deduktiiviseksi, induktiiviseksi, analogiseksi ja useiksi näiden kombinaatioiksi. Deduktio yhdistetään siihen, että päätelmä saavutetaan annettujen oletusten pohjalta määritelmistä ja niiden välisistä suhteista johtamalla yhden tai useamman päättelyketjun kautta. Tällöin liikutaan Tallin formaalis-aksiomaattisessa maailmassa. Deduktiivista päättelyä ei suoriteta pelkästään logiikan sääntöjen nojalla, vaikkakin se on looginen.

Malinen (1993) on tutkinut peruskoulun 3.–6. luokan oppilaiden (N=40) ajatteluprosesseja päättelytilanteissa. Malisen tutkimus kohdistui kouluoppimisen kannalta merkitykselliseen deduktiiviseen ajatteluun. Tutkimuksessa käytettiin Johnson-Lairdin & Byrnen (1991) mallia, jossa yhdistetään deduktiivinen päättely ja mentaalimallin teoria. Tarkasteltavassa ilmiössä tarvittavista käsitteistä ja niiden välisistä suhteista muodostetaan mentaalimalli. Looginen ajattelu on näiden yksilöllisten mentaalimallien selittämistä deduktion avulla. Deduktiivisessa päättelyssä ei pitäydytä pelkästään triviaaleissa johtopäätöksissä, vaan myös päätelmissä, jotka eivät välittömästi seuraa oletuksista. Johnson-Laidin & Byrnen raportissa (1991) edellä kuvattu ajattelu ilmeni kolmella tasolla:

1. Deduktiivinen päättely pohjautuu formaaleihin deduktion sääntöihin. Formaalit operaatiot voidaan esittää algoritmeina. (Genesereth & Nilsson 1987; Malinen 1993.)
2. Deduktio on analogian ja induktion ohella osana päättelyä käyttäen sisältö-spesifisiä sääntöjä.
3. Päätelmien johtaminen pohjautuu mentaalimallien teoriaan. Henkilö muodostaa oman mentaalimallinsa tilanteesta. Mentaalimalli-teorian mukaisesti deduktiivinen prosessi kehittyy kolmessa vaiheessa, ensiksikin käyttäen premissien informaatiota hyväksi ja konstruoiden sisäisen mallin, sitten tehden luonnosmaisen kuvauksen konstruoidusta mallista testaten sitä ja lopulta tutkien vaihtoehtoisia malleja. (Johnson-Laird & Byrne 1991; Malinen 1993.)

Malinen (1993) havaitsi oppilaiden ajattelussa seuraavanlaisia prosesseja; erityisesti yksinkertaisissa tilanteissa oppilaat päättelivät loogisesti suoraan oletuksista lähtien mentaalimallin teorian mukaisesti. Oppilaiden selitykset sisälsivät kuitenkin myös sellaista kausaalista selitystä, missä perustelut eivät olleet loogisia tai yhtäpitäviä malliteorian rakenteen kanssa. Joissain tapauksissa oppilaat johtivat uusia premissejä, mikä johti tehtävän kannalta vääriin päätelmiin. Tutkimuksessa formaaleihin deduktion sääntöihin perustuva tapa tuotti vain muutaman oikean vastauksen. Empiirisen aineiston pohjalta Malinen identifioi seuraavat kolme tasoa oppilaiden ajatteluprosesseille kyseisen kaltaisessa deduktiivisessa ajattelussa:

1. Päätelmä tehtiin useimmiten arvaamalla tai satunnaisilla yrityksillä. Oppilaille ei ollut muodostunut todellista ajattelun mallia.
2. Sisältösidonnaisten sääntöjen varassa tehtyä päättelyä havaittiin. Premissejä ei käytetty. Oppilaat olivat riippuvaisia sisältö-spesifisistä säännöistä ja tekivät omia yleistyksiään ja analogisia päätelmiään.
3. Oppilas kykeni kontrolloimaan tilannetta ratkaisten tehtäviä premissien pohjalta. Siitä huolimatta loogisten päättelyn sääntöjen käyttäminen ei ollut yleistä. Muutamassa tapauksessa oppilaat kykenivät arvioimaan valintojaan. Tässä tapauksessa oppilas operoi yhtäpitävästi mentaalimalli-teorian kanssa.

Yllä esitetyt ajattelumallit eivät ole todellisia kognitiivisia tyylejä, mutta ne kuvaavat eroja deduktiivisen päättelyn täsmällisyydessä mentaalimalleja käytettäessä. Käsitteiden merkitys korostuu. Perustelujen tarkkuus riippuu siitä, kuinka hyvin, mentaaliteorian mukaisesti, he onnistuvat toisen tai kolmannen vaiheen kehittymisessä. Malisen mukaan ongelma on siinä, osataanko lisätä oppilaiden perustelujen täsmällisyyttä. Kokemuksen myötä oppilaan kyky ymmärtää kieltä kehittyy, samoin kasvaa oppilaan työmuistin prosessointikapasiteetti, joten on mahdollista lisätä reflektiotaitoja omassa suorituksessaan. (Johnson-Laird & Byrne 1991; Malinen 1993.)

Malisen (1993) tutkimuksen nojalla sekä mentaalimallin teorian mukainen deduktiivinen päättely että myös yleisen algebran mukainen sisältö-spesifi päättely, joka toimii yleisten sääntöjen mukaisesti, ovat sopivia matematiikan opetukseen konstruktivismin näkökulmasta.

7.4 Symboleiden merkityksistä

Kirjainsymbolin rooli yhtälön ratkaisussa on toimia tuntemattomana. Koulualgebran tapauksessa symbolit esittävät usein lukuja, vaikkakin yleisesti algebrallisissa lausekkeissa kirjainsymbolit voivat olla useassa roolissa. Yhtälössä algebrallinen lauseke on objektina. Siinä kirjainsymbolin rooli muuttuu algebralliseen lausekkeeseen verrattuna. Myös näissä muuttujan eri merkityksien tulkitsemisessa on todettu koulumaailmassa olevan vaikeuksia (Olteanu 2003b, 4).

Yleistäminen voi nostaa abstraktiotasoa. Sitä edesautetaan symbolein tai loogisilla prosesseilla. Symboleilla on erilaisia merkityksiä. Schoenfeldin ja Arcavin mukaan kirjainsymbolia voidaan käyttää parametrin tavoin, tai se voi esittää yleistä lukua, kuten yleistettäessä lukuihin liittyviä rakenteita koskemaan koko lukualuettaan. Tuntematon on luku, jolla on tietty arvo ja jonka arvo ei muutu, sensijaan muuttuja voi saada eri arvoja. Nimensä mukaisesti muuttuja voi muuttua (Schoenfeld & Arcavi 1988). Cooper ja Williams (1997) sekä Stacey ja McGregor (1997) esittävät algebrallisen lausekkeen voivan tarkoittaa laskennallista prosessia tai tiettyä tuntematonta lukua. Näissä molemmissa tulkinnoissa kirjainsymboli esittää tuntematonta. Tulkinnoissa, että lauseke voi kuvata funktion lakia, on x muuttujana. Muuttujan tai tuntemattoman eri rooleihin tutustuminen edistää oppijaa saamaan monipuolisen käsityksen kirjainsymbolilla operoimiseen ja siten edistää joustavaa kirjainsymbolin käyttöä. Wheelerin (1996) mukaan eräs ”suurista ideoista” algebran oppimisessa ja opettamisessa on tunnistaa ja huomata erot vielä tuntematon numero –, yleinen numero – ja muuttuja-käsitteissä. Oppimisen kannalta merkittävä asia on tuoda esille, että algebra esiintyy sekä graafeissa, malleissa ja funktioissa sekä myös yhtälöissä. Ymmärtämällä, mikä on kokonaisuus ja missä suhteessa eri esiintymisen alueet ovat toisiinsa nähden, estetään sirpaleisuutta.

Luku 8

Tutkimusparadigma

8.1 Tutkimuksen taustasitoumukset

Kreikankielistä alkuperää oleva käsite paradigma (paradeignymi, παραδεικνυμι, osoittaa jonkin puolesta) tarkoittaa muun muassa mallia, johon perustaen jokin asia suoritetaan. Paradigmaa voidaan luonnehtia myös näkökulmaksi, jonka puitteissa toimitaan. Tiede voidaan käsittää yhdeksi makroparadigmaksi esteettisyyttä jäsentävän taiteen ja eettisiä arvopohjaisia tekijöitä jäsentävän henkisen paradigman lisäksi. Nämä makroparadigmat, kuten myös tieteen sisäiset mikroparadigmat, ovat ihmisen mentaalisen järjestelmän tuotteita. Muiden makroparadigmojen merkitystä oppimiselle poissulkematta tarkastelen tutkimuksessani oppimista konstruktivistisen paradigman näkökulmasta, missä oppilaalla olevalla tiedolla on kokemuksen kautta organisoitunut subjektiivinen rakenne.

Guban ja Lincolnin (1994) mukaan tutkimusparadigma sisältää tutkimuksen ontologiset, epistemologiset ja metodologiset sitoumukset. Heidän luonnehtimastaan neljästä pääkategoriasta tutkimukseni sijoittuu konstruktivistiseen tutkimusparadigmaan. Vaikka yksilön ajatellaan konstruoivan käsityksensä tiedosta ja todellisuudesta, on tieto samalla sidoksissa ympäröivään sosiaaliseen todellisuuteen (Guba & Lincoln 1994; Siljander 1995) välittävien artefaktien kautta. Tutkimukseni on epistemologialtaan konstruktivistinen. Tutkimukseni voidaan sanoa olevan myös ontologialtaan realistinen siten että tutkittavalla tiedolla ajatellaan olevan riippumaton merkitysrakenteensa kontekstissaan. Merkitysten ontologisen lähtökohdan voidaan katsoa edustavan positivistista traditiota, joka perustuu todellisuuden näkemiseen objektiivisena (esim. Guba & Lincoln 1994; Hatch 1995).

Tutkimusotteeni on hermeneuttinen tavoitteena kuvailla oppilaiden osaamista ja ajattelua tutkimuksen kontekstissa. Tällöin tulee merkitykselliseksi niin sanottu tutkijan kulttuurinen kompetenssi, millä tarkoitetaan tutkijan kykyä ymmärtää tutkimusaineiston ilmisisältöjä. Omassa tutkimuksessani tätä auttaa opetustyössäni saadut kokemukset tulkita oppilaiden kieltä.

Onko edellä kuvatussa ristiriitaa? Onko vuoropuhelu tutkimusparadigmojen välillä mahdollinen? Tutkimuksessani käytetyt positivismi ja konstruktivismi ovat tieteenfilosofisia koulukuntia, joilla on tieteenfilosofiset paradigmansa. Tätä rajankäyntiä olen tutkimuksessa toteuttanut huomioimalla, millä ontologisella ja epistemologisella eli tietoteoreettisella tasolla liikutaan pyrkien selvittämään, mitä voidaan tietää, millainen tieto on oikeaksi luokiteltavaa tietoa ja onko sen määrittäminen ylipäätään mahdollista.

8.2 Tietokäsitys

Tietokäsitys on yhteydessä todellisuus- ja totuuskäsitykseen, joten tietokäsityksen muutos on sidoksissa totuuskäsityksen muutokseen. Kuinka tiukasti ontologia säätelee epistemologiaa, metodologiaa ja symbolijärjestelmää? Tätä ja siirtymää kasvatustieteen metodeissa ja lähestymistavoissa Heikkinen ym. (2005) kuvaa todeten: ”Näyttääkin siltä, että ainakaan kasvatustieteen käytännössä laadullisia ja määrällisiä lähestymistapoja ei pidetä toisiaan poissulkevina ja yhteen sovittamattomina, vaikka filosofisella tasolla keskustelua on käyty erilaisten lähestymistapojen kytkemiseen liittyvistä ongelmista (Siljander 1992; Heikkinen 1997; Heikkinen ym. 1999; Heikkinen ym. 2005, 345). Tutkijat johtavat tutkimusasetelmansa tutkimuksen tavoitteista ja tutkimusongelmista, eivät niinkään tieteenfilosofisten näkökohtien perusteella” (Heikkinen ym. 2005, 345).

Perinteisesti tutkimuksessa on nojauduttu realistiseen oletukseen, jonka mukaan todellisuus on olemassa ihmisen ulkopuolella hänen tajunnastaan riippumatta. Tämä oletus on määrällisen tutkimusperinteen taustalla. (Heikkinen ym. 2005.) Oppimisessa tieto luonteestaan riippumatta on kuitenkin oppijalle subjektiivinen kokemus, mikä oletus on laadullisen tutkimusperinteen taustalla. Heikkinen (2005) mainitsee tämän näennäisen ristiriidan tulevan esille vasta sitten, kun tarkastellaan tarkemmin metodien tietoteoreettisia ja ontologisia taustaoletuksia. Kuitenkaan hänen mukaansa kasvatustieteen kenttää ei ole tarkoituksenmukaista erotella dikotomisesti laadulliseen ja määrälliseen tutkimukseen. Jyrkkä erottelu on hänen mukaansa metodologista naivismia, jonka erottelukyky ulottuu vain metodiselle pintatasolle. Oleellisempaa on pohtia metodien taustalla olevia ontologisia ja epistemologisia oletuksia. (Heikkinen ym. 2005, 350.)

Tutkimuksen metafora oppimisesta on triadinen tiedonluomismetafora. Siinä lähtökohtana on yksilön (konstruktivistinen paradigma) ja yhteisön vuorovaikutus, joka nähdään tapahtuvan erilaisten ihmisten tuottamien välittävien artefaktien kautta. Kohteena voi olla prosessi, jossa tuotetaan jotain uutta – esimerkiksi käsitteellisiä artefakteja (matemaattiset käsitteet). Teorialle keskeinen käsite, välittyneisyys, tarkoittaa sitä, että eri tiedon muotojen (kuten käsitteellisen tiedon, toiminnallisen tiedon ja hiljaisen tiedon) tai tiedon ja käytäntöjen välinen yhteenlinkittyminen otetaan jo lähtökohtaisesti huomioon. (Paavola ym. 2007, 31.) Uuden luomisessa olennaiseksi nousee eri tiedon muotojen, tai kuten tutkimuksessani, eri merkkiprosessien välinen vuorovaikutus. Merkkiprosessi (”semiosis”) on yksilön ja yhteisön merkin välityksellä tapahtuvaa toimintaa. Merkki vaikuttaa niin yksilöön kuin yhteisöönkin. Vaikka oppimisessa merkkien tulkitsijana on yksilö, niin tulkitseva toiminta tapahtuu aina yhteisöllisesti, koska merkkien perusominaisuus on niiden uudelleentulkittavuus, kohteellisuus. Voidaan puhua myös yhteisön muistista. Näin määritellystä ajattelutavasta, jossa yhdistyy realistinen ontologia konstruktivistiseen epistemologiaan, voidaan käyttää esimerkiksi nimityksiä realistinen konstruktivismi, konstruktivistinen realismi tai neorealismi (Heikkinen ym. 2005, 343–344).

Metodologisesti tutkimusotteiden yhdistäminen (mixed methods; combined reseach designs; Johnson & Onwuegbuzie 2004, 15, 24) sopii oppimisen kolmen metaforan metodiksi joustavuutensa perusteella kasvatustieteen piiriin kuuluvissa tutkimuskysymyksissä. Mixed methods-menetelmää voidaan pitää tutkimusstrategiana tai tutkimusmetodologiaan liittyvänä menetelmänä. Se sisältää sekä kvantitatiivisen että kvalitatiivisen aineiston keräämisen ja analysoimisen (Cresswell & Plano Clark 2007). Aineistoja yhdistämällä tutkija tavoittelee parempaa ymmärtämystä, kuin mitä aineistoja erikseen analysoimalla olisi ollut mahdollista tavoittaa. Kvantitatiivisten ja kvalitatiivisten menetelmien yhdistämisen taustalla on ajattelu, joka korostaa tutkimuskysymysten monipuolisesti huomioivaa, teoreettisen ja käytännöllisen tarkoituksenmukaisuuden ymmärtämistä metodivalinnoissa (ks. esim. Teddlie & Tashakkori 2006).

Mixed methods-tutkimuksessa on oleellista saada vastaus tutkimuskysymyksiin riittävän monipuolisesti sitoutumatta vain yhden paradigman puhdasoppisuuteen. Tässä tutkimuksessa paradigmojen yhteensovittaminen tarkoittaa sellaista tutkimusmetodologiaa, jossa kvantitatiivista ja kvalitatiivista analyysimenetelmää käytetään samassa tutkimuksessa. Ensimmäinen osa on koulumenestys (osaaminen) tilastollisin menetelmin ja toisessa osassa oppilaiden ajattelutapojen luokittelu laadullisin menetelmin, tässä tapauksessa fenomenografian keinoin. Lisäksi aineisto analysoitiin teorialähtöisellä sisällön analyysillä.

		PARADIGMAN AIKAULOTTUVUUS	
		Rinnakkainen	**Jaksollinen**
PARA DIGMAN PAINOTUS	**Saman-arvoinen**	**KVAL+KVANT**	**KVAL→ KVAN** **KVAN → KVAL**
	Dominoiva	**KVAL+kvant** **KVANT+kval**	**KVAL→kvan** **kval → KVAN** **KVAN → kval** **Kvan → KVAL**

Kuvio 5. Mixed methods-tutkimuksen nelikenttämalli Johnsonin ja Onwuegbuzien (2004, 22) mukaan.

Tutkimukseni sijoittuu aikaulottuvuudeltaan rinnakkaiseen, siten että kvantitatiivinen menetelmä on dominoiva. Mixed methods-menetelmän lähtökohta on saada mahdollisimman paljon tietoa tutkimuskohteena olevasta ilmiöstä yhdistämällä määrälliset ja laadulliset tutkimustavat tavalla tai toisella samassa tutkimuksessa (Onwuegbuzie & Leech 2006). Laadullisuus ja määrällisyys toistuvat niin tutkimusotteessa kuin myös aineiston keruussa, aineiston käsittelyssä ja tulkinnassakin. Tutkimusotteeni on yhdistelmä kvantitatiivisen ja kvalitatiivisen aineiston samanaikaista keräämistä ja rinnakkaista analyysiä (parallel mixed analysis). Näin mixed methods -lähestymistavalla on saatu lisäarvoa määrälliseen ja laadulliseen triangulaatioon (ks. esim. Mason 2007). Tutkimuksessani on abduktiivisia piirteitä laadullisen aineiston aihepiirin valinnassa. Abduktiivisilla piirteillä tarkoitan asetelmaa, johon liittyy jokin johtoajatus tai johtolanka (Aittola 1992, 18–19; Tuomi & Sarajärvi 2003, 93).

Luku 9

Tutkimuksen toteutus

Taito lukea ja ymmärtää eri muodoissa esitettyä matemaattista informaatiota on nykyajan teknistyneessä yhteiskunnassa keskeisessä asemassa (Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet 1994). Sama tavoite on kirjattu 1980-luvulla käytettyihin opetussuunnitelmiin sanoin, että tavoitteena on määrittää yhteiskuntamme keskivertokansalaisen matemaattinen tavoitetaso, tai vuoden 2003 PISA-arviointitutkimuksen tavoite tutkia matematiikan osaamista (mathematical literacy). Viimeksimainittu määritellään tässä yhteydessä ”oppilaiden kykynä hyödyntää matemaattisia tietojaan ja taitojaan suhteessa tulevaisuuden haasteisiin” (Kupari & Korhonen 2000, 10). Mathematical literacy on myös muissa yhteyksissä suomennettu termillä matemaattinen lukutaito.

PISA-arviointitutkimuksessa matematiikan osaaminen määritellään matemaattisten kompetenssien avulla, joihin kuuluvat muun muassa matemaattisen kielen käyttö, matemaattisen ajattelun taidot, mallintamistaidot ja ongelmanratkaisutaidot. PISA-tutkimuksessa kompetenssiajattelu liitetään ajattelun eri tasoilla tarkasteltaviin prosesseihin, joiden käyttöä sovelletaan viidellä tilannetyyppi-alueella (omakohtainen, opetuksellinen, ammatillinen, julkinen ja tieteellinen). (Välijärvi 2001.) Matemaattiseen ongelmanratkaisuun voidaan sisällyttää neljä osatekijää; resurssit, strategiat, kontrolli sekä emootiot ja uskomukset (Schonfeld 1985, 40). Yksilötasolla resursseilla tarkoitetaan sitä tietoa, taitoa ja strategioita, joita oppilas käyttää eri tasoisia ongelmia ratkaistessaan. Resurssit, samoin kuin kompetenssi, voivat olla sekä yksilöön että yhteisöön liittyvä käsite.

9.1 Tutkimustehtävä ja -asetelma

Luvussa 2 todettu näennäinen ristiriita matematiikan osaamisessa eri tutkimuksissa herättää kysymyksiä, millaista osaamista peruskoulun päättöluokan oppilailla on, millaista tarvitaan ja miten tällainen tavoiteltava osaaminen on saavutettavissa? Millaista on se osaaminen, mikä tulee esille PISA-arviointiraporteissa? Miten näkyy algebran harjoittelun osuuden vähentäminen matematiikan soveltamisen ja ongelmanratkaisun hyväksi kysyy Korhonen (2006) tarkoittaen vuoden 1994 opetussuunnitelman perusteita.

Tarkastelen algebran aluetta yleistettynä aritmetiikkana; rakenteiden, mallien ja säännönmukaisuuksien luomana lukujen ja niihin liittyvien proseduurien mallina (luku 7). Tämä on luonteva lähestymiskulma, koska lukuihin ja niiden peruslaskutoimituksiin käytettävä ajallinen resurssi kouluopetuksessa on suuri esimerkiksi vaihtoehtoiseen geometriaan verrattuna. Muut vaihtoehtoiset lähestymistavat ovat Bednarzin, Kieranin ja Leen (1996) mukaan ongelmanratkaisuperspektiivi, missä algebraa käytetään kompleksisten ongelmien ratkaisemiseen. Oppijan kannalta tämä on edellistä vaativampaa, koska lisävaikeutena algebran rakenteiden ymmärtämisen lisäksi on ymmärtää kirjainsymbolin erilaiset roolit lausekkeessa ja yhtälössä. Mallintamisperspektiivissä algebran avulla voidaan luoda malleja todellisista ja ajatelluista tilanteista. Algebran lausekkeiden avulla voidaan saada käsitys mallien rakentamisesta. Funktionäkökulmassa tulevat esille muuttujien väliset yhteydet. Kaksi viimeksimainittua esitystapaa eivät voi olla algebran lähtökohtana, kylläkin algebran sovellusalueita, koska ”algebran lainalaisuuksien” tulee kehittyä objektitasolle, jotta niiden joustava käyttö esimerkiksi edellä mainittujen mallien luomiselle olisi mahdollista.

Vielä 1980-luvulla kyky määriteltiin sisällön ja prosessin tuottamana osaamisena (ks. esim. Leino 1977). Tutkimus oli tältä osin perinteistä produkteihin kohdistuvaa kykytutkimusta. Kykyrakenteilla on yhteyksiä Leinon mukaan ajattelu- ja toimintaprosesseihin. Yksilöiden väliset eroavaisuudet voidaan kuvata eroina kyvyissä. Tällä tarkoitetaan, että erilaisen kykyrakenteen omaavat oppilaat eroavat toisistaan myös ajatteluprosessien suhteen siten, että jos oppilas ei ole pystynyt suorittamaan tietyn alueen tehtävää, oletetaan, että hän ei hallitse siihen tarvittavaa ajattelua (Leino 1977). Tutkimuksessani osaamista tarkastellaan produkti-tyyppisen osaamisen lisäksi kompetenssina, millä tarkoitetaan osaamista eri ajattelun tasoilla (luku 2). Näin määriteltynä kompetenssi-osaaminen on yhtenevä Mouwitzin (2003) määrittelemän osaamisen kanssa.

Yhtenä tutkimukseni peruslähtökohtana on ollut oppimisen tarkastelun kokonaisvaltaisuus (luku 3). Tämä on perusteltua siitä syystä, että toiminnallisuuden, yhteisöllisyyden tai konstruoinnin eri näkökohtien voimakas yksipuolinen painottaminen voivat viedä sijaa muilta oppimisen alueilta ja aiheuttaa vinoumaa, jolloin oppiminen kokonaisvaltaisena prosessina kärsii. (Resnick 1987, 1988, 1995; Resnick ja Hall 1998; Bereiter 2002; Hassisen 2006.) Toiminta on usein tärkeä lähtökohta oppimiselle, mutta Piagetia lainaten asian ajatteleminen on joskus toimintaa tärkeämpää. Samoin ymmärtäminen on vasta alku sille, että tietoa pystyy käyttämään uusissa tilanteissa. Oppiminen ja osaaminen ovat toistensa syitä ja seurauksia. Paitsi, että osaaminen on oppimisen tuotosta ja säätelee sitä, minkä laatuista osaamista on saavutettu, niin myöskin osaamisen tarkastelu antaa viitteitä oppimisstrategioista ja tulisi ohjata oppimistapahtumia.

Matemaattinen ajattelu on matemaattisten tietojen, taitojen ja strategioiden käyttämistä. Ajattelu tapahtuu osin käsityksillä ilmiöistä ja ominaisuuksista. Nämä käsitykset sidomme käsitteisiin. Näin käsitteenmuodostus, käsitteet ja käsitykset ovat keskeisiä oppimisessa. Tallin teoria (1999) matemaattisesta ajattelusta (luku 6) antaa teoreettiset mahdollisuudet tarkastella käsitteen kehittymistä perusosaamisen kontekstissa.

Laadullisesti tarkasteltuna oppilaiden käsitteellisen ajattelun syvyyden voidaan katsoa liittyvän siihen, ymmärtääkö lukija tekstin pintarakenteen, toisin sanoen sanat ja ilmaisut, vai tekstin syvärakenteen, eli tekstin ilmaiseman sisällön (Stern 1973). Lukija voi ymmärtää sanat ja lauseet ilman, että hallitsee tekstin sisältöä kokonaisuudessaan (Hjemquis et all 1982). Jos lukiessaan pystyy saavuttamaan sanojen merkitykset ja merkitysten väliset yhteydet, on ymmärtäminen jälkimmäisen kaltaista. Edellä kuvattuja ymmärtämisen kriteerejä voi tarkastella myös tiedon käytettävyyden kannalta. Tekstin sisällön ymmärtäminen on ”lievää” ymmärtämistä, josta ei seuraa automaattisesti tiedon käytettävyys. Vasta soveltavan ja analysoivan ajattelun tasot ja kyky käyttää tietoa uusissa konteksteissa ovat tae korkeamman tason osaamisesta. Luvussa 3 on käsitelty muistin asettamia rajoituksia ajattelulle sisällön ja ajan suhteen. Kapasiteetin lisäämiseksi voidaan käsitteitä, niiden välisiä suhteita ja erilaisia ratkaisustrategioita yhdistää skeemoiksi. Luvussa 10 tarkastellaan myös suuruusluokan arviointia osana tällaista skeemaa.

9.2 Tutkimusongelmat

Oppilaan formaalin ajattelun harjoittaminen ja ajattelun riittävän abstraktiotason saavuttamisen tarpeet nostavat algebran tärkeäksi matematiikan sisältöalueeksi perusopetuksessa. Tutkin, millaisia muutoksia on havaittavissa peruskoulun päättöluokan ikäryhmässä matematiikan osaamisessa konkreetilla ja abstraktilla alueella kahdenkymmenen vuoden aikana. Tarkastelen produktityyppisen osaamisen lisäksi ajattelun eri tasoja matematiikan kykyalueilla Wilsonin teorian (1971) mukaisesti.

Lisäksi tutkin käsitteenmuodostusta aritmetiikassa. Täsmennettynä tutkimustehtävänä on tutkia peruskoulun päättöluokkalaisten produkti- ja kompetenssiosaamista sekä matematiikan rakenteissa että käsitteissä aritmetiikka-algebra-alueella vuosina 1981 ja 1987 (myöhemmin: 1980-luku) sekä vuonna 2003 (myöhemmin: 2000-luku) sekä niissä havaittavia muutoksia. Aikadimensio tulee esille opetussuunnitelmatarkastelussa (luku 4):

Tutkimusongelma 1:

1. Millaisia muutoksia on havaittavissa peruskoulun päättöluokkalaisten aritmetiikka-algebra-alueen osaamisessa 20 vuoden aikana?
   - 1.1 Millaista osaaminen on aritmetiikka-algebra-alueella peruskoulun päättöluokalla 1980-luvulla?
   - 1.2 Millaista osaaminen on aritmetiikka-algebra-alueella peruskoulun päättöluokalla 2000-luvulla?
   - 1.3 Millaisia muutoksia on havaittavissa peruskoulun päättöluokkalaisten aritmetiikka-algebra-alueen osaamisessa 1980- ja 2000-lukuja verrattaessa?
   - 1.4 Millaisia muutoksia on havaittavissa peruskoulun päättöluokkalaisten aritmetiikka-algebra-alueen osaamisessa 1980- ja 2000-luvuilla verrattaessa eri sukupuolia?

Tutustumalla oppilaiden suorituksiin ja sitä kautta ajatteluun, voidaan oppilaita auttaa ja ohjata ymmärtämään niitä kohtia, jotka ovat kriittisiä tietyn alueen oppimisen kannalta. Määrällisen aineiston kanssa samanaikaisesti kerätyn laadullisen aineiston avulla tutkin oppilaiden ajattelua aritmetiikka-algebra-alueella Tallin käsitteenmuodostuksen teoriaan peilaten (luku 6). Luvussa 2 esitettyjen aikaisempien tutkimusten tarkastelussa on tuotu esille puutteita murtolukujen, algebran ja yhtälöiden käsitteellisessä ajattelussa. Tutkin 2000-luvun peruskoulun päättöluokan oppilaiden matemaattista ajattelua samoilla alueilla. Määrällisen tarkastelun lisäksi käsittelen laadullisesti murtolukuproseptin muodostumista.

Tutkimusongelma 2:

2. Millaista käsitteellistä ja matematiikan rakenteisiin liittyvää ajattelua on havaittavissa 2000-luvun peruskoulun päättöluokkalaisilla aritmetiikka-algebra-alueella?

9.3 Mittarin teoreettinen tarkastelu

Peruskoulun opetussuunnitelman perusteiden kognitiivisen tason tavoite voidaan yleisyydessään löytää eri vuosikymmenien opetussuunnitelmien perusteista. Oppilaita ohjataan omaksumaan yksilön kehittymisen ja muuttuvan yhteiskunnan tarpeiden kannalta tarkoituksenmukaisesti valittua matemaattista tietoa ja taitoa. Se, miten tämä eri ajanjaksoina on siirtynyt toteutettavaksi opetussuunnitelmaksi, vaihtelee. Sitä, millaisena tavoitteet ovat siirtyneet opetukseen 1970-luvun jälkimmäisellä puoliskolla, on Leino (1975 a,b) tutkinut kartoittamalla opettajien suhtautumista matematiikanopetuksen tavoitteisiin. Opettajien esille tuomista tavoitteista on muokattu kyseisenä ajankohtana seuraavat matematiikan opetuksen tavoitteet: oppilas oppii suorittamaan mekaanisia laskuja ja käyttämään matemaattisia peruskäsitteitä, hän oppii ymmärtämään matematiikan luonteen teoreettisena, mutta läheisesti käytäntöön liittyvänä rakennelmana, sekä oppii soveltamaan matemaattisia menettelytapoja käytännössä. Lisäksi oppilaan tulee oppia päättelemään johdonmukaisesti, sekä oppia ymmärtämään ja tuottamaan matemaattisin symbolein ja termein esitettyä tekstiä. Muut tavoitteet ovat operationalisoitavissa, mutta toinen tavoite on luonteeltaan prosessitavoite. Siihen voidaan katsoa kuuluvan määrittelyn aseman ymmärtäminen sekä sellaisten periaatteiden kuin eri laskulakien pysyvyyden ymmärtäminen (Paasonen 1979, 8–9). Tätä jaottelua on käytetty tutkimuksessa opetussuunnitelman tavoitteiden tulkinnassa.

Jälkimmäisen aineistoni keräämisaikaan, 2000-luvun alussa, on Mouwitz (2003) arvioinut opetuksen ja arvioinnin suhdetta tarkastelemalla opetussuunnitelmia kolmesta erilaisesta näkökulmasta. Esimodernilla näkökulmalla hän tarkoittaa normatiivista opetussuunnitelmiin kirjattua tietoa, joka siirretään oppijalle ja tiedon siirtymistä arvioidaan. Modernissa lähestymistavassa tiedon rooli on monimuotoisempi, oppiminen on mielen toimintoja ja ymmärtämistä painottavaa. Arviointi on omaksutun tiedon testaamista. Myöhäismodernissa lähestymistavassa tietoa ja sen arviointia tarkastellaan kompetenssina (ks. esim. Hassinen 2006). Hassisen (2006) analyysin mukaan suomalaisessa perusasteen opetussuunnitelmassa ei juuri näy myöhäismodernin tietonäkemyksen mukaista kompetenssiajattelua. Oppimista kuvataan myöhäismodernein käsittein, sen sijaan sisällöt ja arviointi esitetään esimodernin lähestymistavan mukaisesti.

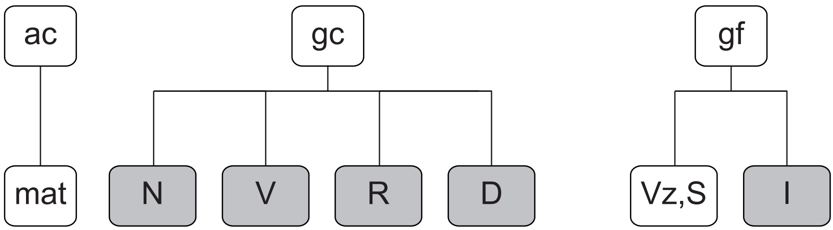
PISA-tutkimuksessa tavoitteet ja arviointi ovat kompetenssiajattelun mukaisia (Kupari & Törnroos 2002). Ongelmanratkaisu on siinä määritelty yksilön kykynä käyttää kognitiivisia prosesseja aitojen, oppiainerajat ylittävien ongelmatehtävien kohtaamisessa ja ratkaisemisessa, missä ratkaisuun johtava reitti ei ole välittömästi nähtävissä ja missä mahdollisesti käyttökelpoiset osaamisalueet tai oppisisällöt eivät rajoitu yksinomaan matematiikan, luonnontieteiden tai lukemisen arviointialueeseen (Välijärvi 2004). Viimeksimainitusta poikkeavasti määrittelen tutkimuksessani ongelmanratkaisun kontekstiksi matematiikan kontekstin ja tarkastelen kompetenssiosaamista seuraavassa kappaleessa esitettävillä matemaattisen kyvyn eri komponenteissa.

9.3.1 Kykyajattelu

1970-luvulla oppimista suunnattiin opetussuunnitelmilla tavoiteoppimiseen (luku 4). Tavoitteiden saavuttamista kaikkien osalta pidettiin keskeisenä.

Osaamiseen liitettiin konteksti kyky-käsitteellä, millä tarkoitettiin oppilaan toivottua käyttäytymistä joko tietyssä oppisisällössä tai yleisemmällä tasolla (Leino 1977). Tällä voidaan Leinon mukaan saada aikaan muutoksia myös opetussuunnitelmien yleisen tason tavoitteissa edistämällä matemaattisessa ajattelussa ja toiminnassa kokonaiskehitystä; yksilön kehittymisen ja muuttuvan yhteiskunnan tarpeiden kannalta tarkoituksenmukaisilla tietojen ja taitojen alueilla sekä itsenäisen matemaattisen tiedon hankintaan ja käyttöön tarvittavien työskentelytapojen ja menetelmien omaksumisessa. (Leino 1977.)

Tutkimukseni mittari rakentuu 1970-luvun kyky-ajatteluun ja se on Paasosen (1979) käyttämästä mittarista sovellettu mittari peruskoulun päättöluokalle. Tutkimuksessa käytetyt kyvyn komponentit ovat numeerinen laskeminen, matematiikan rakenteet, arviointi ja matematiikan soveltaminen sanallisissa tehtävissä. Näihin komponentteihin on päädytty yhdistämällä opetussuunnitelman käytännöntason tavoitteet ja Treumanin kyky-jaottelu (Kuvio 6), josta on otettu edellä perustellulla tavalla tietyt kyvyn komponentit.



Kuvio 6. Faktorianalyyttisesti määritetty matematiikan kykyrakenne (Treumann 1974, 316).

Kuvion 6 tummennetulla merkityissä komponenteissa ovat päättelyn komponentit numeerisen ja verbaalisen komponentin lisäksi. Treumannin (1974) mukaan gc on matemaattisen kykyrakenteen se tekijä, johon voidaan helpommin vaikuttaa. Sen komponentit ovat numeerinen tekijä (N), verbaalinen tekijä (V), joka ilmenee kyvyssä ymmärtää kirjoitettua tekstiä, yleinen päättelytekijä (R), joka kuvaa loogista päättelyä ja deduktiivisen päättelyn tekijä (D) vastaavassa järjestyksessä. Lisäksi hänen tutkimukseensa nojaten gf on verraten pysyvä kykyrakenteen komponentti, joka jakaantuu visuaaliseen ja avaruustajun tekijään sekä induktiivisen päättelyn tekijään (I). (Paasonen 1979.) Lisäksi Treumannin matemaattiseen kykyrakenteeseen kuuluu ainespesifi komponentti mat. Siihen voidaan ajatella sisältyvän tietyyn sisältöalueeseen kuuluva tietämys

Paasonen on yhdistänyt opettajien matematiikan tavoitteet (Leino 1975a) ja Treumannin kyky-jaottelun kyvyt neljäksi komponentiksi:

- kyky suorittaa numeerisia laskuja
- kyky muodostaa numeerisessa ja yleisessä muodossa esitettyjä matematiikan rakenteita sekä induktion että deduktion kautta
- kyky suorittaa arviolaskuja
- kyky soveltaa matematiikkaa käytäntöön.

Numeerinen kyky

Numeerisen kyvyn suhteesta matemaattisiin kykyihin on erilaisia käsityksiä; Krutetskii (1976) arvio laskutaitoon liittyvän kyvyn olevan verraten kaukana muista matemaattisista kyvyistä. On vastakkaisiakin käsityksiä, joiden mukaan laskutaito on tärkeä siksi, että matemaattinen kyvykkyys edellyttää laskutaitoa, mutta kääntäen laskutaito ei edellytä matemaattista kyvykkkyyttä. Tässä keskustelussa ei ole huomioitu kompetenssiajattelua.

Tutkimuksen numeerisen laskemiskyvyn testi (Num) sisältää ilman laskinta laskettavia nopeustestejä peruslaskutoimituksista kokonais- ja murtolukujen kontekstissa, sekä hallinnan syvällisyyttä soveltamalla niitä vaikeampiin laskutehtäviin. Testin aikarajoituksella tarkastellaan suoritusten automatisoitumisen tasoa, millä tarkoitetaan vakioisissa olosuhteissa tapahtuvan toiston ansiosta tehtävän suorittamisen helpottumista olennaisesti ja työmuistin kuormittavuuden vähentymistä (ks. esim. Schneider ja Shiffrin 1977; Saariluoma 1994). Tämä on oleellista tiedon käsittelyssä muistikapasiteetin rajoitukset huomioon ottaen. Automatisoituminen on välttämättömyys lyhytmuistin pienen kapasiteetin takia. Toimiessaan vain mekaanisena oppimiskeinona se saattaa luoda ”kontrollivapaana” virheellistä, pinnallista ja ymmärtämätöntä tietoa.

Yleinen päättelykyky

Matemaattinen ja looginen ajattelu liittyvät läheisesti toisiinsa. Matemaattinen ajattelu laajasti ymmärrettynä edellyttää taitoa ajatella loogisesti ja toisaalta se myös kehittää tätä taitoa. Tätä ajattelua voidaan sanoa päättelyksi eri muodoissaan. (Silfverberg 1999.) Silfverbergin (1999) mukaan päättely ymmärretään toimintana, joka tähtää johtopäätösten tekoon lähtöoletuksistaan käsin. Päättelykyvyn pääkomponentteina pidetään tässä tutkimuksessa yleistä päättelykykyä R (general reasoning), induktiivista päättelyä I (inductive ability) ja deduktiivista päättelyä D (deductive ability). Yleinen päättelykyky on Thurstonen mukaan loogista ajattelua, joka tulee esille kaikenlaisissa päättelyä vaativissa ongelmissa (Thurstone 1938). Yleisen päättelykyvyn testinä käytetään matematiikan soveltamista sanallisissa tehtävissä. Tähän testimuotoon on päädytty, koska tehtävämuoto oli oppilaille tuttu.

Induktiivinen päättelykyky

Induktiivinen päättelykyky etenee yksittäisistä tiedoista yleiseen ja vaatii siten todistuksen ollakseen pätevä. Omaksi induktiivisen päättelyn tyypikseen muun muassa Silfverberg erottaa analogisen päättelyn, jonka esimerkiksi English ja Sharry (1996) luonnehtivat strukturaalisen informaation siirroksi systeemistä toiseen. He ajattelevat eri tilanteissa olevien samankaltaisuuksien hahmottamisen ja yleistämisen perustuvan merkittävältä osin induktiiviseen päättelyyn. Samoin kuin Silfverbergillä (1999), heillä käsitteenmuodostus, yleisellä tasolla analogioiden hahmottaminen, metaforien ymmärtäminen ja käyttö, ongelmanratkaisu ja teorian muodostus ovat suurelta osaltaan induktiivista päättelyä. Treumannin tavoin erottelen kuitenkin tässä tutkimuksessa induktiivisen päättelyn deduktiivisesta päättelystä siten, että induktiivinen päättely nostaa yksittäisen tiedon abstraktiotasoa.

Deduktiivinen päättelykyky

Deduktiivisen päättelyn premissit ovat usein induktiivisia yleistyksiä (Mehtäläinen 1992, 43), missä annettujen yksityistapausten perusteella ajatellaan hahmotettavan yleinen sääntö (Leino 1977). Johnson-Laird ja Byrne (1991) kuvaavat deduktiivista päättelyä edellyttävien tehtävien olevan seuraavanlaisia:

- Deduktiivisen päättelyn tehtävät, joissa päättelyprosessin oletetaan noudattavan logiikan formaaleja päättelysääntöjä. Deduktiivisen päättelyn ajatellaan tällöin tarkoittavan niin sanottua ”johtamista” samalla abstraktiotasolla.
- Sisältöspesifit päättelytehtävät, joissa konteksteilla ja käsitteisiin liittyvillä teorioilla on merkitystä päättelyprosessissa.
- Mentaalimallien konstruoinnissa käytettävä deduktiivinen päättely sovellettaessa jotakin yleistä matematiikan tulosta johonkin erikoistapaukseen kontekstit ja siihen liittyvät premissit huomioiden.

Induktiivisen ja deduktiivisen päättelyn osaamisen tutkimiseksi käytetään tutkimuksessa matematiikan rakenteisiin liittyvien periaatteiden ymmärtämisen (NumRak) ja (YlRak) testien osioista muodostettuja osatestejä. Testin aikarajoituksella vaikutettiin siihen, että suoritukset testaavat automaattisoitumisen tasoa.

Hiebert ja Lefevre (1986) erottavat kaksi tasoa, joilla matemaattisen tiedon osien välisiä suhteita voidaan luoda ja tarkastella. Primaaritaso tarkoittaa sitä tasoa, jolla itse tietokin esiintyy. Tällöin tiedon osien välinen suhde ei ole abstraktimpi, kuin itse informaatio, jota kyseinen suhde yhdistää. Wilsonin tasoin puhutaan tuolloin YS-tasosta (ymmärtämis-soveltamistasosta). Termi abstrakti viittaa heidän mukaansa siihen, kun tieto vapautuu kontekstistaan joidenkin suhteiden rakentuessa korkeammalla, abstraktimmalla tasolla kuin se informaatio, jota ne yhdistävät. Tällaista tasoa he kutsuvat reflektoivaksi tasoksi. Wilsonin termein kyseessä on SA-taso (soveltamis-analysointitaso). Tämän tason suhteet ovat heikommin sidoksissa erityisiin konteksteihin (Hiebert & Lefevre 1986, 4–5).

9.3.2 Ajattelun tason mittaaminen tutkimuksen määrällisessä osiossa

Kognitiivisia tietoja ja taitoja voidaan jäsentää hierarkkisiksi taksonomioiksi. Vaikka ymmärtäminen on merkitty Bloomin taksonomian toiseksi alimmaksi tasoksi, niin koko Bloomin taksonomiaa voidaan pitää kokonaisuudessaan ymmärtämisen taksonomiana (ks. esim. Bereiter 2002; Joutsenlahti 2005, 121). Bloomin taksonomiaan pohjautuu matematiikan opetusta varten kehitetty Wilsonin (1971) taksonomia. Siinä matematiikan ajattelua kuvaavat tasot ovat laskutaito, ymmärtäminen, soveltaminen ja analysointi. Wilsonin tasot ovat ajattelussa saavutettuja tasoja, eivät kuvaa matematiikan opetuksen hierarkiaa. Jos esimerkiksi jokin tehtävä on alinta luokkaa, eli laskutaitoa vaativa tehtävä, kertoo taksonomia, että oppilas kykenee sen tasoiseen ajatteluun. Se ei tarkoita, että opetuksen tulisi edetä ”ensin laskutaidot ja sitten soveltaminen”, kuten usein arjessa näkee kuvailtavan.

Ymmärtämisen kriteerit jaetaan perusoppiainesmuistiossa (Muistio 1976) kolmeen tyyppiin; tekstin varsinaisen sisällön ymmärtäminen, havaitut muutokset lukijan käsiterakenteessa sekä tiedon käyttö soveliaalla tavalla. Tasot on sisällytetty seuraavassa esitettäviin Wilsonin tasokuvauksiin.

Peruste Wilsonin tasojen liittämisestä tutkimuksen määrällisen osion tarkasteluun juontuu ajattelun taitojen ja spesifisten sisältöjen vahvasta yhteydestä (ks. esim. Wilson 1971; Resnick ym.1992; Resnick & Hall 1998). Tutkimuksessa tarkastellaan kompetenssia edellä jaotelluissa kykyluokkien sisältöalueissa käyttäen Wilsonin (1971) taksonomian luokitusta:

- **Laskutaito:** Tosiasioiden tietäminen, termien tietäminen ja algoritmien osaaminen. Taso sisältää tyypillisesti yhden asian tehtäviä, missä ei edellytä päätöksentekoa eikä monimutkaista muistamista – tosiasioiden muistaminen riittää. (Merkitään L-taso) (Wilson 1971; Kangasniemi 1989; Joutsenlahti 2005, 120.)
- **Ymmärtäminen:** Kun ymmärtää jotakin, vaikkapa tietyn käsitteen, tämä ilmenee siinä, että pystyy perustelemaan tapaa, jolla käyttää käsitettä. Ymmärtämisen kriteerit ovat viime kädessä toimintaan liittyviä, käytännössä ilmeneviä. Ymmärtäminen on siinä mielessä suhteellinen käsite, että se aina edellyttää laajempaa kontekstia, viitekehystä, jonka puitteissa asia (käsite, tapahtuma, teko) ymmärretään. (von Wright

1996.) Ymmärtäminen on käsitteiden, periaatteiden, sääntöjen, rakenteiden tietämistä – ei vielä käyttäminen. (ks. esim. Wilson 1971; Kangasniemi 1989; Joutsenlahti 2005, 120.) Se, että oppilas kykenee omin sanoin puhumaan edellä mainituista asioista, osoittaa jonkin tason ymmärtämistä (Mouwitz 2003). Leino (1977) on selventänyt drillaavan ja ymmärtävän oppimisen rajaa liittämällä ymmärtämiseen kyvyn valita aines olemassaolevaan tietorakenteeseen sopivaksi. Matematiikan oppimisen keskeinen taso ja lähtökohta kehittyneemmälle ajattelulle on oppia ymmärtämään opittavana oleva aines. (Merkitään Y-taso)

- **Soveltaminen:** Probleemien ratkaiseminen aikaisempien esimerkkien nojalla, vertailujen tekeminen, tietojen eritteleminen sekä mallien ja symmetrioiden tunnistaminen ovat soveltamisen tasoa. Tämän tason erottaa edellisistä tasoista vaatimus hallita useita tehtävän ratkaisuun johtavia vaiheita peräkkäin. (ks. esim. Wilson 1971; Kangasniemi 1989; Joutsenlahti 2005,120.) Hallittavat asiat ovat entuudestaan tuttuja ja niiden käyttäminen uusissa tilanteissa tapahtuvana luovana ajatteluna tai eri abstraktiotasolla ei vielä onnistu. (Merkitään S-taso)
- **Analysointi:** Ongelmien ratkaiseminen, relaatioiden löytäminen, todistusten konstruoiminen, todistusten arvioiminen ja yleistysten muodostaminen ovat analysoivaa tasoa. Käytännössä on kuitenkin vaikea erottaa näitä kahta viimeksi mainittua luokkaa, soveltamista ja analysointia, toisistaan, sillä matematiikan soveltaminen edellyttää useimmiten myös esitettyjen tietojen ja niihin liittyvien relaatioiden erittelyä ja ymmärtämistä. Myös todistaminen saattaa liittyä peitetyssä muodossa monen soveltamistehtävän ratkaisemiseen. Tehtävä saattaa sisältää komponentteja eri tasoista. (Leino 1977.) Tehtävän ratkaiseminen tällä tasolla saattaa vaatia kykyä havaita uusia muuttujien tai käsitteiden välisiä suhteita, jotka eivät ole tuttuja aikaisemmista malleista. (Merkitään A-taso) (ks.esim. Wilson 1971; Kangasniemi 1989; Joutsenlahti 2005, 122.)

9.3.3 Fenomenografisen tutkimuksen lähtökohdat

”Jos kuunnellessasi lasta et vain totea hänen vastaustansa oikeaksi tai vääräksi, vaan kuulet tiedon pienetkin muruset, jotka ilmaisevat, mitä lapsi ajattelee, olet ottanut jättiläisen askeleen tullaksesi mestariopettajaksi etkä vain informaation jakajaksi.”

Easley & Zwoyer 1975, 25

Laadullinen tutkimus on aina jossain suhteessa ainutkertaista, perussääntöjä soveltavaa ja toisaalta myös uusia sääntöjä luovaa työtä (Alasuutari 1994, 18; Hirsjärvi, Remes & Sajavaara 1998, 161, 163). Marton on kehittänyt laadulliseen tutkimustraditioon kuuluvaksi oppimiseen ja oppijan käsityksiin liittyvän fenomenografisen tutkimusmenetelmän. Sanan etymologinen tausta tulee Aikion (1994) mukaan sanoista fenomeeni: kreikk. *phaino'menon* (ilmiö) ja *grafi* (kuvata). Fenomenografia on tutkimusmenetelmä, jossa ollaan kiinnostuneita siitä, miten ihmiset kokevat, tulkitsevat, ymmärtävät, käsittävät, havaitsevat tai käsitteellistävät reaalimaailman (Marton 1981, 178). Fenomenografian lähtökohtana on yksi maailma, josta ihmiset muodostavat erilaisia toisistaan poikkeavia käsityksiä. (Järvinen & Järvinen 2004; Marton 1994; Metsämuuronen 2003, 174–175.)

Käsitteiden ja tietorakenteiden ymmärtävä oppiminen mainitaan opetussuunnitelmissa tarkasteluajanjakson (noin 20 vuotta) eri aikoina. Se miten mainitut käsitteet, tiedon hankintaan ja käyttöön tarvittavien työskentelytapojen ja menetelmien omaksuminen, sekä analysoinnin menetelmät on käytännössä käsitetty ja miten niitä on toteutettu, on tapahtunut toteuttajatasolla. Tarkastelen tässä tutkimuksessa näiden tavoitteiden toteutumista oppilaiden produktien kautta.

Fenomenografisena tutkijana minua kiinnostavat erilaiset tavat selittää tarkasteltavaa ilmiöitä ja luokitella niitä. Erityisesti erot muiden käsityksiin halutaan luokitella. (Marton 1988; Uljens 1992). Sana ei viittaa suoraan tarkoittamaansa olioon, vaan käsitteen tai ajatussisällön kautta (Saariluoma 1998). Havaintokuva sitoo käsitteeseen merkityksen. Ihminen antaa käsitteille ja niiden välisille suhteille eri merkityksiä. Tällöin voidaan puhua käsityksistä. Siten käsitykset perustuvat merkityksiin ja ovat eri ihmisillä erilaisia riippuen aikaisemmista tiedoista ja kokemuksista. Kieli on sekä ajattelun että ilmaisun väline. Ihmisen tieto maailmasta on lukuisa määrä käsityksiä ja niiden välisiä suhteita. (Marton & Booth 1997.) Vuorovaikutukseen tarvitaan sanoja tai muita symboleja, jotta ajattelu ja ilmaisu olisi jäsenneltyä, kuitenkin vasta symboliin liittyvä merkitys antaa ajattelulle sisällön.

Fenomenografisessa tutkimustraditiossa ei kielletä, etteikö tutkijan oma subjektiivisuus, aikaisemmat tiedot, odotukset ja käsitykset vaikuttaisi hänen käsitykseensä tutkimuskohteesta. Tutkijana tiedostan omien lähtökohtieni vaikutuksen päätelmien tekoon. Tähän vaikuttaa opettaja-lähtökohtani. Vaikutus on saattanut olla kahtalainen.Toisaalta ennakkokäsitykseni ovat voineet estää uusien näkökulmien havaitsemista, toisaalta työskentelyni oppilaiden parissa on voinut antaa valmiuksia ymmärtää heidän käyttämiensä sanojen merkityksiä ja ajattelua. Tällainen tiedostettu hallittu subjektiivisuus on yksi fenomenografisen tutkimuksen luotettavuuden mitta. (Marton ym. 1988; Salner 1989.) Olen raportoinut oppilaiden vastauksia autenttisessa muodossa antaakseni lukijan tehdä omia johtopäätöksiään tulkinnoistani. Näin merkitys paljastuu lukijalle intersubjektiivisuuden kautta. Tällä fenomenografisella menetelmällä olen luokitellut oppilaiden murtolukujen peruslaskutoimituksiin liittyviä käsityksiä.

Rekonstruoin aineistoa taustatietojeni ja oman asiantuntemukseni varassa (ks. esim. Ahonen 1994) hyödyntäen hermeneuttista otetta, jonka tavoitteena on ymmärtää tutkimuksen kohteena olevaa asiaa jäsentyneemmin. Hermeneuttisessa tietokäsityksessä korostetaan kohteen merkityksellisyyttä ja kohteen suhdetta ympäröiviin tekijöihin (ks. esim. Pirie & Kieran 1994). Tutkimuksen menetelmään vaikuttaa se, millaista tietoa on tarkoitus etsiä ja keneltä ja mistä sitä etsitään (Hirsjärvi, Remes & Sajavaara 1998, 183). Käytän tutkimuksessa puhtaasti määrällisen ja laadullisen metodin lisäksi mixed methods-menetelmää yhdistäen määrällistä ja laadullista tutkimusta hermeneuttisella otteella. Hermeneuttisena tutkimukseen liittyvänä perustasona, esiymmärryksenä, voidaan tutkimuksessani pitää karkeaa analogiaan perustuvaa murtolukuproseptia. Toisena tasona on varsinainen tutkimus, joka kohdistuu ensimmäiseen tasoon täsmentäen esiymmärrystä oppilaiden ajattelusta. Tarkastelunäkökulmaa vaihtamalla käsitys tutkittavasta ilmiöstä tarkentuu hermeneuttisen kehän periaatteiden mukaisesti. (Giddens 1988; Salner 1989; Routio 1990; Säljö 1994.)

Tiedonalakohtaisuus on fenomenografiselle tutkimukselle toinen peruslähtökohta, mikä viittaa Brunerin (1994) teorioihin eri tiedonalojen tiedonmuodostuksen erilaisuudesta. Ontologinen perusta on matemaattisten käsitteiden ja siinä algebrallisen tiedonalan rakentumiselle ja kognitiivisen psykologian ajattelulle asettamat vaatimukset. Teoreettinen paneutuminen oppimisen teoriaan ja tutkittavaan tiedonalan muodostumiseen yhdistettynä pitkäaikaiseen työskentelyyn oppilaiden parissa antavat tarvittavan kokemuksen ja antavat riittävän tiheän verkon erilaisten ilmaisujen tunnistamiseen ja tulkitsemiseen.

Fenomenografisesta tutkimusmetodista poiketen olen lisäksi arvioinut ilmaisun merkitystä tutkimuksen kontekstiin liittyvän teoreettisen käsitteidenmuodostumis-tietämyksen kautta teoriapohjaisella sisällönanalyysillä. Tutkimuksessani projisoin teorian Tallin käsitteenmuodostumisen mallin avulla. Luokittelun lähtökohdat ovat teoriaosion luvussa 3 eritelty tutkimuksen teoreettinen tausta kokonaisvaltaisesta oppimisen prosessista ja luvussa 6 esitetty käsitteenmuodostuksen teoria. Tutkittavana tiedonalana on aritmetiikka-algebra-alue. Tulkitsen oppilaiden ajattelua teoriaosiossa kuvatulla tavalla matematiikan laadullisen ajattelun teoriaan peilaten etsimällä merkityksiä. Proseptillä (luku 6) on tutkimuksen laadullisessa käsittelyssä keskeinen rooli sekä teoreettisena konstruktiona käsitetiedon rakennekuvauksessa että tietorakenteen tutkimisen empiirisenä apuvälineenä tulkittaessa niitä merkityksiä, joita tutkittavat antavat käsitteille ja niiden suhteille. Tutkijana olen kokemukseni ja käsitysteni turvin tutkimusinstrumenttina teorian ja aineiston välillä.

9.3.4 Mittarin rakenne

Määrällinen tarkastelu

Määrällisessä tarkastelussa aritmetiikka-algebra-aluetta käsitellään mittarin viidessä testissä (ks. liite 2), jotka vastaavat tutkimuskysymykseen 1:

- Kyky suorittaa numeerisia laskuja (Num), missä tarkastellaan numero-osaamista rationaalilukualueella. Testiä voidaan pitää myös automatisoitumisen astetta mittaavana testin aikarajoituksesta johtuen.
- Kyky ymmärtää matematiikan periaatteita ja soveltaa niitä numeerisesti (NumRak). Aikarajoituksella varmistetaan, että suoritukset perustuvat rakenteiden tarkasteluun, eivät proseduureihin.
- Kyky ymmärtää matematiikan rakenteita yleisellä tasolla (YlRak).
- Kyky suorittaa arviolaskuja (Arv).
- Kyky soveltaa matematiikkaa sanallisiin tehtäviin (Sov).

Edellä mainittujen lisäksi mittariin on sisällytetty ajattelun tason mittaaminen, sekä opetussuunnitelmien vaikuttavuuden arvioiminen tarkastelujaksolla:

- Kompetenssiajatteluun liittyvä osaaminen tulee esille mittarin kaikissa testeissä Wilsonin tasoilla arvioituna.
- Opetussuunnitelman muutosten vaikutusta osaamiseen arvioidaan mittarin eri osien raportoinnin yhteydessä.

Testien alkuun jätettiin helppoja osioita tehtävien vaikeutuessa vähitellen. Vaikka näin alennettiin laskennallista reliabiliteettia, tuntui menettely perustellulta. Testit saatiin lähemmäksi oppilaille tuttuja koulukokeita, lisättiin motivaatiota yrittää osioita, torjuttiin osaltaan koepelkoa ja palveltiin yleisesti koulun kasvatustavoitteita. Vertailuaineistona on vuosina 1981 ja 1987 kerätty 351 oppilaan aineisto peruskoulun päättöluokalta. Testit tehtiin kokonaisuudessaan ilman laskinta.

Numeerisen kyvyn testiä (Num), joka on produktityyppinen sisältäen numeerisia laskutoimituksia positiivisilla ja negatiivisilla rationaaliluvuilla, voi pitää päässälaskutestinä (mental arithmetic), koska instruktiolla vastausaika oli rajoitettu viiteen minuuttiin (liite 1, instruktio). Myöskin testin voidaan samasta syystä ajatella mittaavan työmuistin kapasiteettia ja tiedon automatisoitumisastetta sekä hallinnan syvällisyyttä vaikeampien päässälaskujen sovelluksissa. Testin osioista (Num1–Num25) annettiin pisteitä 1, 2 tai 3 sen mukaan, oliko vastaus oikein vai väärin, tai puuttuiko tehtävän ratkaisu. Numeerisen laskemiskyvyn pistemääräksi annettiin osioista saatu pistesumma.

Numeerisessa muodossa olevia rakenteita (NumRak) testattiin 20:llä tosi-epätosi-väitteellä. Aikarajoituksen avulla varmistettiin, että oppilaat suorittivat arviointeja, eivätkä käyttäneet algoritmeja. Testin osioista (NumRak1 – NumRak20) annettiin pisteitä 1, 2 tai 3 sen mukaan, oliko vastaus oikein vai väärin, tai puuttuiko tehtävän ratkaisu. Testiin liittyi neljän minuutin aikarajoitus.

Yleisessä muodossa olevia rakenteita testattiin osioilla (YlRak1-YlRak9). Jokaisessa osiossa oli vastausvaihtoehtoja viisi. Yleistä muotoa olevien rakenteiden pistemääräksi annettiin osioista saatu oikeiden vastausten määrän muodostama pistesumma. Eri osioita analysoimalla saatiin tietoa oppilaan ajattelusta. YlRak testikokonaisuuden muodostavat yhdeksän väitettä. Testiin liittyi viiden minuutin aikarajoitus.

Arviolaskennan kyvyn testinä (Arv) käytettiin lukujen ja laskutoimitusten vastausten suuruusluokan arviointiin liittyvää testiä. Aikarajoituksen avulla varmistettiin, että oppilaat suorittivat arviointeja, eivätkä käyttäneet algoritmeja. Testin osioista (Arv1 – Arv10) annettiin pisteitä 1, 2 tai 3 sen mukaan, oliko vastaus oikein vai väärin, tai puuttuiko tehtävän ratkaisu. Osioissa, joissa oli useampia vaihtoehtoja, kirjattiin annetun vastausvaihtoehdon numero. Arviointikyvyn pistemääräksi annettiin osioista saatu pistesumma. Arvioinnin testissä 10 väitteen tulkitseminen viiden minuutin aikarajoituksella varmistettiin, että tehtävät suoritettiin arvioimalla, ei algoritmisella laskemisella.

Yleisen päättelykyvyn testinä on sanallisessa muodossa oleva osioiden (Sov1-Sov6) muodostama testi, jonka osiot pisteytettiin 2, 1 tai 0 tai -1 sen mukaan, oliko vastaus täysin oikein, osittain oikein vai väärin, vai puuttuiko se kokonaan Jos ratkaisuperiaate on oikea ja väärä vastaus johtui pienehköstä laskuvirheestä tai jos laajemman tehtävän periaate oli selvästi oivallettu vaikka tehtävää ei oltu osattu suorittaa, annettiin tehtävästä yksi piste.Yleisen päättelykyvyn pistemääräksi annettiin osioista laskettu pistesumma. Testiin liittyi 17 minuutin aikarajoitus.

Testit 1 ja 5, Num ja Sov, olivat tuottamistason tehtäviä, mittarin testit 2–4, missä arvioidaan matematiikan rakenteiden osaamista numeerisella ja yleisellä tasolla sekä numeerisen suuruusluokan arviointia testeillä NumRak, YlRak ja Arv olivat tunnistamistason tehtäviä

Tutkimuksessa tarkastellaan edellä esitettyjä matemaattisia kykyjä aritmetiikan ja algebran kontekstissa Wilsonin tasojen mukaisissa luokissa. Tällöin saadaan matriisimainen esitystapa, missä toisena dimensiona ovat tarkasteltavana olevat kykyluokat ja toisena käyttäytymistä kuvaavat tavoiteluokat. Tavoiteluokat on saatu yhdistämällä Wilsonin ajattelun tasot ja Leinon vuonna

1977 peruskoulun opettajien tutkimuksessaan saamat luokat opetussuunnitelmien tavoitteiden tulkinnoista:

Mittari:	*Num. testi*	*Rakenteet, laskulait, numeerinen taso*	*Rakenteet, laskulait, yleinen taso*	*Arviointi*	*Sovellustehtävät*
Kyvyn komponentit	N	D	D, I	N, R	N, V, R
Laskutaito, peruskäsitteet	x	x	x		
Ymmärtäminen, kielenkäyttö	x	x	x	x	x
Soveltaminen		x	x	x	x
Analysoiminen, uuden luominen		x	x	x	x

Kuvio 7. Mittarin matriisirakenne.

Wilsonin mallin tasojen erotteleminen ei ole yksikäsitteistä, koska toisen opiskelijan analysointitason tehtävä voikin olla toiselle opiskelijalle entuudestaan tuttu soveltamistason tehtävä. Tästä syystä käytän pelkistettyä tehtäväluokitusta. Olen erottanut laskutaidon tason omaksi luokakseen tutkimustehtävän luonteen takia,

1. **L**askutaito (**L**-taso) – algoritmia ei tarvitse osata valita, käsitteen tietäminen riittää
2. **Y**mmärtäminen (**Y**-taso) – käsitteen valitseminen ja käyttäminen
3. **Y**mmärtäminen/**S**oveltaminen (**YS-**taso) – useiden vaiheiden peräkkäinen käyttäminen
4. **S**oveltaminen/**A**nalyysi (**SA**-taso) – luovuus.

Wilsonin tasot näin luokiteltuina eivät välttämättä kerro yleispätevästi oppilaan yleisestä ajattelutasosta (vrt. esim. Silfverberg 1999), vaan pikemminkin voidaan luokitella tehtävien vaikeusastetta ja siten arvioida, minkä tasoista kognitiivista ajattelua tehtävän ratkaiseminen vähintään edellyttää. Oppilaan matemaattisen ajattelun tasoa voidaan arvioida eri sisältöalueilla poissulkevasti. Alimmilla tasoilla korostuvat faktojen ja algoritmien käyttämiseen liittyvät taidot. Keskimmäisillä tasoilla opiskelija hallitsee proseduureja ja kykenee sekä siirtämään että soveltamaan niitä analogialtaan samanlaisissa tilanteissa. Ylimmillä tasoilla tarvitaan käsitteellistä tietoa ja strategiatietoa ongelmanratkaisutilanteissa. (Joutsenlahti 2005, 123.) Wilsonin tasot kuvaavat osaamiseen liittyviä ajattelun tasoja tietyssä kontekstissa kompetenssimerkityksessä. Vaikka proseptia kuvatessa käytetään samansuuntaisia sanoja, kuvaa se kuitenkin tietyn käsitteen muodostumiseen liittyviä proseduureja ja prosesseja, ja siten Wilsonin luokat ja proseptin vaiheet eivät ole sellaisinaan vertailukelpoisia.

Laadullinen tarkastelu

2000-luvun mittarissa on osio, missä oppilaat omin sanoin kuvaavat aritmetiikan ja algebran alueen käsitteitä ja toimintoja. Tämä mahdollistaa oppilaiden käsitysten seuraamisen mainituilla alueilla. Näin saadaan viitteitä oppilaiden ajattelusta. Tutkimus pyrkii valottamaan sitä, miten oppilaat muodostavat käsityksensä aritmetiikan ja algebran alueeseen kuuluvista käsitteistä, toiminnoista ja niiden merkityksistä ja millaisia laadullisia eroja tässä esiintyy. Konstruktivistisen oppimiskäsityksen näkökulmasta tällaista oppilaan muodostamien todellisten merkitysten tutkimusta pidetään keskeisenä, koska näiden oppilaiden omien konstruktioiden tulisi olla lähtökohta uuden oppimiselle (Silfverberg 1999). Fischbein ym. (2003) korostaa myös tarkastelua eri näkökulmista toteamalla, että kaikessa matematiikanopetuksessa opettajan on tärkeää ymmärtää ne vuorovaikutukset, jotka vallitsevat ymmärtämiseen, muistamiseen ja ongelmanratkaisuun liittyvien intuitiivisten, formaalisten ja proseduraalisten näkökohtien välillä. Jos intuitiiviset ajatukset hänen mukaansa sivuutetaan, ne jatkavat kuitenkin vaikuttamistaan oppilaan ratkaisuprosesseissa sivuttaen teoreettiset perustellut ajatukset. Tämä vaikutus kontrolloimattomana häiritsee yleensä matemaattista ajatteluprosessia. Jos taas formaali aspekti hylätään ja luotetaan pelkästään intuitiivisiin argumentteihin, se mitä opetetaan, ei ole matematiikkaa. (Fischbein 2003.) Silloin premissien huomioiminen ja aukoton johtaminen voivat jäädä toteutumatta.

Esityksissään Tall (2004) on laajentanut prosept-teoriansa teoriaksi matematiikan kolmesta maailmasta ja sen osana tähdentänyt kahden asian käsitteisiin liittyvää rinnakkaisuutta; havaintoihin tai mielikuviin perustuvien argumenttien vaikutuksien ja prosessin sisältämien proseduurien ilmentymien eli proseptien yhteyttä. Proseduuri on step-by-step-algoritmi, jossa yksilö käy läpi kunkin askeleen ennen seuraavaa. Proseduurin kehittyessä ja otettaessa käyttöön erilaisia strategioita prosessi kehittyy eri ajassa ja vaihtelee eri ihmisillä. Tutkimuksessani luokittelen fenomenografian keinoin oppilaiden ajattelua murtolukualueella. Lisäksi tarkastelen teorialähtöisellä sisällönanalyysillä, missä prosessin vaiheessa peruskoulun päättöluokkalaiset ovat murtolukualueella.

Tall (2004) käsittelee matematiikan kolmea maailmaa laadullisen ajattelun mallissaan. Käsitteellis-havainnollisessa maailmassa (conceptual-embodied world) intuitionismin periaatteet toteutuvat havaitsemisen osalta esimerkiksi siten, että numeroa ”viisi” ei tässä teoriassa pidetä objektina, vaan mielikuvaa ”viidestä sormesta” voidaan pitää havaittuna objektina. Numerosymbolit, kuten numero ”viisi” mahdollistavat ajattelun vaihtamisen joustavasti mentaalisesta käsitteestä mentaaliseen prosessiin maailmassa 2. Tätä prosessia tarkastelen tutkimukseni laadullisessa osiossa kokonais- ja murtolukujen peruslaskutoimituksien kontekstissa. Käsitteillä on tärkeä merkitys asioiden jäsentämiseen ja keskustelun mahdollistamiseksi. Joustavuutta lisää tässä maailmassa käsitteiden monipuolisuus. Proseptuaalis-symbolista maailmaa (proseptual-symbolic world) eli Tallin toista maailmaa luonnehditaan toiminnan (laskemisen) maailmaksi, missä toiminnalliset skeemat kootaan prosepteina käsitteiksi (sisäistetystä prosessista tulee objekti), joiden argumentit perustuvat proseduraalisiin algoritmeihin (Tall 2003).

Tutkimuksessani analysoin, millä tasolla oppilaan ajattelu on edellä kuvatussa prosessissa viiden tehtävän avulla, joissa oppilas omin sanoin kuvaa laskutoimituksiin liittyviä merkityksiä (luku 10). Tutkimuksen laadullisessa osiossa tarkastelen aineistossa alkeisproseptin esiintymistä kolmen komponentin yhdistelmänä; matemaattisen objektin ja sitä kuvaavan symbolin tulkintaa joko prosessina tai objektina. Tässä prosept määritellään yhdistelmänä alkeisprosepteistä, joilla on sama objekti. (Gray & Tall 1994; Tall ym. 1999.)

Koska tutkimuksen lopullinen teoria muotoutuu vuorovaikutuksessa aineiston kanssa, etenee tutkimus spiraalina. Tutkimuksessani teoria laajenee oppilaiden käyttämien strategioiden luokitteluna ja toisaalta teorian laajentamisena toisen kertaluvun perspektiivistä kolmannen kertaluvun perspektiiviksi.

9.4 Tutkimuksen suorittaminen

9.4.1 Esitestaus

Mittarin määrällisen osion esitestaus suoritettiin yhdessä peruskoulun päättöluokan laajan kurssin ryhmässä vuoden 1980 lopussa. Oppilaille kerrottiin, että kyseessä on tutkimukseen liittyvä esitestaus ja lopullinen mittari laaditaan heidän suoritustensa perusteella. Testaustilanteessa tarkkailtiin eri testeille laadittujen aikarajoitusten ja instruktion paikkansapitävyyttä sekä oppilaiden suhtautumista eri osioihin. Esitestauksen lisäksi pyydettiin kymmeneltä peruskoulun, normaalikoulujen ja opettajankoulutuslaitoksen matematiikan lehtorilta arviota testistä kirjallisesti. Näiden perusteella numeeriseen ja sovelluskyvyn testiin lisättiin tehtäviä. Numeeriseen siksi, että parannettiin testin automatisoitumista mittaavaa elementtiä. Sovelluskyvyn testiin siksi, että oppilaille riittäisi koko ajalle tekemistä. Prosenttilaskua helpotettiin, koska esitestauksessa havaittiin oppilaiden haluttomuus laskea vaikealta näyttäviä tehtäviä. Vuoden 2003 mittarissa kahden sanallisen tehtävän aihealuetta on muutettu siten, että ne vastaavat paremmin nykypäivää; sähkeiden määrä on vaihdettu tekstiviestien määräksi ja perunasäkit karamellipusseiksi. Esitestauksen ja kyselyn perusteella laadittiin lopulliset testit (liite 2). Lisäksi vuoden 2003 testejä kasvatettiin ajallisesti siten, että loppuun liitettiin testi, jossa oppilaat omin sanoin kuvailivat käsityksiään matemaattisista lausekkeista ja käsitteistä. Laadullisen osion tehtäviä olen testannut lukuvuoden 2002–2003 aikana yhdessä oppilaitoksessa.

9.4.2 Testin suorittaminen

Testauskouluiksi hankittiin 1980-luvulla sekä kaupunki- että taajamakouluja (N=351) ja yksi erikoiskoulu. Vuoden 2003 vertailuaineisto (N=417) hankittiin samanlaista jakaumaa noudattaen. Jokaisesta koulusta oli tavoitteena saada testiin kyseisen koulun kaikki opetusryhmät vuonna 1981, jotta se olisi vertailukelpoinen myös tasokurssien poistamisen jälkeen mahdollisesti suoritettavassa uusintamittauksessa. Tässä onnistuttiin aikataulupäällekkäisyyksistä johtuen yhtä ryhmää lukuunottamatta. Tämä ei vaikuttane tuloksiin, koska kyseessä ei ollut erityisryhmä ja siten poisjäännin ei voi olettaa vaikuttavan vinouttavasti tuloksiin.

Testien valvonnan suorittivat pääasiassa opetusryhmien omat opettajat heille annetun kirjallisen ohjeen mukaan (liite 1). Vuonna 2003 uusintamittauksissa valvonnan suorittivat pääasiassa opetusryhmien omat opettajat sekä yhdessä testauskoulussa tutkija. Valvonnan suorittanut opettaja raportoi testin sujumisesta ja viisi testipaperia poistettiin tutkimusaineistosta näiden raporttien perusteella, jolloin aineiston koko on 412. Oppilaille kerrottiin testiin liittyvän tutkimuksen luonteesta. Paperit jaettiin ennen testin alkua pöydille nurin päin ja painotettiin, ettei uutta sivua saa kääntää näkyville ennen aikarajan loppumista. Ajoista huolehti valvova opettaja. Tutkimus on kaksiosainen. Ensimmäisessä osassa produktityyppisestä tutkimusaineistosta kartoitetaan matematiikan osaamista aritmetiikka-algebra-alueella vuosina 1981, 1987 ja 2003. Vuoden 1987 aineisto on pienuutensa tähden yhdistetty vuoden 1981 aineestoon.

Tutkimus on luonteeltaan puolistrukturoitu deskriptiivinen tutkimus. Kokeellisessa määrällisessä asetelmassa selvitetään edellä kuvattujen kyvyn komponenttien määrällistä eroa. Koska muuttujat ovat välimatka-asteikollisia tai muunnettavissa dikotomisiksi, voidaan käyttää tavanomaisia keskiarvojen eroja mittaavia merkitsevyystestauksia.

Oppilaiden suorituksiin vaikuttivat paitsi tiedon määrä, laatu, niin myös automatisoitumisen aste, sillä aikarajoitteisessa testissä suoritus edellyttää kapasiteettia säästävän automatisoituneen tiedon tai muistissa olevan asian käyttämistä. YlRak testissä vastausvaihtoehtoja eri osioissa on viisi, siksi suorituksen oikeellisuuden lisäksi testiosioihin annetut vastaukset tarjoavat vastausvaihtoehtojen runsauden vuoksi myös mahdollisuuden tarkastella oppilaiden tyypillisimpiä virhetulkintoja (vrt. Silfverberg 1999, 137). Vaikka rajoitettu määrä vastausvaihtoehtoja jakaa karkeasti oppilaiden ajattelua käytettyihin luokkiin, niin toisaalta kynnys vastata tunnistustasolla alenee verrattuna tuottamistasoon.

9.5 Tutkimusmenetelmät

Tutkimuskysymykset määrittävät käytettävät menetelmät. Näin myös mixed methods -menetelmässä. Tutkimuskysymyksillä on mixed methods–menetelmässä kuitenkin erityisen suuri merkitys, koska ne sisältävät sekä määrälliseen että laadulliseen tarkasteluun johtavat tutkimuskysymykset samassa kyselyssä. Kvantitatiivisia tutkimuskysymyksiä on tutkimuksessani käytetty sekä kuvailevaan että vertailevaan analyysiin. (Onwuegbuzie & Leech 2006.) Vastaavasti laadulliset tutkimuskysymykset ovat tutkimuksessani lähtöoletukseen liittyviä avoimia tehtäviä, joilla etsin vastausta kysymyksiin ”mitä”, ”kuinka” ja teorialähtöisellä sisällönanalyysillä kysymykseen ”kuinka paljon”.

9.5.1 Määrälliset tutkimusmenetelmät

Teoriapohja, osaaminen Wilsonin tasoja käyttäen, on ohjannut 1980-luvulla hankitun empiirisen aineiston lisäksi vuonna 2003 hankitun aineiston käsittelyä. Muutoksia arvioidaan tavanomaisten määrällisten tilastomenetelmien, ristiintaulukoinnin, tilastollisten testien (t-testi, khin neliö-testi ja d-luku) ja tunnuslukujen lisäksi seuraamalla parhaan ja heikoimman neljänneksen suorituksia, joita vertaamalla eroavaisuudet saattavat olla helpommin nähtävissä. Produkteissa olen toteuttanut tilastollisen käsittelyn lisäksi mixed methods-menetelmän mukaisesti laadullista virheanalyysiä; alustavan papereiden tarkastelun jälkeen olen luokitellut hahmottuvien keskeisten osioiden tyypilliset virheratkaisut. Monivalintaosiossa on kahdesta kuuteen vastausvaihtoehtoa, joten ratkaisutapaluokittelu vaihtelee osiokohtaisesti. Vaikka näin ei päästä arvioimaan tuottamistasoisia vastauksia, kynnys vastata valitsemalla vastausvaihtoehtoja monivalintatehtävässä on alempi ja mahdollisuus saada tarkempi käsitys oppilaan ajattelusta kasvaa verrattuna pelkkään oikein/väärin vaihtoehtoon.

Arvioimalla oppilaiden käyttämiä ratkaisutapoja olen voinut päätellä jotain siitä, millaisia käsityksiä heillä on matematiikan struktuureista, vaikkakaan oikeasta monivalintatehtävän ratkaisusta ei voida päätellä, onko oppilas ymmärtänyt kyseisen matemaattisen rakenteen. Jos oppilas sen sijaan valitsee väärän vaihtoehdon, on valitun vaihtoehdon rakenteesta mahdollista arvioida, mikä hänen ajattelussaan on aiheuttanut virheellisen johtopäätöksen. Oppilaiden produkteja voidaan näin ollen käyttää poissulkevasti. Toki tuottamistehtävä kertoo monivalintatehtävää enemmän oppilaan laskuvalmiuksista ja ajattelutavasta, mikäli laskusuoritukset ovat näkyvissä.

9.5.2 Laadulliset tutkimusmenetelmät

Fenomenografisella tutkimuksella pyritään saamaan tietoa, jossa korostetaan subjektiivisen kokemuksen merkitystä tarkasteltavasta objektista. Oppilaan käsitykset tutkittavasta ilmiöstä muodostuvat kokemusten, tiedostamisen ja merkityksen antamisen kautta. (Marton 1981, 178.) Fenomenografiassa tutkimuksen kohteena ovat objektista esitetyt erilaiset käsitykset ja tutkimustuloksena on ilmiön laadullisesti erilaisten kokemisen tapojen luokittelu (Marton 1996, 180). Nämä kuvaavat laadullisesti erilaisia tapoja kokea tarkasteltavana oleva ilmiö (Marton 1996, 182). Lähtökohtana on yksi maailma, josta ihmiset muodostavat erilaisia ja toisistaan poikkeavia käsityksiä. Tämä maailma ilmenee ihmiselle käsitysten kautta. (Marton 1994; Marton & Fai 1999; Metsämuuronen 2003, 174–175.) Luokittelulla voidaan saada kahdenlaista tietoa. Ensinnäkin luokat kertovat käsityksistä, sekä yhteisistä piirteistä että eroavaisuuksista (Marton 1996, 184; Uljens 1989, 10). Lisäksi luokittelulla voidaan saada kvantitatiivista tietoa siitä, kuinka yleinen käsitys on (Marton 1981, 195). Laadullisen osion luokittelun tarkastelu määrällisesti ei ole tutkimuksessani fenomenografisen tutkimusotteen mukainen, koska tutkimustehtävän kannalta luokittelu teorialähtöisesti on informatiivisempi.

Ilmiöitä voidaan tarkastella ensimmäisen tai toisen kertaluvun perspektiivistä. Voidaan tarkastella itse ilmiötä, jolloin puhutaan ensimmäisen kertaluvun perspektiivistä. Jos tarkastellaan yksilön tulkintaa jostain ilmiöstä, niin silloin puhutaan toisen kertaluvun perspektiivistä. Fenomenografisessa tutkimustraditiossa käsityksiä tarkastellaan tutkittavan ihmisen kautta, toisen kertaluvun perspektiivistä (Marton 1981, 178). Yksilötaso häviää, ja jäljelle jäävät vain erilaisten tulkintojen kategoriat (Marton 1996, 187). Tutkimukseni laadullisessa osiossa en tutki oppimista, vaan oppilaiden tulkintoja lukuihin ja laskutoimituksiin liittyvistä ominaisuuksista. Tulkitsen oppilaan suorituksesta hänen lukuihin ja lausekkeisiin liittyvää ajatteluaan käytetyn ratkaisutavan perusteella. Välittäjänä ovat symbolit ja niiden käyttäminen. Analyysin kohteena ovat käsitykset, eivät yksilöt.

Ensimmäisen kertaluvun perspektiivinä eli tarkastelukohteena tutkimuksessani ovat luvut ja niiden peruslaskutoimitukset numeerisella ja yleisellä tasolla. Tulkintani oppilaiden vastauksista samoista sisältöalueista on siten ilmiön toisen kertaluvun perspektiivi. Oppilaiden reaalimaailmaa pääsen tutkijana tarkastelemaan ainoastaan tutkittavien oppilaiden kautta, toisen kertaluvun perspektiivistä (ks. esim. Marton 1981, 178). Tutkimuksessani toisen kertaluvun tarkastelu on mahdollista oppilaiden suoritusten kautta toisaalta perinteisten tehtävien suoritustapoja tarkastelemalla, toisaalta niiden tehtävien kautta, joissa oppilaita pyydetään omin sanoin perustelemaan suorituksiaan. Lisäksi arvioin yhtälön ratkaisemista kolmannen kertaluvun perspektiivistä lähtökohtana toisen kertaluvun perspektiivi.

Luku 10

Peruskoulun päättöluokan oppilaiden määrällinen osaaminen

Tässä luvussa tarkastelen peruskoulun päättöluokkalaisten määrällistä osaamista. Mixed methods – menetelmän tradition mukaisesti tulen soveltuvin osin liittämään tarkasteluun laadullisia elementtejä. Teoriassa laadulliset tutkimuskysymykset voivat liittyä tutkimusasetelmasta riippuen pääongelmaan tai täsmennettyihin osaongelmiin. Tarkastelussani käytän niitä jälkimmäisellä tavalla. Tässä luvussa tarkastelen tutkimusongelmaa 1 sekä sen alaongelmia.

10.1 Taustamuuttujat

Taustamuuttujina tutkimuksessa kartoitettiin viimeisen matematiikan numeron lisäksi oppilaiden päässälaskemiseen ja laskimen käyttöön liittyviä tottumuksia. Aikaa testiosion suorittamiseen oli neljä minuuttia. Tutkimuksessa on mukana peruskoulun päättöluokkalaisia vuosina 1981 ja 1987 yhteensä 351 oppilasta (tyttöjä 195 ja poikia 156) ja vuonna 2003 tyttöjä 207 ja poikia 205 eli yhteensä 412 oppilasta.

10.1.1 Arvosanat

Matematiikan arvosanojen keskiarvo oli kaikkien osalta 7,7 (keskihajonta 1,4), tyttöjen arvosanojen keskiarvo ja keskihajonta oli 7,8 (1,4) ja poikien 7,5 (1,5) 2000-luvun aineistossa. Vastaavat luvut 1980-luvun aineistossa olivat 7,3 (1,5), tytöillä 7,5 (1,4) ja pojilla 7,0 (1,5).

Taulukko 10.1. Matematiikan arvosanojen keskiarvot 1980- ja 2000-luvulla (keskiarvojen eroja vertailtu t-testillä).

	1980-luku			2000-luku		
	Kaikki	Pojat	Tytöt	Kaikki	Pojat	Tytöt
N	351	156	195	412	205	207
keskiarvo	7,3	7,0	7,5	7,7***	7,5***	7,8***
k-haj.	1,5	1,5	1,4	1,4	1,5	1,4
d				0,28	0,33	0,21

*p<0,05; **p<0,01 ja ***p<0,001

Matematiikan arvosanojen keskiarvot ovat nousseet tarkasteluajanjaksona. Muutokset ovat tilastollisesti erittäin merkitseviä efektikoon ollessa poikien osalta lähes keskitasoa. Mediaaniarvosana on noussut arvosanasta 7 arvosanaan 8.

Taulukko 10.2. Arvosanajakauma 1980-luvulla ja 2000-luvulla (prosenttilukujen eroja vertailtu t-testillä).

Arvosana	1980-luku			2000-luku		
	Kaikki	Pojat	Tytöt	Kaikki	Pojat	Tytöt
	351	156	195	412	205	207
	%	%	%	%	%	%
4	2,6	4,5	0,5	0,7*	0,9*	0,5
5	10,8	14,7	6,2	5,8*	5,4**	6,3
6	17,1	17,3	16,9	18,0	19,5	16,2
7	25,1	25,6	24,6	19,9	24,4	14,7*
8	19,7	19,2	20,0	22,6	19,5	26,2
9	21,4	16,0	25,6	24,3	24,0	24,6
10	3,4	2,6	4,1	8,7**	6,3	11,5**

*p<0,05; **p<0,01 ja ***p<0,001

Tyttöjen heikkojen arvosanojen osuus on pysynyt ennallaan ollen alhaisella tasolla jo 1980-luvulla. Sen sijaan poikien heikkojen arvosanojen osuus on pienentynyt. Arvosanan 4 osuus on vähentynyt kaikkien osalta 1,9 prosenttiyksikköä, mihin on vaikuttanut poikien heikkojen arvosanojen osuuden pienentyminen 4,5 %:sta 0,9 %:iin. Lisäksi arvosanan 5 osuus on pojilla pudonnut 9,3 prosenttiyksikköä. Vastaavasti arvosanan 10 osuus on kasvanut 5,3 prosenttiyksikköä sekä poikien että tyttöjen osuuden kasvaessa – poikien 3,7 prosenttiyksikköä ja tyttöjen 7,4 prosenttiyksikköä. Muutos on tyttöjen osalta tilastollisesti merkitsevä.

10.1.2 Laskimen käyttö

Lähes kaikilla oppilailla oli laskin käytettävissään jo 1980-luvun alussa. Kysyttäessä, käyttääkö oppilas laskinta kotitehtävien tekemiseen, saatiin seuraava jakauma:

Taulukko 10.3. Laskimen käyttäminen kotitehtävissä (prosenttilukujen eroja vertailtu t-testillä).

	1980-luku			**2000-luku**		
N	Kaikki	Pojat	Tytöt	Kaikki	Pojat	Tytöt
	351	156	195	412	205	207
	%	%	%	%	%	%
En ollenkaan	30,8	35,3	27,2	10,0***	14,1***	5,8***
Jonkin verran	59,8	53,9	60,6	60,4	60,5	60,4
Aina	9,4	10,8	8,2	29,6 ***	25,4***	33,8***

*p<0,05; **p<0,01 ja ***p<0,001

Tasokurssien aikana 1980-luvulla laskimen käyttö oli yleisintä laajalla kurssilla (korkeimmalla tasokurssilla). Heistä 85% käytti laskinta joskus kotitehtävien tekemiseen ja 14 % aina kun se on mahdollista. Myös yleiskurssin (matalimman tasokurssin) oppilaat olivat innokkaita laskimen käyttäjiä, heistä 27 % käytti laskinta aina, kun se on mahdollista. 2000-luvun aineistossa 10 % oppilaista ei käyttänyt ollenkaan laskinta kotitehtävien tekemisessä, muut ainakin jonkin verran. Muutokset verrattuina 1980-lukuun ovat tilastollisesti erittäin merkitseviä. Tässä on kuitenkin huomioitava, että 1980-luvulla laskimen käyttö oli eri roolissa kuin 2000-luvun alussa. 1980-luvun alussa laskinta ei käytetty säännöllisesti matematiikan opetuksessa peruskoulussa, joten johtopäätöksiä ei eroista tästä johtuen ole syytä vetää. Laskimen rooli 1980-luvun alussa oli käyttää sitä tarkistuksiin, havainnollistamaan rakenteita ja suuriin lukuihin laskettaessa likiarvoja (Paasonen 1979), kun sensijaan 2000-luvulla laskimen rooli laskemisen apuvälineenä on yleistynyt.

10.1.3 Matematiikan harrastuneisuus

Matematiikan soveltaminen käytäntöön tulee esille arkipäivän tilanteissa, joissa arvioimisen, laskemisen ja päättelemisen taitoja sovelletaan eri tavoin. 2000-luvulla koulun ulkopuolella päässä sanoi laskevansa paljon 37,4 % vastaajista, mikä on 1,6 prosenttiyksiköä vähemmän kuin 1980-luvulla, sensijaan 6,1 % vastaajista sanoi, ettei laske päässä koulun ulkopuolella ollenkaan. Tämä on kolme prosenttiyksikköä enemmän kuin 1980-luvulla. Muutos ei ole tilastollisesti merkitsevä. Myöskään tyttöjen ja poikien välillä ei ole tässä suhteessa eroa.

Tarkasteltaessa matematiikkaan liittyvien asioiden harrastamista koulun ulkopuolella, on tilanne toinen. Harrastaminen on kasvanut 2000-luvulla. Muutos on tilastollisesti merkitsevä. Tutkimuksen kyselylomakkeessa täsmennettiin matematiikan harrastamisen tarkoittavan matematiikan tai siihen liittyvien asioiden kuten tietotekniikan, fysiikan tai kemian harrastamista koulutehtävien lisäksi.

Taulukko 10.4. Matematiikkaan liittyvien asioiden harrastaminen (prosenttilukujen eroja vertailtu t-testillä).

	1980-luku			**2000-luku**		
N	Kaikki	Pojat	Tytöt	Kaikki	Pojat	Tytöt
	351	156	195	412	205	207
	%	%	%	%	%	%
En ollenkaan	49,6	35,2	61,1	52,7	37,6	69,6
Jonkin verran	46,7	57,7	37,9	38,6*	48,3	26,8*
Paljon	3,7	7,1	1,0	8,7**	14,1*	3,6

*p<0,05; **p<0,01 ja ***p<0,001

Avoimista vastauksista näkee, että tietotekniikan harrastuneisuus on lisännyt harrastamista 1980-lukuun verrattuna. Muutos on tilastollisesti merkitsevä. Kasvu on poikien osalta 7,0 prosenttiyksikköä. Niiden tyttöjen osuus, jotka ilmoittavat, etteivät harrasta matematiikkaan tai vastaavaan liittyviä asioita ollenkaan, on lisääntynyt 8,5 prosenttiyksikköä 1980-lukuun verrattuna, ja 69,6 % tytöistä toteaa, että ei harrasta matematiikkaa tai siihen liittyviä asioita kuten tietotekniikkaa, fysiikkaa tai kemiaa koulutehtävien lisäksi.

10.1.4 Kompetenssi-ajattelu

Kompetenssi-käsitteen voidaan ajatella liittyvän ”pärjäämiseen”, millä tarkoitan kompetenssin määritelmän mukaista osaamista tietyillä sisältöalueilla suhteessa tavoitteisiin (luku 1). Oppilaat haluavat menestyä sellaisilla alueilla, jotka he kokevat henkilökohtaisella tasolla tärkeiksi. Jatko-opinnot voivat olla tällainen tavoite. Tarkastelen seuraavassa, minkälaisen valmiuden oppilaat näyttävät saavan jatko-opintoihin matematiikan arvosanoja tarkastellen.

Matematiikka tukee loogisen ajattelun kehittymistä. Sen osa-alue algebra tukee formaalilla tasolla ajattelua. Irrottautuminen kontekstista, loogisten suhteiden yleinen tarkastelu ja käsitteiden deduktiivinen käsittely, sekä usean muuttujan samanaikainen tarkastelu ja ehdollisten sääntöjen mieltäminen tulevat mahdolliseksi (Scheinin 2004). Lukio-opiskelu perustuu suurelta osalta tämän tasoiseen ajatteluun. Algebran ymmärtävässä ajattelussa on samoja piirteitä – ajattelua yleisellä tasolla. Siksi algebraa pidetään matematiikan keskeisenä alueena jatko-opintoja ajatellen.

Scheinin (2004) tuo tutkimuksessaan esille käsityksen, että tytöt olisivat poikia parempia matematiikassa. Pelkästään arvosanoja tarkastellen näin onkin, mihin asiaan Scheinin perustaa päätelmänsä. Myös tutkimukseni tulokset matematiikan arvosanoista tukevat Scheinin tuloksia tyttöjen paremmuudesta. Tutkimukseni osoittaa (luku 10) kuitenkin, että tarkastelualueella osaamisen suhteen tilanne ei välttämättä ole näin. Tarkastelen seuraavassa poikien ja tyttöjen tasavertaisia mahdollisuuksia opiskella toisen asteen koulutuksessa ja menestyä siellä tavoitteena ajattelu abstraktilla tasolla.

Tulokseni algebran osaamisesta (luku 10) tukevat Scheinin käsitystä, että perusopetuksen lopussa valtaosa oppilaista ei vielä ajattele formaalilla tasolla (vrt. luku 7). Viitteitä, että kysymyksessä on opetuksellinen asia, nähdään tutkimuksen laadullisen tarkastelun yhteydessä (luku 11). Tutkimukseni nojalla perusopetuksen jälkeen on eroa yleisellä tasolla ajattelussa tyttöjen ja poikien välillä, vaikkakaan erot eivät ole tilastollisesti merkitseviä. Numeeristen rakenteiden testissä poikien keskiarvo parhaan neljänneksen osalta, jotka ovat lukioon siirtyviä, on 17,6 maksimin ollessa 20. Tyttöjen keskiarvo on 1,0 yksikköä huonompi. Vastaavasti yleisessä muodossa olevien rakenteiden testissä poikien keskiarvo on parhaan neljänneksen osalta 7,2 maksimin ollessa 9. Tyttöjen keskiarvo on 0,8 yksikköä huonompi. Tämä tarkoittaa, että pojilla olisi perusopetuksen päättyessä keskimäärin paremmat valmiudet aloittaa toisen asteen matematiikanopinnot.

Lukioon pääsee suhteessa paljon enemmän tyttöjä kuin poikia. Scheinin (2004) tutkimuksen mukaan lukiorajan ylitti keskiarvon perusteella 81,5% tytöistä ja 64,0 % pojista (N = 2565). Otettaessa tämän tutkimuksen aineistosta matematiikan parhaiden arvosanojen suhteen 81,5 % tytöistä ja 64,0 % pojista, eli lukiokynnyksen ylittävät, saadaan eri testiosioiden keskiarvoiksi seuraavat.

Taulukko 10.5. Lukiokelpoisten oppilaiden pisteiden keskiarvot testin eri osioissa vuonna 2003 (keskiarvojen eroja vertailtu t-testillä). N = 299 (131 poikaa ja 168 tyttöä)

	Matem arvos.	**Num**	**NumRak**	**YlRak**	**Arv**	**Mat sovelt käyt.**
max		25	20	9	10	12
Pojat	8,4	18,9	15,6	5,2	6,9	7,5
k-haj.	0,9	4,2	2,6	2,5	2,1	3,2
Tytöt	8,3	16,9***	14,4***	4,5*	6,1***	6,1***
k-haj.	1,0	4,6	2,7	2,5	1,9	3,5
d		-0,45	-0,45	-0,28	-0,40	-0,42

*p<0,05; **p<0,01 ja ***p<0,001

Lähtötaso pojilla on parempi testin kaikissa osioissa. Ero on tilastollisesti erittäin merkitsevä kaikissa muissa, paitsi yleistä muotoa olevassa rakennetestissä. Efektikoot ovat keskitasoa tai lähes keskitasoa kaikissa testiosioissa. Poikia lukioon hyväksytyistä on kuitenkin vähemmän, koska peruskoulun jälkeen heitä valittiin lukioon heikomman keskiarvon takia vähemmän. Syitä tälle saattaa olla monia ja merkitys tulee esille tarkasteltaessa ylioppilaskirjoituksissa pitkän matematiikan kirjoittajien sukupuolijakaumaa.

Lukio-opiskelun jälkeen ylioppilaskirjoituksissa pitkän matematiikan kirjoittajista on enemmistö poikia. Lahtisen (2003) mukaan 72 prosenttia ylioppilaskirjoituksiin ilmoittautuneista pojista oli ilmoittautunut lyhyen tai pitkän matematiikkan kokeeseen ja tyttöjen vastaava osuus oli 55 prosenttia. He jakautuvat pitkän ja lyhyen kirjoittajiin seuraavasti:

Taulukko 10.6. Pitkän ja lyhyen matematiikan suorittaneet sukupuolen mukaan keväällä 2003 (Lahtinen 2003).

	Pojat (%)	**Tytöt (%)**	**N**
Pitkä matematiikka	56,8	40,2	12 711
Lyhyt matematiikka	43,2	59,8	13 643
N	12743	13611	26354

Näyttäisi, että potentiaalista oppilasainesta jää lukio-opintojen ulkopuolelle, koska lähtötasoltaan parempia poikia jää huonompien todistusarvosanojensa takia ulkopuolelle, jos kriteerinä pidetään lukio-opinnoissa keskeisenä pidettyä abstraktilla tasolla tapahtuvaa ajattelua.

Myös opetushallituksen arvioinnissa peruskoulun yhdeksäsluokkalaisten matematiikan oppimistuloksista vuonna 2002 ilmenee, että oppilaan sukupuoleen ja opiskelijavalintoihin liittyvät ilmiöt eivät ole ongelmattomia (Linnakylä ym. 2002). Raportin mukaan toiselle asteelle siirryttäessä pojista menee

Suomessa likipitäen yhtä paljon (vajaat 50 %) sekä lukioihin että ammatillisiin oppilaitoksiin, mutta tytöistä lukioihin siirtyy lähes kaksi kolmannesta (Linnakylä ym. 2002).

Kun samaan aikaan erityisopetuksen tarve kasvaa siten, että se tilastokeskuksen (Anon.) mukaan vuonna 2006 on 8 % ikäluokasta kasvun kyseisenä vuonna ollessa 4 prosenttiyksikköä, herää kysymys, miten joustava siirtyminen toiselle asteelle toteutuu? Miten toteutuu peruskoulun opetussuunnitelmien tavoite jatko-opintokelpoisuudesta, millaista osaamista tuotetaan toisen asteen koulutuksen tarpeisiin ja millaiset opiskelutottumukset luodaan?

10.1.5 Yhteenveto taustamuuttujista

Tämän tutkimuksen aineiston perusteella kahdenkymmenen vuoden aikajänteellä arvosanojen keskiarvot ovat nousseet, mutta ero tyttöjen ja poikien välillä on kaventunut kuitenkin siten, että tyttöjen arvosanojen keskiarvo on parempi. Tutkimuksen kontekstissa osaaminen on toisin päin (luku 10.4). Kiitettävien arvosanojen osuus näyttää edelleen kasvavan, erityisesti tyttöjen osalta.

Samansuuntaisia tuloksia matematiikan arvosanoista on saatu kansallisissa kokeissa 2000-luvulla. Opetushallituksen vuoden 2000 perusopetuksen päättövaiheen matematiikan oppimistulosten kansallisessa arvionnissa matematiikan arvosanat ovat tutkimukseni tuloksia tukevia, keskiarvo oli 7,4 (hajonta 0,77). Tyttöjen ja poikien arvosanajakaumaa ei ole raportissa eroteltu, vaan tuolloin on todettu tyttöjen keskiarvon olleen parempi kuin poikien. Ero ei ollut tilastollisesti merkitsevä. Osakokeittain tarkasteltuna pojat olivat mainitussa arvioinnissa parempia perustaitokokeessa ja tytöt ongelmanratkaisukokeessa. Opetushallituksen vuonna 2004 tekemässä oppimistulosten arvioinnissa tyttöjen matematiikan kouluarvosanojen keskiarvo 7,7 ja poikien 7,4 tukevat tutkimukseni tuloksia. Poikien todettiin tuolloin olleen parempia päässälaskijoita, muilla alueilla sukupuolten välillä ei ollut eroja. Edellä mainitussa kansallisessa arvioinnissa Korhonen (2001) tulkitsee arvosanojen keskiarvojen erojen muuttuneen johdonmukaisesti samalla tavalla tyttöjen hyväksi jo pitkään, mitä tutkimukseni ei tue. Ero tulkinnoissa on selitettävissä erilaisilla testeillä. Luvun 2 nojalla eroja tyttöjen ja poikien osaamisessa on eri matematiikan osa-alueilla, joten eri tutkimusten vertaaminen vaatisi tarkan aineistokohtaisen vertailun. Kootusti voidaan todeta, että kaikissa näissä 2000-luvun tarkasteluissa tyttöjen arvosanat ovat olleet parempia. Osa-alueittain tarkastellen perustaidoissa pojat ovat olleet parempia ja ongelmanratkaisutaidoissa tulokset ovat vaihdelleet eri tutkimuksissa.

Laskimen käyttö

Kautta aikojen on matematiikan opetuksessa käytetty apuvälineitä. Laskimien yleistyminen koulumaailmassa 1980-luvulla herätti levottomuutta, kun pelättiin niiden valvomattoman ja suunnittelemattoman käytön heikentävän pohjaa etenkin ala-asteella matematiikan opetuksessa, missä numeeristen perusasioiden oppiminen on päätavoite (Paasonen 1979). Tätä kuvaa laskimen käyttöön liittyvä seuraava ohjeistus 1970–1980-luvuilla. Peruskoulun opetussuunnitelmakomitean mietinnössä II (POPS II) teknisten apuneuvojen oppimiseen kannustettiin, samoin perusoppiainesoppaassa (Muistio 1976, 47) laskimen käyttöön mahdollisuuksien mukaan kannustettiin, koska ”se on laskutikkua käyttökelpoisempi”. Silloisen kouluhallituksen yleiskirjeessä (2752/3.12.1976) kuitenkin laskimen käyttö kiellettiin peruskoulun matematiikanopetuksessa, mutta sallittiin edelleen fysiikan ja kemian työtunneilla. Yleiskirjeessä (450/4.6.1980) tämä kielto kumottiin yläasteen osalta ehdoin, että matematiikanopetuksessa on ennen laskimen käyttöönottoa varmistettava ala-asteella opetettujen peruslaskutoimitusten hallinta, tarkan arvon ja likiarvon käsitteet, sekä lausekkeen arvon ja tulosten suuruuden arvioiminen. Ohjeistuksen mukaan näiden valmiuksien hallintaa, samoin kuin päässälaskutaitoa tuli ylläpitää jatkuvasti.

Peruskoulun opetussuunnitelman perusteissa (1994) laskimen käyttöä ei kyseenalaisteta. Samassa yhteydessä puhutaan tehokkaasta opiskeluvalmiuksien omaksumisesta ja uuden teknologian hyväksikäytöstä. Ala-asteella opiskelussa pidetään keskeisenä muun muassa peruslaskutaitojen oppimista päässälaskien, paperilla ja laskimilla (1994, 75). Yläasteella laskimia ja tietokoneita tulisi käyttää opetussuunnitelman perusteiden (1994) mukaan järkevästi luonnollisina apuvälineinä (1994, 76). Peruskoulun opetussuunnitelman perusteissa (2004) laskimen käyttö mainitaan työvälineenä pyöristämisen ja arvioinnin yhteydessä.

Magne (1975) sekä Usinski ja Bell (1976) ovat arvioineet 1970-luvulla, että tulevaisuudessa komplisoidun matematiikan tarve lisääntyy, rutiinilaskemisen tarve vähenee ja keskivertokansalaisen matematiikan käytön tarve lisääntyy. Keskimmäinen näistä olettamuksista lienee ilmeinen. Kaksi muuta selittyvät strategisilla vaatimuksilla, jos päässälaskemisen taidot katsotaan tarpeelliseksi korvaamaan algoritminen laskeminen.

Laskimen käyttö havainnollistamiseen ja suuriin lukuihin silloin, kun painopiste ei ole lukujen käsittelyssä, on perusteltavissa. Kuitenkin päässälaskutaidosta on huolehdittava rakenteiden ymmärtämisen ja vastausten suuruusluokan arvioinnin takia. Opetuksessa kulloinkin opetettavana olevan asian tarkoitus on pidettävä mielessä, jotta haluttu rakenne saadaan esille siinä muodossa, että se tuo oleellisen esille prosept-näkökulmasta. Tällöin keskeistä on rakenteiden ymmärtäminen, ei drillaus.

10.2 Eri kyky-komponenttien määrällinen osaaminen

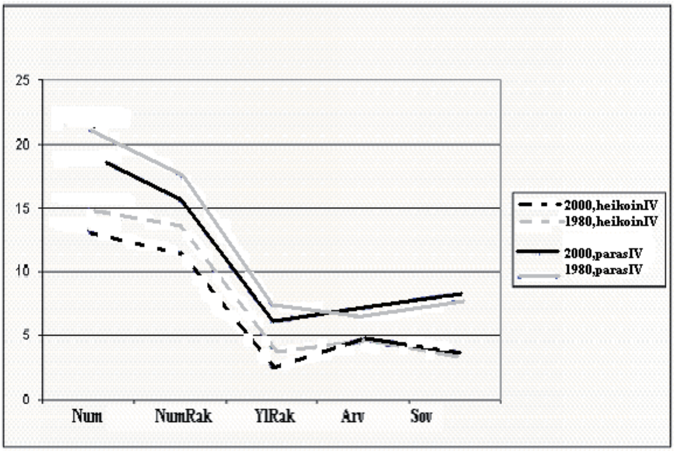
Suomessa kiinnostuttiin 1980-luvulla kognitiivisen psykologian tarjoamasta näkökulmasta matematiikan oppimisessa (mm. Kupari 1982; Keranto 1985; Leino 1987; Lehtinen 1989). Peruskoulua koskevat tutkimukset 1980-luvulta lähtien ovat osoittaneet, että ajattelua, ymmärtämistä ja soveltamista vaativissa tehtävissä on suurempia puutteita kuin mekaanisten laskutehtävien hallitsemisessa (mm. Kupari 1981ab, 1983, 1988, 1993; Kangasniemi 1989; Haapasalo 1992). Malisen (1993) tulosten mukaan loogisen ajattelun kehittäminen kaipaisi suurempaa huomiota. Yrjönsuuren (1989, 1990) mukaan vielä lukiolaisenkin ajattelu on pääasiassa rutiininomaista algoritmista ajattelua. Sen sijaan oppilaat selviävät yksinkertaisista sovellustehtävistä heuristisilla päättelyillä selvästi paremmin kuin samoista tehtävistä mekaanisessa muodossa (Haapasalo1992). Ilmeisesti suurin huolenaihe tulisi ilmaista seuraavasti: ”Oppilaat eivät juuri lainkaan ymmärrä matematiikkaa ja sen tietorakenteita, vaan yrittävät pelkästään toistaa tuttuja, prototyyppisiä toimintoja tai algoritmeja” (Haapasalo 1997). Näistä lähtökohdista tarkastelen opetussuunnitelmien tavoitteiden suuntaista osaamista siirryttäessä 1980-luvun normatiivisesta opetussuunnitelmasta 2000-luvun ohjauksellliseen opetussuunnitelmaan.

Taulukko 10.7. Peruskoulun päättöluokkien matematiikan testien keskiarvot 1980- ja 2000-luvulla (keskiarvojen eroja vertailtu t-testillä). N = 763

Testit		**Num**	**NumRak**	**YlRak**	**Arv**	**Sov**	**Yht.pist.**
max		25	20	9	10	12	76
1980 -luku	ka	18,5	16,0	5,5	5,8	5,9	51,6
	k-haj.	5,2	3,1	2,6	2,0	3,4	13,6
	N	351	351	351	351	351	351
2000 -luku	ka	16,7***	14,1***	4,3***	6,0	5,9	47,0***
	k-haj.	4,7	3,0	2,5	2,1	3,5	12,7
	N	412	412	412	412	412	412
	d	0,37	0,62	0,47	-0,10	0,00	0,35

*p<0,05; **p<0,01 ja ***p<0,001

1980- ja 2000-lukujen mittarin eri testien keskiarvojen erojen merkitsevyyttä on testattu t-testillä. Erot ovat muissa paitsi arvioinnissa ja matematiikan soveltamisessa sanallisiin tehtäviin tilastollisesti erittäin merkitseviä efektikoon (d-luku) ollessa numeerisessa ja yleisiä rakenteita mittaavissa osatesteissä lähes keskitasoa ja suurimmillaan yli keskitasoa numeerisia rakenteita mittaavissa testeissä. Mittarin eri osatesteistä numeerinen ja matematiikan käyttäminen sanallisissa sovellustehtävissä on tuottamistasoa, sen sijaan muut ovat tunnistamistasoa, mikä vaikeuttaa eri mittareiden keskinäistä vertailtavuutta. Sen sijaan 1980-luvun ja 2000-luvun tulokset ovat keskenään vertailukelpoisia. Numeerisessa, numeeristen rakenteiden, yleistä muotoa olevien rakenteiden ja arviointitestissä testattiin automatisoitumisen astetta, koska ajallisesti rajoitettiin suoritukseen käytettävää aikaa.



Kuvio 8. Testien keskiarvot parhaissa ja heikoimmissa neljänneksissä 1980-luvulla ja 2000-luvulla.

Kuvion 8 diagrammissa on esitetty eri osioiden pisteiden keskiarvot parhaimman ja heikoimman neljänneksen osalta. Diskreetistä jakaumasta huolimatta olen valinnut esitykseen jatkuvan jakauman diagrammin paremmasta luettavuudesta johtuen. Parasta neljännestä tarkasteltaessa 1980-luvun osaaminen on ollut merkitsevästi parempaa numeerisessa, numeeristen rakenteiden ja yleisen rakenteiden osioissa efektikoon ollessa kahdessa viimeksimainitussa suuri (d-luku 0,8). Arvioinnissa osaaminen on ollut uudessa aineistossa 0,3 pistettä parempaa, muutos ei ole tilastollisesti merkitsevä. Matematiikan soveltamisessa sanallisiin tehtäviin on 2000-luvun keskiarvo ollut 0,6 pistettä parempi, muutos ei ole ollut tilastollisesti merkitsevä. Vastaavasti heikommassa neljänneksessä 1980-luvun osaaminen on ollut parempaa numeerisessa (**), numeeristen rakenteiden (***) ja yleisten rakenteiden osioissa (***) efektikoon ollessa rakenteita mittaavassa osiossa yli keskitason (d-luku yli 0,6). Matematiikan soveltamisessa sanallisiin tehtäviin ja arvioinnissa 2000-luvun osaaminen on ollut 0,7 ja 0,3 yksikköä parempaa efektikoon ollessa arvioinnin kohdalla lähes keskitasoa.

10.2.1 Peruskoulun päättöluokan oppilaiden tuloksia, numeerinen osio

Tutkimuksessa numeerista osaamista mittaa rationaaliluku-alueella peruslaskutoimituksiin kohdistuva Num-testi, jonka osiot ovat tuottamistason tehtäviä. Testiin liittyi viiden minuutin aikarajoitus. Testiosioita on 25 ja maksimipistemäärä on 25. Numeerista osaamista mittaavan testin keskiarvo oli 1980-luvulla 18,5 ja vastaavasti 2000-luvulla 16,7. Ero on tilastollisesti erittäin merkitsevä efektikoon (d-luku) ollessa numeerista osaamista mittaavassa osatestissä lähes keskitasoa.

Taulukko 10.8. Numeerisen testin pisteitä eniten erottelevat osiot (prosenttilukujen eroja vertailtu t-testillä). N = 763

Osio	**1980-luku Oikein(%)** N = 351	**ka. k-haj.**	**2000-luku Oikein (%)** N = 412	**ka. k-haj.**	**d**
$\frac{1}{5} \bullet \frac{2}{3}$	56,4	1,53 0,67	36,9 ***	1,92 0,82	-0,52
$\frac{4}{5} \bullet 5$	66,3	1,46 0,70	44,4 ***	1,83 0,84	-0,48
$\frac{1}{6} : \frac{1}{2}$	56,5	1,65 0,82	28,3 ***	2,14 0,85	-0,59
$\frac{1}{5} : 3$	49,2	1,81 0,88	27,5 ***	2,34 0,88	-0,60
$\frac{1278}{2}$	55,1	1,70 0,84	36,8 ***	2,08 0,91	-0,43

*p<0,05; **p<0,01 ja ***p<0,001

Taulukossa 10.8 on numeerisen testin pisteitä eniten erottelevat tehtävät, jotka kaikki kuuluvat murtolukualueeseen. Muutokset ovat tilastollisesti erittäin merkitseviä efektikoon ollessa vähintään keskitasoa.

Muutoksia osaamisessa on tapahtunut etupäässä murto- ja negatiivisten lukujen peruslaskutoimituksissa. Kokonaisluvuissa yhteenlaskettavien suuruusluokan kasvaessa virheiden määrä kasvoi. Tyypillisimpiä virheitä oli yhden ero ykkösten tai kymmenien kohdalla. Tämä viittaa yhteenlaskussa alkeellisiin strategioihin, Fusonin termein yksitellen laskemiseen (numerable chain), missä lasketaan numerosanojen avulla (Fuson 1992).

Negatiiviset luvut

Systemaattisesti paljon virheitä aiheuttanut luokka on miinusmerkkejä sisältävät laskutoimitukset. Lukukäsitteissä ja niihin liittyvissä peruslaskutoimituksissa korostui muistinvaraisuus. Tehtävässä – 17 – 23 suosituinta virheellistä vastausta – 6 oppilas perusteli seuraavasti*: ”Vähennän 23:sta 17 ja muistan, että edessä = – (pakkanen) joten laitan tuloksen eteen – merkin.”* Oppilas voi hahmottaa lausekkeen väärin ottaen vain osan siitä, kuten – 17 – 23 = – (17 – 23) = – 6, missä lukuarvon on antanut itseisarvoltaan suuremmasta vähentäminen ja missä vastauksen merkin on antanut lausekkeen edessä oleva miinus-merkki. Vastauksen etumerkkinä esiintyi myös plus-merkkiä, mikä saattaa seurata ajattelusta ”kaks’ miikkaa on plussa”. Edellä mainitulla oppilaalla oli myös seuraava suoritus, mikä tukee aiempaa tulkintaa: – 58 + 27 = – (58 + 27) = – 85.

Esimerkkinä negatiivisten lukujen kompleksisuudesta verrattuna positiivisiin lukuihin mainittakoon väitteen $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4$ tunnistaminen. 2000-luvun alussa 90,1 % peruskoulun päättöluokan oppilaista tunnisti väitteen $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4$. Sen sijaan ratkaisuprosentti putosi 47,5 %:iin, kun tehtävänä oli tunnistaa lausekkeen $(-3)^2$ arvo viidestä vaihtoehdosta. 1980-luvun aineistossa vastaavat ratkaisuprosentit olivat 94,9 % ja 70,9 %.

Murtoluvut

Toinen systemaattisesti paljon virheitä aiheuttanut luokka on murtolukuihin liittyvät peruslaskutoimitukset (taulukko 10.8). Murtolukujen kertolaskussa näyttävät virheelliset laskutavat siirtyvän muista murtolukujen peruslaskutoimituksista. Paljon käytetyt strategiat olivat ensiksikin ”samannimisiksi, osoittajat kerrotaan, nimittäjäksi yhteinen nimittäjä”, missä näyttäisi yhteenlaskuajattelun siirtyneen myös kertolaskuun. Toiseksi murtolukujen kertolaskua lasketaan niin sanotusti ristiinkertomalla, jolloin ”laskusääntö” on siirtynyt kertolaskuun murtolukujen jakolaskusta. Murtolukujen yhteenlaskussa virheellisiin suorituksiin on johtanut pinnallinen muistinvarainen ajattelu proseduureissa sekä puutteellinen käsitteenmuodostus, mitkä ilmenivät sekä osoittajien että nimittäjien yhteenlaskemisena, laventamisena väärin ja niin sanottuna ”ristiinkertomisena”.

Kertolaskussa $5 \cdot \frac{4}{5}$ yleisin virhe oli kertoa sekä osoittaja että nimittäjä. Esiintyi myös suoritusta $5 \cdot \frac{4}{5} = 5\,\frac{4}{5}$. Tehtävän suorittamisella oli eroa ensimmäisen sivun Num testin osion ”pikatehtävällä”, missä viidessä minuutissa ratkaistiin 25 numeerista tehtävää, verrattuna kuudennen sivun osioon, missä pyydettiin sanallisesti kertomaan, mitä kyseisellä lausekkeella tarkoitetaan. Jopa 15 % vastaajista paransi suoritustaan sanallisessa osiossa. Tämä viittaa siihen, että numero-osaaminen ei ole vielä automatisoitunut, koska pohdittavaksi tarkoitettu testiosio, jonka tekemiseen oli varattu riittävästi aikaa, paransi suoritusta.

10.2.2 Numeerinen rakennetesti

Oppilaan suoriutumista rakenteisiin liittyvistä testeistä arvioitiin kahdella testillä NumRak ja YlRak, joita kutsutaan mainitussa järjestyksessä numeeristen rakenteiden ja yleistä muotoa olevien rakenteiden testeiksi.

Numeeristen rakenteiden testiosion maksimipistemäärä on 20. 1980-luvun aineiston keskiarvo on 16,0 ja 2000-luvun aineiston vastaavasti 14,1. Muissa osioissa oli 0–1,5 prosenttiyksikön eroja, paitsi seuraavissa erot ovat suurempia.

Taulukko 10.9. Numeerisen rakennetestin pisteitä eniten erottelevat osiot. (prosenttilukujen eroja vertailtu t-testillä). N = 763

Väite	**1980-luku Oikein(%)** N = 351	**ka. k-haj.**	**2000-luku Oikein (%)** N = 412	**ka. k-haj.**	**d**
18 • 4 • 32 • 15 = 15 • 32 • 4 •18	93,2	1,07 0,28	85,9**	1,14 0,36	-0,22
0 • 8436 = 0 • 0,536	79,0	1,21 0,42	65,6 ***	1,34 0,49	-0,28
$\left(\frac{12}{13}\right)^4 = \frac{12^4}{13^4}$	70,7	1,30 0,48	51,1**	1,34 0,48	-0,08
$(59^2)^3 = (59^3)^2$	61,1	1,41 0,53	31,7***	1,70 0,49	-0,57
$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4$	94,9	1,06 0,28	90,1*	1,10 0,32	-0,13
$(-3)^2 = 9$	70,9	2,83 0,67	47,5***	2,70 0,89	-0,16

*p<0,05; **p<0,01 ja ***p<0,001

Osion väitteet ovat tunnistamisen tasoa ja asteikkona tosi/epätosi-asteikko viimeistä väitettä lukuunottamatta, jossa vastausvaihtoehto valittiin viidestä vaihtoehdosta, mikä on saattanut vaikuttaa osittain valintoihin.

10.2.3 Yleisessä muodossa oleva rakennetesti

Yleisessä muodossa olevien matematiikan rakenteiden mittarissa YlRak oikea vaihtoehto valittiin viidestä vastausvaihtoehdosta. Väitteitä osiossa on yhdeksän. Aikaa oli käytettävissä viisi minuuttia. Osion väitteet liittyvät algebran lausekkeisiin.

Taulukko 10.10. Yleisen rakennetestin pisteisiin eniten vaikuttaneet osiot. N = 763

$(-3)^2$ =	-6	-9	**9**	6	ei mikään edellisistä
1980-luku	3,9	17,1	**70,9**	7,8	0,4
2000-luku	*10,3*	*32,3*	**47,5*****	7,2	1.4
$10^3 \bullet 10^2$ =	100^5	**10^5**	10^6	100^6	ei mikään edellisistä
	10,5	**72,5**	11,2	2,3	2,3
	33,8	**43,3*****	5,5	*9,3*	6,4
$x^4 \bullet x^5$ =	$2x^{20}$	**x^9**	$2x^9$	x^{20}	ei mikään edellisistä
	3,5	**71,7**	8,5	14,3	1,6
	11,9	**47,3*****	*29,8*	7,9	2,0
$2x^3 + 5x^3$=	$7x^6$	$10x^3$	**$7x^3$**	$10x^6$	ei mikään edellisistä
	43,8	4,7	**38,4**	7,0	6,2
	50,0	1,2	**32,0**	4,9	9,5
$x^{12} : x^4$ =	X^{16}	x^3	**x^8**	1^3	ei mikään edellisistä
	5,4	*41,7*	**44,0**	1,9	4,6
	6,9	*37,9*	**40,1**	4,2	9,5
$5x^3 \bullet 2x^5$ =	$7x^8$	**$10x^8$**	$10x^{15}$	$7x^{15}$	ei mikään edellisistä
	11,6	**61,2**	*18,2*	2,7	4,2
	16,2	**51,6****	*20,9*	4,1	5,5

Oppilaiden valitsemista vastausvaihtoehdoista voi havaita, että 1980-luvulla laskeminen perustui eksponenttien käsittelyyn liittyviin sääntöihin, koska virheellinen ajattelu kohdistui eksponentteihin, ei kantalukuihin. Sensijaan 2000-luvulla näyttää eksponenttien yhteenlaskeminen olevan muistinvarainen tapa, joka on siirtynyt muuhunkin laskemiseen, kuin samankantaisten kertolaskuun. Lisäksi 2000-luvulla on erilainen ajattelutapa riippuen, onko kantaluku luku vai muuttuja. Jos kantaluku on muuttuja, käytetään eksponenttien yhteenlaskemisen lisäksi kantaluvuissa visuaalista ratkaisua x:n kappalemäärässä, $x \bullet x = 2x$. Jos sensijaan kantaluku on numerus, suoritetaan merkitty kertolasku. Korall (2006, 23) on raportoinut vastaavasta visuaalisuuteen perustuvasta ratkaisutavasta negatiivisen luvun ja miinusmerkin yhteydessä. Lausekkeesta $- 5x - 3x$ saadaan virhetyyppinä $- 2x$, kun ajatellaan, että x:stä toinen häviää visuaalisen havainnon perusteella, 5-3=2 ja edessä säilytetään lausekkeen miinusmerkki.

Tall (2004b) on määritellyt käsitteen “A met-before” seuraavasti:

> *A met-before define to be a mental construct that an individual uses at a given time based on experiences they have met before.*

Tällä hän tarkoittaa oppilaan sillä tasolla olevaa tietoa, jota hän pystyy käyttämään kyseisessä aihepiirissä. Lausekkeessa $10^3 \bullet 10^2$ opiskelija hahmottaa kertolaskun, ei potenssiin korotusta ja siksi hän valitsee vaihtoehdon, jossa kantaluku on 100. Sen lisäksi 9,3 % oppilaista kertoo vielä eksponentit.

Taulukossa 10.10 oikea vaihtoehto on lihavoitu. Myös eri vastausvaihtoehtojen prosenttijakauma on esitetty ja ”suosituimmat” virheelliset vastaukset on merkitty kursivoituina. Yllä olevissa esimerkeissä useat virheet selittyvät vain numeroarvoihin liittyvänä käsittelynä. 2000-luvulla lausekkeessa $2x^3+5x^3$ 82 % oppilaista yhdistää samanmuotoiset termit laskemalla kertoimet oikein yhteen, mutta heistä yli 60 % laskee yhteen vielä eksponentitkin 3+3=6. Lausekkeessa $x^{12} : x^4$ hahmottuu jakolasku 12 : 4 ja lausekkeessa $5x^3 \bullet 2x^5$ kertolaskut 5 • 2 ja 3 • 5, minkä vaihtoehdon valitsee 20,9 % kaikista vastaajista vuonna 2003. Rakenteiltaan samanlaisissa numeerisissa ja yleistä muotoa olevissa lausekkeissa $10^3 \bullet 10^2$ ja $x^4 \bullet x^5$ muutosprosenttien samankaltaisuus viittaa numeerisen ja yleistä muotoa olevien lausekkeiden tuttuudesta.

Australialaiset tutkijat Cooper, Bolton-Lewis, Atweh, Pillay ja Mutch (1997) ovat kehittäneet kaksitiemallin tarkasteltaessa aritmetiikasta algebraan siirtymistä. Heidän mukaansa siirtyminen aritmetiikasta algebraan voi tapahtua binaarialgebran tai kompleksisen aritmetiikan kautta, Wilsonin tasoin ilmaistuna YS- ja SA-tasoin. Hihnalan (2005, 56) mukaan tulokset viittaavat siihen, että algebran oppimista voidaan helpottaa, kun vastaavia (isomorfisia) struktuureja harjoitellaan kompleksisessa aritmetiikassa. Tässä YS-tasolla tarkoitetaan Wilsonin tasoista yhdistettyä ymmärtävän-soveltavan ajattelun tasoa ja SA-tasolla tarkoitetaan Wilsonin tasoista yhdistettyä soveltavaa-analysoivaa tasoa.

Olen luokitellut tutkimuksen osittelulakitehtävät YS- ja SA-tasoisiksi (luku 9) ja laskenut ratkaisuprosentit (taulukko 10.11). Tulokset viittaavat siihen, että merkitystä näyttää olevan vastaavilla struktuureilla myös lausekkeen kompleksisuuden suhteen. Avoimeksi jää, mihin tasoon isomorfisuuden tulee yltää.

Taulukko 10.11. Osittelulakiin liittyvä osaaminen 2000-luvun aineistossa. N= 412

	Numeerisella tasolla Oikein (%)	**Yleisellä tasolla** Oikein (%)
Wilsonin YS-taso	77,4	73,8
Wilsonin SA-taso	36,9	27,9

Tutkimuksessani olen määritellyt rakenteiltaan samalla tasolla olevat lausekkeet analogisiksi ja rakenteeltaan samanlaiset, mutta yleisemmälle tasolle nostetut induktiivisiksi. Deduktiolla tarkoitetaan yleisellä tasolla olevien lausekkeiden ”johtamista” lähtien toisista lausekkeista. Perusteena viimeksi mainittuun on Kaufmannin (1985) ajatus, että ajattelu ei tapahdu ainoastaan subjektiivisten konkreettisiin tilanteisiin liittyvien käsitysten varassa. Tähän asettavat hänen mukaansa rajoituksensa jo muistikapasiteetin taloudellisuusvaatimukset. Yleinen taso voidaan saavuttaa nojaamatta yksinomaan mielikuviin, vaan myös kykyyn luoda ja käyttää symbolista informaatiota (Kaufmann 1985). Siten symbolinen YS-taso voi kehittyä ennen numeerista SA-tasoa.

Tulos tukee käsitystä, jonka mukaan Bloomin-Wilsonin kategoriaa käyttäen ajattelu ei kehity hierarkkisesti (vrt. Haapasalo1998). Wilsonin tasojen käyttö on perusteltua näinollen poissulkevasti. Hierarkkisuus toteutuu ainoastaan samanrakenteisissa lausekkeissa. Tämän asian tutkiminen on ollut mahdollista havainnoimalla virheiden kasaantumista huomattavassa määrin samoille vastausvaihtoehdoille. Väärän vaihtoehdon valitseminen antaa viitteitä siitä, miten oppilaat ajattelevat kyseisen lausekkeen ja näin voidaan produkteja tutkimalla saada viitteitä oppilaiden ajattelusta.

10.2.4 Arviointi

Arvioinnin osatestissä, Arv, kehotettiin suorittamaan tehtävät arvioimalla vastaukset likimäärin päässälaskien. Asia varmennettiin moninumeroisilla luvuilla ja viiden minuutin aikarajoituksella. Arviointitestistä laskettiin summa muuttujista, jotka saivat arvon 1, 2 tai 3 riippuen, oliko kun osio oikein, väärin vai puuttuiko se. Osatestissä oli eri kohdissa vastausvaihtoehtoja kahdesta kuuteen. Tehtävät on ryhmitelty taulukossa näkyviin luokkiin.

Taulukko 10.12. Arviointitestin osioiden ratkaisuprosentit eri lukualueilla. N = 763

Osio	**1980-luku Oikein(%)** N = 351	**ka. k-haj.**	**2000-luku Oikein (%)** N = 412	**ka. k-haj.**	**d**
Positiiviset murtoluvut	91,2	1,10 0,34	96,6	1,04 0,22	0,21
Negatiiviset murtoluvut	76,9	1,25 0,46	69,2	1,31 0,47	-0,13
Desimaali lukujen peruslaskutoimitukset	45,2	1,51 0,54	48,3	1,39 0,77	0,18
Desim.luvut kompl. taso	44,7	1,68 0,81	55,6	1,49 0,71	0,25

$*p<0,05$; $**p<0,01$ ja $***p<0,001$

Arvioinnissa aineiston perusteella 2000-luvun osaaminen on parempaa kuin 1980-luvun aineistossa. Ainoa osio, jossa kehitys on ollut päinvastaista, on negatiivisten murtolukujen arviointiin liittyvä osio, alue, jossa läpi tutkimuksen on ollut eroa muihin osioihin verrattuna. Ratkaisuprosentit olivat negatiivisten murtolukujen arvioinnissa 76,9 % ja 69,2 %. Muutos ei ole kuitenkaan tilastollisesti merkitsevä. Eroa on lukujen suuruusluokkia ja niihin liittyvien proseduurien kompleksisuutta arvioitaessa. Negatiivisen murtoluvun arvioinnissa näkyi kompleksisempi prosept positiivisiin murtolukuihin verrattaessa.

Luokiteltaessa arviointiosioon kuuluvat tehtävät Wilsonin tasojen mukaisiin luokkiin ja tarkasteltaessa osaamista heikoimmassa ja parhaassa neljänneksessä, saadaan seuraava jakauma (taulukko 10.13):

Taulukko 10.13. Arvioinnin osaaminen luokiteltuna Wilsonin tasoihin heikoimmassa ja parhaassa neljänneksessä.

Ajattelun taso	1980-luku heikoin IV Oikein (%)	2000-luku heikoin IV Oikein (%)	1980-luku. paras IV Oikein (%)	2000-luku paras IV Oikein (%)
L-taso	---	---	---	---
Y-taso	78,5	85,2	96,6	97,1
YS-taso	35,1	39,4	70,6	75,7
SA-taso	32,7	33,7	66,7	73,5

*p<0,05; **p<0,01 ja ***p<0,001.

Tarkasteltaessa arviointia luokiteltuna Wilsonin tasojen mukaan, nähdään (taulukko 10.13), että osaaminen on parantunut heikoimmassa neljänneksessä perustasolla ja parhaassa neljänneksessä YS- ja SA-tasoilla. Tutkimuksen tulosten valossa arvioinnissa osaaminen on parempaa 2000-luvulla kuin 1980-luvulla.

Matematiikan soveltaminen sanallisiin tehtäviin

Sanallisiin tehtäviin liittyvät ratkaisuprosentit näkyvät alla. Täysin oikein ja osittain oikein suorittaneet on taulukossa esitetty erillisinä sarakkeina. Osittain oikeiksi pisteytettiin esimerkiksi suoritukset, joista yksikkö puuttui. Tässä osin suorituksissa oli eroa. 2000-luvun suoritukset ovat täsmällisemmin tehtyjä, niin että tehtävässä 1 osittain oikeiden suoritusten määrä oli 2000-luvun aineistossa 17 prosenttiyksikköä pienempi, tehtävän 2 ja 3 kohdalla vastaava luku oli 27,7 ja 13,3 prosenttiyksikköä.

Taulukko 10.14. Sovellukset sanallisissa tehtävissä ratkaisuprosenttien mukaan. N = 763

	Oikein (%)		Osittain oikein		Väärin (%)		Puuttuu (%)	
Tehtävä	1980-l.	2000-l.	1980-l.	2000-l.	1980-l.	2000-l.	1980-l.	2000-l.
Palautusraha ostoksista	56,4	68,8	23,1	6,1	19,4	23,5	1,1	2,0
Tekstiviestien/ sanojen määrä	39,0	26,4	30,1	2,4	21,4	65,1	8,8	6,1
Prosenttilasku	47,0	52,1	13,4	0,1	25,9	33,6	13,7	13,4
Kellonaika	58,2	50,1	1,2	0	28,3	43,6	12,4	5,6
Karamellipus-sin/säkin hinta	45,3	62,2	4,8	0	37,9	24,4	12,0	13,4
Kallen kuu-kausipalkka	26,0	28,9	1,6	0	36,0	51,6	36,3	12,3

Taulukossa näkyvistä osapisteistä voidaan päätellä, että huolimattomuusvirheet eivät ole syy tulosten heikkenemiseen 2000-luvulla luvuilla laskettaessa, koska päinvastoin näyttäisi, että täsmällisyys laskemisessa on parantunut 1980-lukuun verrattaessa. Syy on muistinvarainen, mekaaninen, visuaalisuuteen perustuva laskeminen.

Sovellettaessa päättelytaitoja sanallisissa tehtävissä suuren eron toisessa tehtävässä (liite 2) selittää numeroiden vaativuus ilman laskinta laskettaessa. Samoin tehtävässä 5 (liite 2) tuli esille 2000-luvun aineistossa oppilaiden sujuva päättelytaito, kun luvut olivat helposti päässälaskettavalla tasolla.

Jaoteltaessa sanalliset sovellustehtävät numerokäsittelyn vaatimustason mukaan kahteen luokkaan siten, että numeerisesti helpompien tehtävien luokkaan tulevat euromääriin ja kellonaikoihin liittyvät tehtävät ja numeerisesti vaikeampien tehtävien luokkaan desi- ja murtolukuja sisältävät tehtävät, saadaan seuraava jakauma:

Taulukko 10.15. Osaamisprosentit sovellettaessa matematiikkaa sanallisissa tehtävissä (prosenttilukujen eroja vertailtu t-testillä).

	1980-luku, N = 351 Oikein (%)	**2000-luku,** N = 412 Oikein(%)
Numeerinen YS-taso	63,0	62,4
Numeerinen SA-taso	52,4* **	33,6

*p<0,05; **p<0,01 ja ***p<0,001

Taulukosta huomataan, että YS-tason tehtävien ratkaisuprosentit ovat pysyneet samalla tasolla, mutta SA-tason tehtävissä ero on tilastollisesti erittäin merkitsevä.

10.3 Ajattelu eri Wilsonin tasoilla

Wilsonin (1971) tasot on esitelty tutkimuksen toteutusta käsittelevässä luvussa (luku 9). Matematiikassa ymmärtämistä voidaan tarkastella sekä käsitteellisellä että rakenteellisella tasolla eri konteksteissa sekä yleistyksen tasolla, kuten säännön tai lauseen ymmärtämisenä ja johtopäätöksen tekemisenä (vrt. Leino1978). Oppimisen kannalta soveltamistaitojen oppiminen eri kontekstissa on osaamisympäristön laajentamista, mitä Leino pitää eräänä yleistämisen muotona (Leino 1978). Tämä taso vastaa Wilsonin tasoista yhdistettyä YS-tasoa. Tämän ja rutiininomaisen laskemisen lisäksi kolmantena matematiikan oppimisen tasona Leino esittää ongelmanratkaisun tasoa, mikä vastaa Wilsonin tasoista johdettua SA-tasoa. Prosessien ja strategioiden oppiminen näillä eri tasoilla ei korvaa täysin sisältöoppimista.

Tutkimuksessani soveltamistestin osiot on jaoteltu Wilsonin ajattelun tasojen mukaisiin luokkiin YS- ja SA-tasoon. (luku 9). Niistä on nähtävissä analoginen luokitus PISA-tutkimuksen matemaattisiin prosesseihin liittyvään luokitukseen verrattuna. L- ja Y- tasot liittyvät perusmenetelmien hallintaan ja menetelmän valintaan, YS-taso tiedon yhdistämiseen ja tulkintaan sekä SA-taso ongelmanratkaisutasona soveltamiseen, perusteluun ja yleistämiseen (Välijärvi 2004). Ongelmanratkaisulla tarkoitetaan luovuutta uusien ongelmien ratkaisemisessa (luku 6). PISA-tutkimuksessa monivalintatehtäviä käytettiin kahteen ensimmäiseen kategoriaan, tietämiseen ja perusmenetelmien käyttöön sekä tiedon yhdistämiseen ja tulkintaan, joten tulokset eivät ole vertailukelpoisia tutkimukseni numeerisen testin L-ja LY-tason tuottamistehtävien kanssa, muilta osin kyllä. (vrt. Haapasalo 1994.) Tehtävätyypin eroavaisuuden lisäksi erona on vielä laskimen käyttömahdollisuus PISA-tutkimuksessa.

Hiebert ja Lefevre (1986) erottavat kaksi tasoa, joilla matemaattisen tiedon osasten välisiä suhteita voidaan luoda. Primaaritaso tarkoittaa sitä tasoa, jolla itse tietokin esiintyy. Tällöin heidän mukaansa tiedon osien välinen suhde ei ole abstraktimpi kuin itse informaatio, jota kyseinen suhde yhdistää. Wilsonin tasoin puhutaan tuolloin YS-tasosta. Termi abstrakti viittaa heidän mukaansa siihen, kun tieto vapautuu kontekstistaan. Jos suhteet rakentuvat korkeammalla, abstraktimmalla tasolla kuin se informaatio, jota ne yhdistävät, he kutsuvat reflektoivaksi tasoksi. Wilsonin termein kyseessä on SA-taso. Tämän tason suhteet ovat heikommin sidoksissa erityisiin konteksteihin (Hiebert & Lefevre 1986, 4–5).

Kartoittaakseni Hiebertin ja Lefevren primaarin tason (YS-taso) ja reflektoivan tason (SA-taso) välisiä suhteita kävin oppilas oppilaalta läpi katsoen, missä numeerisissa ja muuttujaa sisältävissä rakenteiltaan samanlaisissa lausekkeissa oli yhteyttä. 1980-luvun aineistosta kirjasin 188 tällaista suoritusta (heistä tyttöjä oli 64,4% ja poikia 35,6%) ja 2000-luvun aineistosta 144 suoritusta (heistä tyttöjä oli 53,5% ja poikia 46,5%). Alla on taulukoituna sekä analogiaan perustuva samalla tasolla havaittava yhdenmukaisuus (kaksi viimeistä luokkaa) että induktioperiaatteen mukainen konkreetista muodosta abstraktiin samanrakenteiseen (neljä ensimmäistä luokkaa) siirtynyt hahmotus. Prosenttiosuudet olen laskenut koko ikäluokasta.

Taulukko 10.16. Peruslaskutoimitukset jaettuna analogisiin ja abstraktiotasoltaan korkeampiin alueisiin (prosenttilukujen eroja vertailtu t-testillä). N= 763

	Abstraktiotasoltaan eri tasoiset				Analogiset tasot	
	Yhteenl. %	Vähen-nysl. %	Kertol. %	Jakol. %	Muutt.l %	Murtol. %
1980-luku	47,9	28,2	24,2	21,5	15,4	24,2
2000-luku	20,6***	15,1***	9,7***	7,3***	13,1	24,7

*p<0,05; **p<0,01 ja ***p<0,001

Abstraktiotasoltaan eri tasolla oleva peruslaskutoimituksiin liittyvä induktiivinen päättely on 2000-luvulle tultaessa heikentynyt (taulukko 10.16). Tämä on matemaattisen kykyrakenteen se tekijä, johon Treumannin (1974) mukaan vaikuttaminen on vaikeampaa (Treuman 1974; vrt. myös Silfverberg 1999).

Tulkintaa jaottelun tasoista

Tiedon käytettävyys vaatii toteutuakseen ymmärtämistä siinä kontekstissa (vähintään YS-tason ymmärtämistä Wilsonin tasoilla ilmaistuna), missä oppiminen on tapahtunut. Kontekstisidonnaisuus lisää tiedon käytettävyyttä, kuitenkin vain siinä kontekstissa, missä se on opittu. Abstraktiotasoltaan korkeammalla tasolla ymmärrettyjä asioita pystyy käyttämään muissakin konteksteissa. Wilsonin SA-tason oppiminen mahdollistaa oppimisen muissa konteksteissa. Taulukosta 10.16 ilmenee, että muutos 1980-lukuun verrattuna on tapahtunut yleistämisen tasoissa. Wilsonin tasoin mitattuna YS-tasolla analogisia tasoja verrattaessa osaamisessa ei ole muutosta tarkasteluajankohtien välillä, mutta sensijaan SA-tasolla tarkasteltaessa eri abstraktiotasolla olevien tehtävien osaamisessa erot ovat erittäin merkitseviä.

Prosept-käsite selittää ajattelun hierarkkisuuden kautta sen, että rakenteeltaan samanlaisten lausekkeiden osaaminen on ilman induktiivista yleistämistä mahdollinen vain sillä samalla abstraktiotasolla, millä asia on opittu. Wilsonin SA-taso tulee saavuttaa soveltamistaidon edistämiseksi tietyllä sisältöalueella, ei yleisissä strategioissa, tiedonalakohtaisuuden tähden. Lisäksi käsitteeseen liittyvän tiedon harjaantumisen tuomasta automatisoitumisesta on huolehdittava, jotta siihen liittyvän käsitteen syventäminen on mahdollista. Taulukosta 10.16 ilmenevät peruslaskutoimitusten proseptien analogisten ja abstraktiotasoltaan korkeampiin tasoihin liittyvät erot 2000-luvun tuloksissa verrattuna 1980-luvun tuloksiin. Prosept selittää, että Wilsonin tasot ovat hierarkisia vain poissulkevasti, koska proseptiin liittyvät eri proseduurit kehittyvät eri tasoilla rinnakkain ja siten tarkastelu on tehtävä efektiltään samojen lausekkeiden osalta erikseen.

10.4 Tyttöjen ja poikien erot kyvyn eri komponenteissa

Useissa kansainvälisissä tutkimuksissa on 1990-luvun alkupuolella todettu, että alakoulussa tytöt menestyvät poikia paremmin lukuihin liittyvissä laskuissa (esim. Hyde, Fennema & Lamon 1990), mutta pojat kehittyneempiä strategioita käyttävinä menestyvät myöhempinä kouluvuosinaan paremmin kuin tytöt (Hannula 2001). Näin ollen eri tutkimuksien tuloksia vertailtaessa tulisi huomioida oppilaiden ikä, testeissä käytetyt tehtävätyypit ja aiheet. Muussa tapauksessa tulosten vertaaminen ei ole perusteltua.

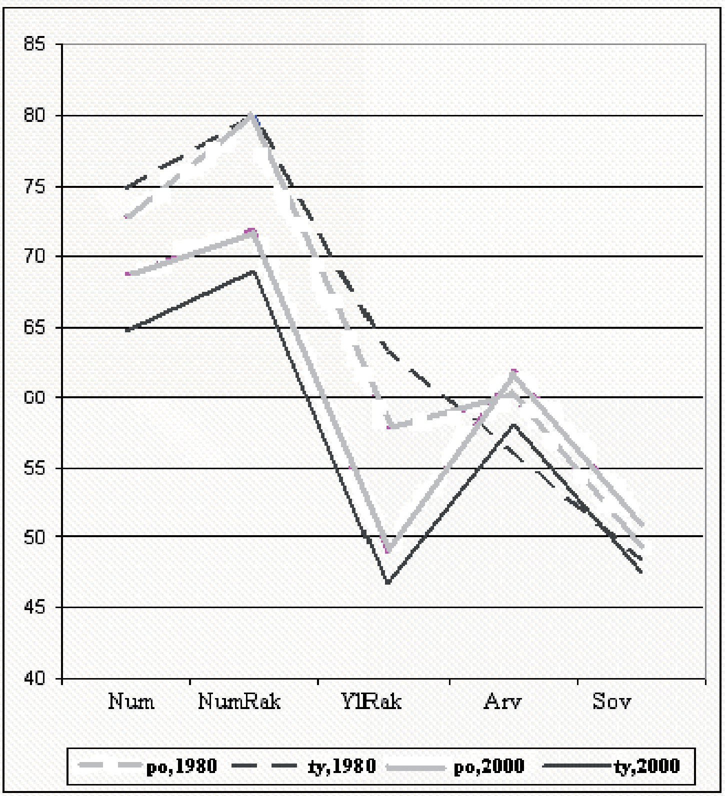
Vertailen seuraavassa aineistossani tyttöjen ja poikien osaamista matemaattisen kykyrakenteen eri komponenteissa.

Taulukko 10.17. Peruskoulun päättöluokkien matematiikan testin eri osioiden keskiarvot ja matematiikan arvosanat 1980-luvulla ja 2000-luvulla erikseen tytöillä ja pojilla (keskiarvojen eroja vertailtu t-testillä).

Testi		Num	NumRak	YlRak	Arv	Sov	Total
1981/87	k-arvo	18,7	16,0	5,7	5,6	5,8	51,8
N=195	k-haj.	4,9	3,0	2,6	2,0	3,5	13,1
Tytöt	k-arvo	16,2 ***	13,9***	4,2***	5,8	5,7	45,7***
	k-haj.	4,7	3,0	2,5	2,0	3,5	12,6
2003	tVP/UT	5,21	7,00	5,88	-1,00	0,29	4,75
N=207	dVP/UT	0,52	0,44	0,59	-0,10	0,03	0,48
1981/87	k-arvo	18,2	16,0	5,2	6,0	5,9	51,3
N=156	k-haj.	5,4	3,1	2,5	2,2	3,4	14,9
Pojat	k-arvo	17,2	14,3***	4,4**	6,2	6,1	48,3*
	k-haj.	4,7	3,0	2,7	2,1	3,5	12,7
2003	tVP/UP	1,88	5,25	2,88	-0,88	-0,54	2,06
N=205	dVP/UP	0,20	0,56	0,31	-0,09	-0,06	-0,22
	tUT/UP	-2,15	-1,35	-0,78	-1,98	-2,00	-2,08
	dUT/UP	-0,21	-0,13	-0,08	-0,20	-0,11	-0,21

Taulukossa 10.17 on esitetty peruskoulun päättöluokkien matematiikan testin eri osioiden keskiarvot 1980-luvulla ja 2000-luvulla erikseen tytöillä ja pojilla. Taulukossa VP ja VT tarkoittavat 1980-luvun poikia ja tyttöjä ja vastaavasti UP ja UT tarkoittavat 2000-luvun poikia ja tyttöjä. Muutokset tyttöjen ja poikien osaamisessa tarkasteltaessa aineiston eri testien keskiarvoja ovat samansuuntaiset kuin koko aineistossakin. Verrattaessa 2000-luvun alun tyttöjen osaamista kahdenkymmenen vuoden takaiseen, huomataan osaamisen pudonneen muissa paitsi arvioinnin osiossa ja matematiikan soveltamisessa sanallisissa tehtävissä. Arvioinnissa osaaminen on parantunut, ero ei ole tilastollisesti merkitsevä. Numeerisessa, sekä numeerisia ja yleisiä rakenteita mittaavissa osioissa muutokset ovat tilastollisesti erittäin merkitseviä efektikoon ollessa keskitasoa. Tyttöjen pistemääriin verrattuna 2000-luvun aineistossa poikien pistemäärät ovat kaikissa testiosioissa paremmat. Erot ovat numeerisessa, arviointiosiossa ja soveltamistehtävissä tilastollisesti melkein merkitseviä eron jäädessä efektikooltaan alhaiseksi. Poikien osaamista 1980- ja 2000-luvulla verrattaessa osaaminen on pudonnut numeerisessa, numeeristen rakenteiden ja yleisten rakenteiden osioissa siten, että numeeristen rakenteiden osiossa muutos on tilastollisesti erittäin merkitsevä ja yleisten rakenteiden osiossa tilastollisesti merkitsevä. Efektikoot ovat keskitasoa ja numeeristen rakenteiden osiossa yli keskitasoa. Arvioinnissa ja sovellustehtävissä osaaminen on noussut, mutta erot eivät ole tilastollisesti merkitseviä.

Eri osaamistutkimukset antavat vaihtelevia tuloksia, koska asetelmat vaihtelevat iän, tehtävien alueen ja muodon sekä tuottamistason suhteen. Opetushallitus arvioi peruskoulun yhdeksäsluokkalaisten matematiikan oppimistuloksia vuonna 2002 kansallisessa tutkimuksessa (Opetushallitus 2002). Opetushallituksen tutkimuksessa perustaitoja mitattiin monivalintatehtävillä ja ongelmanratkaisua avoimilla tehtävillä. Erona tutkimuksessani on, että numeeriset tehtävät ovat tuottamistasoa. Ongelmanratkaisuosiossa ei Opetushallituksen tutkimuksessa ollut eroa poikien ja tyttöjen koetulosten keskiarvojen välillä. Pojat osasivat opetushallituksen arviointitutkimuksessa hieman paremmin lukuihin ja laskutoimituksiin, tilastoihin ja todennäköisyyteen ja geometriaan kuuluvia tehtäviä, kun taas tytöt saivat hiukan enemmän pisteitä algebrasta. Myös opetushallituksen vuonna 2004 tekemässä matematiikan oppimistulosten arvioinnissa (N = 4511) menestyivät pojat päässälaskussa paremmin kuin tytöt. Monivalinta ja ongelmanratkaisussa sukupuolten välillä ei ollut eroa. Kangasniemi (1989) on omassa tutkimuksessaan todennut tyttöjen menestyneen paremmin aritmetiikan ja algebran tehtävissä, sensijaan pojat menestyivät paremmin geometriassa ja mittaamisessa, todennäköisyyslaskennan ja diskreetin matematiikan tehtävissä. Tutkimusajankohta on lähellä vanhan aineistoni ajankohtaa ja tulokset ovat yhtäpitäviä. Tulokseni osoittavat muutosta tässä suhteessa tultaessa 2000-luvulle. Vastaavasti Hannula (2001) toteaa artikkelissaan ”Tytöt, pojat ja matematiikka?” osaamisessa olevan eroja riippuen matematiikan osa-alueesta; tytöt osaavat parhaiten laskutaitoa mittaavat tehtävät, kun taas ongelmanratkaisutehtävät ovat poikien vahvaa aluetta.



Kuvio 9. Matematiikan testin eri osioiden osaamisprosentit 1980-luvulla ja 2000-luvulla erikseen tytöillä ja pojilla.

Verrattaessa pisteiden keskiarvoja testiosioiden maksimipisteisiin (kuvio 9) nähdään suurimman muutoksen tapahtuneen yleisessä muodossa olevien rakenteiden osaamisessa. Siinä osaaminen on alle puolet maksimipisteistä siten, että muutos 1980-lukuun verrattuna on pudonnut tytöillä poikia enemmän. Osaaminen matematiikan soveltamisessa sanallisissa tehtävissä on samaa suuruusluokkaa, mutta muutos sukupuolien välillä eri tarkasteluajankohtina ei ole suuri. Suurimmillaan osaamisprosentti (kuvio 9) on numeerisissa rakenteissa, missä se on 1980-luvulla likimain 80 % maksimipisteistä ja 2000-luvulla 70 %:n molemmin puolin siten, että poikien osaamisprosentti on suurempi kuin tyttöjen. Osaltaan tämän osion suureen osaamisprosenttiin on saattanut vaikuttaa testiosion rakenne, missä väitteen vastausvaihtoehtoina olivat tosi ja epätosi.

Taulukko 10.18. Osioiden keskiarvot jaoteltuina sukupuolen mukaan heikoimmassa neljänneksessä (UP=2000-luvun aineiston pojat, UT=2000-luvun aineiston tytöt, VP=1980-luvun aineiston pojat ja VT=1980-luvun aineiston tytöt).

		1980-luku		**2000-luku**				
		Pojat	**Tytöt**	**Pojat**	**Tytöt**	d (UP/ UT)	d (VP/ UP)	d (VT/ UT)
Num,	ka.	10,2	11,6	12,2	10,4	0,56	-0,60	0,38
	k-haj.	3,3	3,2	3,4	3,1			
Num Rak	ka.	11,8	12,1	11,4	10,6	0,32	0,16	0,52
	k-haj.	2,6	2,7	2,5	2,6			
YlRak	ka.	2,4	2,7	2,5	2,5	0,0	-0,06	0,12
	k-haj.	1,4	1,8	1,7	1,6			
Arv	ka.	3,9	3,8	4,4	4,2	0,14	-0,30	-0,29
	k-haj.	1,9	1,5	1,5	1,3			
Sov	ka.	2,4	2,0	2,9	2,1	0,43	-0,25	-0,06
	k-haj.	1,7	1,9	2,3	1,3			

*p<0,05; **p<0,01 ja ***p<0,001

Heikoimmassa neljänneksessä 2000-luvulla poikien numeerinen osaaminen on noussut. Samassa neljänneksessä 2000-luvulla tyttöjen osaaminen on heikentyneet numeerisen ja numeeristen rakenteiden alueella efektikoon ollessa keskikokoa. Sekä tytöt että pojat ovat parantaneet opetussuunnitelmien tavoitteiden mukaisilla alueilla arvioinnissa ja matematiikan soveltamisessa sanallisissa tehtävissä.

Taulukko 10.19. Osioiden keskiarvot jaoteltuina sukupuolen mukaan parhaassa neljänneksessä (UP=2000-luvun aineiston pojat, UT=2000-luvun aineiston tytöt, VP=1980-luvun aineiston pojat ja VT=1980-luvun aineiston tytöt).

		1980-luku		2000-luku				
		Pojat	**Tytöt**	**Pojat**	**Tytöt**	d (UP/ UT)	d (VP/ UP)	d (VT/ UT)
Num,	ka.	22,9	23,8	22,4	21,1	0,59	0,32	1,35
	k-haj.	1,3	1,1	1,8	2,6			
Num Rak	ka.	18,9	18,6	17,6	16,6	0,61	0,89	1,22
	k-haj.	1,1	1,7	1,7	1,6			
YlRak	ka.	7,8	8,4	7,2	6,4	0,46	0,41	1,23
	k-haj.	1,3	1,3	1,6	1,9			
Arv	ka.	8,0	8,0	8,2	7,7	0,32	-0,13	0,20
	k-haj.	1,6	1,5	1,6	1,6			
Sov	ka.	9,6	10,2	9,7	9,7	0,00	0,00	0,30
	k-haj.	2,0	1,8	2,3	1,8			

*p<0,05; **p<0,01 ja ***p<0,001

2000-luvun osioiden keskiarvoja parhaan ja heikoimman neljänneksen osalta havaitaan (taulukot 10.18 ja 10.19), että poikien keskiarvot olivat parempia kaikissa muissa osiossa, paitsi miltei samat heikomman neljänneksen yleisessä muodossa olevien rakenteiden testissä ja parhaan neljänneksen sovellustehtävissä. Erot tosin olivat pieniä. Ainut osio, missä ero on tilastollisesti erittäin merkitsevä, on numeerisiin rakenteisiin liittyvä parhaassa neljänneksessä. Numeerisen, numeerisia rakenteita ja yleisiä rakenteita mittaavissa osioissa parhaassa neljänneksessä tyttöjen suoritukset ovat pudonneet efektikoon ollessa korkeaa luokkaa.

10.5 Oppilaiden ajattelu Wilsonin tasoilla mitattuna

Tiedon käytettävyydestä Singley & Anderson (1989) esittävät, että tietyn tehtävätyypin osaaminen riippuu siitä, kuinka paljon tehtävillä on yhteisiä kognitiivisia elementtejä – mitä ajattelun tasoa (Wilsonin tasot) tarvitaan käsitteellisen osaamisen lisäksi. Tämän lisäksi nykyiset teoreetikot laskevat mukaan strategiat ”elementteinä”, jotka vaihtelevat tehtävästä toiseen (Singley & Anderson 1989).

Alla on taulukoituina Wilsonin tasojen ratkaisuprosentteja niiltä osin, kun on havaittavissa muutoksia eri tasoilla. Huomioitavaa on, että numeerisessa ja sanallisissa tehtävissä matematiikan soveltamisen osiot ovat tuottavaa tasoa ja muut tunnistamisen tasoa. Numeerisen rakenteen testissä on kaksi vaihtoehtoa ja muissa viisi tai kuusi vaihtoehtoa.

Taulukko 10.20. Ratkaisuprosentit eri Wilsonin-tasoilla heikoimmassa neljänneksessä (prosenttilukujen eroja vertailtu t-testillä).

	Ajattelun taso	Num	NumRak	YlRak	Arv	Matem. sovelt käyt
1980-luku	L-taso	61,1	92,6	31,9	–	–
	Y-taso	27,7	75,4	38,8	80,9	40,4
	YS-taso	–	41,0	22,0	37,5	28,2
	SA-taso	–	60,6	17,0	34,0	4,3
2000-luku	L-taso	59,6	72,2 ***	7,4 ***	–	–
	Y-taso	20.9	77,0	23,1 **	88,9	66,7**
	YS-taso	–	34,4	35,8 *	38,4	18,5
	SA-taso	–	37,0***	3,7***	40,7	3,7

*p<0,05; **p<0,01 ja ***p<0,001

Heikoimmassa neljänneksessä ratkaisuprosentit verrattuna 1980-luvun ratkaisuprosentteihin numeeristen rakenteiden ja yleisessä muodossa olevien rakenteiden testeissä on laskua L- ja SA-tasoilla. Arviointi on pysynyt likimain samana ja matematiikan soveltaminen sanallisissa tehtävissä on nousua Y-tasolla, mutta laskenut YS- ja SA-tason osioissa. Ensinmainitussa ero on tilastollisesti merkitsevä.

Taulukko 10.21. Ratkaisuprosentit eri Wilsonin-tasoilla parhaassa neljänneksessä (prosenttilukujen eroja vertailtu t-testillä).

	Ajattelun taso	Num	NumRak	YlRak	Arv	Matem. sovelt käyt
1980-luku	L-taso	94,9	100	83,3	–	–
	Y-taso	91,7	98,1	87,5	100	66,7
	YS-taso	–	94,0	80,6	74,0	77,1
	SA-taso	–	100	25,0	66,7	66,7
2000-luku	L-taso	86,8	95,8	52,8 **	–	–
	Y-taso	64,5**	94,1	45,1 ***	100	94,4**
	YS-taso	–	74,6 *	62,0	74,3	79,2
	SA-taso	–	65,3 ***	13,9	63,9	69,4

*p<0,05; **p<0,01 ja ***p<0,001

Taulukossa 10.21 osaamista on verrattu vastaaviin 1980-luvun osaamisprosentteihin. Heikoimmassa neljänneksessä todettu yleinen linja numeeristen rakenteiden ja yleistä muotoa olevien rakenteiden heikommasta osaamisesta 2000-luvun alussa jatkuu myös parhaassa neljänneksessä. Lisäksi heikkenemistä on numeerisessa osaamisessa. Ero on numeerisen osion Y-tasolla tilastollisesti merkitsevä, numeeristen rakenteiden osiossa SA-tasolla tilastollisesti erittäin merkitsevä, yleisessä muodossa olevan osion L-tasolla merkitsevä ja Y-tasolla erittäin merkitsevä. Matematiikan soveltaminen sanallisissa tehtävissä on parhaassa neljänneksessä parantunut Y-tasolla 1980-lukuun verrattuna siten, että ero on tilastollisesti merkitsevä.

Seuraavassa olen tarkastellut osaamista eri Wilsonin-tasoilla erikseen tytöillä ja pojoilla heikoimmassa ja parhaassa neljänneksessä.

Taulukko 10.22. Ratkaisuprosentit eri Wilsonin-tasoilla tytöillä heikoimmassa neljänneksessä (prosenttilukujen eroja vertailtu t-testillä).

	Ajattelun taso	Num	NumRak	YlRak	Arv	Matem. sovelt käyt
1980-luku	L-taso	63,4	97,1	35,3	–	–
	Y-taso	34,5	73,9	32,4	76,5	47,1
	YS-taso	–	41,2	23,5	34,3	0,0
	SA-taso	–	50,0	17,6	35,3	0,0
2000-luku	L-taso	48,3	75,0**	0,0 ***	–	–
	Y-taso	17,1*	68,9	17,5	100,0 ***	80,0***
	YS-taso	–	30,0	36,7	35,0	15,0
	SA-taso	–	30,0*	10,0	40,0	0,0

*p<0,05; **p<0,01 ja ***p<0,001

Verrattaessa 2000-luvun osaamista vastaaviin 1980-luvun vastausprosentteihin, nähdään, että tytöillä on pudonnut numeerinen osaaminen L- ja Y-tasoilla, numeeristen rakenteiden osaaminen kaikilla tasoilla ja yleistä muotoa olevien rakenteiden osaaminen L-tasolla. Ero on viimeksimainitussa tilastollisesti erittäin merkitsevä. Vastaavasti arviointi ja matematiikan soveltaminen käytäntöön on parantunut Y-tasolla. Erot ovat tilastollisesti erittäin merkitseviä.

Taulukko 10.23. Ratkaisuprosentit eri Wilsonin-tasoilla tytöillä parhaassa neljänneksessä (prosenttilukujen eroja vertailtu t-testillä).

	Ajattelun taso	Num	NumRak	YlRak	Arv	Matem. sovelt käyt
1980-luku	L-taso	95,8	100	87,5	–	–
	Y-taso	96,4	98,6	93,8	100,0	62,5
	YS-taso	–	94,6	79,2	82,8	78,1
	SA-taso	–	100	25,0	75,0	75,0
2000-luku	L-taso	81,0*	95,2	52,4***	–	–
	Y-taso	59,2***	92,6	39,3***	100	90,5***
	YS-taso	–	68,7***	58,7**	70,2	76,2
	SA-taso	–	54,8***	9,5*	71,4	71,4

*p<0,05; **p<0,01 ja ***p<0,001

Parhaassa neljänneksessä tytöillä on pudonnut numeerinen osaaminen Y-tasolla, numeeristen rakenteiden osaaminen YS- ja SA-tasolla ja yleistä muotoa olevien rakenteiden osaaminen kaikilla ajattelun tasoilla siten että erot ovat pääosin tilastollisesti erittäin merkitseviä. Parhaassa neljänneksessä tytöillä matematiikan soveltaminen käytäntöön on noussut Y-tasolla tilastollisesti erittäin merkitsevästi. Arvioinnin osaamisessa ei ole tapahtunut muutoksia.

Taulukko 10.24. Ratkaisuprosentit eri Wilsonin-tasoilla pojilla heikoimmassa neljänneksessä (prosenttilukujen eroja vertailtu t-testillä).

	Ajattelun taso	Num	NumRak	YlRak	Arv	Matem. sovelt käyt
1980-luku	L-taso	59,8	90,0	30,0	–	–
	Y-taso	23,8	76,3	42,5	43,3	36,7
	YS-taso	–	41,0	21,1	33,8	28,3
	SA-taso	–	66,7	16,7	33,3	6,7
2000-luku	L-taso	63,1	70,6**	11,8*	–	–
	Y-taso	21,8	81,7	26,5	82,4***	58,8*
	YS-taso	–	37,0	35,3	40,4	20,6
	SA-taso	–	41,2**	0,0**	41,2	5,9

*p<0,05; **p<0,01 ja ***p<0,001

Heikoimmassa neljänneksessä pojilla on numeerinen ajattelu L-tasolla noussut, vaikkakaan ero ei ole tilastollisesti merkitsevä. Lisäksi numeerisissa rakenteissa L- ja SA-tasoilla sekä yleisissä rakenteissa SA-tasolla on heikkenemistä erojen ollessa tilastollisesti merkitseviä. 2000-luvulla heikoimmassa neljänneksessä pojat ovat parantaneet arvioinnin ja matematiikan soveltamisessa sanallisiin tehtäviin Y-tasolla siten että arvioinnin osalta ero on tilastollisesti erittäin merkitsevä.

Taulukko 10.25. Ratkaisuprosentit eri Wilsonin-tasoilla pojilla parhaassa neljänneksessä (prosenttilukujen eroja vertailtu t-testillä).

	Ajattelun taso	Num	NumRak	YlRak	Arv	Matem. sovelt käyt
1980-luku	L-taso	87,5	100,0	75,0	–	–
	Y-taso	82,1	97,2	75,0	100,0	75,0
	YS-taso	–	82,9	83,3	75,0	75,0
	SA-taso	–	100,0	75,0	50,0	50,0
2000-luku	L-taso	89,3	96,7	53,3*	–	–
	Y-taso	67,6	96,3	53,3*	100,0	100,0***
	YS-taso	–	82,9	66,7*	80,0	83,3
	SA-taso	–	80,0***	33,3***	53,3	66,7

*p<0,05; **p<0,01 ja ***p<0

Parhaassa neljänneksessä pojilla numeerinen osaaminen on pudonnut Y-tasolla, vaikkakaan ero ei ole tilastollisesti merkitsevä. Numeeristen rakenteiden osaaminen ja yleisessä muodossa olevien rakenteiden osaaminen kaikilla tasoilla on pudonnut eron ollessa SA-tasolla tilastollisesti erittäin merkitsevä. Matematiikan soveltaminen sanallisissa tehtävissä on noussut Y-tasolla. Ero on tilastollisesti erittäin merkitsevä. Arvioinnissa ei ole tapahtunut muutoksia.

Luku 11

Osaamisen laadullinen tutkiminen

11.1 Merkitysten luokittelu

Oppilaiden matemaattisen ajattelun analysoiminen on tehty tutkimuksessa avoimilla tehtävillä, missä oppilaat omin sanoin kuvailivat laskulausekkeiden merkityksiä. Kerätyn aineiston kaikki loppuun tehdyt vastauspaperit on analysoitu. Aineisto kerättiin niin 1980-luvulla kuin 2000-luvullakin useasta koulusta, koska siten vähennettiin koulun tai opettajan vaikutusta aineistossa. Olen kirjannut aineistosta laskutoimituksiin liittyvät ratkaisutavat. Näistä muodostin luokkia, joiden erottavat piirteet olen kuvannut seuraavassa kappaleessa. Kategorioista voi erottaa paitsi samantasoisia toimintoihin liittyviä erilaisia strategioita, niin niitä voidaan laittaa myös hierarkkiseen järjestykseen strategian kehittyneisyyden mukaan. Fenomenografian keinoin olen luokitellut oppilaiden puutteellisia tai kehittymättömiä suorituksia. Nämä kuvauksen kategoriat ja niiden ilmiasu ovat fenomenografisen tutkimuksen päätuloksia. (Marton 1994.) Lisäksi olen luokitellut teorialähtöistä aineistonanalyysiä käyttäen oppilaiden murtolukukäsitteen muodostumisen tasot Tallin teorian pohjalta tavoitteena määrittää, millä tasolla 3. kertaluvun perspektiivistä tarkasteltuna murtolausekkeen käsitteellinen ajattelu on mahdollista. Koska viimeksimainittu tapahtuu teoriaan nojaten, ei siinä toteudu puhdasoppinen fenomenografinen tutkimusote, jossa teoriaa laajennetaan horisontaalisesti. Sensijaan siinä teoriaa laajennetaan vertikaalisesti.

Merkitykset on luokiteltu mahdollisimman laajasti ajatuksellisina kokonaisuuksina, tulkintayksikköinä, siten että kuva, tehtävä tai esitys on oma tulkintayksikkönsä. Tulkinnat eivät ole yksikäsitteisiä, vaan samat ajatusyhteydet ovat tukeneet useampaakin merkitystä tulkintayksikön sisällä. Nämä olen raportoinut kyseisessä yhteydessä. Ensisijaisena tulkintaperusteena on opiskelijan ilmaisu ja sen tulkinta. Merkitysten luokittelu ja luokkien nimeäminen on auttanut siihen, että käsitysten määrä on saatu hallittavan suuruiseksi ja niistä keskustelu on mahdollista. Näiden käsitteiden ja käsitysten avulla voidaan ilmiö jäsentää. Liian karkeaa lajittelua olen kuitenkin pyrkinyt välttämään, koska tietoa saatetaan näin hävittää. Tämä vältetään kuvaamalla ensin havaitut merkitykset tarkasti pohtimatta havaintoon liittyviä syitä ja vasta kategorioiden muodostamisen jälkeen selittämällä ilmiötä. Vaikka analysointi perustuu aineistoon, ei valmiiseen luokittelurunkoon tai teoriaan, voi taustateoriaa käyttää yleistämisen vaiheessa osana luokittelua täsmentäen sitä. Muodostettujen kategorioiden hierarkinen kuvaus merkitysluokkineen ovat tulososiossa seuraavassa kappaleessa. Analyysin tavoitteena on yleistetty kuva tutkittavasta ilmiöstä (Järvinen & Järvinen 2004, 189). Tutkimuksessani tämä tarkoittaa oppilaiden ajattelussa ilmenevien puutteiden kartoittamista, oppilaiden käsitteellisen ajattelun tason kartoittamista ja tämän perusteella 3. kertaluvun perspektiivistä tarkasteltuna perusteita algebran käsitteelliselle ajattelulle.

11.2 Tutkimuksen tulokset – puutteellisten laskustrategioiden kategoriat

Analysoituani peruskoulun päättöluokkalaisten aineiston edellä kuvatulla tavalla puutteellisten tai kehittymättömien strategioiden osalta, sain neljä eri proseduureihin liittyvää kategoriaa. Nimeän ensimmäisen niistä nimellä **'lukusanojen luettelemiseen liittyvät strategiat'**. Tarkoitan tällä alkeellisia proseduureja, missä pienillä kokonaisluvuilla summa ja erotus saadaan luettelemalla lukuja esimerkiksi sormin laskien tehokkaampien strategioiden puuttuessa. Vaikka lukusanojen luetteleminen on lähtökohta tavalle (kts. esim. Fuson 1992) suorittaa yhteen- ja vähennyslaskuja, tarvitaan suurten lukujen kohdalla lukukäsitteen hallinnan lisäksi kehittyneempiä strategioita. Vaikka Fusonin (1992, 263) mukaan oppilaat käyttävät alussa kaksi- ja useampinumeroisilla luvuilla yhteen- ja vähennyslaskuja laskiessaan aiemmin oppimiaan luettelemiseen perustuvia strategioita, tulee suurien lukujen käyttämisen merkitys esille tällaisissa tapauksissa muun muassa tehokkaampien strategioiden kehittämisen tarpeena.

Toinen kategoria on **'köyhä proseduuri'**. Joustavaan laskemiseen kuuluu käsitteen monipuolinen käyttäminen. Vaikka oppilaan lukukäsite olisi kehittynyt automatisoituneelle tasolle, tulisi käsitteeseen liittyä myös siihen kuuluvien ominaisuuksien hallinta. Tämä tarkoittaa, että oppilas on kykenevä käänteisiin operaatioihin sekä yhteen- ja vähennyslaskun välisiin sidonnaisuuksiin (Piaget 1952, 180). Tässä kategoriassa tarkastelen joustavan strategiankäytön merkitystä.

Kolmannen kategorian nimi on **'kapseloituminen liian aikaisin'**. Ilmiö esiintyy käsitteenmuodostuksen yhteydessä siten, että eri käsitteiden välisen yhteyden muodostuminen näyttäisi jäävän kesken.

Neljäs kategoria on nimeltään **'muistiin perustuva prosessointi'**. Pinnallista visuaalisuuteen tai muistinvaraisuuteen perustuvaa prosessointia esiintyy tutkimukseni aineistossa kaikilla lukualueilla. Ongelmaksi tulee ymmärtävän komponentin puuttuminen ja sitä kautta kykenemättömyys ratkaisujen oikeellisuuden tarkistamiseen sekä tiedon käyttäminen uusissa tilanteissa (Hiebert & Carpenter 1992). Seuraavassa käsittelen edellä mainittuja kategorioita tarkemmin.

11.2.1 Lukusanojen luettelemiseen perustuvat strategiat

Proseduurilla tarkoitetaan merkityn laskutoimituksen suorittamista erilaisin strategioin. Vähennyslaskuproseduurin kehittyminen alkaa oppijan laskiessa sormien tai konkreettisten kappaleiden avulla erotuksia. Taitojen karttuessa erilaisten strategioden merkitys kasvaa.

Aineistossa vähennyslaskuun 23 – 8 liittyviä tavallisimpia strategioita edustavat tutkimuksessani seuraavat:

> *"Luvusta 23 vähennän sormin 8 tulee 15 (johon lisään 8 ´ajatuksissa´tulee 23, mikä on varmistus)"*

Tämä proseduuri edustaa alkeellista yksitellen laskemisen (count-all) – tyyppistä (luku 6) proseduuria. Siinä laskeminen perustuu yksi – yksi –vastaavuuteen konkreettisten esineiden, esimerkiksi sormien avulla. Kehittyneempää ajattelua edustavat seuraavat proseduurit:

> *"Lähden vaan päässä vähentämään, vähennän ensin 10 ja lisään sitten 2, koska ´kokonaisia´ lukuja siis esim. 10 on helpompi hahmottaa "*

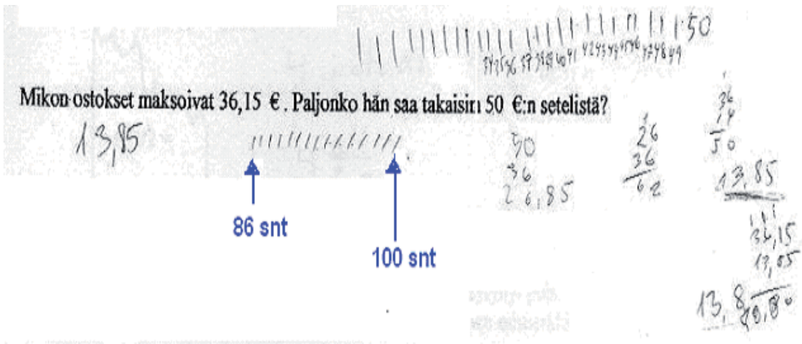
> *"Lasken päässä. Vähennän 3 ensin 23:sta. 8:sta jää jäljelle 5 ja sitten vähennän ne viisi 20:stä saan 15."*

Edellä olevat proseduurit edustavat kompleksisempaa osittaista tietämis (derived fact) -tyyppistä proseduuria, missä käytetään jo strategioita yksi – yksi -vastaavuuden korvaamiseksi.

Tuloksissani negatiivinen luku tehtävässä pudotti oikeiden suoritusten määrää verrattuna positiivisilla luvuilla laskemiseen. Useat tutkijat ovat todenneen miinusmerkin vaikeuttavan tehtävien suorittamista. On havaittu (ks. esim. Gallardo 2002; Vlassis 2002; Hihnala 2005, 46) negatiivisen luvun käyttöönoton muodostavan suurimpia ongelmia aritmetiikasta algebraan siirryttäessä. Tämän aiheuttaa köyhä negatiivisen luvun prosept; oppilas ei erota negatiivisen luvun miinus-merkkiä, vastaluvun merkkiä ja vähennyslaskun miinus-merkkiä toisistaan. Leen (2000) mukaan 6–9-luokkalaisten oppikirjoissa on runsaasti numerolaskuja eri lukualueilta, mutta hyvin vähän etumerkein varustettuja lukuja, mikä aiheuttaa sen, ettei negatiivisen luvun prosept muodostu vahvaksi. Lisäksi Lee arvelee vaikeilta laskutoimituksilta välttymisen aiheuttavan sen, että nämä asiat näyttävät algebrassa uusilta, jos on laskenut liian proseduurimaisesti ilman, että kiinnittää strategioihin huomiota.

11.2.2 Köyhä proseduuri

Kuviossa 9 esitetty oppilaan ratkaisu on tutkimuksen mittarin soveltamisosiosta, missä 18 minuutin aikana ratkaistiin kuusi sanallista tehtävää.



Kuvio 10. Esimerkki köyhästä proseduurista.

Oppilas on ensin count-all – tyyppistä proseduuria käyttäen laskenut, paljonko senttejä saadaan takaisin. Eurojen määrän hän on laskenut vähennyslaskualgoritmilla väärin. Laskussa hän on aina vähentänyt suuremmasta numerosta pienemmän riippumatta, kumpi on vähennettävä luku ja numero. Suuruusluokan tarkistamisessa yhteenlaskulla on virhe paljastunut ja hän on laskenut laskun 50–36 count-all -tyyppisesti. Tarkistettuaan kyseisen vähennyslaskun yhteenlaskun avulla hän vastasi tehtävän lukuarvon oikein. Suoritus on esimerkki tehottomasta proseduurista. Tehtävän sujuvampaan laskemiseen oppilas tulisi ohjata etsimään strategiaa, jolla käsittelee suuriakin lukuja ilman numero numerolta laskemista. Tehtäväosiossa oli kuusi sanallista tehtävää (max. pistemäärä 12) ja aikaa niihin käytettiin 17 minuuttia. Kyseinen oppilas sai osiosta kaksi pistettä.

Kategoriassa, missä oppilaan suoritus jää köyhän proseduurin tasolle, tulee esiin tarve kehittää kompleksisempia proseduureja ja strategioita laskemiseen sujuvuuden ja joustavuuden lisäämiseksi. Jos tällainen kompleksisempi proseduuri ei ole oppilaan itse kehittämä ja sitä kautta sisäistämä, saattaa se muistinvaraisena siirtyä vääriin konteksteihin ja vääränlaisena.

11.2.3 Kapseloituminen liian aikaisin

Aineistossa on suorituksia, joissa yhteistä on se, että niiden muodostamissa järjestetyissä pareissa elementit määritellään uuden peruslaskutoimituksen avulla. Väärään analogiaan päädytään esimerkiksi tapauksissa 2 • 3 ja 2^3. Muodollisesti esitettynä : (2,3) → 2+2+2 (luku 2 lasketaan yhteen 3 kertaa) ja (2,3) → 2•2•2 (luku 2 kerrotaan 3 kertaa). Tyypillisesti näissä virhe tapahtuu sen aikaisemmin opitun hyväksi, kertolaskusta tulee yhteenlasku, potenssiin korotuksesta kertolasku ja käänteisluvun ottamisesta vastaluku. Edellä mainituista lausekkeista saadaan näissä tapauksissa vastauksiksi 5 ja 6.

Vuoden 2003 mittarissa oli tehtävä, jossa pyydettiin kertomaan luku käänteisluvullaan, kirjoittamaan lauseke ja laskemaan sen arvo. Vastaluvun antoi 82,2% vastanneista ja 17,8% kirjoitti käänteisluvun. Syynä on käänteislukukäsitteen sekoittuminen vastalukukäsitteeseen. Osassa virheellisistä ajatteluprosesseista on seuraavanlainen ajattelu oppilaan omin sanoin*: ”Luvun käänteisluku on vastaava luku x-akselin alapuolella”.* Oppilas ajattelee vastaluvun lukusuoralla 0:n vastakkaisella puolella ja käänteisluvun 2-ulotteisessa esityksessä x-akselin alapuolelle. Kyseessä on analogia parin ensimmäiseen jäseneen; käänteisluvun ottaminen x-akselin alapuolelta vastaavasti kun vastaluku tulee y-akselin toiselta puolelta. Oppilas tiedostaa käänteisyyden, mutta sotkee vastalukuun x-akselin suuntaan.

Näissä kaikissa tapauksissa käsitteenmuodostus on jäänyt kesken, kapseloituminen on tapahtunut liian aikaisin. Virheen luonteen vuoksi saattaa kyseessä olla työmuistiasia. Oppilaan tietorakenteessa saattaa myös olla aukko siten, että hän hahmottaa erilliset proseduurit, mutta ei näe niiden suhdetta, mitä käsite vaatisi. Jos erilliset käsitteet ovat jääneet proseduurien tasolle, on niiden suhdetta vaikea nähdä.

11.2.4 Muistiin perustuva prosessointi

Uutena virhetyyppinä 2000-luvun ratkaisuihin oli tullut niin sanottu ”ristiinkertomissääntö”. Oppilas on todennut murtolukujen kertolaskussa verrannosta tutun rakenteen ja perusteli ristiinkertomisen sanoin: *”Jossain tällaisessa tehtiin näin”*. Myöskin aineistossa eräällä oppilaalla ainoat virheet numeerisessa tekstissä olivat 1/5 • 2/3 = 3/10, 2/3 • 3/5 = 10/9 ja 4/5 • 5 = 4/25. Hän oli laskenut kaikki kertolaskut ”kertomalla ristikkäin”. Kun lasketaan muistinvaraisesti, tulee helposti virheitä myöskin esimerkiksi siinä, miten päin kerrotaan ristiin, kuten seuraavasta suorituksesta näkyy 1/6 : ½ = 6/2 = 3

Jos ”ristiinkertomisen” osaaminen verrannossa ja murtolukujen jakolaskussa perustuu muistinvaraiseen sääntöön, ei oppilas ymmärrä suhteellisuuden merkitystä, mikä on edellytys verrantomuotoisen yhtälön rakenteen ymmärtämiselle. Myös prosenttikäsitteen ymmärtämistä pidetään keskeisenä taitona.

Sen ymmärtävä oppiminen ilman suhde-käsitettä on vaikeaa. Tämän tilanteen korjaamiseksi Strang perää peruskoulun matematiikan opetukselta murtolukukäsitteen vahvistamista eri näkökulmista; osa-kokonainen, suhde, osamäärä, laskutoimitus edeten kunkin osalta alkeisproseduureista kompleksisiin proseduureihin. Vasta tämän jälkeen murtolukuihin liittyvät kompleksisemmat proseduurit ovat mahdollisia, kuten ”ristiinkertominen”. (Strang 1990, 52–53.) Langrall ja Swafford peräävät havainnollisuutta opetukseen edellä kuvatun välttämiseksi: ”Ristiinkertomisen sääntö esitetään usein ilman, että oppilaalle annetaan mahdollisuutta tutustua kuvien ja konkreettien mallien avulla” (Langrall & Swafford 2000, 260). Edellä esitetyissä tapauksissa muistissa on malli, missä kahden suhteen tilanteessa (verrantorakenteinen) ”kerrotaan ristiin”. Oppilas ei hahmota eri laskutoimituksen merkitystä tilanteissa. Jos lisäksi murtoluku käsitteenä on muodostumatta, ei vastauksen suuruusluokka kerro suorituksessa olevaa virhettä.

Tällaiset oppilaiden kehittämät ”nyrkkisäännöt”, kuten ristiinkertomissääntö, vähentävät muistikapasiteetin kuormitusta. Näiden nyrkkisääntöjen tulisi kuitenkin olla oppilaan itsensä luomia, jotta ne perustuisivat ymmärrykseen. Jos näin ei ole, niin oppilas voi käyttää esimerkiksi visuaalisuuteen perustuvaa pinnallista heuristiikkaa tai oppilas voi perustaa tietämyksensä muistinvaraisuuteen. Työmuistin kapasiteetin kesken loppumisen näkee myös tilanteissa, joissa oppilas on pystynyt sisäistämään vain osan opittavasta kokonaisuudesta. Tämä kesken jäänyt prosessi näkyy hänen suorituksissaan samanlaisena virheenä tehtävästä toiseen. Näissä tilanteissa on tärkeää palata prosessiin ja osoittaa ristiriita oppilaan käytämässä tavassa ajatella.

11.3 Prosept rationaalilukujen laskutoimituksissa

Seuraavissa luvuissa tavoitteeni on tarkastella peruskoulun päättöluokkalaisten edellytyksiä käsitteelliseen ajatteluun murtolausekkeissa. Käsitteen käyttäminen puheessa on merkki objektitason saavuttamisesta. Sekä itselleen selittäminen että muille selittäminen ovat oppimisen ja käsitteellisen ymmärryksen syvenemisen kannalta tärkeitä prosesseja (ks. Chi, ym.1994). Selittävällä tiedolla on merkitystä käsitteenmuodostuksessa (Samarapungavan 1992; Lipponen 1997), joskin tällä tasolla tiedon käytettävyyden kannalta ollaan vasta heikon ymmärtämisen tasolla (Mouwitz 2003).

Vuoden 2003 aineiston murtolukuihin liittyvät tehtävät, joissa oppilas omin sanoin tulkitsee, mitä lausekkeet tarkoittivat, on analysoitu edellä kuvatulla tavalla ja luokiteltu fenomenografian keinoin. Lisäksi on teorialähtöisellä aineistonanalyysillä määritetty, miten peruskoulun päättöluokkalaiset sijoittuvat Tallin laadullisen käsitteenmuodostuksen teorian mukaisiin luokkiin. Seuraavissa esimerkeissä kuvailen tulkintoja, joiden perusteella olen sijoittanut proseduureja eri luokkiin. Luokat ovat preproseduraalinen, proseduraalinen, kompleksinen proseduuri ja käsitteellisen ajattelun taso.

Preproseduraalinen

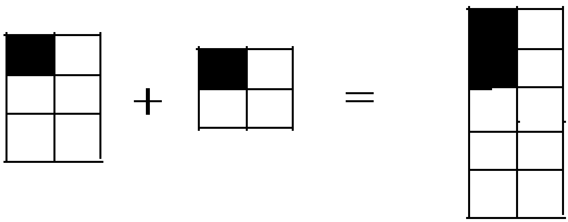
Seuraavat esimerkit olen arvioinut preproseduraalisiksi:

Käänteisluku-käsitteeseen liityvässä tehtävässä, missä piti luku kertoa käänteisluvullaan merkitsemällä lauseke ja laskemalla myös sen arvo, oppilas ratkaisi tehtävän seuraavasti:

> *”2 · (-2) = - 4”*

Oppilas on käyttänyt käänteisluvun sijasta vastalukua. Kyseessä voi olla käsitteen tai käsitteen nimen sekoittaminen tai luvussa 11.2.3 kuvattu liian aikainen kapseloituminen.

Olen luokitellut alla näkyvän suorituksen myös preproseduraaliseksi. Tehtävässä tuli lukuun 1/6 lisätä luku ¼. Oppilas kuvasi tehtävää piirtäen:



Oppilaalla on murtoluku-käsitteen muodostuminen kesken siten, että hän osaa visualisoida murtoluvun, mutta niiden vertaaminen ja yhdistäminen ekvivalenssiluokkien avulla on kehittymättä.

Lauseketta 4 : 1/2 oppilas antoi kuvaamaan seuraavan sanallisen esimerkin:

> *”Neljä omenaa pitäisi jakaa kahdelle henkilölle. Montako omenaa kumpikin saa? V: 2”*

Samasta lausekkeesta on toinen oppilas antanut sanallisen esimerkin:

> *”Pirjolla oli 1 pitsa joka oli jaettu 4 osaan, hän halusi jakaa sen puoliksi, montako palaa oli yksi puolikas. Vastaus 2.”*

Oppilas on hahmottanut jakolaskun 1 : 4. Lisäksi hän on jakanut ”sen”, mikä tarkoittaa pitsan paloja, puoliksi ja on laskenut osien määrän.

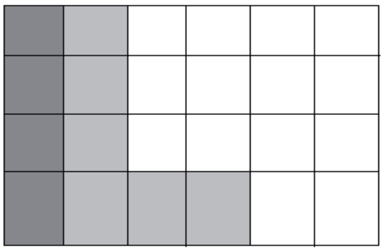
Preproseduraalinen on myös esimerkissä 5 lausekkeen 4/5 · 5 tulkitseminen sanallisesti seuraavalla tavalla:

> *”On viisi viiden palan jääpalarasiaa, joissa on neljä palaa. Lasketaan viisi kertaa neljä palaa. Arvo 20/25”*

Proseduraalinen

Proseduraaliseksi olen luokitellut esimerkiksi seuraavat suoritukset. Tehtävänä oli lukuun 1/6 lisätään luku ¼ piirtäen. Lisäksi piti määrittää lukujen summa.

Ensimmäisessä esimerkissä oppilas on alla näkyvässä suorituksessa laskenut numeerisesti samannimisiksi laventamalla summan ja sen jälkeen piirtänyt alla näkyvän kuvion.



Toisen oppilaan piti kuvata sanallisesti lauseketta 4/5 · 5 *:*

> *”Murtoluku neljä viidesosaa kerrotaan viidellä, eli luku neljä viisinkertaistetaan. Kun neljä on kerrottu viidellä saadaan kaksikymmentä, eli 20/5, toisinsanoen 4 kokonaista.”*

Myöskin kolmannen esimerkin suorituksen olen arvioinut proseduraaliseksi:

> *”että murtoluku 4/5 kerrotaan viidellä kokonaisella, eli toisin sanoen on 5 pitsaa jotka on jaettu kukin viiteen osaan ja niistä on kustakin 4 palaa jäljellä.”*

Kompleksinen proseduuri

Kompleksisen proseduurin tasolle olen arvioinut seuraavan suorituksen, missä oppilaan piti kuvata sanallisesti lauseketta 4/5 · 5:

> *”se tarkoittaa että esim. sinulla on viisi pizzapalaa joista kaikista on syöty 1/5 eli jäljellä on 80 %. Kun yhdistät viisi 4/5 pizzapalaa, puuttuu 100 % pizzasta eli saat neljä kokonaista pizzaa.”*

Käsitteellinen ajattelu

Käsitteellisen ajattelun tasoa kuvaavat seuraavat esimerkit, jotka ovat kaikki samalta oppilaalta: Lauseketta 4 : 1/2 oppilas antoi kuvaamaan seuraavan sanallisen esimerkin:

> *”Siinä saattoi lukea vaikka 4·2 = 8. Tämän tarkoitus voisi olla havainnollistaa, että jos luku kerrotaan luvulla a, niin se on sama kuin jakaisi a:n käänteisluvulla. 4 : ½ = 8.”*

Tehtävään: ”Luku kerrotaan käänteisluvullaan. Merkitse lauseke ja laske myös sen arvo” on sama oppilas antanut seuraavan vastauksen:

> *”x·1/x = x/1 · 1/x = 1. Luvun kertominen käänteisluvullaan on aina 1.”*

Sama oppilas on numeerisessa aikarajoitteisessa testissä laskenut – 17 – 23 = 40 ja - 58 + 27 = 31, samoin murtolukujen laskutoimituksiin liittyvät tehtävät ovat väärin a : a – tehtävää lukuunottamatta. Samoin yleisellä tasolla ollut väite $1/b \cdot b = b/b^2$ oli hänen mielestään oikein. Laskutoimitukset eivät ole automatisoituneet. Sensijaan kun hänellä oli riittävästi aikaa tehtävään ja piti piirtäen selvittää murtolukujen 1/6 ja ¼ summa, piirsi hän ekvilanettiluokkiin nojaten summan oikein. Osiossa oli aikaa 15 minuuttia viiteen tehtävään.

Luokiteltuani oppilaiden suoritukset edellä kuvatusti olen saanut luokkien prosentuaalisiksi osuuksiksi seuraavat 2000-luvun aineistosta:

Taulukko 11.1. Murtolukujen laskutoimitusten käsitteenmuodostusprosessien luokkien prosenttijakaumat (N = 412)

V. 2003	%
Objektitaso	6,5
kompleksinen proseduuri-taso	14,2
proseduuritaso	31,5
preproseduuritaso	31,0
jätti tehtävät tekemättä	16,8

Luvussa 7 esitetyissä Sfardin ja Tallin teorioissa käsitteen kehittymistä objektitasolle pidetään seuraavan käsitteen muodostumisen lähtökohtana. Alemman tason objektien muodostumisprosessi on edellytys sitä seuraavan tason (esimerkiksi murtolukukäsitteen muodostuminen) ja sitä seuraavan tason objektien reifikaatioprosessi (murtoluvuilla laskeminen) muodostuvat näin ollen toinen toisensa edellytyksiksi (Sfard 1991; Sfard & Linchevski 1994; Silfverberg 1999; Tall 1999).

Hierarkisuuden edellytysten ajatellaan näin ollen rakentuvan käsitteen muodostumisen tasolla, ei esimerkiksi Wilsonin eri tasoilla. Sfardin teoria poikkeaa Tallin proseptista joustavuuden suhteen. Tallin teoria korostaa proseptin eri muotojen samanaikaista erottamista. Molempien teorioiden näkökulmasta on nähtävissä vaara, miten ketjun katketessa matemaattisia rakenteita voidaan opetella proseduureina ilman yhteyttä toisaalta alemman tason struktuureihin oppijan oppiessa merkkejä muistinvaraisesti ilman niihin liittyviä merkityksiä (Silfverberg 1999). Toisaalta oppiminen voi tapahtua ilman yhteyttä sitä vastaavaan objektitasoon, jolloin matematiikka ymmärretään proseduurimaisena suorittamisena ilman rakenteellista ymmärrystä.

Luku 12

Luotettavuus

12.1 Tutkimusotteen ja menetelmien luotettavuuden tarkastelua

Tässä tutkimuksessa on käytetty otantamenetelmänä mukavuusotantaa. Vuosina 1981 ja 1987 tutkimukseen osallistuneet koulut valikoituivat silloisten yhteyksien mukaan, kuitenkin niin, että mukana oli sekä kaupunki- että maaseutukouluja sekä harjoittelukoulu. Silloin käytössä olleiden tasokurssien mahdollinen poistuminen huomioitiin siten, että kunkin koulun koko ikäryhmä osallistui testaukseen, myös muutaman oppilaan erityisryhmät. Tässä onnistuttiin yhtä luokkaa lukuunottamatta. Vuoden 2003 tutkimukseen osallistuneet koulut valittiin siten, että ne muodostivat jakaumaltaan identtisen otoksen vuosiin 1981 ja 1987 nähden koulujen ollessa osittain samat. Tämä takaa tulosten vertailtavuuden eri ajankohtina. Vuonna 1981 testaus suoritettiin kevätlukukaudella helmi- huhtikuussa. Vuonna 1987 aineiston keräyksen suoritti opetusharjoittelija kevätlukukaudella. Vuonna 2003 testaus suoritettiin helmi- toukokuussa.

Mixed methods on metodologinen triangulaatio, jossa kvantitatiivisen ja kvalitatiivisen tutkimusotteen yhtäaikainen käyttö antaa mahdollisuuksia syventää tutkimuskohteesta saatavaa tietoa. Menetelmätriangulaatiota on kritisoitu siitä, että eri tutkimusmenetelmien taustafilosofiat sisältävät erilaisia ihmiskäsityksiä ja ovat siten yhteensovittamattomat. Näin ajateltuna triangulaatio voi johtaa käsitteellisiin sekaannuksiin ja ristiriitojen hyväksymiseen. (Eskola & Suoranta 1998, 71.) Menetelmällinen triangulaatio on perusteltua tässä tutkimuksessa, koska siinä on kerätty tietoa määrällisestä osaamisesta ja myös suorituksiin vaikuttaneista laadullisista tekijöistä. Tutkimusparadigmakappaleessa (luku 8) on otettu esille eri menetelmien näennäisesti ristiriitaiset tietokäsitykset, millä perustein ne on huomioitu tutkimukseen liittyviä ratkaisuja tehtäessä.

Yleisesti tilastollista tutkimusta vastaan esitetään Soinisen (1995, 80) mukaan kritiikkiä pinnallisuudesta, yksinkertaistavasta luonteesta ja liiallisesta staattisuudesta. Soininen pitää myös tilastomatemaattista käsittelyä hyvin kaavamaisena johtuen suuresta aineistosta. Tilastollinen käsittely tässä tutkimuksessa on kuitenkin perusteltua tutkittavan asian yleisyyden selville saamiseksi. Kaavamaisuutta kompensoidaan autenttisilla kuvauksilla.

Tämä tutkimus on osittain deskriptiivinen. Laajan aineiston vaatimus täyttyy tulosten luotettavuuden ja tarkkuuden varmistamiseksi (Heikkilä 1998). Tutkimus on toteutettu lomaketutkimuksena, mikä on perusteltua, kun tutkittavia on paljon.

Tutkimuksen määrällisessä tarkastelussa keskiarvotesteillä vertaillaan ryhmien keskiarvoja toisiinsa. Asteikkojen sopivuus ja suuri otoskoko sallivat käyttää tutkimuksessa tavanomaisia keskiarvojen erojen merkitsevyystestauksia, kuten t-testiä, eri vuosien aineistojen välillä. Vertailtavien ryhmien (otosten) toisistaan riippumattomuus on edellytys tässä esitetyille testeille. Edellytykset t-testille ovat, koska riippumattomuuden lisäksi muuttujien arvot ovat normaalisti jakautuneita kaikilla vertailtavilla ryhmillä. Normaalisuutta voidaan tutkia Kolmogorov-Smirnovin testillä (Guilford 1956), mutta suurilla otoksilla, kuten tässä voidaan turvautua myös lauseeseen: otoskeskiarvon jakauma noudattaa likimain normaalijakaumaa riippumatta siitä, millaisesta jakaumasta otos poimitaan. Lauseen mukaan on siis todennäköistä, että keskiarvon jakauma on normaali, vaikka muuttujan alkuperäisten arvojen jakauma ei sitä olisikaan (Guilford 1956). Tämä pätee suurilla otoskoon arvoilla.

12.1.1 Validiteetti

Mittaaminen on tieteellisen tiedon uskottavuuden ja luotettavuuden kannalta keskeistä. Tutkimustulosten ja johtopäätösten kannalta mittauksen laadun merkitys on kiistaton (Vehkalahti 2008). Ensisijainen kriteeri tutkimuksen luotettavuudelle on validiteetti, joka kertoo, mitataanko sitä, mitä pitikin mitata.Validiteetti, pätevyys, tarkoittaa karkeasti ottaen systemaattisen virheen pienuutta. Yleisemmin mittauksen validiteetti voidaan määritellä mittarin antamien tuloksien ja mitattavan todellisen ominaisuuden määrän väliseksi vastaavuudeksi tai korrelaatioksi.

Käsite- eli rakennevalidius (construct validity) liittyy sovellusalueen teoriaan ja käsitteisiin. Jos mitattavia käsitteitä ja muuttujia ei ole tarkoin määritelty, eivät mittaustuloksetkaan voi olla valideja (Heikkilä 1998). Teoreettisen käsitteen operationalisointi tehdään käsitteen määritelmän perusteella. Jos tämä teoreettisen käsitteen operationalisointi on onnistunut, mittari on käsitevaliditeetiltaan hyvä. Tutkimuksessani eri matemaattisen kyvyn komponentteja mittaavien testien validiteetit ovat sidoksissa kykyjen luokitteluun ja määrittelyyn. Ne on avattu lukijalle luvussa 9. Periaatteiden ymmärtämistä mittaavat testit edellyttävät laskutoimitusten välisten yhteyksien ja perusrakenteiden ymmärtämistä, mikä on pyritty varmistamaan aikarajoituksella. Matematiikan käyttämistä sanallisissa tehtävissä testataan tavanomaisilla koulukirjoista tutuilla tehtävillä, jotta tehtävätyyppi tuntuisi vastaajista tutulta. Arviotesti sisältää lukujen suuruusluokan vertaamiseen ja numeeristen lausekkeiden suuruusluokan arvioimiseen liittyviä tehtäviä. Testiosioon liittyy aikarajoitus, jotta tehtävät suoritettaisiin arvioimalla eikä niiden algoritminen ratkaiseminen olisi mahdollista. Myös numeeriset tehtävät on laadittu siten aikarajoituksella, että ne mittaavat automatisoituviksi tarkoitettuja valmiuksia.

Testien validiutta on arvioitu tutkimuksessa niiden korrelaatiolla todistusarvosanaan, jonka on tarkoitettu mittaavan matemaattisia kykyjä opetussuunnitelmien tavoitteiden mukaisissa sisällöissä. Todistusarvosanat ovat mittareista riippumattomia siinä mielessä, että todistusarvosanat on annettu erillisinä testien tuloksista. Taulukosta ilmenevät eri testien korrelaatiot matematiikan todistusarvosanaan:

Taulukko 12.1. Testien korrelaatiot todistusarvosanoihin; kaikki korrelaatiot eroavat tilastollisesti erittäin merkitsevästi nollasta (***).

Testi	r (1980-luku)	r (2000-luku)
Numeerinen testi	0,59	0,53
Numeeriset rakenteet	0,59	0,56
Yleiset rakenteet	0,56	0,51
Arviointi	0,48	0,51
Matem. soveltaminen sanallisiin tehtäviin	0,41	0,56

*p<0,05; **p<0,01 ja ***p<0,001

Korrelaatiot ovat suhteellisen korkeita ja tukevat omalta osaltaan käsitystä testien validisuudesta. Se että korrelaatiot ovat arvioinnin testissä ja matematiikan soveltamisessa sanallisiin tehtäviin suurempia 2000-luvulla päinvastoin kuin muissa testeissä, viittaa siihen, että todistusnumeroiden arvioinnissa on painotettu niitä muita osa-alueita enemmän.

Laskettaessa eri testien väliset korrelaatiot, saatiin vaihteluväliksi 0,48-0,83, mikä kuvaa sitä että testit eivät ole riippumattomia. Tällainen riippuvuus oli odotettavissakin – onhan selvää, että matemaattiset erityiskyvykkyydet eivät sulje pois kyvykkyyttä toisellakin matematiikan osa-alueella. Pikemminkin korrelaatiot kertovat osaamisen kerääntymisestä samoille oppilaille.

12.1.2 Reliabiliteetti

Reliabiliteetilla tarkoitetaan tulosten tarkkuutta. Määritelmän mukaan reliabiliteetti tarkoittaa todellisen vaihtelun osuutta mittauksen kokonaisvaihtelusta (Vehkalahti 2000). Sitä luonnehditaan kyvyksi tuottaa ei-sattumanvaraisia tuloksia (Heikkilä 1998). Tässä tutkimuksessa on N = 763, mitä voidaan pitää jo sisäistä reliabiliteettia kasvattavana suurena otantana, jolloin satunnaisvirheen osuus tulee minimoitua. Tutkimuksen sisäinen reliabiliteetti voidaan todeta mittaamalla sama tilastoyksikkö useampaan kertaan. Mitä lähempänä mittaustulokset ovat toisiaan, sitä reliaabelimpi mittaus on. Tässä tutkimuksessa reliabiliteettia on pyritty lisäämään usealla samaan alueeseen kuuluvalla tehtävällä ja vertaamalla näiden vastausten yhdenmukaisuutta.

Cronbachin α-kerrointa on sovellettu yhdistettyjen muuttujien (ns. summamuuttujien) ja useita osioita sisältävien testien sisäisen yhdenmukaisuuden (konsistenssin) tarkasteluun. Eri testeille lasketut reliabiliteettikertoimet, niin sanotut Cronbachin alfakertoimet, vaihtelivat 0,43–0,90.

Testiosio	**Cronbachin α-kerroin**
Numeerinen testi	0,90
Numeerinen rakennetesti	0,81
Yleistä muotoa oleva rakennetesti	0,43
Arvioinnin testi	0,49
Matematiikan soveltaminen sanallisiin tehtäviin	0,76

Kuvio 11. Eri testiosioiden Cronbachin alfakertoimet.

Mittarin kaikki tehtävät ovat analyysissä mukana. Yleistä muotoa olevan rakennetestin ja arvioinnin testin keskinkertaisiksi jääneisiin alfakertoimiin on vaikuttanut muihin testeihin verrattuna erilainen rakenne. Niissä ei seurattu vain vastauksen oikeellisuutta, vaan valittavana oli suurempi määrä vastausvaihtoehtoja.

Tässä tutkimuksessa määrällisessä tarkastelussa käytetyt testit olivat nopeustestejä, joten niille tavanomaista sisäistä konsistenssia mittaavien reliabiliteettikertoimista päättelyä ei voida pitää kaikin osin perusteltuna (Guilford 1956, 451). Lisäksi vielä reliabiliteettikertoimia arvioitaessa on otettava huomioon, että osiovalinnassa ei pyritty maksimaaliseen laskennalliseen reliabiliteettiin, vaan testit aloitettiin helpoilla oppilaille tutuilla tehtävillä pedagogisista syistä.

12.2 Laadullisen tiedon luotettavuus

Fenomenografisen tutkimuksen luotettavuudessa, kuten laadullisen tutkimusmenetelmän ylipäätänsä, voidaan myös puhua validiteetista, siitä tutkitaanko sitä mitä pitikin. Tällöin tarkasteltavat käsitteet ovat aineiston aitous ja relevanssi. Samat käsitteet liitetään myös tuloksina saataviin johtopäätöksiin. Luotettavuus perustuu siis aineiston ja johtopäätösten validiteettiin, jolla on kaksi ulottuvuutta; aineiston ja johtopäätösten tulee vastata tutkittavan ajatuksia (aitous) ja samalla niiden tulee liittyä tutkimuksen teoreettisiin lähtökohtiin (relevanssi) (Ahonen 1994). Martonin (1994) mukaan fenomenografinen tulkinta kohdistuu henkilöön tai aineistoon. Tutkimukseni tapauksessa kohteena ovat erilaiset avoimilla ja tuottavilla tehtävillä saadut vastaukset. Tässä tutkimuksessa kirjallinen aineisto muodostaa aineiston analyysille. Kuvauksen kategoriat ja niiden ilmiasu, tutkimuksen laadulliset päätulokset, on esitetty Laadullisia tuloksia-osiossa.

Analysointiyksikkönä on aineistosta päätellyt käsitykset, ei valmiiseen teoriaan perustuvat käsitykset. Puhdasoppisesti fenomenografian keinoin on luokiteltu oppilaiden käsityksiä murtolukualueella. Olen luokitellut nämä käsitykset merkityksellisyyden perusteella muodostamalla merkitysluokkia (kategorioita). Tuloksena on syntynyt kuvaus merkitysluokista. Merkitysluokat ovat aineistosta pääteltyjä; käsitystyypit voivat olla suhteessa toisiinsa eri tasoilla kehitysasteeseensa nähden (vrt. Järvinen & Järvinen 2004, 85). Syntyneet luokitukset muodostavat tutkimuksen tuloksen, niiden merkitystä tulkitsen ainoastaan pohdinnassa.

Fenomenografisen tutkimuksen luotettavuutta tarkasteltaessa voidaan puhua myös merkityskategorioiden ja merkitysten luotettavuudesta, siitä miten tulkinnat toisaalta vastaavat tutkimushenkilöiden tarkoittamia merkityksiä heidän tarkoitustensa eli intentioidensa suuntaan ja toisaalta tutkimuksen teoreettisten lähtökohtien suuntaan.

Luotettavuuskriteerit koskevat kahta tutkimusvaihetta, aineiston hankintaa ja kategorioiden muodostamista aitouden ja relevanssin tasolla. Tutkimustulosten aitouden ja relevanssin samoin kuin niiden teoreettisen yleisyyden tason olen pyrkinyt välittämään lukijalle raportissa selvittämällä tutkimuksen kulun yksityiskohtaisesti ja hyväksymällä intersubjektiivisuuden – sen että merkitysten tulkintaan vaikuttavat tutkijalla olevat käsitykset ja merkitykset. Tämän pyrin tuomaan näkyviin perusteluin ja suorin lainauksin, jotta lukijan olisi mahdollista ottaa kantaa tulkinnan oikeellisuuteen omien merkitysrakenteidensa kautta. Lainauksien käytöllä pyrin torjumaan myös epäilykset ylitulkinnasta johtopäätösten teossa.

Tutkimusyksikön sijoittaminen merkitysluokkiinsa ei ollut aina yksikäsitteinen johtuen aineiston keräämisen kertaluonteisuudesta, jolloin tarkentavien kysymysten tekeminen ei ollut mahdollista. Tästä on esimerkkinä vastaluku/käänteisluku-tulkinta (luku 11), missä vastaustarkkuudet kirjallisessa tuotoksessa vaihtelivat, ja merkitysvaihtoehtojen sijoittumista luokkiinsa ei voinut määrällisesti varmuudella tarkastella. Aineistositaatit on pyritty tulkitsemaan tutkijan ajatuskulun seuraamisen helpottamiseksi ja luettavuuden parantamiseksi. Raportissa tarjotaan lukijalle lainaukset kokonaisina tulkintayksikköinä, vähintään kokonaisina tehtävinä, jotta voisi vakuuttua siitä, ettei tutkija ole irroittanut ilmaisuja irti yhteyksistään omien tulkintaodotustensa tueksi.

Laadullinen tutkimus poikkeaa määrällisestä siinä, että sen luotettavuutta ei voi tarkistaa tutkimusta toistamalla, koska tutkija itse on ”tutkimusinstrumentti” ensinnäkin teoreettisen perehtyneisyytensä ja toiseksi prosessin intersubjektiivisuuden perusteella (Ahonen 1994). Lukija voi vakuuttua tutkimuksen luotettavuudesta teoreettisiin lähtökohtiin, niiden liittymisestä tutkimusongelmiin, tutkimushenkilöiden ja –tilanteen, aineiston keruun ja tulkintaprosessin periaatteiden ja kulkuun liittyvien riittävän täsmällisten kuvausten perusteella. Tutkimuksessa fenomenografisella menetelmällä analysoidussa osiossa tavoitellaan oppilaiden ilmaisuista tulkittua tietoa lukuihin ja lausekkeisiin liittyvistä käsityksistä ja niiden laadullisesta kehittymisestä. Tällä ei tavoitella tilastollista yleistettävyyttä, vaan teoreettista ymmärtämystä yleisellä tasolla. Fenomenografisten tutkimustulosten merkitys tulee siitä, että johtopäätöksillä on teoreettista yleisyyttä, toisin sanoen laadullisesti tutkitut tulokset laajenevat teorian suuntaan.

Muun muassa Gröhn (1993), Häkkinen (1996, 46) ja Metsämuuronen (2003, 176) arvioivat fenomenografisen tutkimusotteen ongelmina yleistettävyyttä ja sitä, että käsitykset ovat tutkimuksen kohteena. Koska käsitykset ovat kontekstisidonnaisia, tulisi yleistämisen rajat aina huomioida käytännön ongelmaratkaisutilanteissa. Ihmisen käsitys on ilmiön projektio, ilmiötä on vaikea kokonaan saavuttaa ja se ilmenee eri ihmisille erilaisena riippuen heidän kokemustaustastaan. Kategorioita muodostettaessa korostuu lisäksi tutkijan rooli. Häkkisen (1996, 48) mukaan voidaan myös perustellusti kysyä, kuinka paljon kuvauskategoriat kuvastavat tutkittavan ajatusmaailmaa. Käsitykset ovat aidosti erilaisia ja aikaa myöden muuttuvia, mitä ei kuitenkaan tarvitse mieltää ongelmana, jos muistetaan fenomenografisen tutkimuksen lähtökohta – oppiminen. Oppilaan senhetkisen käsityksen tiedostaminen jostakin asiasta tai ilmiöstä on oppimisen kannalta hedelmällinen lähtökohta.

Laadullisen tutkimuksen luotettavuuden jäsentämiseksi Cuba ja Lincoln (1989, 233–245) esittävät lähtökohdiksi uskottavuutta, hermeneuttisen prosessin onnistumisen tarkastelua ja autenttisuutta. Tutkimusraporttiin voidaan vastaavasti soveltaa resonanssin, retoriikan ja hyödyn tai sovellettavuuden periaatteita. Sovellettavuudesta voidaan puhua myös tuloksellisuuden käsittein (Eskola & Suoranta 1998, 233).

Luotettavuuden arviointikriteereinä Lincoln ja Cuba (1985) pitävät vastaavuutta, siirrettävyyttä, tutkimustilanteen arviointia ja vahvistettavuutta. Syrjälä, Ahonen, Syrjäläinen ja Saari (1994) esittävät luotettavuuden arvioimiseen vastaavuutta, sovellettavuutta, pysyvyyttä ja neutraalisuutta. Molemmissa jäsennyksissä esiintyy vastaavuus, jolla ymmärretään tutkimuksen löytöjen uskottavuutta. Siirrettävyydellä tarkoitetaan, että löydöt voidaan siirtää uuteen kontekstiin ja tutkimuksen löydöillä on sama merkitys myös siinä. Vahvistettavuus ja neutraalius vastaavat lähinnä tutkimuksen objektiivisuuden vaatimusta, johon päästään avaamalla tutkijan subjektiiviset käsitykset lukijalle. Omassa tutkimuksessani pysyvyyden näkökulmasta tilanne oli yhtenäinen kaikille lomakkeen yhtenäisyyden takia. Lincolnin ja Cuban (1985) mukaan esimerkiksi alkuperäisen materiaalin ja raportin vertailu vahvistavat vastaavuutta. Tutkimuksessani vastaavuutta vahvistaa se, että tunnen tutkimuskontekstin hyvin, jolloin käsitteiden käyttö ja tulkinta helpottuvat. Toki samalla asialla tiedostamattomana voi olla myös vaaransa tuudittautua liian pinnalliseen totuttuun ajatteluun. Myös otantaperusteet voivat vahvistaa vastaavuutta, millä tarkoitan eri testivuosien otantajoukon samankaltaisuutta.

Sovellettavuuden edellytyksiä on riittävän rikas aineiston, menetelmien ja analyysin toteuttamisen kuvailu (Lincoln & Cuba 1985, 294–316). Perinteisessä tutkimuksessa sovellettavuuden käsitettä on kuvattu ulkoisen validiteetin kriteereillä. Analyysissä olen pyrkinyt helpottamaan sovellettavuuden arviointia lukijalle tekemällä analyysista asetelmia ja jäsennyksiä, joilla käsitteellinen yleistäminen mahdollistuu paremmin.

Vahvistettavuus vastaa perinteisen kriteeristön objektiivisuutta. Laadullinen tutkimus on subjektiivista. Tutkijan tietoisuus omasta subjektiviteetistään ja sen vaikutuksista on välttämätöntä ja siksi sen aukikirjoittaminen on tärkeä osa vahvistettavuutta. Kvalitatiivisessa aineistossa ei pyritäkään objektiivisuuteen. Subjektiivisuutta pidetään pikemminkin kvalitatiivisen tutkimuksen voimana kuin sen heikkoutena (Patton 1990, 54). Tutkijan henkilökohtaisia kokemuksia pidetään tutkimuksen arvokkaana tutkimusmateriaalina. Ne auttavat aineiston tulkinnassa. Subjektiviteetin vaarana on, että tutkija alkaa ymmärtää kohteensa sen mukaan, miten hän itse kokee ja ymmärtää asioita, jolloin ei päästä tutkimuskohteen ymmärtämiseen. Tutkimuskohteen ja tutkijan merkitysmaailmat muistuttavat kylläkin toisiaan, mikä sekä helpottaa että johtaa harhaan ymmärtämistä. Tästä syystä on tarkasteltava omaa subjektiviteettiään ja on otettava tulkinnoissaan reflektiivistä etäisyyttä. Tunnistan oppimista omassa ajattelussani, mikä osoittaa, etten ole pitäytynyt tutkimusta edeltävissä merkityksissä.

Vastaavuuden parantamiseksi mixed methods-triangulaatiota voidaan käyttää aineistonkeruumenetelmien ja aineiston tasolla (Patton 1990, 464) laadullisessa tutkimuksessa validiteettikriteerinä. Mittarin alkuosien aineistoa olen mixed methods-metodologian mukaisesti tulkinnut sekä määrällisesti että laadullisesti, samoin 2000-luvun testin loppuosassa olleen avoimia tehtäviä sisältäneen osion. Teoriaan liittyvällä triangulaatiolla tarkoitetaan, että tutkimuksessa käytetään monia teoreettisia näkökulmia laajentamaan tutkimuksen näkökulmaa. Jo tutkimuksen tieteenteoreettinen asemointi kolmanteen paradigmaan osoittaa teoriaan liittyvän triangulaation.

Luku 13

Diskussio

13.1 Keskeiset tulokset

Olen tutkimuksessani verrannut peruskoulun päättöluokkalaisten osaamisessa 20 vuoden aikana (1980-luvulla ja 2000-luvulla) tapahtuneita määrällisiä muutoksia matemaattisen kyvyn eri komponenttien alueilla sekä tutkinut peruskoulun päättöluokkalaisten aritmetiikkaan ja algebralliseen ajatteluun liittyvää käsitetietoa 2000-luvun aineistossa Tallin käsitteenmuodostuksen teoriaan peilaten (vrt luku 6). Kompetenssiajattelun mukaisesti näkökulmina ovat sekä yhteiskunta- että yksilönäkökulma. Ensinmainittua tarkastellaan työelämä- ja opetussuunnitelma-näkökulmasta ja yksilönäkökulmana osaamista kompetenssimielessä. Resursseja tarkastellaan yhteiskunta- ja yksilönäkökulmasta. Ensinmainittuun sisältyvät opetussuunnitelman perusteiden tulkinnat ja yhteiskunnan panostus, jälkimmäiseen oppilaan käytettävissä olevat tiedot. Tässä luvussa tarkastelen tutkimuksen tuloksia ongelmanasettelun kannalta ja arvioin niiden merkitystä oppimisen kannalta. Diskussio kohdistuu ensisijaisesti sisältöihin tutkimuksen luonteesta johtuen.

Tutkimusongelma 1. Millaisia muutoksia on havaittavissa peruskoulun päättöluokkalaisten aritmetiikka-algebra-alueen osaamisessa 20 vuoden aikana?

Strategioiden oppiminen ei korvaa käsitteiden ja toimintojen oppimista, koska perusaineksen ymmärtävän oppimisen automatisoituminen vapauttamalla työmuistin kapasiteettia vasta mahdollistaa kompleksisemmalla tasolla oppimisen. Verrattaessa osaamista 20 vuoden aikana ovat muutokset tapahtuneet lukukäsitteistä murtoluvuissa ja negatiivisissa luvuissa sekä yleistä muotoa olevissa rakenteissa. Suuruusluokkien arviointitaito ja matematiikan käyttäminen sanallisissa tehtävissä ovat parantuneet, vaikkakin erot ovat pieniä. Viimeksimainituissa kehitys on tapahtunut Wilsonin tasoin luokiteltuna Y-tasolla (ymmärtämisen taso), ei kehittyneemmillä ajattelun tasoilla. Tämä selittynee heikentyneellä numerokäsittelyllä verrattuna 1980-lukuun. Havaitut puutteet samanrakenteisissa numerolausekkeissa siirryttäessä formaalille tasolle eivät tue yleisessä muodossa olevien rakenteiden ymmärtävää oppimista.

Perusopetuksensa päättävien ikäkaudelle on tyypillistä siirtyminen konkreettisten operaatioiden vaiheesta formaalisten operaatioiden vaiheeseen. Usean muuttujan samanaikainen tarkastelu ja ehdollisten sääntöjen mieltäminen ovat kehityspsykologian teorioiden mukaan mahdollisia. Oma merkityksensä formaalin tason ajattelulle on käsitteiden asteittainen kehittyminen lähtien konkreettisista kokemuksista. Tutkimuksessani todettu muistinvarainen proseduraalinen oppiminen ei korvaa tätä.

Tyttöjen ja poikien erot kyvyn eri komponenteissa

Kahdenkymmenen vuoden aikana tyttöjen osaaminen on pudonnut enemmän kuin poikien osaaminen siten että poikien osaaminen on parempaa kaikissa tarkastelualueissa. Samanaikaisesti tyttöjen matematiikan arvosanat ovat parempia kuin poikien.

Heikoimmassa neljänneksessä poikien osaaminen on parantunut numeerisen laskemisen osiossa 1980-lukuun verrattuna alemmilla ajattelun tasoilla. Sekä heikoimmassa että parhaassa neljänneksessä yleisessä muodossa olevien rakenteiden hallitseminen on pudonnut kaikilla tasoilla. Suurimmillaan muutos on tyttöjen parhaassa neljänneksessä

Tutkimusongelman 1. tulosten perustelut ilmenevät alaongelmien 1.1 – 1.4 tuloksista.

Alaongelma 1.1 Millaista osaaminen on aritmetiikka-algebra-alueella peruskoulun päättöluokalla 1980-luvulla?

Behavioristinen näkökulma 1980-luvun opettamisessa ja oppimisessa näkyy mittarin laadinnassa ja siten myös arvioinnissa. Tästä syystä produktityyppisen aineiston mentaalisessa tulkinnassa tulee välttää yliarviointia. Miten estää se ettei tutkija tulkitse yksilön mieltä satunnaisella tavalla? Kognitiivista behaviorismia edustavan Tolmanin mukaan oppimiseen vaikuttavat paitsi behavioristiset ärsykkeet, myös mielen sisäiset vihjeet (1922) ja kognitiiviset kartat (1948). Siten hän on nostanut ärsykkeen laukaiseman toiminnan rinnalle mielen sisäiset aktiviteetit, kuten esimerkiksi muistitoiminnot. Näin ajatellen aineiston mentaalinen tulkitseminen on mahdollista. Tällä periaatteella olen tulkinnut tutkimukseni aineistoa. Jotta lukija voi vakuuttua tulkinnan oikeellisuudesta, on tulkintojen lähtökohdat raportoitu. Produktityyppisten tehtävien tulosten osaamisprosenteissa ei sen sijaan ole tulkintavirheen mahdollisuutta.

Mittarin testit liittyivät numeeriseen osaamiseen, numeerisiin rakenteisiin, rakenteisiin, arviointiin ja matematiikan soveltamiseen sanallisissa tehtävissä. Numeeristen rakenteiden testin osaamisprosentti on 1980-luvulla mittarin testien suurin (80 %). Osittain tämä selittyy testin rakenteella. Väitteitä arvioitiin tosi-epätosi asteikolla. Muiden testiosioiden osaamisprosenttien vaihteluväli on [49 % –74 %]. Alin osaamisprosentti 1980-luvulla, kuitenkin samalla suurin keskihajonta, on matematiikan soveltamisessa sanallisiin tehtäviin. Numeerisessa, numeeristen rakenteiden ja arviointitestissä testattiin myös automatisoitumisen astetta, koska suoritukseen käytettävää aikaa rajoitettiin.

1980-luvun opetusuunnitelmissa ohjeistetaan opettamaan algebra laskusääntöjen avulla pääasiassa sanallisessa muodossa. Kaavojen esittämisellä ja lausekkeiden muodostamisharjoituksilla pyritään totuttamaan oppilaita matematiikan symbolikielen lukemiseen ja käyttämiseen (esim. Anon. 1985) sanoin: ”Kertolaskussa lasketaan eksponentit yhteen, ja potenssiin korotuksessa eksponentit kerrotaan”. Tästä näyttäisi seuraavan virheiden kasaantuminen 1980-luvun algebrallisissa lausekkeissa eksponenttien väärään käsittelyyn, ei kantalukuihin.

Alaongelma 1.2 Millaista osaaminen on aritmetiikka-algebra-alueella peruskoulun päättöluokalla 2000-luvulla?

Myös 2000-luvulla numeeristen rakenteiden testin osaamisprosentti on mittarin testien suurin (70,5 %). Muiden testiosioiden osaamisprosenttien vaihteluväli on [48 %–67 %]. Alin osaamisprosentti 2000-luvulla on rakenteita mittaavassa osiossa, kun se 1980-luvulla oli osiossa, missä matematiikkaa sovellettiin sanallisiin tehtäviin. Suurin keskihajonta on numeerisessa osiossa.

Matematiikan yleisessä muodossa olevaan rakennetestiin liittyvät virheet selittyvät useassa tapauksessa numeroarvoihin liittyvänä käsittelynä. Virheet liittyvät paitsi eksponenttien käsittelyyn, myös kantaluvuissa esiintyneisiin virheellisiin päätelmiin. 2000-luvulla monomien yhteenlaskussa 82 % oppilaista yhdistää samanmuotoiset termit laskemalla termien kertoimet oikein yhteen, mutta heistä yli 60 % laskee yhteen vielä eksponentitkin. Monomeja kerrottaessa 21 % kaikista vastaajista kertoo kertoimien lisäksi eksponentitkin. Rakenteiltaan samanlaisissa numeerisissa ja yleistä muotoa olevissa lausekkeissa muutosprosenttien samankaltaisuus viittaa numeerisen ja yleistä muotoa olevien lausekkeiden tuttuuteen. Uutena virhetyyppinä 2000-luvulla ajatteluun on tullut tulon x • x visuaalinen tulkinta 2x; oppilas näkee kaksi kappaletta x-merkkiä lausekkeessa.

Bloomin taksonomiaan pohjautuvalla matematiikan opetusta varten kehitetyllä Wilsonin (1971) taksonomialla mitattuna osittelulakiin liittyvä osaaminen riippuu 2000-luvun aineistossa (N= 412) tehtävän tasosta.Ymmärtämisen ja opitun rakenteen soveltamista uusissa tehtävissä sisältävät testiosiot suoritettiin yli 70 %:sesti sekä numeerisella tasolla että yleisellä tasolla 1980-luvulla. Soveltamista, eri käsitteiden yhdistämistä ja analysointia vaativissa testiosioissa osaamisprosentti on pudonnut 40 prosenttiyksikköä sekä numeerisella että yleisellä tasolla 2000-luvulla. Samansuuntainen tulos saatiin osiossa, missä sovellettiin matematiikkaa sanallisiin tehtäviin, tarkasteltaessa tehtävän tarvitseman luvun kompleksisuutta. Ero eri tehtävissä selittyi käytettyjen lukujen kompleksisuudella. Samoin esille tuli oppilaiden sujuva päättelytaito, kun luvut olivat helposti päässälaskettavalla tasolla.

Alaongelma 1.3 Millaisia muutoksia on havaittavissa peruskoulun päättöluokkalaisten aritmetiikka-algebra-alueen osaamisessa 1980- ja 2000-lukuja verrattaessa?

Tarkasteltaessa 1980-luvun ja 2000-luvun suoritusten eroa havaitaan niiden olevan muissa paitsi arviointia ja matematiikan soveltamista sanallisiin tehtäviin mittaavissa osioissa tilastollisesti erittäin merkitseviä efektikoon (d-luku) ollessa numeerista, numeerisia rakenteita ja yleisiä rakenteita mittaavissa osatesteissä lähes keskitasoa ja suurimmillaan yli keskitasoa numeerisia rakenteita mittaavissa testeissä. Mittarin eri osatesteistä numeerinen ja matematiikan käyttäminen sanallisissa sovellustehtävissä on tuottamistasoa, sen sijaan muut osatestit ovat tunnistamistasoa, mikä vaikeuttaa eri testien keskinäistä vertailtavuutta. Sen sijaan 1980-luvun ja 2000-luvun tulokset ovat keskenään vertailukelpoisia.

Verrattaessa parhaan ja heikoimman neljänneksen osaamisprosentteja, voidaan parhaassa neljänneksessä tulosten todeta parantuneen arvioinnissa ja matematiikan soveltamisessa sanallisiin tehtäviin lukuarvoiltaan helpoissa tehtävissä verrattuna 1980-luvun parhaaseen neljännekseen. Muissa osioissa tulokset ovat heikentyneet. Numeerisessa osiossa suurin muutos osaamisessa on murtoluvuissa ja negatiivisissa luvuissa. Visuaaliset muistinvaraiset ratkaisut ja murtoluvuissa niin sanottu ristiinkertominen johtivat efektikooltaan -0,43:sta -0,60:een suuruisiin eroihin. Numerokäsittelyssä todetut virheet ovat siirtyneet myös numeerisia rakenteita sisältäviin tehtäviin. Lisäksi numeerisessa rakennetestissä kompleksisuus sääteli ratkaisuprosenttia 2000-luvun aineistossa. Kompleksisilla rakenteilla efektikoko on -0,57 ja yksinkertaisilla rakenteilla -0,30.

Heikointa neljännestä tarkasteltaessa osaaminen on pudonnut muissa osioissa paitsi arvioinnissa ja matematiikan soveltamisessa sanallisiin tehtäviin osaaminen on pysynyt lähes samana 1980-lukuun verrattuna. Arviointiosiossa efektikoko on -0,13 negatiivisia murtolukuja koskevissa tehtävissä, arvioinnin muissa osioissa efektikoko on +0,20:n luokkaa parantunut heikoimmassa neljänneksessä perustasolla. Heikoimmassa neljänneksessä YlRak-testin tulokset ovat pudonneet kaikilla Wilsonin-tasoilla eron ollessa tilastollisesti erittäin merkitsevä.

Osaamisprosentit sovellettaessa matematiikkaa sanallisissa tehtävissä ovat koko aineistoa tarkastellen pysyneet likimain samana Wilsonin eri tasoilla, kuitenkin parhaassa neljänneksessä tulokset ovat parantuneet Y-tasolla (ymmärtämisen tasolla).YS- ja SA-tasoilla on eroa, jos jako tehdään lukuarvon kompleksisuuden suhteen. Ero on tilastollisesti erittäin merkitsevä.

Jaettaessa tehtävät peruslaskutoimitusten suhteen analogisiin ja abstraktiotasoltaan korkeampiin alueisiin, on osaaminen analogisilla muuttujan lausekkeilla pysynyt samalla tasolla, mutta abstraktiotasoltaan eri tasoisissa peruslaskutoimituksiin liittyvissä tehtävissä on osaaminen pudonnut 1980-lukuun verrattuna siten, että muutos on suurimmillaan numeerisia ja yleisellä tasolla olevia yhteenlaskuja verrattaessa (27,3 prosenttiyksikköä). Muiden peruslaskutoimitusten kohdalla muutos on likimain 13 prosenttiyksikön luokkaa. Erot ovat tilastollisesti erittäin merkitseviä. Tulos tukee Treumanin (1974) ja Silfverbergin (1999) tulosta abstraktiotasoltaan korkeamman tiedon vaikeasta opittavuudesta.

Alaongelma 1.4 Millaisia muutoksia on havaittavissa peruskoulun päättöluokkalaisten aritmetiikka- algebra-alueen osaamisessa 1980- ja 2000-lukuja verrattaessa eri sukupuolia?

Hyvien arvosanojen osuus on kasvanut. Tämän tutkimuksen aineiston perusteella kahdenkymmenen vuoden aikajänteellä arvosanojen keskiarvot ovat nousseet heikkojen arvosanojen vähentyessä poikien osalta ja kiitettävän arvosanan osuuden kasvaessa erityisesti tyttöjen osalta. Keskiarvoerot ovat kuitenkin kaventuneet tyttöjen ja poikien välillä. Tähän ovat vaikuttaneet poikien heikkojen arvosanojen osuuden väheneminen siitäkin huolimatta, että tyttöjen osuus kiitettävissä arvosanoissa on kasvanut 1980-lukuun nähden.

Muutokset tyttöjen ja poikien osaamisessa tarkasteltaessa aineistojen keskiarvoja ovat samansuuntaiset kuin koko aineistossakin. Verrattaessa 2000-luvun tyttöjen ja poikien suorituksia voidaan todeta poikien pistemäärien olevan parempia kaikissa osioissa eron jäädessä efektikooltaan alhaiseksi. Numeerisessa, arviointiosiossa ja soveltamistehtävissä erot ovat tilastollisesti melkein merkitseviä. Verrattaessa 2000-luvun alun tyttöjen osaamista kahdenkymmenen vuoden takaiseen, huomataan osaamisen pudonneen muissa paitsi arvioinnissa ja matematiikan soveltamisessa sanallisissa tehtävissä. Arvioinnissa osaaminen on parantunut Y-tasolla, mutta ero ei ole tilastollisesti merkitsevä. Numeerisessa sekä numeerisia ja yleisiä rakenteita mittaavissa osioissa muutokset ovat tilastollisesti erittäin merkitseviä efektikoon ollessa keskitasoa. Poikien osaaminen on pudonnut numeeristen rakenteiden ja yleisten rakenteiden osioissa siten, että numeeristen rakenteiden osiossa muutos on tilastollisesti erittäin merkitsevä ja yleisten rakenteiden osiossa tilastollisesti merkitsevä. Efektikoot ovat vastaavasti alhaista ja keskitasoa. Arvioinnissa ja sovellustehtävissä osaaminen on noussut, mutta erot eivät ole tilastollisesti merkitseviä.

Verrattaessa tyttöjen ja poikien keskiarvoja heikoimmassa neljänneksessä nähdään 2000-luvulla poikien tulosten parantuneen ja tyttöjen tulosten heikentyneen numeerisessa testissä. Poikien kohdalla muutos on numeerisessa osiossa keskitasoa (d=0,6). Numeeristen rakenteiden ja rakenteiden osalta tulos on heikentynyt ollen alhaista tasoa. Tyttöjen kohdalla 2000-luvun aineistossa muutos heikompaan on keskitasoa sekä numeerisessa osiossa että numeeristen rakenteiden osiossa 1980-luvun aineistoon verrattuna, sensijaan arviointi on 2000-luvuun verrattuna parantunut efektikoon ollessa alhaista tasoa. Muutokset arvioinnissa ja matematiikan soveltamisessa sanallisiin tehtäviin ovat tapahtuneet alemman tason ajattelussa.

Verrattaessa tyttöjen ja poikien keskiarvoja parhaassa neljänneksessä, nähdään 2000-luvulla tyttöjen tulosten olevan heikompia poikien tuloksiin verrattuna numeerisessa osiossa efektikoon ollessa keskitasoa, numeeristen rakenteiden tehtävissä efektikoon ollessa keskitasoa ja yleisten rakenteiden ja arvioinnin testiosioissa efektikoon jäädessä kuitenkin alhaiseksi. Poikien kohdalla muutos verrattaessa 2000-luvun tuloksia 1980-luvun tuloksiin on numeerisessa osiossa keskitasoa, numeeristen rakenteiden kohdalla merkittävää tasoa ja yleisten rakenteiden osalta alhaista tasoa. Arvioinnin testissä 2000-luvun pojat ovat saavuttaneet paremman tuloksen efektikoon jäädessä kuitenkin alhaiseksi. Tyttöjen kohdalla 2000-luvun aineistossa muutos heikompaan on efektikooltaan suuri 1980-luvun aineistoon verrattuna muissa, paitsi arviointi ja matematiikan soveltaminen sanallisiin tehtäviin on 1980-lukuun verrattuna parantunut efektikoon ollessa alhaista tasoa.

Tutkimusongelma 2 Minkälaista 2000-luvun alun peruskoulun päättöluokkalaisten matemaattinen laadullinen osaaminen on aritmetiikka-algebra -alueella?

Fenomenografinen tutkimus on luonteeltaan hyvin lähellä opetusta ja opettajaa. Sen tavoitteena on auttaa opettajaa kiinnittämään entistä enemmän huomiota siihen, mitä oppilaan tasolla oppimistapahtumassa tapahtuu, eli miten oppilas ajattelee. (Ahonen 1994.)

Olen tutkinut käsitteenmuodostusprosessia murtolukujen peruslaskutoimitusten kontekstissa luokittelemalla puutteellisia strategioita fenomenografian keinoin. Sen lisäksi, että tietämys käsitteiden kehittymisestä tutkitulla alueella on lisääntynyt sisällöllisesti ja laadullisesti, on tässä tutkimuksessa saatu tietoa 2000-luvun alun oppilaiden aritmetiikka-alueen käsitteenmuodostuksen tasosta teoriapohjaisella sisällönanalyysillä. Olen käyttänyt Tallin käsitteenmuodostuksen teorian eri vaiheita luokitteluperusteena jakauman tekemisessä ja alaluokittelussa. Keskeisiä tuloksia on yhden entiteetin esiintyminen muistinvaraisena ratkaisuna. Murtoluvuissa tämä on niin sanotun ristiinkertomissäännön esiintyminen ja muuttujan lausekkeissa se on eksponenttien yhteenlaskun siirtyminen vastaavasti kaikkiin laskutyyppeihin. Oppilaiden havaitut puutteelliset strategiat ovat luetteleminen strategiana, tehtävään nähden köyhän proseduurin käyttäminen, liian aikainen kapseloituminen ja muistinvaraisten ratkaisujen esiintyminen. Negatiivisen luvun käytössä, jota on kutsuttu algebran kehittymisen sieluksi, on tutkimukseni nojalla puutteita niin lukukäsitteenä kuin eri peruslaskutoimituksissakin. Tässä saattaa olla kysymys muistinvaraisuudesta, käsitteiden välisten yhteyksien puutteesta tai puutteellisesta proseptista. Mutkikkaidenkin aihepiirien joustava ajattelu on mahdollista, jos on kehittynyt kimppu näitä kuvaavia tietoedustuksia. Ajattelu tällä tasolla on käsitesidonnaista (asiakohtaista), joten liian yleiset strategiat eivät tässä auta ajattelua.

Tutkimukseni Num-testiosiota voidaan pitää myös automatisoitumisen astetta mittaavana päässälaskuosiona, koska aika ei mahdollistanut pitkiä algoritmisia laskutoimituksia. Mitä vähemmän tehtävän vaatima ajattelu rasittaa oppilaan työmuistia, sitä useamman tehtävän hän ehtii tehdä ja sitä automatisoituneempaa hänen numeerinen käsittelynsä on. Suurimmat muutokset näkyvät murtoluku-käsitteen hallinnassa sekä vähennys- ja jakolaskuproseduureissa. Selittävinä tekijöinä on puutteellinen prosept ja muistinvarainen tehtävien suorittaminen (luku 10). Tällä on merkitystä tiedon joustavaan käyttöön. Joustava käsitteiden käyttö sisältää sekä käsitteeseen kuuluvien ominaisuuksien yhtäläisten piirteiden hahmottamista että käsitteen laajuuden, erilaisten piirteiden tunnistamista. Ensin mainittuun tähtäävät tavoitteet auttavat oppilaita pelkistämään käsitteeseen liittyvät yleiset periaatteet, jotka johtavat joustavampaan tiedon siirtymiseen (Gick & Holyoak 1983). Käsitteen laajuus, millä tarkoitetaan käsitteen erilaisten piirteiden hahmottamista, parantaa joustavuutta.

Todetut puutteet yleistä muotoa olevien rakenteiden hallinnassa heikentävät tiedon käytettävyyttä muissa konteksteissa. Yleisesti tiedon joustavuutta lisää tapauksen yleistäminen niin, että se ei sovellu ainoastaan yhteen yksittäiseen ongelmaan vaan suurempaan joukkoon analogisia ongelmia. Tiedon käytettävyyttä voidaan lisätä opetuksella, joka auttaa oppilaita muodostamaan abstraktisemman kuvan tehtävästä. Näissä olosuhteissa opitun siirto uusiin tehtäviin lisääntyy. (esim. Bransford ym. 2002.) Tallin termein päästään käsitteelliselle objektitasolle. Tutkimuksissa on osoitettu, että oppijat pystyvät ajattelemaan joustavasti mutkikkaitakin aihepiirejä silloin, kun he ovat kehittäneet itselleen kimpun näitä kuvaavia tietoedustuksia (Spiro ym. 1991). Tiedon käytettävyyttä edisti samaisen tutkimuksen mukaan yhteisten abstraktien rakenteiden osuus vaikka pintarakenteet olisivat olleet kuinka erilaisia tahansa. Tältä osin on tutkimukseni tulosten perusteella oppilaiden tiedoissa havaittavissa puutteita.

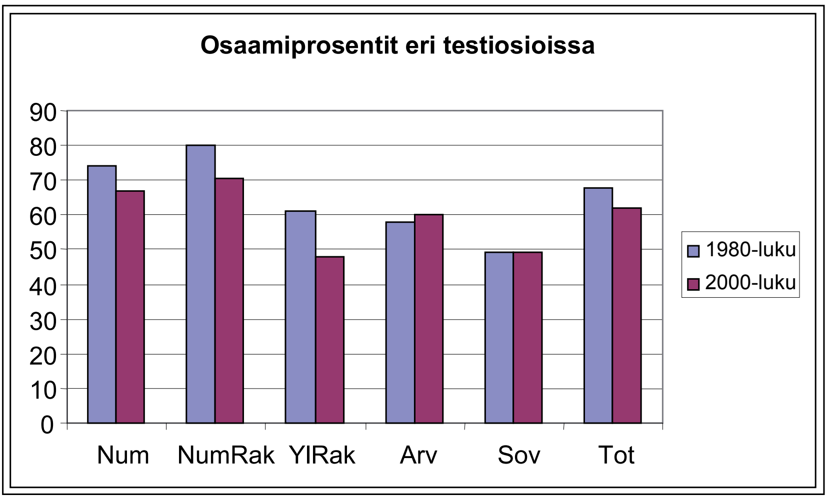
13.2 Johtopäätöksiä

Määrällisesti tarkasteltuna muutokset osaamisessa ovat erityisesti numeerisessa osiossa murtoluvuissa ja negatiivisissa luvuissa, 1500-luvun ”numeri absurdeissa” sekä numeerisessa että yleistä muotoa olevissa rakenteita koskevassa osiossa kompleksisissa rakenteissa. Osaaminen on murtolukualueella 2000-luvun alussa muistinvaraista, ymmärtävään käsitteelliseen ajatteluun murtolukujen peruslaskutoimituksissa yltää seitsemän prosenttia ikäluokasta. Siten oppilaiden ajattelu jää proseduurien tasolle perustuen useissa tapauksissa luvussa 13.1 kuvattuihin ratkaisuihin. Oppilaan tottuessa liian proseduraalisiin toimintatapoihin, ilman tavoitetta ymmärtää ja päästä käsitteelliseen ajatteluun, on heidän vaikea tavoittaa tätä tasoa myöhemminkään (vrt. Hiebert 2003, 17), mikä näyttäisi toteutuvan 2000-luvun peruskoulun päättöluokkalaisista erityisesti tyttöjen kohdalla.

Tulos tukee Reinikaisen PISA-tutkimuksessa raportoimaa matematiikan opetukseen liittyvää osaamispotentiaaliajattelua. PISA-tutkimus kohdistuu oppiainerajat ylittäviin ongelmatehtäviin. Ongelmanratkaisun yhteys matematiikan osaamiseen kompetenssi-merkityksessä oli voimakas, korrelaatio 0,89 (Reinikainen ym. 2004) PISA-tutkimuksen määrittelemillä tehtäväalueilla. Kuitenkin yhteys matematiikan kontekstissa peruslaskutoimituksia sisältävien matematiikan tehtävien ja vähemmän analyysiä sisältävien ongelmanratkaisutehtävien välillä jäi suhteellisen heikoksi. Reinikainen puhuu ongelmanratkaisun paljastamasta osaamispotentiaalista matematiikan opetuksessa. Suomessa matematiikan ja ongelmanratkaisun suorituspistemäärien erot olivat kolme pistettä ongelmanratkaisun hyväksi. Vahvat ongelmanratkaisutaidot yhdistyneenä heikompaan matematiikan osaamiseen voivat merkitä Reinikaisen mukaan sitä, että matematiikan opetus ei käytä oppilaiden kykyjä hyväkseen täysimääräisesti. Matematiikassa on alisuoriutujia, koska laskeminen ei ole ymmärtämiseen perustuvaa matematiikan kontekstissa. Tämän tutkimuksen tuloksissa tämä näkyy siten, että osaaminen sanallisissa tehtävissä korreloi tarvittavan matematiikan sisältöjen kompleksisuuden kanssa. Arvosanojen myöntämisperusteiden muuttuminen ja arviointi osaamisen ohjaajana tulisi tiedostaa tutkimukseni tulosten perusteella, kun mietitään peruskoulun matematiikan opetuksen tavoitteita nivelkohtana jatko-opintoihin.

Pitkän aikavälin tutkimuksista Kuparin (1999) tutkimuksen mukaan ajankohdille yhteisten matematiikan alueiden tavoitteiden kohdalla osaamisessa ei ole tapahtunut suurta muutosta vuosien 1979 ja 1995 välillä. Jälkimmäiseen aineistoon ei vuoden 1994 opetussuunnitelmauudistus ole ehtinyt vaikuttaa. Heikentymistä Kuparin tutkimuksessa kuitenkin todettiin yhtälöiden, funktioiden ja polynomien käsittelyssä. Kuparin vertailussa ovat mukana vain ne tehtävät, jotka kuuluvat kaikkien tutkimusvuosien opetussuunnitelmiin. Se ei siis anna kuvaa algebran osaamisen laajuudesta eri ajankohtina karsittujen sisältöjen jäädessä tutkimuksen ulkopuolelle. Erona Kuparin tutkimukseen tutkimuksessani ei sisältöjä ole rajoitettu, vaan vuosien 1981 ja 1987 mittaria on käytetty vuonna 2003 muuttamattomana. Keskustelua kaivataan näin ollen osaamisen laadun parantamiseksi tarvittavien toimenpiteiden lisäksi sisällöllisistä opetussuunnitelmaratkaisuista.

Suuruusluokan arvioiminen ja matematiikan soveltaminen sanallisissa tehtävissä kuuluu 2000-luvun alussa käytössä olleen opetussuunnitelman perusteiden tavoitteisiin. Niillä alueilla 2000-luvun alun osaaminen on pysynyt vähintään samana kuin 1980-luvun osaaminen, kuten alla olevasta diagrammista näkyy. Arvioinnissa tulokset ovat nousseet muutaman prosenttiyksikön verran. Mittarin testiosioista numeerinen osio ja matematiikan käyttämistä sanallisissa tehtävissä mittaavat osiot ovat tuottamistasoisia testejä, numeeristen rakenteiden osiossa on tosi/epätosi-asteikko sekä yleisiä rakenteita ja arviointia mittaavassa osiossa on vastausvaihtoja kolmesta viiteen. Tämä vaikeuttaa eri testiosioiden vertaamista. Kuitenkin eri tarkasteluvuosien testiosiot ovat vertailukelpoisia. Kuten diagrammista nähdään, matematiikan soveltaminen sanallisissa tehtävissä on edelleen alle puolet maksimipisteitä, arvioinnissa on noustu likimain 60 %:iin ja yleisten rakenteiden osaaminen on pudonnut alle puoleen maksimipisteistä. Numeeristen rakenteiden testissä osaamisprosenttiin vaikuttanee karkea tosi/epätosi-asteikko, jolloin vertaaminen muihin osioihin ei ole perusteltua. Tässä osiossa osaaminen on pudonnut noin kymmenen prosenttiyksikköä verrattuna 1980-luvun osaamiseen.



Kuvio 12. Ratkaisuprosentit verrattuina maksimipisteisiin eri testiosioissa

Numerokäsittely

Numerokäsittelyssä ei tulisi tyytyä muistinvaraiseen tasoon, jos laskurutiineilla tarkoitetaan muistinvaraista laskemista. Tällainen behavioristinen pinnallinen laskeminen vaatii muistivihjeen riittävän läheltä, jotta aikaisempi tieto olisi käytettävissä. Prosept-teorian (luku 6) mukaisesti lukuihin liittyvät laskutoimitukset tulisi aloittaa proseduureilla, mutta taitoa tulisi kehittää käsitteelliselle tasolle asti, jotta lukujen joustava automatisoitunut käyttö olisi mahdollista. Käsitteelliseen ajatteluun liittyy kyky käänteiseen ajatteluun, mikä lisää tiedon joustavaa käyttöä. Rutiininomaisen laskemisen vastakohta on ymmärtävä laskeminen, ei laskemisen soveltaminen sanallisiin tehtäviin. Lisäksi tulokseni sanallisten tehtävien täsmällisestä suorittamisesta 2000-luvulla (luku 10) kumoaa väitteen, että ero 1980-luvun ja 2000-luvun tuloksissa johtuisi huolimattomuusvirheistä. Näyttäisi päinvastoin, että täsmällisyys laskemisessa on lisääntynyt.

Myös PISA-tutkimuksessa on tarkasteltu erilaisten strategioiden käyttämistä (Välijärvi ym. 2001, 2002). Välijärven (2001) PISA-raportin mukaan suomalaisilla oppilailla oman opiskelun kontrollointi oli selkeästi OECD-maiden keskitasoa vähäisempää. PISA 2000-arviointiraportissa oppilaat arvioivat myös strategioitaan, joita he soveltavat pyrkiessään omaksumaan ja säilyttämään uusia opittavia asioita. Tällöin erottui kaksi erilaista strategiaa; ensimmäinen kuvastaa pyrkimystä muistaa asioita käyttäen mekaanista toistamista ja ulkoa oppimista (muistamisstrategia) ja toinen oppilaan taipumusta arvioida ja kehittää uutta tietoa liittämällä sitä jo aiemmin omaksumaansa, elaborointistrategia (Välijärvi ym. 2001). Matemaattisen tiedon omaksumisen asioiden mieleen painamisella ja tehtäviä toistavalla harjoittelulla todetaan PISA-raportissa Suomessa muistamisstrategian soveltamisen (keskiarvo - 0,19) olleen selvästi vähäisempää kuin OECD-maissa keskimäärin. (Välijärvi ym. 2002.) Elaborointistrategian käytön kuvataan liittyvän korkeampiin kognitiivisiin strategioihin. Edellä mainitussa raportissa Suomessa elaborointistrategian käyttö (-0,14) oli vähän OECD-maiden keskiarvon alapuolella. Sukupuolten välillä oli selkeitä eroja strategioiden käytössä. Välijärvi (2002) raportoi poikien käyttävän strategioita hieman tyttöjä enemmän, mutta elaborointistrategian käytössä ero oli erityisen selkeä eli 0,30 yksikköä poikien hyväksi.

Kahta asiaa yhdistää sama skeema, ei assosiaatio. Kun tutkimukseni arviointiosiossa instruktio on lukujen vertaaminen, ohjaa siihen liittyvä skeema oppilaan ajattelua. Muussa tehtäväksiannossa ohjaa eri skeema, esimerkiksi algoritminen. Tällöin vastauksen suuruusluokan arvioimiseen ei paneuduta. Samaan viittaa myös edellä mainittu kontrollistrategioiden puutteellisuus tai paremminkin suppeus. Samasta asiasta Joutsenlahti toteaa väitöskirjaraportissaan seuraavaa: ”Peruskoulua koskevista tutkimuksista voidaan kootusti todeta, että lukion pitkän opiskelun kannalta oppilaiden kontrollistrategioiden puutteellisuus on ongelmallista. Omien metakognitioiden tiedostaminen ja omaehtoinen pyrkimys selvittää epäselvät asiat ovat tärkeitä taitoja lukio-opiskelussa.” (Joutsenlahti 2005, 26.) Näiden taitojen harjoittelu tulisi aloittaa ja alakoulussa. Opiskelutottumukset luodaan jo varhain. Mallia muistinvaraisesta proseduureihin perustuvasta oppimisesta on vaikeaa muuttaa.

Joustava ajattelu

Poikien pistemäärät olivat 2000-luvun alussa kautta linjan tyttöjen pistemääriä parempia. Tämä tulisi huomioida paitsi arvioinnissa, niin myös miettiä keinoja, miten heikoimmassa neljänneksessä olevien oppilaiden opiskelutottumuksia kehitetään ymmärtävämpään suuntaan. Numeerisessa osiossa heikoimmassa neljänneksessä olevien poikien osaaminen on noussut 1980-lukuun verrattuna. Sensijaan kautta linjan osaaminen kehittyneempiä ajattelun tasoja vaativissa tehtävissä on pudonnut niin tytöillä kuin pojillakin. Tämä koskee myös arviointia ja matematiikan soveltamista sanallisiin tehtäviin. Tekemisen on oltava riittävällä soveltavalla tasolla myös matemaattista sisältöä ajatellen, jotta kompetenssivaatimus täyttyy. Näin saavutetaan käsitteiden monipuolinen hallitseminen. Yhtenä tavoitteena on auttaa oppilaita pelkistämään konkreetit havainnot yleisiksi periaatteiksi, jotka sitten johtavat joustavampaan tiedon käytettävyyteen (Gick & Holyoak 1983). Yleistys voi tapahtua analogisesti toisiin konteksteihin tai yleistäen abstraktiotasoa nostamalla. Kun oppilaita autetaan kuvaamaan ratkaisustrategioitaan yleisesti, voidaan osaltaan lisätä positiivista siirtovaikutusta vaiheittain unohtamatta prosept-ajattelua. Näissä olosuhteissa opitun käytettävyys uusiin tehtäviin lisääntyy. (esim. Bransford ym. 1998.) Wilsonin SA-taso tulee saavuttaa tiedon sovellettavuuden edistämiseksi tietyllä sisältöalueella, ei yleisissä strategioissa, tiedonalakohtaisuuden tähden. Toisaalta prosept selittää, että Wilsonin tasot ovat hierarkisia vain poissulkevasti, koska meneillään on kehittymistä eri tasoilla kaiken aikaa.

Peirceläinen abduktiivinen päättely on luovuuden rakennusainetta. Tällainen päättely on mahdotonta, jos prosept on puutteellinen. Proseduurin tasolla oleva toiminto ei voi olla lähtökohta uuden käsitteen muodostumiselle. Prosept-ajattelussa on kysymys juuri tällaisesta peirceläisestä abduktiivisesta ajattelusta. Vasta objektitason saavuttaminen antaa oppijalle taidon valita käsite-kimpusta eteenpäin vievä ratkaisureitti. Tätä yksipuolinen muistinvarainen prosept estää.

Algebra

Algebran kehittymisessä negatiivisten lukujen käyttöönotto yhtälönratkaisussa ja symbolisen algebran kehittyminen sekä tuntemattoman ja muuttujan käsitteiden erottaminen ovat olleet aikaa vieviä vaiheita. Historia-perspektiivistä katsoen voi sanoa, että ihmiskunnan kokemuksen pitkä muisti tässä asiassa ennustaa tarvittavan myös pitkää ajallista oppijan muistia. Tämä tarkoittaa, että tarkasteltaessa opetuksessa induktiivisen lähestymistavan suhdetta deduktiiviseen lähestymistapaan on behavioristisessa mielessä induktiivinen lähestymistapa voitu sivuuttaa deduktiiviseen verrattuna, mikä tulosteni perusteella näyttää toteutuvan vielä 2000-luvulla. Jos huomioidaan käsitteellisen tiedon konstruoinnin vaatimukset, tulisi ajankäytön olla toisinpäin (Radford 1996). Tällä tarkoitan prosept-teorian mukaista käsitteen muodostumisen teorian toteutumista oppimisessa.

Rakenteiden osaaminen

Algebran kautta oppilaat oppivat käsittelemään ei-numeerisia symboleja (luku 7). Sen kautta he voivat oppia ymmärtämään ja käsittelemään asioita, joita ei voida suoraan havaita, ja oppia, mitä on abstrakti looginen ajattelu myös muussa kuin matematiikan kontekstissa. Tästä syystä algebraa pidetään yhtenä peruskoulun jälkeisten jatko-opintojen kannalta keskeisimmästä matematiikan osa-alueesta. Formaalin ajattelun ymmärtäminen edellyttää konkreetin ajattelun tason saavuttamista riittävällä käsitteellisen ajattelun tasolla (luku 6). Se että oppija numeerisesti osaa ratkaista matematiikan rakenteisiin liittyviä tehtäviä, auttaa siihen, että hän voi ymmärtää formaalit muodot rakenteeltaan vastaavanlaisille aritmeettisille lausekkeille.

Hihnala (2005) on väitöstutkimuksessaan todennut, etteivät algebran taidot kehity toivotusti peruskoulun kolmen viimeisen vuoden aikana. Algebran osaamisessa on todettu ilmenneen ongelmia (luku 2). Erityisesti aritmetiikasta algebraan siirtyminen on koettu ongelmalliseksi ja se kuuluu yläasteen matematiikan opiskelun kriittisiin vaiheisiin (ks. esim. Stacey & McGregor 1997; Hihnala 2005). Tätä ovat tutkineet myös Herscovics ja Linchevski 1994 sekä Tall 1999. Puhutaan kognitiivisesta kuilusta, millä tarkoitetaan kynnystä käyttää muuttujaa ongelmanratkaisutilanteissa. Algebran opettamisessa ja oppimisessa ongelmana pidetään aritmetiikkaa niiden erilaisten tavoitteiden takia. Aritmetiikka ei välttämättä tuo esille rakenteita, jos tavoitteena on tuloksen, luvun löytäminen (Kieran 1989, 1990, 1992; Malara 1992, 1997b). Algebran opettaminen ja oppiminen painottaa symbolista tulkintaa (rakenteet, yhtälöt, funktiot) (Sfard 1991, 1994), jotka ilman perusteita jäävät helposti muistinvaraisiksi. Induktiivinen yleistäminen on samalla tasolla tapahtuvaa analogista prosessointia vaativampaa (luku 11). Onko tämä matematiikan opetuksen ongelma? Tyydytäänkö aritmeettisten ja algebrallisten lausekkeiden proseduraaliseen käsittelyyn analogisella tasolla ilman, että oppija ei havaitse eikä saavuta käsitteellisen ajattelun tasoa? Tällöin estetään oppijaa havaitsemaan ja ymmärtämään lausekkeita rakenteina?

13.3 Algebra-prosept

Aritmetiikasta algebraan siirtyminen kuuluu yläasteen matematiikan opiskelun kriittisiin vaiheisiin (Stacey & McGregor 1997, 110). Seuraavassa tarkastelen, mitkä syyt tähän vaikuttavat ja kuinka algebraa voidaan oppia? Yleistän prosept-ajattelun abstraktilla tasolla tapahtuvaan ajatteluun. Numero-osaaminen antaa erään mallin ja mahdollisuuden ymmärtää rakenteita algebrassa, formaalin ajattelun työkalussa. Linchevski ja Livneh (1999) esittävät, että algebrallisten objektien struktuurien hahmottamista auttaa harjoitteleminen vastaavanrakenteisilla luvuilla. Toisin sanoen kyky yleistää aritmeettisia ominaisuuksia ja lainalaisuuksia on usein algebran oppimisen kynnyskysymys (Edwards 2000, 28).

Piagetilaisittain ajattelu jakautuu konkreettiin ja formaaliin ajatteluun. Algebran eräs merkitys on tällaiseen formaaliin ajatteluun harjoituttaminen. Koulualgebra esitetään usein yleistettynä aritmetiikkana. Voidaan puhua aritmeettisesta algebrasta. Tämä näyttääkin useassa tapauksessa luonnolliselta lähtökohdalta. Mutta jos ajatellaan algebraa edellä määritellyn prosept-ominaisuuden kautta, on käsittelyssä eroja ja tilanne on ongelmallisempi. Teoriaosiossa nähtiin, miten lauseke 3+4 kehittyi laskutoimituksesta objektiksi. Aritmetiikassa tavoite on useimmiten saada lausekkeelle arvo, tarkka vastaus. Tarkastellessaan algebrassa vastaavaa lauseketta 3+x prosept-ominaisuuden kautta Jockusch & McKnight (1978) havaitsivat, että yksi vaikeimmista asioista symbolisessa esitystavassa oppilaille on mieltää, mikä on lausekkeen 3+x arvo. Mikä on proseduuri lausekkeelle 3+x? Analogisena aritmetiikan kanssa sellaista ei ole.

Algebran ajallisessa kehityksessä vaihetta, jolloin saman elementin esiintymistä toistuvasti alettiin merkitä symbolilla, kutsuttiin synkopoiduksi algebraksi. Tällöin irrottaudutaan lukuihin sidotusta ajattelusta. Esimerkiksi laskuissa 2:2, 5:5 ja 132:132 rakenteellinen samankaltaisuus herättää huomiota: ”luku jaettuna itsellään”. Oppilaan tulisi huomata lainalaisuudet riippumatta, mitä numeroarvoja tai suuruusluokkia käytetään. Tämä auttaa dialogissa siirtymään yleiseen termiin ”jotain”, kuten esimerkiksi 3 + ”jotain” on ”jotain” + 3, tai kuten edellisessä esimerkissä ”luku jaettuna itsellään”. Näin rakenteet tulevat numeroarvoja tärkeämmiksi ja ajattelu yleisellä tasolla on mahdollista. Sfard (1995) ja Linchevski (1994) ovat todenneet, että algebrallisten rakenteiden kehittäminen tulisi aloittaa numeerisella tasolla käsitellyillä rakenteilla. Proseduurien toistuessa ja monipuolistuessa lukuarvojen kasvaessa siirrytään rakenteellisiin elementteihin ja symboleihin, minkä jälkeen ajattelu yleisellä tasolla on mahdollista. Algebrallisten lausekkeiden käsittely ilman tätä kehitysvaihetta jää muuten helposti merkityksettömiä tavuja muistuttavaksi muistinvaraiseksi kaavakokoelman käytöksi. Jos perustaidot aritmetiikassa ovat jääneet alkeelliselle proseduuritasolle, puuttuu oppijalta kyky prosept-tason ajatteluun numeerisella tasolla ja algebran ymmärtävä oppiminen vaikeutuu.

Algebran alueella tarvitaan prosept-tyyppistä ajattelua kahdessa eri merkityksessä. Toinen alue on luvussa 7 esillä ollut vaikutukseltaan samanlaisten erirakenteisten lausekkeiden rinnastaminen. Tall (2006) puhuu tällöin *efektistä* (effect) verratessaan lausekkeita, joilla on sama vaikutus. Proseduureina erilaisilla lausekkeilla voi olla samanlainen *efekti*-vaikutus. Algebra-proseptissa on kysymys siitä, että algebran lauseke nähdään objektina, johon liittyy monipuolisesti efektiltään samanlaisten proseduurien kimppu. Vain tällöin abduktiiviseen ajatteluun liittyvä taaksepäin ajattelu on mahdollista ja algebran lauseketta voidaan käyttää joustavasti objektina tai prosessina ja vaihtaminen efektiltään vastaavaan proseduuriin käy sujuvasti.

Toinen alue, missä algebran alueella vaaditaan prosept-tyyppistä ajattelua on muuttujien eri merkityksien hahmottaminen. Cooper, Bolton-Lewis, Atweh, Pillay ja Mutch (1997) ovat jaotelleet muuttujan merkitykset neljään siten, että ratkaisuprosessin tuntemattomassa ja määrien välisessä suhteessa saa muuttuja tietyn tuntemattoman arvon ja aritmetiikan yleistyksessä ja abstraktin järjestelmän osana saa muuttuja muuttuvia tuntemattomia arvoja.

Küchemann (1981, 104) sensijaan on erottanut oppilaiden tulkinnoissa kuusi erilaista merkitystä kirjainsymboleille. Tulkintavat ovat:

- kirjaimelle annetaan tietty arvo,
- kirjaimille ei anneta mitään merkitystä, tehtävät ratkaistaan eliminoimalla kirjaimet,
- kirjaimia käytetään objekteina,
- kirjainta pidetään tuntemattomana lukuna,
- kirjainta pidetään yleistettynä lukuna, joka voi saada useita arvoja,
- kirjainta käytetään muuttujana.

Cooperin ym.(1997) tulkintaan verrattuna muuttujaa käytetään tässä eri merkityksessä. Küchemannin havaitsemista tulkinnoista kaksi ensimmäistä ovat virheiltään alkeellisia. Muiden tulkintojen oikeellisuus riippuu kyseisestä tilanteesta.

Muuttujan erilaisiin merkityksiin ovat kiinnittäneet huomiota myös Kücheman (1981), Kieran (1992) ja Cooper ym.(1997). Muuttujan yksipuolinen käyttö yhtälön ratkaisuprosessin tuntemattomana ei tue algebran rakenteiden ymmärtämistä. Algebran opiskelun alkuvaiheessa käsitteet muuttuja ja yhtälön tuntematon menevät monilta oppilailta täysin sekaisin (ks. esim.Hihnala 2005). Muuttujan lauseke tulee ymmärtää objektiksi, jolla on tietty arvo, ennen kuin pystyy ajattelemaan, että kaksi lauseketta ovat yhtä suuria. Siinä pitää miettiä, millä muuttujan arvolla lausekkeen arvo on yhtäsuuri, eli kytkeä vieläpä muuttujan arvo ja lausekkeen arvo. Kirjainsymboli x on eri roolissa lausekkeessa, yhtälössä ja objektina. Roolien tulisi muodostaa oppijan ajattelussa prosept-tyyppisen kimpun, missä x:n eri roolit hahmottuvat eri merkityksissään.

13.4 Yhtälöratkaisu-proseduuri

Mietittäessä, kuinka algebra tulisi aloittaa, ei niinkään tärkeänä ole pidetty sitä, mistä algebra aloitetaan, vaan mihin kaikkeen algebra oleellisesti liittyy. Tällöin tulevat esille algebran käyttö ongelmanratkaisussa, mallintamisessa, funktioiden käsittelyssä ja yleistyksissä. Samalla oppilaalle hahmottuvat tuntemattoman ja muuttujan eri roolit ja luvun alussa kuvatut ongelmat vältetään.

Hihnalan (2005) lopputulos on, että ”Oppilaita voidaan kannustaa käyttämään omia ratkaisumenetelmiään. Kun oppilaan käsitystä siitä, että matematiikan tehtävästä saadaan aina ”kunnollinen” vastaus, joskus useitakin, tuetaan mahdollisimman pitkään, helpotetaan siirtymistä proseduurien suorittamisesta struktuurien ymmärtämisen tasolle. Kun oppilaat huomaavat vähitellen, että algebra on tapa ajatella ja ratkaista mutkikkaita sanallisia tehtäviä, he ymmärtävät paremmin algebran käyttökelpoisuuden.” (Hihnala 2005, 136.) Yhtälöratkaisun vaikeus on siinä, että lausekkeessa ja yhtälössä kirjainsymboli on eri roolissa. Tässä, kuten niin sanotussa appelsiini-banaani-algebrassa olisi tärkeä tukea skeemoja, jotka ovat yleispäteviä matematiikan kaikkia osa-alueita ajatellen. Myöhemmin ristiriitaista käsitystä on vaikea muuttaa. Voidaan puhua negatiivisesta transferista. Tuetaanko näin ajatellen yhtälönratkaisun mekaanista suorittamista rakenteiden ymmärtämisen kustannuksella?

Yhtälön ymmärtävä laskeminen on mahdollista vasta, kun lauseke on saavuttanut objektitason. Oikean ja vasemman puolen arvot tulee käsittää yhtäsuuriksi eli käsitellä lauseketta kokonaisuutena, ei toimintona. Tätä kuvaa oppilaan väitteeseen antama vastaus:

”0 • 35 = 0 • 36 – väite on väärä, koska vastaus molemmissa 0, muttei sama asia”

Oppilas ei ole ymmärtänyt yhtälön rakennetta, vaan on käsitellyt molempia puolia lausekkeina, ja laskenut niille arvon. Vaikka arvot ovat olleet samat, ei hän ole hyväksynyt yhtälörakennetta, koska lausekkeen ja yhtälön käsitteet eivät ole hänellä sisäistyneet.

13.5 Pohdinta

Opetussuunnitelmanäkökulma

Peruskoulun opetussuunnitelmakomitean mietinnössä vuodelta 1970 (Mietintö 1970 II, 140–141) matematiikan opetuksen tavoitteet voidaan yleisyydessään hyväksyä tänäänkin. Matematiikan opetuksessa tavoitteissa mainitaan sekä yhteisöllinen että yksilöllinen dimensio pyrkimyksenä edistää oppilaiden kokonaiskehitystä. Tavoitteissa nähdään sekä produktitavoite että prosessitavoite. Näitä yleisellä tasolla esitettyjä tavoitteita on täsmennetty ja eritelty perusoppiainesmuistiossa (Muistio 1976), missä korostetusti tuodaan esille myös matematiikan mahdollisuudet peruskoulun tiedollisen kasvatuksen formaaleihin tavoitteisiin pyrittäessä. 20 vuotta myöhemmin nämä on huomioitu opetussuunnitelman perusteissa joustavuutena ja valinnaisuutena: ”Yhteiskunnalliset muutokset, muutokset työ- ja elinkeinoelämässä ja koulujärjestelmän joustavuus yksilöllisten opiskeluohjelmien suhteen niin opetuksen organisoinnissa kuin sisällöllisissä valinnoissa ovat iskusanoja opetussuunnitelmia tarkastellen.” (Opetusuunnitelma 1994). Tutkimukseni perusteella muutokset opetussuunnitelmien perusteissa kertovat vaikuttavuudesta pitkällä aikavälillä. Siksi voikin esittää kysymyksen: Koska opetussuunnitelman perusteiden mukaiset arvioinnin osaaminen ja matematiikan soveltaminen sanallisissa tehtävissä helpoilla luvuilla päätellen ovat säilyneet, niin miten opetussuunnitelman perusteissa tulee huomioida, että matematiikan rakenteiden heikko osaaminen ja perusasioiden osaaminen muistamisen tasolla saadaan nostettua kehittyneemmän ajattelun tasolle pohjaksi jatko-opinnoille?

Arvioinnilla on ohjaava vaikutus. Näyttää, että 2000-luvun peruskoulun päättöluokkien opetussuunnitelmaperusteisessa koulutuksessa on arvioinnissa perusteena ollut tutkimukseni tehtäväalueista osittain poikkeava perusta. Opetushallituksen ”Koulutuksen ja tutkimuksen kehittämissuunnitelmassa vuosille 2007–2012” arvioinnin ohjaavaa vaikutusta korostetaan. Oppilasarvioinnissa havaittuja puutteita tullaan suunnitelman mukaan korjaamaan arvosanojen käytön perusteiden yhtenäistämiseksi ja oppilaiden oikeusturvan parantamiseksi erityisesti jatko-opintoihin pyrittäessä valmistelemalla perusopetukseen laatukriteerit mainittuna ajanjaksona. Tällä toimenpiteellä vaikutetaan matematiikan arvosanoissa (luku 10) olevan vinouman korjaamiseksi toisen asteen jatko-opintojen tasapuoliseksi toteutumiseksi. Arviointi kohdistuu opetussuunnitelman perusteiden tavoitteiden mukaiseen oppimiseen ja on siten vaikutuksiltaan marginaalinen.

Ongelmanratkaisun periaatteiden sisällyttäminen sanallisten tehtävien lisäksi käsitteenmuodostukseen ja tällaisen ajattelun kirkastaminen opetussuunnitelman perusteissa olisi vaikutuksiltaan laajakantoisempi. PISA 2003-tutkimuksessa arvioinnin kohteena on ongelmanratkaisu (problem solving), kuten

Suomen opetussuunnitelman perusteissakin. PISA-tutkimuksessa ongelmanratkaisu määritellään yksilön kykynä käyttää kognitiivisia prosesseja aitojen, oppiainerajat ylittävien ongelmatehtävien kohtaamisessa ja ratkaisemisessa, missä ratkaisuun johtava reitti ei ole välittömästi nähtävissä ja missä mahdollisesti käyttökelpoiset osaamisalueet tai oppisisällöt eivät rajoitu yksinomaan matematiikan, luonnontieteiden tai lukemisen arviointialueeseen (Välijärvi 2004). Näin määritelty ongelmanratkaisu perustuu useiden kognitiivisen psykologian tutkijoiden (mm. Polyan 1945; Vosniadou & Ortony 1989; Mayer & Wittrock 1996; Baxter & Glaser 1997; Bransford ym. 1999) havaintoihin ongelmanratkaisusta ja päättelytaidosta. Tutkimukseni käsittein näin määriteltyä ongelmanratkaisua tutkitaan PISA-tutkimuksessa SA-tasolla oppiainerajat ylittävissä tehtävissä, ei matematiikan kontekstissa. Tutkimukseni tulosten perusteella ongelmanratkaisussa matematiikan kontekstissa on puutteita, mikä näkyy laskemistasoisena (L-taso) suorituksina Wilsonin tasoin mitattuna. Opetussuunnitelmissa tulisi kirjata nivelkohdassa peruskoulusta toiselle asteelle siirryttäessä oppimisen edellytysten parantamista edistävät sisällölliset ja menetelmälliset tavoitteet.

Kokonaisvaltainen oppiminen

Oppimisprosessin hahmottaminen kokonaisvaltaisena on ollut yhtenä tutkimukseni lähtökohdista. Tämä ei sulje pois tarkkuutta, millä oppimisen tulisi tapahtua. Käsitetietoon tulisi sisältyä tieto käsitteiden merkityksistä ja käsitteiden välisistä suhteista. (Silfverberg 1999, 65.) Käsittelen tätä seuraavassa esimerkissä. Byrnes ja Wasikin (1991) ovat tutkimuksessaan todenneet, miten murtolukujen laskutoimitusten osaaminen ei korreloi murtolukukäsitteen osaamisen kanssa. Havainto on yhdenmukainen tutkimukseni tuloksen kanssa. Vuoden 2003 testissä tehtävänä oli havainnollistaa murtoluku piirtämällä. Sen teki oikein ”neliöiden ja sektoreiden avulla” 76,9 % oppilaista virheiden ollessa yleisesti se, että murto-osat eivät olleet yhtä suuria. Sensijaan erinimisten murtolukujen yhteenlaskun havainnollistamiselle näyttää olevan merkitystä sillä, mitä nimittäjät ovat lukuarvoiltaan. Nimittäjien ollessa 2 ja 4, tai vastaavalla tavalla yhteensopivia, havainnollistamalla piirtäen tai omin sanoin yhteenlaskun suoritti oikein 53,8 % vastaajista. Sensijaan nimittäjien ollessa 3 ja 4, tai vastaavalla tavalla, tulos oli 7,5 %. Tämä on esimerkki siitä, miten oppilaalla olevien lähtötietojen tulee olla lähtökohta uuden oppimiselle ja miten käsitteen rajoittaminen määritelmäänsä ilman siihen liittyviä ominaisuuksia johtaa staattiseen tietoon, jonka käyttömahdollisuudet ovat rajalliset, ja miten ominaisuuksia tarkasteltaessa oppilaiden lähtötaso ja käsittämisen taso tulisi huomioida ymmärtävän oppimisen mahdollistamiseksi.

Tähän päästään ohjauksellisin keinoin. Haapasalo ottaa esimerkkinä algebran lausekkeiden 1/a ja 1/b summan muodostamisen. Analogia murtolukuihin on liian etäinen. Oppilaan on usein mahdoton havaita moista analogiaa saati kyetä etenemään sen varassa. (Haapasalo 1997.) Vielä vaikeampi murtolausekkeen käsittely on, jos analoginen rakenne murtoluvuissa ei ole oppilaalla sisäistynyt käsitteen tasolla. Kahneyn (1986) mukaan tietyn ongelman ratkaisemisesta saadut kokemukset eivät välttämättä välity uuteen ongelmatilanteeseen, vaikka oppilas olisi tietoinen ongelmien samankaltaisuudesta ja lisäksi ymmärtäisi periaatteellisella tasolla, miten samankaltaisuutta yleensä käytetään hyväksi. Vasta kun oppilas saa ulkoista tukea (tai ongelmien erot ovat hyvin pienet), mainittu siirtovaikutus tapahtuu. (Haapasalo 1997.) Lähikehityksen vyöhykkeen teoria selittää juuri tätä. Oppilasta voidaan opetuksen keinoin auttaa ajattelussaan kysymällä riittävän läheltä, jolloin hän kykenee oman skeemansa perusteella näkemään yhteyden opittavana olevaan asiaan. Tutkimustulokset tukevat sellaisia kokeiluja, joissa oppilaita on autettu muodostamaan kokemuksistaan yleistettyjä käsityksiä (Singley & Anderson, 1989; Gick & Holyoak, 1991). Käsitykset rakentuvat erilaisista hahmotuksista, niiden yhtäläisyyksistä ja eroista ja ilmiön yleistyksestä. Näin saatu monipuolinen prosept on tärkeä elementti joustavassa ajattelussa. Tiedon mieleen palauttaminen, sen käyttäminen ja siirtovaikutus hyötyvät, mitä enemmän käsitteeseen liittyy ominaisuuksia (Brandsford 2000). Niiden osaaminen tulee kuitenkin olla Wilsonin tasoilla mitattuna vähintään soveltavalla tasolla, sillä jos oppiminen jää alle tämän tason, ei siirtovaikutusta synny, koska LY-osaamisen tasolla oppija ei pysty käyttämään tietoa uusissa olosuhteissa.

Vastaavalla tavalla esimerkiksi käytettäessä niin sanottua ”hedelmäsalaatti-algebraa” tulisi huomioida, että osaaminen voi vaikuttaa myös taaksepäin. De Lima ja Tall (2006) kertovat havainnoista, miten algebran alueella saadut kokemukset, kuten että $5x^3 \bullet 2x^5$ on sama kuin $10x^8$, saattaa siirtyä ”taaksepäin” aritmetiikkaan vääränä muotona $5^3 \bullet 2^5$. Algebrallisille operaatioille näkee joskus annettavan omia kognitiivisia merkityksiä (MacGregor & Stacey 1993). Monet näistä ovat ristiriidassa matemaattisten merkitysten kanssa. Voidaan tehdä hallaa käyttämällä strategioita, jotka näyttävän todentuvan yhdessä kohdin, mutta eivät yleispätevästi. Tämä johtuu siitä, että suppealla alueella toteutuvan strategian poisoppiminen on työlästä niillä alueilla, missä ne eivät ole voimassa. Esimerkiksi näkee paljon käytettävän tekniikkaa, jota kutsutaan ”hedelmäsalaatti-algebraksi”. Siinä kirjaimet ovat objekteja, kuten lausekkeen $3a+2b$ tarkoittaessa kolmea appelsiinia ja kahta banaania. Tämän tilanteen ero lukusymboleihin tulee tiedostaa.

Formaalilla tasolla tapahtuva ajattelu

1970-luvun lopussa ja 1980-luvun alussa elettiin Suomen matematiikanopetuksessa ajanjakso, jolloin oletettiin yleisellä tasolla tapahtuneen oppimisen siirtyvän automaattisesti sovelluksiin (Seppälä 2002). Vaikutukset eivät olleet halutunlaisia. Tämän selittää toisaalta silloin käytetty oppimiskäsitys, behaviorismi, ja toisaalta konteksti, missä sitä käytettiin? Behaviorismista tuli vallalla oleva oppimisteoria 1920-luvulla. Behaviorismin valtakausi päättyi 1970- ja 1980-luvulla, jolloin kognitiivinen psykologia ja konstruktivismi kohosivat johtaviksi oppimisteoreettisiksi näkemyksiksi. Tästä näkökulmasta lukukäsitteen ja formaalin käsitteen muodostuminen nähdään lähtevän konkreetista tilanteesta, toisin kuin behaviorismin valtakaudella.

Kaminskin (2008) tutkimusryhmä on raportoinut oppimiskokeesta, jossa kaikissa testeissä oppilaat, joille matematiikka opetettiin symbolisesti, pärjäsivät paremmin kuin he, joille opetettiin vastaava asia sovellustehtävien avulla. Tutkijat epäilevät, että syy havaintoihin jälkimmäisessä tapauksessa on keskitason oppilaan huono yleistämiskyky ja että oppilaat eivät osaa nähdä matematiikkaa konkreettisten asioiden takana. Tutkijaryhmän mukaan sanalliset tehtävät ovat tehokas väline sen mittaamiseen, onko oppilas sisäistänyt asian, mutta ne ovat huono tapa opettamiseen. Jos oppilas on sisäistänyt asian yleisessä abstraktissa muodossa, niin hän pystyy soveltamaan sitä eri konteksteissa. Tutkimusryhmän raportin mukaan oppilaat siirtävät oppimansa helpommin uusiin olosuhteisiin, jos he ajattelevat abstrakteilla symboleilla. Kaminski raportoi, että opiskelijat, jotka oppivat matematiikan käsitteet konkreettien esimerkkien avulla, eivät osanneet siirtää tätä tietoa uusiin tilanteisiin. Tutkimusryhmä Kaminski, Sloutsky ja Heckler (2008) raportoivat, että jos oppilaat olivat oppineet käsitteet abstraktilla tasolla, heidän oli helpompi siirtää tätä tietoa. He sanoivat, että sensijaan oppilaat näyttivät oppivan käsitteet nopeasti, kun ne oli esitetty konkreeteilla tutuilla objekteilla, ja siksi monet kannattavat tätä lähestymistapaa. Mutta ongelmaksi tuli, että oppilaat eivät näyttäneet kykenevän siirtämään opittua tietoa uusiin konteksteihin.

Tutkimusasetelman ja viitekehyksen tarkka tunteminen vasta mahdollistaa tutkimuksen perusteiden ymmärtämisen. Tarkastelen kuitenkin edellä mainitun oppimiskokeen kysymyksiä ”Mikä tulisi olla sovellusesimerkkien ja teorian suhde oppimisessa?” omasta aineistostani käsin. Konkreetilla tasolla opittu asia vaatii siirtyäkseen toiseen kontekstiin, että muistivihje on riittävän lähellä ja rakenteet ovat samanlaiset. Sensijaan jos yleinen periaate on ymmärretty, voi sitä soveltaa eri konteksteissa. Prosept-teorian mukaan formaalin lausekkeen oppimisen tulisi kuitenkin lähteä rakenteeltaan vastaavasta konkreetista lausekkeesta.

Edellä kuvattua ajattelua tukee Singleyn ja Andersonin tutkimus tietoedustusten abstraktiotasojen ja sanallisten algebrantehtävien yhteydestä. Osaa oppilaista opetettiin erilaisin konkreetein esimerkein, kun taas toisia oppilaita opetettiin esittämällä heille abstrakteja taulukoita, jotka valaisivat taustalla olevia matemaattisia suhteita teoreettisemmin (Singley & Anderson 1989). Oppilaat, jotka olivat saaneet opetusta erillisissä tehtävissä ilman taustalla olevia periaatteita, suoriutuivat erillistehtävistä hyvin, mutta eivät pystyneet soveltamaan oppimaansa uusiin ongelmiin. Sitä vastoin oppilaat, jotka saivat abstraktia opetusta, osoittivat pystyvänsä siirtämään oppimaansa uusiin ongelmiin, jotka olivat analogisia matemaattisten suhteiden osalta. Heidän havaintonsa mukaan siirtovaikutusta edisti yhteisten abstraktien rakenteiden osuus, vaikka pintarakenteet olisivat olleet kuinka erilaisia tahansa. Tutkimuksista saadaan yleensä vahvaa tukea niille eduille, jotka saavutetaan silloin, kun oppilaita autetaan muodostamaan kokemuksistaan tietoedustuksia abstraktiotasoilla (Singley & Anderson 1989; Gick & Holyoak 1991). Tietoedustukset rakentuvat erilaisista hahmotuksista, niiden yhtäläisyyksistä ja eroista ja ilmiön yleistyksestä. Näin saatu monipuolinen prosept on tärkeä elementti joustavassa ajattelussa. Mieleen palauttaminen, käyttäminen ja siirtovaikutus hyötyvät laajasta joukosta toisiinsa liittyviä tapahtumia (Brandsford 2000).

Keskustelua aritmetiikan merkityksestä aritmeettisen algebran ymmärtämiselle tukee se, että tulosteni perusteella (vrt. luku 8.1.4) yleistys abstraktille tasolle on syytä käsitellä erillisenä samalla tasolla tapahtuvasta analogisesta rinnastuksesta sen omaksumisen erilaisuuden tähden. Myös Silfverbergin (1999) mukaan sellaiset päättelyt, joiden ei Piagetin formaalin logiikan vaiheessa pitäisi olla enää ylivoimaisia, ovat osoittautuneet oletettua vaikeammiksi. Tämä viittaa muistinvaraisuuteen tai kesken jääneeseen oppimisen prosessiin.

Esialgebra

Termiä *esialgebra* käytetään sellaisesta matematiikasta, joka käsittelee algebrallista ajattelua ilman kirjainsymboleja (Persson 2005, 18). Keskustelua, tulisiko ensin opettaa esialgebra vai aritmetiikka, voidaan tarkastella prosept-käsitteen näkökulmasta. Esialgebrassa rakennetaan proseptia lukukäsitteelle ja vastaavasti aritmetiikassa tähdätään ”vastaukseen, joka on mukana proseptissa ja on lukukäsitteen objektimuoto”. Vastaus on ”tavoite” aritmetiikassa. Jos se saavutetaan liian helposti esimerkiksi algoritmisesti, ei esialgebrallista kompleksista proseduuria ole tarve rakentaa ja esialgebra ei kehity. Prosept-teorian mukaisesti sisällöllisesti ja ajallisesti käsitteen muodostumisen prosessia tulee kunnioittaa ja siten esialgebran tulee kehittyä ennen algebraa ymmärtävän oppimisen saavuttamiseksi. Toinen kysymys on erirakenteisten lausekkeiden samanaikainen kehittyminen.

Tutkimuksen mittari on laadittu vuonna 1980 produktityyppisen tiedon saamiseen peruslaskutoimituksista aritmetiikan ja algebran alueella.Tästä syystä kaikin osin ei ole ollut mahdollista tutkia käsitteen muodostumista ja rakenteiltaan samanlaisten vastaavuutta aritmetiikan ja algebran alueella. Siksi mittarin täydentäminen vastaamaan 2000-luvun oppimiskäsityksen vaiheita ja riittävän laajan aineiston analysoiminen antaisi tietoa tulevaisuudessakin opetussuunnitelmien vaikuttavuudesta.

Tyttö/poika-keskustelu

Opettajan näkemyksellä matematiikan luonteesta on yhteys tyttöjen itseluottamukseen (Hannula 1996). Kun opettajan matematiikkakäsityksessä matematiikan prosessi- ja systeemiluonne saavat suuremman painoarvon, on matematiikkanäkemys feminiininen ja vastaavasti ongelmanratkaisupainotteisessa voidaan tulkita matematiikkanäkemystä maskuliiniseksi. (Hannula 1996) On toisaalta esitetty, että tytöt oppisivat poikia paremmin ala-asteen matematiikan opetusta hallitsevan algoritmien opettelun. Heidän matematiikan numeronsa ovat parempia kuin poikien. Näin tytöt saavat mallin, miten matematiikkaa opitaan. Siksi tytöillä arvellaan olevan poikia suuremmat vaikeudet päästä ala-asteella tehokkaaksi havaitsemastaan oppimistyylistä eroon, kun matematiikan opiskelu yläasteella alkaa vaatia muitakin oppimistekniikoita. (Woodrow 1984, 7; Hannula 2001.) On myös esitetty, että tästä syystä tytöt pärjäävät paremmin algoritmeja käyttävissä tehtävissä ja pojat ovat parempia ongelmanratkaisijoita (vrt. Hannula 2001). Tutkimukseni perusteella ongelmaratkaisuajattelun sisällyttäminen myös matematiikan sisältöihin ja proseptajattelun edistäminen voisi auttaa nimenomaan tyttöjä, koska siinä vaihe vaiheelta harjoituksen avulla kehitetään käsitteellistä ajattelua. Tämä tukee tytöillä step-by-step-tyyppistä algoritmista ajattelua käsitteen muodostumisen alkuvaiheessa, minkä Hannula on todennut tytöillä olevan kehittyneempää (Hannula 2001).

Kompetenssiosaaminen

Paitsi että liian vähäinen ja sirpaleinen tietomäärä voi vaikeuttaa ongelmanratkaisua, niin myös liian yksipuolinen mekaaninen tietomäärä voi estää tiedonkäsittelykykyä ja luovuutta (Bergsstöm 1985). Samoin liian paljon sirpaleita ei auta luovuudessa, jos tieto on proseduuritasolla. Tämä asia liittyy tiedon joustavuuteen. PISA-arviointitutkimuksessa matematiikan perustiedot ja –taidot määritellään terminologian tuntemisena, faktatietoina sekä laskutoimitusten ja ratkaisumenetelmien käyttötaitoina. Nämä ovat Wilsonin tasoin arvioituina korkeintaan ymmärtävää tasoa, eivät soveltavaa, eivätkä siten uutta luovaa tasoa. Tämän tason ajattelua on tieteen sisäisiin paradigmoihin kuuluva hermeneuttinen eli ymmärrykseen nojaava tietokäsitys; eri yksilöt havaitsevat eri asioita ympäröivästä todellisuudesta (Neisser 1983) ja ymmärtäväksi tiedoksi sen ajatellaan kehittyvän vasta, kun havaintokohde tajutaan merkitykselliseksi ja kun ihminen ymmärtää tämän kohteen suhteet lähikäsitteisiin.

Laajimman kompetenssin määritelmän antaa Luoma (2000) liittäen siihen henkilön suoriutumiskyvyn. Luoman mukaan kompetenssi-käsitteen kehittäjä David McClelland määrittelee kompetenssin ominaisuutena, joka on yhteydessä henkilön suorituskykyyn. Luoma määrittelee kompetenssin tietyksi käyttäytymismalliksi, jota ihminen kykenee soveltamaan eri toiminnoissaan ja joka johtaa toistuvasti hyviin ratkaisuihin. Kompetenssia, kuten visionäärisyyttä tai käsitteellistä ajattelua, voidaan Luoman mukaan kehittää, mutta ne vaativat pitkäkestoisempia ja monimutkaisempia oppimisprosesseja kuin perinteisesti ajatellaan tarvittavan. Myöhäismodernissa lähestymistavassa puhutaan tiedosta kompetenssien joukkona (Mouwitz 2003).

Aritmetiikan ja algebran merkitys kompetenssimielessä on myös algebran proseptissä. Vasta kun algebra on objektitasolla, niin yhtälörakenne on mahdollinen ymmärtää. Vahvan proseptin lisäksi kompetenssi-ajattelu on mahdollinen sekä aritmetiikassa että algebrassa vasta kehittyneillä Wilsonin tasoilla. Yleistäen voidaan matematiikan osaamisen tavoitetasoja tarkastella kompetenssiajattelun mukaisesti matriisien avulla (Mouwitz 2003). Vertikaalisuunnassa ovat erilaiset kyvyt, sisällöt ja affektiiviset aspektit, sekä horisontaalisessa suunnassa ovat tavoitteet eri ikäkausille. Produktityyppisten sisällöllisten tavoitteiden sijaan käytetään matriisissa tavoitelauseina sopivia sanoja (verbejä) eri kyky- ja sisältöalueilla. Perusosaamisella luodaan se oppimiskulttuuri, joka tuottaa innovatiivisia osaajia. Uudistuva yhteiskunta tarvitsee luovia ajattelijoita, jolloin geneerinen kyvykkyys nousee yhä tärkeämpään rooliin.

Työelämän haasteet

”Kuinka hyvin nuoret ovat valmiita kohtaamaan tulevaisuuden arjen, työn ja elinikäisen oppimisen haasteet? Millaiset valmiudet heillä on tietoyhteiskunnan kansalaisuuteen? Osaavatko nuoret etsiä ja analysoida tietoa, kykenevätkö he tekemään päätelmiä oppimastaan?” Näin Välijärvi (2001) kysyy PISA-arviointiraportissa. Nämä ovat relevantteja kysymyksiä, koska tiedon määrän jatkuva kasvu, ja vaatimus yhä monimutkaisempien ilmiöiden ymmärtämisestä vaikeuttaa perinteisiä tiedon vastaanottamiseen ja palauttamiseen pohjautuvia opetus- ja oppimiskäytäntöjä (Hatano & Inagaki 1986; Bereiter & Scardamalia 1993). Toimiminen tällaisessa ympäristössä vaatii yksilöltä yhä enemmän taitoa itse ohjata ja säädellä omia ajatteluprosessejaan ja taitoa käyttää tietojaan ja taitojaan uusissa tilanteissa.

Työelämän tehokkuusvaatimukset kohdistuvat valmiuksiin vastata jatkuvaan muutokseen. Mannermaa (1993) kuvailee tätä muutosta kirjassaan ”Tulevaisuus – murroksesta mosaiikkiin” seuraavasti: ”Vanhat tiedot ja näkemykset kumoutuvat ja uusia tulee tilalle, jatkuva muutos ja murroksetkin ovat arkipäivää, kiihtyvästi kasvavan tiedon yksityiskohtia on mahdotonta muistaa ulkoa, sen sijaan pitäisi kyetä poimimaan niistä olennaisuudet ja hahmottamaan kokonaisuuksia.” Tulevaisuudessa yritykset joutuvat kilpailemaan tehokkuudella, nopeudella ja joustavuudella, joiden hallinta vaatii aivan erityisiä taitoja (Kosonen 1995). Kuinka koulutusjärjestelmä kykenee vastaamaan tähän oppimisen laadullisen nostamisen vaatimukseen? Tutkimuksessani olen paitsi kartoittanut 20 vuoden aikana matematiikan oppimisessa tapahtuneita muutoksia, niin myös tuonut esille keinoja, joilla päästään kriittiseen, merkitykselliseen ja joustavaan ajatteluun ja tiedon soveltamiseen uusissa olosuhteissa, uutta kehittävään ja arvioivaan osaamiseen, opitaan monimutkaisia ongelmanratkaisutaitoja vaativilla tehtäväalueilla – ominaisuuksia, joita tulevaisuuden osaajilta vaaditaan.

Lähteet

Ahonen, S. (1994). Fenomenografinen tutkimus. Teoksessa: L. Syrjälä, S. Ahonen, E. Syrjäläinen & S. Saari 1994. *Laadullisen tutkimuksen työtapoja,* 114–160. Rauma: Kirjayhtymä Oy.

Aikio, A. (toim.) (1994). *Uusi sivistyssanakirja.* 15. painos. Helsinki: Otava.

Aittola, T. (1992). *Uuden opiskelijatyypin synty.* University of Jyväskylä. Jyväskylä. Studies in Education, Psychology and Social research 91.

Alasuutari, P. (1994). *Laadullinen tutkimus. 2.* uudistettu painos. Tampere: Vastapaino.

Alho, K., Näätänen, R., & Lang, H. (1999). Tarkkaavaisuus ja aisti-informaation käsittely ihmisaivoissa. Teoksessa A. Revonsuo, H. Lang & O. Aaltonen (toim.), *Mieli ja aivot – Kognitiivinen neurotiede,* 173–191. Turku: Kognitiivisen neurotieteen tutkimuskeskus, Turun yliopisto.

Arendt, H.(1978). *The life of the mind.* New York, NY: Harcourt Brace Jovanovich.

Astala, K., Kivelä, K., Martio, O., Näätänen, M., & Tarvainen, K. (2005). PISA-tutkimus vain osatotuus suomalaisten matematiikan taidoista. *Solmu 1*/2005, 2–3.

Attorps, I. (2006). *Mathematics teachers' conceptions about equations.* Department of Applied Sciences of Education. Research Report 266. Helsinki: Yliopistopaino.

Baddeley, A.D. (1986). Working memory. In G.A. Bower (Ed.), *The psychology of learning and motivation, 8*/1986, 47–89. New York: Academic Press.

Baddeley, A.D. (2000). The episodic buffer: a new component of working memory? *Trends in Cognitive Sciences, 4*(11), 417–423.

Bartlett. F.C. (1932). *Remembering: A study in experimental and social psychology.* Cambridge, England: Cambridge University Press.

Baxter, G.P., & Glaser, R. (1997). *An approach to analyzing the complexity of science performance assessments.* CSE Technical Report 452. Los Angeles, CA: CRESST.

Bednarz, N., Radford, L., Janvier, B., & Lepage, A. (1992). Arithmetic and algebraic thinking in problem-solving. In W. Geeslin & K. Graham (Eds.), *Proceedings of the 16th conference of the International group for the Psychology of Mathematics Education, 1*/1992, 65–72. Durham, New Hampshire: Program Committee.

Bednarz, N., Kieran C., & Lee, L. (1996). *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching.* Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Bereiter, C. (1992). Problemcentered and Referentcentered Knowledge: Elements of Educational Epistemology. *Interchange 23*(4), 337–361.

Bereiter, C., & Scardamalia, M. (1993). *Surpassing Ourselves: An Inquiry into the Nature and Implications of Expertise.* Chicago: Open Court.

Bereiter, C. (1994). Constructivism, socioculturalism and Popper´s world 3. *Educational Researcher, 23*(7), 21–23.

Bereiter, C., & Scardamalia, M. (1994). Computer Support for Knowledge-Building Communities. *The Journal of the Learning Sciences, Vol.3.* No.3, 265–283.

Bereiter, C. (2002b). *Education and mind in the knowledge age.* Mahwah (NJ): Erlbaum.

Bergström, M. (1985). Ihmisaivot ja matematiikka. *Matemaattisten Aineiden Aikakauskirja 49*(3), 211–215.

Boshuizen, H.P.A., & Schmidt, H.G. (1992). On the role of biomedical knowledge in clinical reasoning by experts, intermediates and novices. *Cognitive Science:A Multidisciplinary Journal. Vol.16* (2), 153–184.

Boyer, C. (1994). *Tieteiden kuningatar, Matematiikan historia osa I* (Englanninkielisestä alkuperäisteoksesta Carl B. Boyer, A history of Mathematics, 2nd Edition, Revised by Uta C. Merzbach, suomentanut Kimmo Pietiläinen). Juva.

Boyer, C. (2000). *Tieteiden kuningatar, Matematiikan historia osa II* (Englanninkielisestä alkuperäisteoksesta Carl B. Boyer, A history of Mathematics, 2nd Edition, Revised by Uta C.Merzbach, suomentanut Kimmo Pietiläinen). Juva.

Bransford, J.D., Brown, A.L., & Cocking, R.R. (1998). *How people learn: Brain, Mind, Experience and School.* Washington, D.C.: National Academy Press.

Bransford, J.D., Brown, A.L., & Cocking, R.R. (Eds.) (1999), cited in NCTM, 2000, National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) 2000. *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Bransford, J.D., Brown, A.L., & Cocking, R.R. (2000). *How people learn: Brain, Mind, Experience and School.* Washington, D.C.: National Academy Press.

Bruner, J. (1960). *The Process of Education.* Vintage Books. New York.

Bruner, J. (1994). The "remembered" self. In U. Neisser & R. Fivush (Eds.), *The remembering self,* 41–54. Cambridge. Cambridge University Press.

Byrnes, J., & Wasik, B. (1991). Role of Conceptual Knowledge in Mathematical Procedural Learning. *Developmental Psychology 27*(5), 777–786.

Chi, M.T.H., de Leeuw, N., Chiu, M.H., & la Vancher, C. (1994). Eliciting self explanations improves understanding. *Cognitive science,* 18, 439–477.

Choice, J. (2000). Teaching strategies for Algebra for All. *Mathematics teacher. Vol.93,* No7, 556–560.

Cooper, T.J., Boulton-Lewis, G.M., Atweh, B., Pillay, H., Wilss, L., & Mutch, S. (1997). The transition from arithmetic to algebra. Initial understanding of equals, operations and variable. Julkaisussa E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st conference of the international group for the psychology of mathematics education,* 14–19.5.1997. Vol. 2, 89–96. University of Helsinki. Lahti: Research and Training Centre.

Crawford, M.L. (2001). *Teaching contextually: Research, rationale, and techniques for improving student motivation and achievement in mathematics and science.* Waco, TX: CCI Publishing, Inc.

Creswell, J.W., & Plano Clark, L. (2007). *Designing and Conducting Mixed Methods Research.* London: Sage.

Cuba, E.G., & Lincoln,Y.S. (1985). *Naturalistic Inquiry.* California: Sage Publications, Beverly Hills.

Guba, E.G., & Lincoln, Y.S. (1989). *Fourth Generation Evaluation.* London: Sage Publication.

Cuba, E.G., & Lincoln, Y.S. (1994). *Compearing Paradigms in Qvalitative Research.* London: Sage Publication.

Davis, R.B. (1984). *Learning mathematics. The cognitive science approach to mathematics education.* Beckenham: Croom Helm.

Davis, G., Tall, D., & Thomas, M. (1997). *What is the object of the encapsulation of a process?* Research Group of Australasia, Auckland, New Zealand. [PDF-tiedosto] http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1997c-davis-thomas-merga.pdf. Luettu 17.02.2008.

Dienes, Z.P. (1960). *Building Up Mathematics.* London: Hutchinson Educational.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (toim.), *Advanced mathematical thinking,* 95–126. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, E. (1994). A theory and practice of learning college mathematics. In A. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical Thinking and Problem Solving, Studies in Mathematical Thinking and Learning,* Hillsdale, NJ, 1994, 221–243. Lawrence Erlbaum. Ass. FL: UB Trier 55 BB - C 12363.

Edwards, T.G. (2000). Some big ideas of algebra in the middle grades. *Mathematics teaching in the middle school 6*(1), 26–31.

Engeström, Y., Engeström, R., & Vähäaho, T. (1999). Oppiiko organisaatio? Teoksessa Grönstrand, R. (toim.), *Kasvava aikuinen.* Yle-opetuspalvelut. Jyväskylä: Gummerus. 12 s.

Engeström, Y. (1981). *Mielekäs oppiminen ja opetus.* Valtion koulutuskeskus, julkaisusarja B 17. Helsinki: VAPK.

Engeström, Y., & Virkkunen, J. (2000). Knowledge Management—The second generation: Creating competencies within and between work communities in the Competence Laboratory. In Y. Malhotra, (Ed.), *Knowledge Management and Virtual Organizations,* 282–305. London: Idea Group Publishing.

English, L.D., & Sharry, P.V. (1996). Analogical reasoning and the development of algebraic abstraction. *Educational studies in Mathematics 30*, 135–157.

Eskelinen, P. (2005). *Luokanopettajaopiskelijoiden tieto- ja oppimiskäsityksen muuttuminen kollaboratiivisessa design-prosessissa.* Joensuun yliopiston kasvatustieteellisiä julkaisuja 110. Pysyvä linkki julkaisuun: URN:ISBN:952-458-739-4. Luettu 26.8.2007.

Eskola, J., & Suoranta, J. (1998). *Johdatus laadulliseen tutkimukseen.* Tampere: Vastapaino.

Feigenbaum, R. (2000). Algebra for students with learning disabilities. *Mathematics teacher 93*(4), 270–274.

Fischbein S. (2003). *Mötet med alla barn – ett specialpedagogikt perspektiv.* Växjö: Gothia.

Foster, R. (1994). Counting on success in simple addition tasks. In J.P. Ponte & J.F. Matos (Eds.), *Proceeding of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education.* vol. III, 360–367. Lisbon, Portugal.

Freudenthal, H. (1996). *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching.* Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Fuson, K. (1992). Research on Whole Number Addition and Subtraction. In Grouws, D. A. (Ed.), *Handbook of research on Mathematics Teaching and Learning,* 242–275. New York: MacMillan,

Gallardo, A. (2002). The extension of the natural-number domain to the integers in the transition from arithmetic to algebra. *Educational Studies in Mathematics 49*, 171–192.

Galperin, P.Y. (1957). An Experimental Study in the Formation on Mental Actions. In B. Simon (Ed.), *Psychology in the Soviet Union*, 213–225. London: Routledge & Kegan Paul.

Gelman, R., & Meck, E. (1986). The Notion of Principle: The Case of Counting. In I. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: the case of mathematics*, 29–57. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Genesereth, M., & Nilsson, N. (Eds.) (1987). *The Logical Foundations of Artificial Intelligence.* San Mateo, CA: Morgan Kaufmann Publishers.

Gick, M.L., & Holyoak, K.J. (1980). Analogical problem solving. *Cognitive psychology 12*, 306–355.

Giddens, A. (1988). *Die Konstitution der Gesellschaft. Grundzüge einer Theorie der Strukturierung*. Frankfurt/Main, New York: Campus.

Gjone, G. (2001). Läroplaner och läroplansutveckling i matematik. In B. Grevholm (Ed.), *Matematikdidaktik – ett nordiskt perspektiv.* Lund: Studentlitteratur.

Goodson, I. (1995). *Opetussuunnitelman tekeminen, esseitä opetussuunnitelman ja oppiaineen sosiaalisesta rakentumisesta* (Suomentanut Erja Moore, alkuperäinen teos The Making of Curriculum, Collected Essays, 2nd edition, The Falmer Press). Joensuu: University Press Oy.

Gray, E., & Tall, D. (1993). Success and Failure in mathematics: The Flexible Meaning of Symbols as Process and Concept. *Mathematics teaching* 142, 6–10.

Gray, E., & Tall, D. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education 26*(2), 115–141.

Gray, E., Pitta, D., & Tall, D. (1997). The nature of the objects as an integral component of numerical processes. Vol.I, 115–130. In E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st PME Conference.* Lahti: Research and Training Centre.

Grouws, D., & Cebulla, K. (2000). *Improving Student Achievement in Mathematics*. Geneva, Switzerland: International Academy of Education.

Gröhn,T.(1993). Fenomenografinen tutkimusote. Teoksessa: T. Gröhn & J. Jussila (toim.), *Laadullisia lähestymistapoja koulutuksen tutkimisessa,*1–32. Helsinki: Yliopistopaino.

Guilford, J.P. (1956). The structure of intellect. *Psychological Bulletin, 53*(4), July, 267–293.

Haapasalo, L. (1992a). *Murtolukukäsitteen konstruktivistinen oppiminen.* Jyväskylän yliopisto. Kasvatustieteiden tutkimuslaitos. Julkaisusarja A. Tutkimuksia 51.

Haapasalo, L. (1994). *Oppiminen, Tieto ja Ongelmanratkaisu.* 4. painos. Joensuu: Medusa-Software.

Haapasalo, L. (1997). Konstruktivistisen pedagogiikan problematiikasta. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.), *Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen,* 51–79. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti & koulutuksen tutkimuslaitos.

Haapasalo, L. (2004). Pitäisikö ymmärtää voidakseen tehdä vai pitäisikö tehdä voidakseen ymmärtää? Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.), *Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen,* 50–83. Jyväskylä: Niilo Mäki instituutti.

Haapasalo, L. (2005). *Teknologian rooli kysymyksessä ”Pitääkö ymmärtää voidakseen tehdä vaiko päinvastoin”*. Esitelmä ISOT symposiumissa, Itäsuomalaista Opetusteknologiaa. Joensuussa 16.–17.11.2005. Internet: http://www.ncp.fi/isot/ohjelma.htm Luettu 6.10.2006.

Hakkarainen, P. (2002). Opetussuunnitelma ja kehittävä opetustyö. *Kasvatus 33*(4), 350–362.

Hakkarainen, K., Palonen, T., & Paavola, S. (2002). Kolme näkökulmaa asiantuntijuuden tutkimiseen. *Psykologia, 37*(6), 448–464.

Hakkarainen, K., Paavola, S., & Lipponen, L. (2004). Modeling innovative knowledge communities: A knowledge creation approach to learning. *Review of Educational Research 74*, 557–576.

Hakkarainen, K., Lonka, K., & Lipponen, L. (2004). *Tutkiva oppiminen. Järki, tunteet ja kulttuuri oppimisen sytyttäjinä.* Helsinki: WSOY.

Hakkarainen, K., Paavola, S., & Lonka, K. (2005). *Tiedonluomisen psykologia.* Helsinki: WSOY.

Hakkarainen, K., & Paavola, S. (2008). Asiantuntijuuden kehittyminen, hiljainen tieto ja uutta luovat tietokäytännöt. Teoksessa A. Toom, J. Onnismaa & A. Kajanto (toim.), *Hiljainen tieto. Tietämistä, toimimista, taitavuutta,* 59–82. Helsinki: Kansanvalistusseura ja Aikuiskasvatuksen Tutkimusseura.

Halinen, I. (2008). *Opetussuunnitelmat ja arviointi oppimisen tukena. Esi- ja perusopetuksen kehittäminen.* Koulutuksen ja tutkimuksen kehittämissuunnitelma 2007–2012. Helsinki: Opetushallitus.

Hannula, M. (2001). *”Tytöt, pojat ja matematiikka?”* http://tina.tkk.fi/tietopankki/hannula.pdf. Luettu 17.2.2008

Hannula, M., & Malmivuori, M.-L. (1996). Feminine structures in mathematical beliefs and performances. In E. Pehkonen (Ed.), *Current state of research on mathematical beliefs; Proceedings of the MAVI-3 workshop; August 23–26, 1996.* Research report 170. Department of Teacher Education, University of Helsinki.

Hassinen, S. (2006). *Idealähtöistä koulualgebraa. IDEAA-opetusmallin kehittäminen algebran opetukseen peruskoulun 7. luokalla.* Helsingin yliopisto. Soveltavan kasvatustieteen laitos. Tutkimuksia 274. Helsinki: Yliopistopaino.

Hatano, G., & Inagaki, K. (1986). Two courses of expertise. In H. Stevenson, H. Azuma & K. Hakuta (Eds.), *Child development and education in Japan.* Freeman & Co, 263–272.

Hatch, T., & Gardner, H. (1995). Multiple Intelligences go to school: Educational implications of the Theory of Multiple Intelligences. In Forgarty, R. (Eds.), *Multiple Intelligences: a collection,* 147–168. Arlington Heights, IL: IRI/Skylight Training and Publishing, Inc.

Hautamäki, J., Arinen, P., Hautamäki, A., Ikonen-Varila, M., Kupiainen, S., Niemivirta, M., Rantanen, P., & Scheinin, P. (2000). *Oppimaan oppiminen yläasteella*. Oppimistulosten arviointi 7/2000. Helsinki: Opetushallitus.

Heikkilä, T. (1998). *Tilastollinen tutkimus.* Helsinki: Oy Edita Ab.

Heikkinen, H., Huttunen, R., Niglas, K., & Tynjälä, P. (2005). Kartta kasvatustieteen maastosta. *Kasvatus 36*(5), 340–354.

Herscovics, N. (1989). Cognitive Obstacles Encountered in the Learning of Algebra. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra,* 60–86. Reston, Virginia: NCTM.

Herscovics, N., & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics 27*, 59–78.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics,* 1–27. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Hiebert, J., & Carpenter, T. (1992). Learning and Teaching with Understanding. In D. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning,* 65–97. NY: Macmillan.

Hiebert, J. (2003). What research says about the NCTM Standards. In J. Kilpatrick, W.G. Martin & D. Schifter (Eds.), *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics*, 5–23. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Hihnala, K. (2005). *Laskutehtävien suorittamisesta käsitteiden ymmärtämiseen. Peruskoululaisen matemaattisen ajattelun kehittyminen aritmetiikasta algebraan siirryttäessä.* Sarja: Jyväskylä Studies in Education, Psychology and Social research, 278. Jyväskylä: University Printing House.

Hilgard, E., & Bower, G. (1975). *Theories of learning.* Englewood Cliffs: Prentice-Hall.

Hirsjärvi, S., Remes, P., & Sajavaara, P. (1997). *Tutki ja kirjoita.* Helsinki: Kirjayhtymä Oy.

Hjelmquist, E., Sjöberg, L., & Montgomery, H. (Suomentanut Yrjö Lehti) (1982). *Johdatus kognitiiviseen psykologiaan.* Vaasa: Oy Gaudeamus Ab

Horel, G., & Tall, D. (1991). The general, the abstract and the generic in advanced mathematics. *For the Learning of Mathematics, 11*(2), 38–42.

Hyde, J.S., Fennema, E., & Lamon, S.J. (1990). Gender differences in mathematics performance: A meta-analysis. *Psychological bulletin 107*, 139–155.

Hähkiöniemi, M. (2006). *The Role of Representations in Learning the Derivative.* Sarja: Jyväskylä Studies in Education, Psychology and Social research 104. Jyväskylä: University Printing House.

Häkkinen, K. (1996). *Fenomenografisen tutkimuksen juuria etsimässä. Teoreettinen katsaus fenomenografisen tutkimuksen lähtökohtiin.* Jyväskylän yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Opetuksen perusteita ja käytänteitä 21.

Jarvis, P. (1994). Elinikäisen oppiminen ja kokemus. Teoksessa A. Kajasto & J. Tuomisto (toim.), *Elinikäinen oppiminen. Vapaan sivistystyön 35. vuosikirja,* 143–158. Jyväskylä: Gummerus.

Jockusch, E., & McKnight, C. (1978). Cognitive processes in learning Algebra. *Journal of Children´s Mathematical Behavior, 2*(1) 310–320.

Johnson, A., & Lauten, A.D. (2000). The jurassic classroom. *Mathematics teacher 93*(2), 102–110.

Johnson, R.B., & Onwuegbuzie, A.J. (2004). Mixed methods research: A research paradigm whose time has come. *Educational Researcher, 33*(7), 14–26.

Jonhson-Laird, P. (1983). *Mental models. Towards a cognitive science of language, inference and consciousness.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Johnson-Laird, P., & Byrne, P. (1991). *Deduktion.* Hove: Erlbaum.

Joutsenlahti, J. (2005). *Lukiolaisen tehtäväorientoituneen matemaattisen ajattelun piirteitä 1990-luvun pitkän matematiikan opiskelijoiden matemaattisen osaamisen ja uskomusten ilmentämänä.* Tampereen yliopisto. Acta universitatis Tamperensis 1061.

Järvinen, P., & Järvinen, A. (2004). *Tutkimustyön metodeista.* Tampere: Opinpaja.

Kadijevich, Dj., & Haapasalo, L. (2001). Linking procedural and conceptual mathematical knowledge through CAL. *Journal of Computer Assisted Learning 17*(2), 156–165.

Kallonen-Rönkkö, M. (1998). *Seitsemäsluokkalaisten suhde matematiikkaan: Asenteet ja oppimistulokset.* Oulun yliopiston julkaisuja.

Kaminski, J., Sloutsky, V., & Heckler, A. (2008). *The Advantage of Abstract. Examples in Learning Math.* Science 25. April 2008: Vol.320. no. 5875, 454–455.

Kangasniemi, E. (1989). *Opetussuunnitelma ja matematiikan koulusaavutukset. Toisen kansainvälisen (IEA) matematiikkatutkimuksen kansallisia tuloksia.* Jyväskylän yliopisto, Kasvatustieteiden tutkimuslaitoksen julkaisusarja A 28. Jyväskylä.

Kantanen, M., & Nybo, T. (2000). Työmuisti – tietotulvan suodatin.Teoksessa A. Revonsuo, H. Lang & O. Aaltonen (toim.), *Mieli ja aivot – kognitiivinen neurotiede.* Turku: Pallosalama Oy.

Kaput, J. (1994). Democratizing access to calculus: New routes to old roots. In A. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical thinking and problem solving,* 77–156. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum associates.

Kaufmann, M. (1985). Theorical Aspects of Reasoning About knowledge: proceedings of the 1986 Conference (Los Altos, CA). *Journal of Symbolic Logic 53*, 660–670.

Kauppila, R. (1999). *Oppimisen edistäminen suggestioiden avulla.* Sipoo: Imdl Oy.

Keranto, T. (1985). *Verrannollisen päättelyn kehittyminen ja kehittäminen. Luokkatestien kehittely sekä kytkennät matematiikan kouluopetukseen.* Oulun yliopiston kasvatustieteiden tiedekunta. Tutkimuksia 30/1985.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in mathematics 12*, 317–326

Kieran, C. (1989). The early learning of algebra. A structural perspective. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra,* 33–56. Hillsdale, NJ:Lawrence Erlbaum.

Kieran, C. (1990). Cognitive processes involved in learning school algebra. In P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition,* 96–112. (ICMI study series). Cambridge: CUP.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning.* New York, NY: Macmillan, 390–419.

Kieran, C. (1994). *A Functional Approach to the Introduction of Algebra. Some Pros and Cons.* In Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Vol I, 11–49. Lisbon.

Kiesswetter, K. (1983). Modellierung von Problemlöseprozessen. *Der Mathematikunterricht 29*(3), 71–101.

Kilpatrick, J., Swafford, J., Findell, B. & Bradford, J.D. (Eds.) (2001). *Mathematics Learning Study Committee, National Research Council. Conclusions and recommendations*. In *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. Washington, D.C.: The National Academies Press, 407–432.

Kitcher, P. (1983). *The Nature of mathematical knowledge.* NY: Oxford University Press.

Kline, M. (1980). *Mathematics. The loss of certainty.* NY: Oxford University Press.

Komiteanmietintö (1970): A 4. *Peruskoulun opetussuunnitelmakomitean mietintö I. Opetussuunnitelman perusteet.* 1971. Helsinki: Valtion painatuskeskus.

Komiteanmietintö (1970): A 5. *Peruskoulun opetussuunnitelmakomitean mietintö II. Oppiaineiden opetussuunnitelmat.* 1971. Helsinki: Valtion painatuskeskus.

Komiteanmietintö (1988). *Matemaattis-luonnontieteellisen perussivistyksen komitean välimietintö* 1988:30. Helsinki: Valtion painatuskeskus.

Komiteanmietintö (1989). *Matemaattis-luonnontieteellisen perussivistyksen komitean loppumietintö* 1989:45. Helsinki: Valtion painatuskeskus.

Korall, A. (2006). *Att undervisa i algebra på gymnasiet.* Linköping University, Department of Educational Science (IUV). Institutionen för utbildningsvetenskap.

Korhonen, H. (1999). *Peruskoulun matematiikan oppimistulosten kansallinen arviointi 1998. Oppimistulosten arviointi* 1/1999. Helsinki: Opetushallitus.

Korhonen, H. (2001). *Perusopetuksen päättövaiheen matematiikan oppimistulosten kansallinen arviointi* 2000. Opetushallitus, Oppimistulosten arviointi 3/2001. Helsinki: Yliopistopaino.

Korhonen, H. (2006). Mitä kuuluu Suomen matematiikanopetukselle? *Kasvatus 2*/2006, 187–190.

Kosonen, P. (1995). *Eurooppalaiset hyvinvointivaltiot.* Tampere: Gaudeamus.

Kouluhallitus (1985). *Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet 1985.* Helsinki: Valtion painatuskeskus.

Krause, C.M. (2006). Aivojen sähköinen taustatoiminta ja kognitiiviset prosessit. *Tieteessä tapahtuu 2*/2006.

Krutetskii, V.A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren.* Chicago and London: The University of Chicago Press.

Kupari, P. (1981a). *Peruskoulun matematiikan opetuksen tilannekartoitus1979. Kuudennen kouluvuoden osiokohtaiset tulokset.* Jyväskylän yliopisto. Kasvatustieteiden tutkimuslaitoksen selosteita ja tiedotteita 173.

Kupari, P. (1981b). *Peruskoulun matematiikanopetuksen tilannekartoitus 1979. Yhdeksännen kouluvuoden osiokohtaiset tulokset.* Jyväskylän yliopisto. Kasvatustieteiden tutkimuslaitoksen selosteita ja tiedotteita 172.

Kupari, P. (toim) (1982). *Kognitiiviset prosessit ja matematiikan opetus.* Jyväskylän yliopisto. Kasvatustieteiden tutkimuslaitoksen selosteita ja tiedotteita 199.

Kupari, P. (1983). *Millaista matematiikkaa peruskoulun päättyessä osataan? Yhdeksäsluokkalaisten oppimistulokset keskeisessä matematiikassa.* Jyväskylän yliopisto. Kasvatustieteiden tutkimuslaitoksen selosteita ja tiedotteita 342.

Kupari, P. (1988). Koulumatematiikan käsitteiden oppimisesta ja opettamisesta. Teoksessa P. Kupari (toim.), *Koulumatematiikka 1990-luvulle: lähtökohtia ja mahdollisuuksia.* Kasvatustieteiden tutkimuslaitoksen julkaisusarja B. Teoriaa ja käytäntöä 27.

Kupari, P. (1993a). Laskutaidot kadonneet? Peruskoululaiset matematiikan kokijoina ja taitajina. Teoksessa P. Linnakylä & H. Saari (toim.), *Oppiiko oppilas peruskoulussa? Peruskoulun arviointi 90-tutkimuksen tuloksia.* Jyväskylän yliopisto. Kasvatustieteiden tutkimuslaitos, 81–104.

Kupari, P. (1996). Miten peruskoulun matematiikan oppimiselle on käynyt säästöjen kourissa? Teoksessa R. Jakku-Sihvonen, A. Lindström & S. Lipsanen (toim.), *Toteuttaako peruskoulu tasa-arvoa? Arviointi 1/96,* 436–450. Helsinki: Opetushallitus.

Kupari, P. (1997). Mitä matematiikasta opitaan koulussa? Valtakunnallisten arviointitutkimusten tuloksia. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.), *Matematiikka, näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen,* 216–236. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti & Koulutuksen tutkimuslaitos.

Kupari, P. (1999). *Laskuharjoittelusta ongelmanratkaisuun. Matematiikanopettajien matemaattiset uskomukset opetuksen muovaajina.* Jyväskylän yliopisto. Koulutuksen tutkimuslaitos. Tutkimuksia 7.

Kupari, P., & Korhonen, H. (2000). Miten matematiikkaa arvioidaan OECD/PISA -ohjelmassa? *Dimensio 5*/2000, 10–13.

Kupari, P., Reinikainen, P., Nevanpää, T., & Törnroos, J. (2001). *Miten matematiikkaa ja luonnontieteitä osataan suomalaisessa peruskoulussa? Kolmas kansainvälinen matematiikka- ja luonnontiedetutkimus Suomessa.* Jyväskylän yliopisto: Koulutuksen tutkimuslaitos.

Kupari, P., & Törnroos, J. (2002). Miten suomalaisnuoret osaavat matematiikkaa? Teoksessa J. Välijärvi & P. Linnankylä (toim.), *Tulevaisuuden osaajat. Pisa 2000 Suomessa,* 41–56. Jyväskylä: Koulutuksen tutkimuslaitos

Kupari, P., Välijärvi, J., Linnakylä, P., Reinikainen, P., Brunell, V., Leino, K., Sulkunen, S., Törnroos, J., Malin, A., & Puhakka, E. (2004). *Nuoret osaajat. PISA 2003 tutkimuksen ensituloksia.* Jyväskylä: Koulutuksen tutkimuslaitos.

Küchemann, D. (1981). Algebra. In K. M. Hart (Ed.), *Children´s understanding of mathematics,* 11–16. Lontoo. John Murray, 102–119.

Kyöstiö, O.K. (1967). Askel eteenpäin koulun uudistuksessa. *Kasvatusopillinen aikakausikirja. 104*(1), 88–89.

Lahtinen, A. (2003). Matematiikan ylioppilaskirjoitus keväällä 2003. *Dimensio 6*/03, 20–36.

de Lange, J. (1996). Using and applying mathematics in education. In A.J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education.* Part 2. Vol. 4., 49–97. Dordrecht: Kluwer.

Lee, M. A. (1996). *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching.* Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Lehtinen, E. (1989). *Tietokone matematiikan opetuksessa: motivatinalisista vaikutusista.* Joensuun Yliopisto. Kasvatustieteellisen tiedekunnan tutkimuksia 25.

Lehtinen, E. (1997). *Verkkopedagogiikka.* Helsinki: Edita.

Lehto, J. (1997). Työmuisti ja oppiminen. *Kasvatus 28.*

Leino, J. (1975). *Matematiikan opetuksen tavoiteprofiilit peruskoulussa ja lukiossa.* Helsingin yliopiston kasvatustieteen laitoksen julkaisuja n:o 38.

Leino, J. (1977). *Matemaattisten kykyjen ja ajatteluprosessien kehittäminen kouluopetuksessa 1. Matemaattiset kyvyt ja asenteet.* Helsingin yliopiston kasvatustieteiden laitos. Tutkimuksia 60.

Leino, J. (1978). *Matemaattisten kykyjen ja ajatteluprosessien kehittäminen kouluopetuksessa 2. Matemaattinen ajattelu ja suoritusprosessi.* Helsingin yliopiston kasvatustieteiden laitos. Tutkimuksia 66.

Leino, J. (1987). Ongelmanratkaisun merkityksestä ja toteutustavoista. *Dimensio 4*/87, 46–50.

Leino, A-L., & Leino, J. (1997). *Opettaminen ammattina.* Helsinki: Kirjayhtymä Oy.

Linchevski, L., & Herscovics, N. (1994). *Cognitive obstacles in pre-algebra and algebra.* Proceedings of the 18th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education Vol.4, 257–265.

Linchevski, L., & Herscovics, N. (1996). Crossing the cognitive gap between arithmetic and algebra: Operating on the unknown in the context of equations. *Educational Studies in Mathematics 30*, 139–165.

Linchevski, L., & Livneh, D. (1999). Structure sense: The relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational Studies in Mathematics 40*, 173–196.

Linnakylä, P., & Malin, A. (2002). *Oppimistulosten arviointi 8*/2002. Opetushallitus. Helsinki: Yliopistopaino.

Lipponen, L., & Hakkarainen, K. (1997). Developing culture of inquiry in computer-supported collaborative learning. In R. Hall, N. Miyake, & N. Enyendy (Eds.), *Proceedings of CSCL: the second Internationale Conference of Computer Support for Collaborative Learning.* Mahweh, NJ: Erlbaum.

Lipponen, L., & Hakkarainen, K. (1998). *Tiedonmuodostus verkkopohjaisessa oppimisympäristössä.* Helsingin kaupungin julkaisusarja A6. Helsinki.

Luoma, M. (2000). *Human Resource Development as a Strategic Activity—A Single Component View of Strategic Human Resource Management.* Acta Wasaensia No 77.

MacGregor, M., & Stacey, K. (1993). Cognitive Models Underlying students' Formulation of simple Linear Equations. *Journal for Research in Mathematics Education 24.* Vol 3, 217–232.

MacGregor, M., & Stacey, K. (1994). Progress in Learning Algebra: Temporary and Persistent Difficulties. In G. Bell, B. Wright, N. Leeson & J. Geake (Eds.), *Challenges in Mathematics Education: Constraints on Construction. Proceedings of the Seventeenth Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia.* Vol 2, 303-410. Lismore, NSW: Mathematics Education Research Group of Australasia.

Malara. N.A. (1992). *The Interweaving of arithmetic and algebra: Some Questions about syntactic and structural aspects and their teaching and learning,* 1–13. In http://www.fmd.uni-osnabrueck.de/ebooks/erme/cerme1-proceedings/papers_vol2/g6_malara_iaderosa.pdf. Luettu 17.2.2008

Malinen, P. (1993). Can Finnish Elementary school Pupils Think logically? In P. Kupari, & L. Haapasalo (Eds.), *Constructivist and Curriculum Issues in School Mathematics Education. Mathematics Education Research in Finland: Yearbook 1992–1993.* Jyväskylä: Yliopistopaino.

Malinen, P. (2008). Suomalaisen peruskoulun muodostaminen ja ulkomailta saadut vaikutteet. *Kasvatus 4*/2008, 388–393.

Mannermaa, M. (1993). *Tulevaisuus – murroksesta mosaiikkiin.* Keuruu: Otava.

Marton, F. (1981). Phenomenography—Describing Conceptions of the World around Us. *Instructional Science 10*, 177–200.

Marton, F. (1988). Phenomenography: Exploring different conceptions of reality. In P.M. Fetterman (Ed.), *Qualitative approaches to evaluating education: A silent scientific revolution,* 176–208. New York: Praeger.

Marton, F., & Wenestam, C-G. (1988). Qualitative differences in retention when a text is read several times. In M.M. Gruneberg, P.E. Morris & R.N. Sykes (Eds.), *Practical aspects of memory: Current research and issues,* Vol 2, 370–376. Chichester: Wiley.

Marton, F. (1993). *Towards a pedagogy of awareness.* Paper presented at the 5th European Association for Research on Learning and Instruction Conference in Aix, Provence, August 31-September 5.

Marton, F. (1994). *Phenomenography* [online]. Göteborg: Göteborg University. Saatavissa www-muodossa: <URL: http://www.ped.gu.se/biorn/phgraph/civil/main/1res.appr.html. Luettu 14.4.2006

Marton, F. (1994). Phenomenography. In T. Husen & T. Neville Postlethwaite (Eds.), *The international Encyclopedia of Education.* Second edition, Volume 8. Pergamon.

Marton, F. (1996]. *Is phenomenography phenomenomenology?* Göteborg: Göteborg University, Saatavissa www-muodossa: <URL: http://www.ped.gu.se/biorn/phgraph/civil/faq/faq.phen.html Luettu16.3.2005.

Marton, F., & Booth, S. (1997). *Learning and Awareness.* New Jersey: Lawerence Erlbaum Associates.

Marton, F., & Fai, P.M. (1999). *Two Faces of Variation. 8th European Conference for Learning and Instruction August 24–28.* Göteborg, Sweden [online]. Göteborg: Göteborg University. Saatavissa pdf-muodossa: <URL: http://www.ped.gu.se/biorn/phgraph/civil/graphica/fmpmf.pdf. Luettu 16.3.2005.

Mason, J., Drury, H., & Bills, L. (2007). Studies in the Zone of proximal Awareness. In J. Watson & K. Beswick (Eds.), *Mathematics: Essential Research, Essential Practice—Volume 1. Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia,* 42–58.© MERGA Inc.

Mattila, L. (2002). *Perusopetuksen matematiikan oppimistulosten kansallinen arviointi 9. vuosiluokalla 2002.* Oppimistulosten arviointi 8/2002. Opetushallitus. Helsinki: Yliopistopaino.

Mayer, R.E., & Wittrock, M.C. (1996). Problem-solving transfer. In R. Calfee & R. Berliner (Eds.), *Handbook of educational psychology,* 47–62. New York: Macmillan.

McKeough, A., Lupart, J., & Marini, A. (1995. *Teaching for transfer: Fostering generalization in learning.* Mahwah, NJ: Erlbaum.

Mehtäläinen, J. (toim.) (1992). *Tiedollinen kasvatus ja ajattelun kehittäminen.* Helsinki: VAPK-kustannus.

Merenluoto, K. (2001). *Lukiolaisen reaaliluku. Lukualueen laajentaminen käsitteellisenä muutoksena matematiikassa.* Turun yliopiston julkaisuja. Sarja C, osa 176.

Metsämuuronen, J. (2003). *Tutkimuksen tekemisen perusteet ihmistieteissä.* Helsinki: International Methelp Ky.

Mietintö (1970.) *Peruskoulun opetussuunnitelmakomitean mietintö I.* Opetussuunnitelman perusteet. A 4.

Mietintö (1970). *Peruskoulun opetussuunnitelmakomitean mietintö II.* Oppiaineiden opetussuunnitelmat. A 5.

Mietintö (1971). *Vuoden 1971 koulutuskomitean mietintö* 1971: 52.

Miettinen, R. (1995). *Kognitiivisen oppimisnäkemyksen tausta.* 6. painos. Hallinnon kehittämiskeskuksen julkaisusarja B, 24. Helsinki: Painatuskeskus.

Miller, J.H., & Cawley, J.F. (1989). Cross-sectional comparisons of the mathematical performance of children with learning disabilities: Are we on the right track toward comprehensive programming? *Journal of Learning Disabilities 22*(4), 250–254, 259.

Mouwitz, L. (2003). *On forms of knowledge in school mathematics—some philosophical reflections on a case study.* [PDF-tiedosto] http://www.vxu.se/msi/picme10/F2ML.pdf. Luettu 7.11.2005.

Muistio (1976). *Matematiikka. Ehdotus perustavoitteiksi ja perusoppiainekseksi peruskoulussa.* Helsinki: Kouluhallitus.

National Council of Teachers of Mathematics, NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston: NCTM.

Neisser, U. (1983). Point of views in personal memories. *Cognitive Psychology 15*, 467–482.

Niiniluoto, I. (1990). *Maailma, minä ja kulttuuri.* Keuruu: Otava.

Niiniluoto, I. (2002). *Johdatus tieteenfilosofiaan. Käsitteen- ja teorianmuodostus*. Helsinki: Otava.

Nonaka, I., & Takeuchi, H. (1995). *The Knowledge Creating Company: How Japanese Companies Create the Dynamics of Innovation?* Oxford: Oxford University Press.

Novak, J.D.(1998). *Learning, Creating, and Using Knowledge: Concept maps as facilitative tools for schools and corporations.* Mahwah: N.J.,Lawrence Erlbaum & Assoc.

Novak, J.D. (2002). Using concept maps to facilitate classroom and distance learning. *Scuola & Citta, 2*, 112–114.

Nunn, T.P. (1919). *The teaching of algebra.* London: Longmans, Green and Company.

Olteanu, C. (2000). *Varför är skolalgebra svårt?* Rapport Högskolan Kristianstad.

Olteanu, C. (2001).*Vilka är elevernas svårigheter i algebra?* Rapport Högskolan Kristianstad.

Olteanu, C., Grevholm, B., & Ottosson, T. (2003). *Algebra in upper secondary school: A study of teachers' teaching and student learning*. Paper presented in CERME3: Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, 28 February-3 March 2003, Italy. Osoitteessa: https://www.dm.unipi.it/clusterpages/didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG6/TG6_olteanu_cerme3.pdf . Luettun19.6.2008.

Olteanu, C. (2003). *Vilka är elevernas svårigheter I algebra? En undersökning av hur gymnasieelever under sitt andra år utveclat sin algebraiska förståelse,* 1-41. Högskolan Kristianstad.

Onwuegbuzie, A.J., & Leech, N.L. (2006). *Linking Research Questions to Mixed Methods Data Analysis Procedures1 The Qualitative Report.* Volume 11. Number 3. September. 474-498. http://www.nova.edu/ssss/QR/QR11-3/onwuegbuzie.pdf. Luettu 14.6.2008.

Opetushallitus (1994). *Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet 1994.* Helsinki: Valtion painatuskeskus.

Opetushallitus (2004). *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004.* http://www.oph.fi/koulutuksen_jarjestaminen/opetussuunnitelmien_ja_tutkintojen_perusteet/perusopetus. Luettu 7.11.2008

Paasonen, J. (1979). *Elektronisen laskimen käyttö peruskoulun matematiikan opetuksessa.* Helsingin yliopisto. Kasvatustieteen laitos. Lisensiaattityö. Helsinki.

Paavola, S., Lipponen, L., & Hakkarainen, K. (2002). Epistemological Foundations for CSCL: A Comparison of Three Models of Innovative Knowledge Communities. In G. Stahl (Ed.), *Computer Support for Collaborative Learning: Foundations for a CSCL community.* Proceedings of the Computer-supported Collaborative Learning 2002 Conference, 24–32. Hillsdale, NJ: Erlbaum. [PDF-tiedosto] http://newmedia.colorado.edu/cscl/228.html. Luettu 23.8.2005.

Paavola, S., Lipponen, L., & Hakkarainen, K. (2004). Models of Innovative Knowledge Communities and Three Metaphors of Learning. *Review of Educational Research 74*(4), 557–576.

Paavola, S., & Hakkarainen, K. (2005). The Knowledge Creation Metaphor—An Emergent Epistemological Approach to Learning. *Science & Education* 14(6), 535–557.

Paavola, S., & Hakkarainen, K. (2007). Välittyneisyys ja trialogisuus innovatiivisten tietoyhteisöjen perustana. Artikkelikäsikirjoitus teokseen: J. Virkkunen & R. Engeström (toim.), Inhimillisen toiminnan kulttuurisen välittyneisyyden uudet muodot. Osoitteessa: http://www.helsinki.fi/science/networkedlearning/texts/paavolahakkarainen-2007-valittyneisyys.pdf. Luettu 17.6.2008.

Patton, M.Q. (*1990)*. *Qualitative Evaluation and Research Methods.* Newbury Park, London and New Delhi: Sage Publications.

Pehkonen, E. (1990). Matematiikan soveltaminen voi myös olla probleemanratkaisua! *Dimensio 1*/90, 26–29.

Pehkonen, E. (1995). *Pupils' view of mathematics: Initial report for an international comparison project.* University of Helsinki. Department of Teacher Education. Researchreport 152.

Pehkonen, E. (2003). Tutkiva matematiikan oppiminen peruskoulussa. *Tieteessä tapahtuu 6*/2003, 35–37.

Pehkonen, E., & Seppälä, R. (2007). Muutostekijöitä suomalaisessa matematiikanopetuksessa, erityisesti vuosina 1970-2000. *Kasvatus 1*/2007, 42–50.

Pehkonen, E., Ahtee, M., & Lavonen, J. (Eds.) (2007). *How Finns Learn Mathematics and Science.* Rotterdam: Sense Publishers, 11–34.

Pekonen, O. (2000). Matematiikan platonistinen perinne. *Tieteessä tapahtuu 5*/2000.

Perkins, D.N. (1987). Thinking frames: an integrated perspective on teaching cognitive skills. In J.B. Baron & R.J. Sternberg (Eds.), *Teaching thinkingskills.* New York: W.H.Freeman.

Persson, P-E. (2005). *Bokstavliga svårigheter. Faktorer som påverkar gymnasieelevers algebralärande.* Institutionen för matematik Luleå tekniska universitet SE-971 87 Luleå. Osoitteessa: http://epubl.ltu.se/1402-1757/2005/09/LTU-LIC-0509-SE.pdf . Luettu 19.6.2008

Peruskoulun matematiikan oppimäärä ja oppimääräsuunnitelma (1982). Kouluhallitus. Helsinki: Valtion painatuskeskus.

Perusopetuksen päättöarvioinnin kriteerit (1999). *Arvosanan hyvä (8) kriteerit yhteisissä oppiaineissa.* Helsinki: Opetushallitus.

Piaget, J. (1952). *The origins of intelligence in childhood.* New York: W.W.Norton.

Piaget J. (1973a). *Introduction to genetic epistemology, vol. 1,* (2. painos). Paris: PUF.

Piaget, J. (1973b). *La costruzione del reale nel bambino, trad. it.* Firenze: La Nuova Italia.

Piaget, J., & Inhelder, B. (1977). *Lapsen psykologia. (La psychologie de l'enfant,* 1966. Suomentanut Mirja Rutanen.) Jyväskylä: Gummerus.

Piaget, J., & Kamii, C. (1978). What is psychology? *American Psychologist 33*(7), 648–652.

Piaget, J. (1985). *The Equilibrium of Cognitive Structures.* Cambridge MA: Harvard University.

Pirie, S., & Kieren, T. (1994). Growth in mathematical understanding: How can we characterize it and how can we represent it? *Educational Studies in Mathematics 26*(2), 191–228.

Popper, K.R. (1994). *Knowledge and the Body-Mind Problem: In Defence of Interaction.* London: Routledge.

Radford, L. (1996). Some Reflections on Teaching Algebra through Generalization. In N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching,* 39–55. Netherlands.

Raudsepp, E. (1984). *Luovuus.* (Suomentanut. K.I. Partanen.). Helsinki: Otava.

Rauste-von Wright, M., & von Wright, G. (1994). *Oppiminen ja koulutus.* Helsinki: WSOY.

Rauste-von Wright, M., von Wright, J., & Soini T. (2003). *Oppiminen ja koulutus.* Helsinki: WSOY.

Reinikainen, P., Kupari, P., Välijärvi, J., Linnakylä, P., Brunell, V., Leino, K., Sulkunen, S., Törnroos, J., Malin, A., & Puhakka, E. (2004). *Nuoret osaajat. PISA 2003 tutkimuksen ensituloksia.* Jyväskylä: Koulutuksen tutkimuslaitos.

Resnick, L.B., Cauzinille-Marmeche, E., & Mathieu, J. (1987). Understanding algebra. In J.A. Sloboda & D. Rogers (Eds.), *Cognitive processes in mathematics*, 169–203. Oxford: Oxford university press.

Resnick, L.B., & Resnick, D.P. (1992). Assessing the thinking curriculum: New tools for educational reform. In B. Gifford & M. O'Connor (Eds.), *Changing Assessments: Alternative Views of Aptitude, Achievement, and Instruction.* Norwell, MA: Kluwer Academic Publishers, 37–75.

Resnick, L.B. (1995). From aptitude to effort: A new foundation for our schools. *Daedalus, 124*, 55–62.

Resnick, L.B., & Hall, M.W. (1998). Learning organizations for sustainable education reform. *Daedalus, 127*, 89–118.

Riddle, M., & Rodzwell, B. (2000). What Happens between Kindergarden and the Army? *Teaching Children Mathematics, Vol.7*(4), 202–206.

Rojano, T. (1996). Developing algebraic Aspects of Problem Solving within a spreadsheet Environment. In N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching*, 55–65. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Routio, P. (1990). *Tuote ja tieto* [online]. Helsinki: Taideteollinen korkeakoulu, päivitetty 20.1.2005, Tiedon hakeminen teksteistä. Saatavissa www-muodossa: <URL: http://www2.uiah.fi/projects/metodi/040.htm. Luettu 14.9.2006.

Ryan, J., & Williams, J. (1998). The search for pattern: Student understanding of the table of values representation for function. In C. Kanes, M. Goos & E. Warren (Eds), *Teaching Mathematics in New times.* Proceedings of the 18th annual conference of the mathematics education Research Group of Australasia. Vol. 2, 492–499. Brisbane. Mathematics Education Research group of Australasia.

Saariluoma, P. (1994). *Taitavan ajattelun psykologia.* Helsinki: Otava.

Saariluoma, P. (1998). Adversary problem-solving and working memory. In R.H. Logie & K.J. Gilhooly (Eds.), *Working memory and thinking*, 121–122. Psychology Press, UK.

Sahlberg, P. (1996). *Kuka auttaisi opettajaa. Post-moderni näkökulma opetuksen muutokseen yhden kehittämisprojektin valossa.* Jyväskylä Studies in Education, Psychology and Social Research 119. Jyväskylän yliopisto. Jyväskylä: University Printing House and Sisäsuomi Oy.

Salner, M. (1989). Validity in human science research. In S. Kvale (Ed.), *Issues of validity in qualitative research*, 47–92. Lund: Studentliteratur.

Samarapungavan, A. (1992). Children's judgment in theory choice tasks. *Scientific rationality in childhood cognition 45*, 1–3.

Scheinin, P. (2004). *Sukupuolten mahdollisuudet koulutuksessa.* Artikkeli Opetushallituksen seminaarissa 27.1.2004 "Uhkaako sukupuolten erilaisuus oppilaiden tasa-arvoa?"

Schneider, W., & Shiffrin. R.M. (1977). Controlled and automatic human information processing: II. Perceptual learning, automatic attending, and a general theory. *Psychological review, 84*(2), 127–190.

Schoenfeld, A. (1985). Mathematical problem solving. Orlando (FL): Academic Press. Schoenfeld, A. 1986. On Having and Using Geometric Knowledge. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: the case of mathematics.* Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Schoenfeld, A., & Arcavi, A. (1988). On the meaning of variable. *Mathematics Teacher, 81*(6), 420–427.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense making in mathematics. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning.* New York: Macmillan, 334–370.

Schoenfeld, A. H. (2002). Making Mathematics Work for All Children: Issues of Standards, Testing, and Equity. *Educational Researcher*, *31*(1), 13–25.

Seppälä, R. (2002). Matematiikka muutoksen kourissa. Kolmekymmentä vuotta koulumatematiikkaa. *Dimensio 1*/2002, 8–12.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*(1), 1–36.

Sfard, A., & Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification—the case of algebra. *Educational Studies in Mathematics, 26*, 191–228.

Sfard, A. (1994). Reification as the Birth of Metaphor. *For the Learning of Mathematics, 14*(1), 44–55.

Sfard, A. (1995). The development of algebra: Confronting historical and psychological perspectives. *Journal of Mathematical Behavior, 14*, 15–39.

Sfard, A. (1998). Symbolizing mathematical reality into being—or how mathematical discourse and mathematical objects create each other. In P. Cobb, E. Yackel & K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communicating: perspectives on mathematical discourse, tools and instructional design*, 37–98. Mahwah (NJ): Erlbaum.

Skemp, R. (1987). *The psychology of learning mathematics*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Singley, M.K., & Anderson, J.R. (1989). *Transfer of Cognitive Skill.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Silfverberg, H. (1999). *Peruskoulun yläasteen oppilaan geometrinen käsitetieto.* Tampereen yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Acta Universitatis Tamperensis 710.

Siljander, P. (1992). Metodologisen eklektismin ongelma kasvatustieteessä. *Kasvatus 23*(1), 14–21.

Silvonen, J. (2004). Lähikehityksen vyöhykkeellä? Teoksessa R. Mietola & H. Outinen (toim.), *Kulttuurit, erilaisuus ja kohtaamiset.* Kasvatustieteen päivien 2003 julkaisu. Helsinki, Helsingin yliopiston kasvatustieteen laitos, 50–58. (http://www.joensuu.fi/kasvatustiede/tutkimus/silvonen_lahikehitys.pdf). Luettu 26.4.2007.

Soininen, M. (1995). *Tieteellisen tutkimuksen perusteet.* Turku: Painosalama Oy.

Soro, R. (1997). Peruskoululaisten matemaattiset taidot kansainvälisessä vertailussa. *Dimensio 6*/97, 24–27.

Soro, R., & Pehkonen, E. (1998). *KASSEL-projekti, osa 1: Peruskoulun oppilaiden matemaattiset taidot kansainvälisessä vertailussa*. Helsingin yliopiston opettajankoulutuslaitos. Tutkimuksia 197.

Spino, R.I., Feltovich, P.I., Jacobson, M.J., & Coulson, R.L. (1991). Cognitive Flexibility, Constructivism, and Hypertext: Random Access. Instruction for advanced knowledge Acquisition in III—structured Domains. *Educational technology 31*(5), 24–33.

Stacey, K., & MacGregor, M. (1997). Ideas about symbolism that students bring to algebra. *The Mathematics Teacher,* Volume 90, No. 2, 110–113.

Stacey, K., Chick, H., & Kendal, M. (Eds.) (2004). Solving the problem with Algebra. The Future of the Teaching and Learning of Algebra. 1–21. In *The12th ICMI Study.* The University of Melbourne, Australia: Kluwer.

Steffe, L.P., & Gale, J. (1995). *Constructivism in Education.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Stein, M., Boaler, J., & Silver, E. (2003). Teaching mathematics through problem solving: Research perspectives. In H. L. Schoen (Ed.), *Teaching Mathematics Through Problem Solving, Grades 6–12*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 245–256.

Stern, P.V.D. (1973). *The portable Poe.* New York: Viking Press.

Stigler, J., & Hiebert, J. (1997). Understanding and improving classroom mathematics instruction: An overview of the TIMSS video study. *Phi Delta Kappan, 79*(1), 14–21.

Strang, T. (1990). Murtoluvut peruskoulun ala-asteella. Teoksessa M. Ahtee, M Erätuuli & V. Meisalo (toim.), *Opettajankoulutus ja koulun uudet työtavat.* Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimuksen päivät Helsingissä 29.–30.9.1989. Helsingin yliopiston opettajankoulutuslaitos. Tutkimuksia 82, 51–61.

Säljö, R. (1994). Minding action: conceiving of the World versus Participating in Cultural Practices. *Nordisk Pedagogik 14*,71–80.

Taatila, V. (2004). *The Concept of Organizational Competence—A Foundational Analysis.* Jyväskylän yliopiston väitöskirja. Jyväskylä studies in computing 36. Jyväskylän yliopisto.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics, with Particular Reference to Limit and Continuity. *Educational Studies in Mathematics 12*.

Tall, D. (Ed.) (1991). *Advanced mathematical thinking. Mathematics education library 11.* Dordrecht: Kluwer.

Tall, D. (1993). *Success and Failure in Arithmetic and Algebra. In New Directions in Algebra Education.* Queensland University of Technology, Brisbane, 232–245.

Tall, D. (1995). Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking. In L. Miera & D. Carraher (Eds.), *Proceedings of the nineteenth conference of the international group for the psychology of mathematics education, Volume I.* Recife, Brazil, 161–175.

Tall, D., & Thomas, M. (1997). *The Long-Term Cognitive Development of Symbolic Algebra.* Osoitteessa http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2001n-icmi-thomas-tall.pdf. Luettu 27.7.2006.

Tall, D., Gray, E., Pitta, D., & Pinto, M. (1999). Knowledge Construction and diverging thinking in elementary and advanced mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 38*(1–3), 11–133.

Tall, D., Spirou, P., & Watson, A. (2003). The Relationship between Physical Embodiment and Mathematical Symbolism: The Concept of Vector. *The Mediterranean Journal of Mathematics Education, 1*(2), 73–97.

Tall, D. (2004a). Introducing Three Worlds of Mathematics. *For the Learning of Mathematics, 23*(3), 29–33.

Tall, D. (2004b). *Reflections on research and teaching of equations and inequalities.* Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Bergen, Norway. [PDF-tiedosto] http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2004c-equns-forum-pme.pdf. Luettu 14.6.2005.

Tall, D. (2006). A Theory of Mathematical Growththrough Embodiment, Symbolism and Proof. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitivest*, Vol. 11, 195–215.

Tall, D., & De Lima, R.N. (2006). *Procedural Embodiment and Magic in Linear Equations.* 1–19. http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2008a-lima-linear-equations.pdf. Luettu 20.9.2008.

Tall, D. (2007). *Embodiment, Symbolism and Formalism in Undergraduate Mathematics Education*, Plenary at 10th Conference of the Special Interest Group of the Mathematical Association of America on Research in Undergraduate Mathematics Education, Feb 22–27, 2007, San Diego, California, USA.

Teddlie, C., & Tashakkori, A. (2006). A general typology of research designs featuring mixed methods. *Research in the Schools, 13*(1), 12–28.

Thurston, W.P. (1990). Mathematical Education. *Notices of the American Mathematical Society 37*(7).

Thurstone, L.L. (1938). *Primary mental abilities.* Chicago: University of Chicago Press.

Tolman, E.C. (1922). A New Formula for Behaviorism. *Psychological Reviews 29*, 44–53.

Tolman, E.C.(1948). Cognitive Maps in Rats and Men. *Psychological Reviews 55*, 89–208.

Treumann, H. (1974). *Leistungsdimensionen im Mathematikunterricht.* Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

Tuomi, J., & Sarajärvi, A. (2003). *Laadullinen tutkimus ja sisällönanalyysi.* Helsinki: Kustannusosakeyhtiö Tammi.

Tynjälä, P.(1999). *Oppiminen tiedon rakentamisena. Konstruktivistisen oppimiskäsityksen perusteita.* Helsinki: Kirjayhtymä.

Törnroos, J. (2007). Mitä PISA ja TIMMS kertovat matematiikan taidoista Suomessa. Teoksessa Tutkimusperustainen opettajankoulutus ja kestävä kehitys. Jari Lavonen (toim.), *Ainedidaktiikan symposiumi Helsingissä 3.2.2006.* Helsingin yliopisto. Soveltavan kasvatustieteen laitos. Tutkimuksia 285, osat 1 ja 2, 716. Helsinki: Yliopistopaino.

Uljens, M. (1989). *Fenomenografi n – forskning om uppfattningar.* Lund: Studentlitteratur.

Uljens, M. (1992). *Phenomenological features of phenomenography.* Report No. 1993:03, Department of Education and Educational Research, University of Göteborg.

Usinski, Z., & Bell, B.(1976). Calculators and School Arithmetic: Some Perspectives. In M. Suydam (Eds.), *Electronic Hand Calculators: The Implications for Pre-College Education.* Washington: Educational Resources Information Center.

Van Amerom, B.A. (2003). *Focusing on Informal Strategies When Linking Arithmetic to Early Algebra.* Educational Studies in Mathematics, Vol. 54, No.1, 63–75.

Vehkalahti, K. (2000). *Reliability of Measurement Scales.* Statistical Research Reports 17. Finnish Statistical Society. Väitöskirja. Helsingin yliopisto, tilastotieteen laitos.

Vehkalahti, K. (2008). *Kyselytutkimuksen mittarit ja menetelmät.* Tammi, Helsinki.

Vergnaud, G. (1990). Epistemology and Psychology of Mathematics Education. In P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.) *Mathematics and cognition: A Research synthesis by the International Group for PME.* Cambridge: Cambridge University Press.

Vlassis, J. (2002). The balance model: hindrance or support for the solving of linear equations with one unknown. *Educational Studies in Mathematics 49*, 341–359.

Vosniadou, S., & Ortony, A. (1989). *Similarity and Analogical Reasoning*. New York: Cambridge University Press.

Vosniadou, S. (1991). Designing curricula for conceptual restructuring; lessons from the study of knowledge acquisition in astronomy. *Journal of Curriculum Studies, 23*, 219–237.

Vosniadou, S., & Brewer, W.F. (1992). Mental models of the earth: A study of conceptual change in childhood. *Cognitive Psychology, 24*, 535–585.

Vygotski, L. (1982). *Ajattelu ja kieli.* (suomentanut K. Helkama ja A. Koski-Jännes) Espoo: Weilin + Göös.

Välijärvi, J., Linnakylä, P., Kupari.P., Reinikainen, P., Malin, A., & Puhakka, E. (2001). *Suomen tulevaisuuden osaajat. PISA 2000-tutkimuksen ensituloksia. 15-vuotiaiden nuorten lukutaito sekä matematiikan ja luonnontieteiden osaaminen kansainvälisessä vertailussa.* Osoitteessa: http://ktl.jyu.fi/arkisto/verkkojulkaisuja/PISA-SIS.PDF Luettu 7.8.2006

Välijärvi, J., & Linnakylä, P. (toim.) (2002). *Tulevaisuuden osaajat. PISA 2000 Suomessa.* Osoitteessa: http://ktl.jyu.fi/arkisto/julkaisumyynti/ktljd054.htm. Luettu 7.8.2006.

Välijärvi, J. (2004). Implications of the modular curriculum in the secondary school in Finland. In J. van den Akker, W. Kuiper & U. Hameyer (Eds.), *Curriculum Landscapes and Trends*. Dordrecht: Kluwer, 101–116.

Waern, Y. (1976). *On the Relationship Between World Knowledge and Comprehension of Texts. Effects of Truth Values and Analytic Level of the Belief Structure.* Number 468. Stockholm Univ. (Sweden). Dept. of Psychology.

Wheeler, D. (1996). Backwards and Forwards: reflections on different approaches to Algebra. In N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and teaching*, 147–151. Netherlands: Kluwer Academic Publishers..

Wilson, J. (1971). Evaluation of learning secondary school mathematics. In B. Bloom, T. Hastings & G. Madaus (Eds.), *Handbook on formative and summative evaluation of student learning*. New York: McGraw-Hill, 643–695.

Woodrow, D. (1984). Cultural impacts on children learning mathematics. *Mathematics in schools, 13*(5), 5–7.

von Wright, J. (1996). Oppimisen tutkimuksen opetukselle asettamia haasteita. *Kasvatus 1*/1996, 9–21.

Zazkis, R. (2001). *From arithmetic to algebra via big numbers. In The Future of the Teaching and Learning of Algebra*. Lontoo: Ablex Publishing, 83–97.

Zinchenko, V.P.(1995). Cultural-historical psychology and the psychological theory of activity: retrospect and prospect. In J.V. Wertsch, P. Del Río & A. Alvarez (Eds.), *Sociocultural Studies of Mind.* Cambridge: Cambridge University Press, 37–55.

Instruktio Liite 1

Paperit jaetaan ennen tunnin alkua pulpeteille nurin käännettyinä. Tehtäviä ei saa aloittaa, eikä uutta sivua kääntää, ennen kuin siihen annetaan lupa.

Jokainen sivu on täytettävä määräajassa, jonka ilmoittaa kokeen valvoja.

<u>Ohjeet sivuittain</u>

sivu 0:	Vastaa rehellisesti ja nopeasti. Aikaa 4 minuuttia.
sivu 1:	Laske päässä nopeasti ja tarkasti. Jos et osaa jotain tehtävää, jätä se väliin. Tarkista, jos ehdit. Aikaa 5 minuuttia.
sivu 2:	Merkitse ruutuun T, jos lause on tosi ja E, jos lause on epätosi. Älä laske, vaan vastaa lauseen rakenteen perusteella. Tehtävässä 19 ympyröi yhtälön oikea ratkaisu. Tehtävässä 20 ratkaise tehtävän yhtälö vapaaseen tilaan. Aikaa 4 minuuttia.
sivu 3:	Sivulla on vasemmassa reunassa 10 lauseketta. Ruksaa niiden yksinkertaistettu, sievennetty muoto. Aikaa 5 minuuttia.
sivu 4:	Arvioi likimääräiset vastaukset. Laskuja ei ole tarkoitus suorittaa tarkasti kynällä laskien Aikaa 5 minuuttia.
sivu 5:	Sivulla on sanallisia tehtäviä. Jätä laskut ja välimuodot näkyville paperiin. Korjaa huomaamasi virheet ylivetämällä, ilman että käytät pyyhekumia. Aikaa 17 minuuttia.
sivut 6 ja 7:	Kahdella seuraavalla sivulla on sanallisia tehtäviä. Kerro omin sanoin. Aikaa 13 minuuttia
LASSI-testi.	Vastaa väitteisiin ympyröimällä sinua parhaiten kuvaava vaihtoehto. Ajattele väitteitä matematiikan näkökulmasta. Aikaa 17 minuuttia

Matematiikan testi peruskoulun 9. luokille Liite 2

1. Sukupuoli. poika ☐ tyttö ☐ Nimi:______________________________

2. Matematiikan viimeisin todistusnumerosi? ☐

3. Harrastatko matematiikkaa tai siihen liittyviä asioita koulutehtävien lisäksi (esim. tietotekniikka, fysiikka, kemia) ?

   en ollenkaan ☐ jonkin verran ☐ paljon ☐

   Mitä harrastat?____
   ____

4. Lasketko päässä koulun ulkopuolella eteesi tulevia laskuja, (esim. kaupassa laskun suuruuden likimääräinen tarkistus, alennusmyynnissä alennetun hinnan, noppa-, peli- tai korttipelipisteet ym.)?

   en ollenkaan ☐ joskus ☐ lähes aina ☐

5. Millaista laskinta käytät?

   peruslaskin ☐
   funktiolaskin ☐
   graafinen laskin ☐
   ei ole. ☐

6. Jos sinulla on laskin, käytätkö sitä kotitehtävien tekemisessä?

   en ollenkaan ☐ jonkin verran ☐ aina, kun mahdollista ☐

Kaikki testin tehtävät tehdään ilman laskinta

ÄLÄ KÄÄNNÄ SEURAAVAA PAPERIA

- 1 -

Laita murtoluvut sievennettyinä, jätä välimuodot näkyviin ja korjaa huomaamasi virheet ylivetämällä, ilman että käytät pyyhekumia.

1. $26 + 17 =$ _______________
2. $38 - 7 =$ _______________
3. $23 - 8 =$ _______________
4. $-17 - 23 =$ _______________
5. $-58 + 27 =$ _______________
6. $3{,}8 + 1{,}7 =$ _______________
7. $8{,}1 - 3{,}6 =$ _______________
8. $\frac{2}{5} + \frac{2}{5} =$ _______________
9. $\frac{2}{5} + \frac{1}{3} =$ _______________
10. $408 - 397 =$ _______________
11. $-4 \cdot 8 =$ _______________
12. $81 : 9 =$ _______________
13. $0 : 12 =$ _______________
14. $\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} =$ _______________
15. $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} =$ _______________
16. $\frac{4}{5} \cdot 5 =$ _______________
17. $7 \cdot 0{,}5 =$ _______________
18. $2{,}4 : 6 =$ _______________
19. $a : a =$ _______________
20. $1000 \cdot 8{,}5 =$ _______________
21. $7{,}2 : 100 =$ _______________
22. $\frac{1}{6} : \frac{1}{2} =$ _______________
23. $\frac{1}{6} + \frac{1}{5} =$ _______________
24. $\frac{1}{5} : 3 =$ _______________
25. $\frac{1278}{2} =$ _______________

ÄLÄ KÄÄNNÄ SEURAAVAA PAPERIA

- 2 -

Merkitse ruutuun T, jos väite on tosi ja E, jos se on epätosi

1. $309 - 245 = 245 - 309$ ☐
2. $\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{2}{5}$ ☐
3. $8{,}7 + 8{,}7 + 8{,}7 + 8{,}7 = 4 \cdot 8{,}7$ ☐
4. $2(3 + 4) = 2 \cdot 3 + 4$ ☐
5. $4103 : 24 = 24 : 4103$ ☐
6. $18 \cdot 4 \cdot 32 \cdot 15 = 15 \cdot 32 \cdot 18 \cdot 4$ ☐
7. $2{,}5 \cdot (3{,}8 + 4{,}8) = 2{,}5 \cdot 3{,}8 + 2{,}5 \cdot 4{,}8$ ☐
8. $0{,}015 \cdot 248 = 0{,}15 \cdot 24{,}8$ ☐
9. $0 \cdot 8436 = 0 \cdot 0{,}536$ ☐
10. $\frac{1}{b} \cdot b = \frac{b}{b^2}$ ☐
11. $\left(\frac{12}{13}\right)^4 = \frac{12^4}{13^4}$ ☐
12. $(25 \cdot 14)^3 = 25 \cdot 14^3$ ☐
13. $(59^2)^3 = (59^3)^2$ ☐
14. $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4$ ☐
15. $2(a + b) = 2a + 2b$ ☐
16. $3 : (4 + 5) \cdot 9 = 3$ ☐
17. $1\% = \frac{1}{10}$ ☐
18. $\frac{1}{a} + \frac{1}{a} = \frac{2}{a+a}$ ☐
19. Ympyröi oikea vaihtoehto:
    Yhtälön $x + 5 = 12$ ratkaisu on -7, 7, 17, -17
20. Ratkaise yhtälö $x + 5 = 2x + 3$

ÄLÄ KÄÄNNÄ SEURAAVAA PAPERIA

- 3 -

RUKSAA OIKEA VAIHTOEHTO:

$(-3)^2$ =	-6	-9	9	6	ei mikään edellisistä
$10^3 \cdot 10^2$ =	100^5	10^5	10^6	100^6	ei mikään edellisistä
$x^4 \cdot x^5$ =	$2x^{20}$	x^9	$2x^9$	x^{20}	ei mikään edellisistä
$2x^3 + 5x^3$ =	$7x^6$	$10x^3$	$7x^3$	$10x^6$	ei mikään edellisistä
$x^{12} : x^4$ =	x^{16}	x^3	x^8	1^3	ei mikään edellisistä
$5x^3 \cdot 2x^5$	$7x^8$	$10x^8$	$10x^{15}$	$7x^{15}$	ei mikään edellisistä

$3a^2 \cdot (2a^3 + 4a) =$

- $6a^6 + 12a^3$ ☐
- $6a^5 + 12a^2$ ☐
- $6a^5 + 12a^3$ ☐
- $5a^5 + 7a^3$ ☐

ei mikään edellisistä ☐

$\dfrac{15a^8}{5a^4} =$

- $5a^2$ ☐
- $10a^2$ ☐
- $5a^2$ ☐
- $3a^4$ ☐

ei mikään edellisistä ☐

$\dfrac{6a^9}{3a^3} - 4a =$

- $2a^6 - 12a^4$ ☐
- $2a^6 - 4a$ ☐
- $2a^6 - 9a$ ☐
- $2a^3 - 4a$ ☐

ei mikään edellisistä ☐

ÄLÄ KÄÄNNÄ SEURAAVAA PAPERIA

- 4 -

<u>Ympyröi</u> jokaisesta lukuparista suurempi luku:

1) $\frac{1}{2}$ ja $\frac{1}{3}$ 2) $-1\frac{1}{2}$ ja $-\frac{5}{6}$ 3) $1{,}3 \cdot 10^{2}$ ja $1{,}2 \cdot 10^{3}$

<u>Arvioi</u> kymmenien tarkkuudella seuraavien laskujen tulokset:

4) 36,75 + 14,45 ≈ ______________

5) 19 · 5,09 ≈ ______________

6) 723 : 8 ≈ ______________

<u>Ympyröi</u> oikea vaihtoehto:

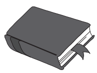
7) 0,19856 · 5,09111 ≈ 10 5,2 1,0 1,5 6,0

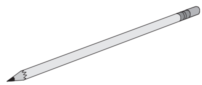
8) 1980,1 · 10,1 ≈ 19000 20000 2000 1981 199

9) Ympyrän kehän pituus saadaan kertomalla ympyrän säde luvulla 2Π (Π ≈ 3,14). Jos ympyrän säde on 2,5 cm, niin ympyrän kehä on likimain (ympyröi oikea vaihtoehto).

5 cm 10 cm 16 cm 20 cm

10) Sinulla on 4 €rahaa. Mitkä <u>kolme</u> tavaraa voit ostaa? (ruksaa hinnat)





1,20 € 2,10 € 2,50 € 0,65 €

ÄLÄ KÄÄNNÄ SEURAAVAA PAPERIA

- 5 -

Jätä välimuodot näkyviin ja korjaa huomaamasi virheet ylivetämällä, ilman että käytät pyyhekumia.

1) Mikon ostokset maksoivat 36,15 €. Paljonko hän saa takaisin 50 €n setelistä?

2) Matkapuhelimessasi on 40 €:n katto puhelinlaskuille. Saldotiedustelu kertoo, että käyttämättä on 6,5 €. Kuinka monta 17 sentin viestiä voit vielä lähettää?

3) Kauppias antaa 400 €n kamerasta 12 €n alennuksen. Kuinka monta % alennus on?

4) Anna lähti aamulla kouluun 40 min yli 8, sieltä treeneihin ja palasi kotiin klo 18.20. Kuinka kauan hän oli poissa kotoa?

5) Sisarukset Kaisa ja Kalle käyttivät eräänä lauantaina yhtä suuret viikkorahansa karkkipusseihin ja purukumeihin. Kalle sai viikkorahallaan karkkipussin ja kymmenen 0,5 €:n purkkaa ja Kaisa kaksi samanlaista karkkipussia kuin Kalle ja kuusi 0,5 €n purkkaa. Paljonko karkkipussi maksoi?

6) Kallen kuukauden palkasta kului kolmasosa ruokaan ja puolet muihin erilaisiin menoihin. Paljonko hänen kuukausipalkkansa oli, kun häneltä jäi säästöön 140 €?

ÄLÄ KÄÄNNÄ SEURAAVAA PAPERIA

- 6 -

Kerro sanallisesti. Nyt tärkeintä ei ole numeroilla laskeminen, vaan että kerrot omin sanoin.

7)

Kaisa löysi yllä olevan paperilapun. Siitä oli yläosa repeytynyt pois.
Mitähän lapun yläreunassa mahtoi lukea? Keksi sanallinen esimerkki.
Ilmoita myös vastaus.____

____

____

____

8) Kerro omin sanoin, miten lasket 23 – 8. Laske myös sen arvo.________________________

____

9) Kerro omin sanoin, miten lasket – 17 – 23. Laske myös sen arvo.____________________

____

10) Luku kerrotaan käänteisluvullaan. Merkitse lauseke ja laske myös sen arvo.______________

____

11) Lukuun 1/6 lisätään luku 1/4. Selvitä vaikkapa piirtäen, mikä on lukujen summa

- 7 -

12) Kerro sanallisesti, mitä lausekkeella $\frac{4}{5} \cdot 5$ tarkoitetaan. ____________________

____

____

____

Merkitse lauseke ja laske myös sen arvo: ____

____

13) Merkitse ruutuun sopiva laskutoimituksen merkki siten, että väite on tosi:

$6 \ \square\ 2 = 3$

$(12 \ \square\ 3)\ \square\ 2 = 8$

$(2 \ \square\ 3 \ \square\ 3)\ \square\ 5 = 7$

$(2 \ \square\ 4)\ \square\ 2 = (6 \ \square\ 2)\ \square\ 3$