

Aplicación del Método de los Momentos al Análisis de Estructuras Periódicas Multicapa 2-D: Comparación entre las Versiones Espectral y Espacial

Rafael Florencio Díaz⁽¹⁾, Rafael Rodríguez Boix⁽¹⁾, José A. Encinar Garcinuño⁽²⁾
 rflorencio@us.es, boix@us.es, jose.encinar@upm.es

⁽¹⁾Dpto. de Electrónica y Electromagnetismo, Fac. de Física, Univ. de Sevilla, Av. Reina Mercedes, s/n. 41012-Sevilla.

⁽²⁾Dpto. de Electromagnetismo y Teoría de Circuitos, Esc. Sup. de Ingenieros de Telecomunicación, Univ. Pol. de Madrid.

Abstract—In this paper the authors apply the Method of Moments (MoM) to the analysis of the scattering of a multilayered periodic strip grating by a plane wave with oblique incidence and arbitrary polarization. The problem is initially solved by means of the MoM in the spectral domain. However, since this approach leads to the computation of slowly convergent series, the problem is also solved by using a mixed potential integral equation (MPIE) formulation of the MoM in the spatial domain. Thanks to the efficient computation of the periodic potentials Green's functions and thanks to the closed-form integration of part of the integrals involved in the MoM matrix entries, important CPU time savings are attained when applying the MoM in the spatial domain. In fact, the implemented spatial domain version of the MoM turns out to be one order of magnitude faster than the spectral domain version when basis functions that account for edge singularities are used in the modeling of the current density on the metallizations.

I. INTRODUCCIÓN

Las rejillas periódicas de tiras metálicas (RPTM) han sido utilizadas como superficies selectivas en frecuencia y en polarización [1]. En particular, las RPTM impresas sobre una capa dieléctrica con plano de masa han sido utilizadas en antenas reflectoras para producir un giro en la polarización de las ondas incidentes después de la reflexión [2]. Además, las RPTM sobre capa dieléctrica con plano de masa se comportan aproximadamente como superficies artificiales “blandas” o “duras”. Estas superficies se emplean en las antenas de bocina para bajar la polarización cruzada y el nivel de lóbulos laterales, y también para aumentar la eficiencia de la apertura [3].

A causa de sus aplicaciones en el campo de las antenas, el análisis del *scattering* de ondas electromagnéticas planas por RPTM ha sido estudiado en detalle por muchos investigadores [1], [4]. El método numérico más utilizado en la resolución de este tipo de problemas es el Método de los Momentos (MmM) en el dominio espectral [1], [4]. En este trabajo se aplica el MmM en el dominio espectral al análisis del *scattering* de ondas planas por una RPTM embutida en un medio multicapa. Desgraciadamente, la aplicación directa del MmM en el dominio espectral conduce al cálculo de series infinitas que son lentamente convergentes. Por este motivo, el problema de la RPTM en medio multicapa vuelve a ser resuelto mediante el MmM en el dominio espacial en su formulación de ecuaciones integrales de potenciales mixtos

(EIPM) [5]. En principio, el MmM en el dominio espacial plantea más problemas numéricos que el MmM en el dominio espectral a la hora de analizar estructuras periódicas multicapa. No obstante, en este trabajo se presentan soluciones para muchos de estos problemas, lo cual posibilita que la versión resultante del MmM en el dominio espacial sea más eficiente que el tradicional MmM en el dominio espectral. En el caso en que se utilizan funciones base que dan cuenta de la singularidad de borde en la aproximación de la densidad de corriente sobre las tiras metálicas [6], los resultados numéricos obtenidos indican que las mejoras introducidas en la aplicación del MmM en el dominio espacial dan lugar a que este método sea al menos un orden de magnitud más rápido que el MmM en el dominio espectral.

II. APLICACIÓN DEL MDM AL PROBLEMA MULTICAPA PERIÓDICO 2-D: VERSIONES ESPECTRAL Y ESPACIAL

Las Figs. 1(a) y 1(b) muestran una RPTM embutida en un medio multicapa sobre la que incide una onda plana en dirección oblicua y con polarización arbitraria. El estado de polarización de la onda viene caracterizado por el ángulo γ definido en [1]. Suponiendo que las tiras metálicas son conductores eléctricos perfectos (CEP) y suponiendo una dependencia con el tiempo del tipo $e^{j\omega t}$ que será suprimida de ahora en adelante, la densidad de corriente en las tiras metálicas $\mathbf{J}(x, y)$ puede ser obtenida resolviendo la siguiente ecuación integral de campo eléctrico (EIEC):

$$\hat{\mathbf{z}} \times \left[\mathbf{E}^{\text{ms}}(x, y, z = -h_P) + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_{b_1+ma}^{b_1+ma+w} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\mathbf{G}}^E(x-x', y-y', z = -h_P | z' = -h_P) \cdot \mathbf{J}(x', y') dx' dy' \right] = \mathbf{0} \quad (1)$$

$b_1 < y < b_1 + w; -\infty < x < +\infty$

donde $\mathbf{E}_{\text{ms}}(x, y, z)$ es el campo eléctrico que crearía la onda incidente en todo el espacio en ausencia de las tiras metálicas, y donde $\overline{\mathbf{G}}^E$ es la función de Green diádica no periódica para el campo eléctrico del medio multicapa [7]. Dado que las tiras metálicas de las Figs. 1(a) y 1(b) son infinitas en la dirección x , la función $\mathbf{J}(x, y)$ puede ser aproximada en términos de

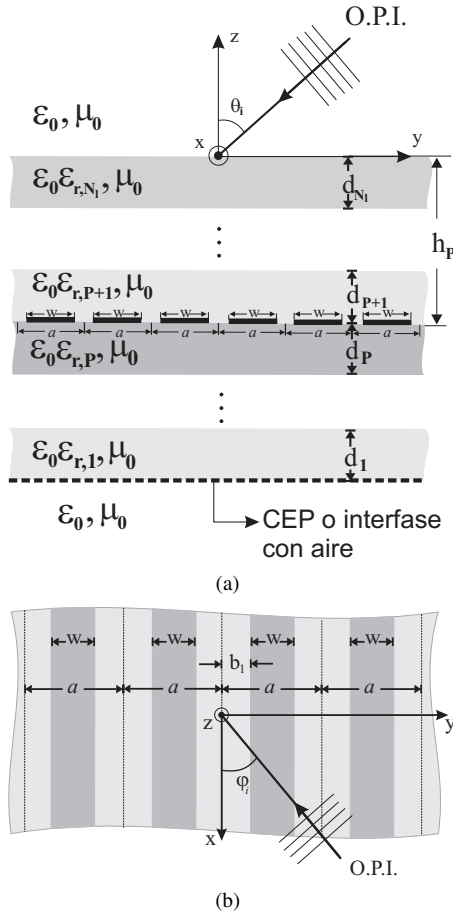


Fig. 1. Vista lateral (a) y vista desde arriba (b) de una RPTM embutida en un medio multicapa. Una onda plana incide sobre la RPTM en una dirección dada por los ángulos θ_i and φ_i del sistema de coordenadas esféricas.

funciones base conocidas como se indica a continuación:

$$\mathbf{J}(x, y) = \sum_{j=1}^N a_j (\mathbf{J}_j(y) e^{jk_0 \sin \theta_i \cos \varphi_i x}) \quad (2)$$

donde $\mathbf{J}_j(y)$ son funciones Floquet–periódicas de la variable y , y donde a_j son coeficientes desconocidos. Si se aplica la versión Galerkin del Mdm a la ec. (1), se obtiene un sistema lineal de ecuaciones para los coeficientes a_j . Se puede demostrar que los elementos de la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones pueden ser obtenidos en el dominio espectral como se indica a continuación:

$$\Gamma_{ij} = a \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[\left(\tilde{\mathbf{J}}_i^d(k_{ym}) \right)^* \right]^t \cdot \tilde{\mathbf{G}}^{E,c} (k_x = k_0 \sin \theta_i \cos \varphi_i, k_y = k_{ym}, z = -h_P |z' = -h_P) \cdot \tilde{\mathbf{J}}_j^d(k_{ym}) \quad (i, j = 1, \dots, N) \quad (3)$$

donde $k_{ym} = k_0 \sin \theta_i \cos \varphi_i + 2\pi m/a$, donde $\tilde{\mathbf{J}}_j^d(k_{ym})$ es la transformada de Fourier discreta de $\mathbf{J}_j(y)$, y donde $\tilde{\mathbf{G}}^{E,c} (k_x, k_y, z|z')$ es la transformada de Fourier bidimensional continua de $\mathbf{G}^E (x - x', y - y', z|z')$, que puede ser obtenida de una manera relativamente sencilla para el medio multicapa de la Fig. 1(a) mediante el algoritmo recurrente descrito en [7].

El cálculo numérico de Γ_{ij} constituye el cuello de botella en la aplicación del Mdm en el dominio espectral a la resolución del problema de *scattering* planteado en las Figs. 1(a) y 1(b) ya que las series infinitas de la Ec. (3) son lentamente convergentes, lo cual le resta eficiencia al Mdm en el dominio espectral.

Se puede demostrar que los elementos Γ_{ij} de la matriz de coeficientes del Mdm pueden también ser obtenidos en el dominio espacial mediante la ecuación:

$$\Gamma_{ij} = \left(-j\omega S_{ij}^A - \frac{1}{j\omega} S_{ij}^\phi \right) \quad (4)$$

donde S_{ij}^A y S_{ij}^ϕ vienen dadas por las integrales:

$$S_{ij}^A = \int_{-w}^{+w} G_{xx}^{A,P}(y, z = -h_P | z' = -h_P) f_{ij}^A(y) dy \quad (5)$$

$$S_{ij}^\phi = \int_{-w}^{+w} G^{\phi,P}(y, z = -h_P | z' = -h_P) f_{ij}^\phi(y) dy \quad (6)$$

En las ecs. (5) and (6) $G_{xx}^{A,P}(y, z|z')$ y $G^{\phi,P}(y, z|z')$ representan funciones de Green periódicas multicapa para la componente x del potencial vector y para el potencial escalar respectivamente, que son funciones de Green que se definen en el contexto de la formulación EIPM del Mdm [5]. En principio $G_{xx}^{A,P}(y, z|z')$ y $G^{\phi,P}(y, z|z')$ sólo pueden ser obtenidas mediante el cálculo de series infinitas lentamente convergentes. No obstante, en este trabajo se ha acelerado considerablemente la convergencia de dichas series al aplicar el método de las imágenes complejas, la transformación de Kummer y el método de Ewald como se propone en [8] para el caso periódico 3-D. Para hacer aún más eficiente el cálculo de $G_{xx}^{A,P}$ y $G^{\phi,P}$, se ha llevado a cabo la interpolación de dichas funciones de Green periódicas. No obstante, dado que estas funciones de Green bidimensionales contienen singularidades logarítmicas, se ha llevado a cabo la extracción de dichas singularidades y de sus derivadas como paso previo a la interpolación ya que la presencia de esas singularidades introduce errores numéricos importantes en el proceso de interpolación, tal y como ocurre al interpolar funciones de Green multicapa periódicas 3-D [9]. Concretamente, si llamamos G_0^P a cualquiera de las dos funciones $G_{xx}^{A,P}$ y $G^{\phi,P}$ de las ecs. (5) and (6), las funciones G_0^P han sido interpoladas mediante polinomios de Chebyshev en el intervalo $-a \leq y \leq 0$ (previa extracción de las singularidades y de sus derivadas) como se indica a continuación:

$$G_0^P(y, z = -h_P | z' = -h_P) \approx \frac{a_0}{\pi} \left\{ \ln w_0(y - y') \times \left(1 - \frac{[w_0(y - y')]^2}{4} \right) + e^{jk_0 \sin \theta_i \cos \varphi_i a} \ln w_{-a}(y - y') \times \left(1 - \frac{[w_{-a}(y - y')]^2}{4} \right) \right\} + \sum_{i=1}^{N_c} c_i T_{i-1} \left(\frac{2y}{a} + 1 \right) - \frac{1}{2} c_1 \quad (7)$$

donde $w_0(y) = k_0 \sqrt{1 - \sin^2 \theta_i \cos^2 \varphi_i} |y|$, $w_{-a}(y) = k_0 \sqrt{1 - \sin^2 \theta_i \cos^2 \varphi_i} |y|$, $T_{i-1}(\cdot)$ ($i = 1, \dots, N_c$) son polinomios de Chebyshev de primera especie, y donde los coeficientes c_i ($i = 1, \dots, N_c$) se obtienen imponiendo que los

dos miembros de la ec. (7) coincidan exactamente en los ceros de $T_{N_c} \left(\frac{2(y-y')}{a} + 1 \right)$ con el fin de minimizar errores de interpolación [10]. Para calcular G_0^P fuera del intervalo $-a \leq y \leq 0$, basta tener en cuenta que G_0^P es una función Floquet-periódica de la variable y .

Las funciones $f_{ij}^A(y)$ de la ec. (5) representan correlaciones cruzadas entre las funciones base para la densidad de corriente, y las funciones $f_{ij}^\phi(y)$ de la ec. (6) representan correlaciones cruzadas entre las funciones base para la densidad de carga sobre las tiras (que pueden ser obtenidas en términos de las funciones base para la densidad de corriente si se hace uso de la ecuación de continuidad [5]). Estas correlaciones cruzadas pueden ser fácilmente obtenidas para las funciones base más sencillas utilizadas tradicionalmente al aplicar el MdM en el dominio espacial –pulsos rectangulares, pulsos triangulares, funciones sinusoidales, etc.– [5]. En el contexto de este trabajo los autores han obtenido analíticamente estas correlaciones cruzadas para polinomios de Chebyshev pesados por una función que da cuenta de la singularidad de borde [6]. Este hecho es importante ya que estas funciones base permiten una convergencia muy rápida del MdM con respecto al número de funciones base [6]. Las correlaciones de las funciones con singularidad de borde pueden ser expresadas en términos de integrales elípticas completas de primera y segunda especie. Tanto las integrales elípticas como las funciones $G_{xx}^{A,P}(y, z|z')$ y $G^{\phi,P}(y, z|z')$ contienen singularidades logarítmicas que plantean problemas al calcular numéricamente las integrales S_{ij}^A y S_{ij}^ϕ de (5) and (6). Para evitar estos problemas, las singularidades han sido extraídas de los integrandos e integradas analíticamente.

III. RESULTADOS NUMÉRICOS

En las Figs. 2(a) y 2(b) se muestran los módulos de $G_{xx}^{A,P}$ y $G^{\phi,P}$ para un medio de cuatro capas, junto con los errores relativos cometidos al interpolar dichas funciones mediante la ec. (7) para diferentes valores del número de polinomios de Chebyshev utilizados en la interpolación. Pueden observarse muy bien las singularidades logarítmicas de $G_{xx}^{A,P}$ y $G^{\phi,P}$ en $y = -a$ e $y = 0$, singularidades que han sido extraídas antes de llevar a cabo la interpolación mediante polinomios de Chebyshev, tal y como muestra la ec. (7). Mientras que la Fig. 2(a) muestra que 10 polinomios de Chebyshev son suficientes para interpolar $G_{xx}^{A,P}$ en todo el intervalo $-a < y < 0$ con una precisión de cuatro cifras significativas, la Fig. 2(b) indica que hacen falta unos 20 polinomios para obtener la misma precisión en el caso de $G^{\phi,P}$. El que se necesiten más polinomios interpolantes en el caso de $G^{\phi,P}$ que en el caso de $G_{xx}^{A,P}$ tiene que ver con el hecho de que mientras que $G^{\phi,P}$ depende fuertemente de las permitividades de las capas, $G_{xx}^{A,P}$ depende fuertemente de las permeabilidades de las capas, y hay que tener en cuenta que en el medio multicapa que se ha estudiado en las Figs. 2(a) y 2(b), mientras que las permitividades de las capas cambian bruscamente de una capa a la capa adyacente, las permeabilidades de las capas son todas iguales.

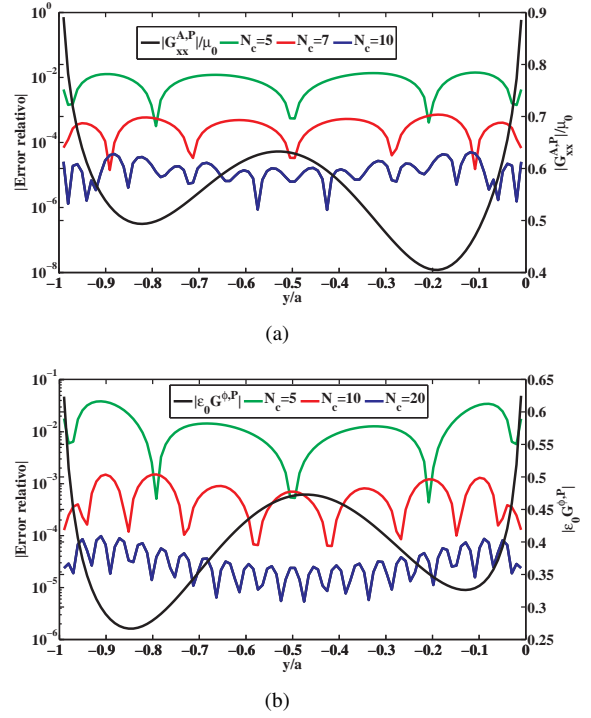


Fig. 2. Las líneas negras representan las magnitudes de $|G_{xx}^{A,P}|/\mu_0$ (a) y $\epsilon_0 |G^{\phi,P}|$ (b) para un medio de cuatro capas limitado por aire inferiormente. Las líneas de colores (verde, roja y azul) representan el valor absoluto del error relativo cometido en la interpolación de (7) para un número variable N_c de polinomios de Chebyshev. Parámetros: $f = 10$ GHz, $z = z' = 0$, $\theta_i = 45^\circ$, $\varphi_i = 45^\circ$, $a = 0.5\lambda_0$, $N_l = 4$, $d_4 = 0.7$ mm, $d_3 = 0.3$ mm, $d_2 = 0.5$ mm, $d_1 = 0.3$ mm, $\epsilon_{r,4} = 2.1$, $\epsilon_{r,3} = 12.5$, $\epsilon_{r,2} = 9.8$, $\epsilon_{r,1} = 8.6$.

Con vistas a validar las dos herramientas numéricas descritas en la Sección II –MdM en el dominio espectral y MdM en el dominio espacial– los resultados obtenidos con esas dos herramientas se comparan en la Fig. 3 con resultados previamente publicados. En particular, se presentan resultados para la razón de supresión de una RPTM de giro de polarización por reflexión que fue diseñada en [2]. La razón de supresión representada viene dada por el cociente $|E_\theta^r/E_\theta^i|$ de acuerdo con la definición dada en [4]. La Fig. 3 muestra que los resultados obtenidos mediante el MdM en el dominio espectral y con el MdM en el dominio espacial coinciden entre sí, y coinciden con los resultados numéricos publicados en [4]. Además, estos tres conjuntos de resultados muestran una buena concordancia con los resultados experimentales publicados en [2].

En las Figs. 4(a) y 4(b) estudiamos la convergencia del MdM en el dominio espacial con respecto al número de funciones base N utilizado para aproximar la densidad de corriente en las tiras metálicas de la Fig. 1. En particular, se representan los errores relativos entre los valores del coeficiente de reflexión obtenidos para una RPTM multicapa con N funciones base ($N = 1, 3, \dots$) y los valores virtualmente exactos que se obtienen con un número muy elevado de funciones base. Se observa que conforme aumenta la razón w/a (razón entre la anchura de las tiras y el período), aumenta el número de

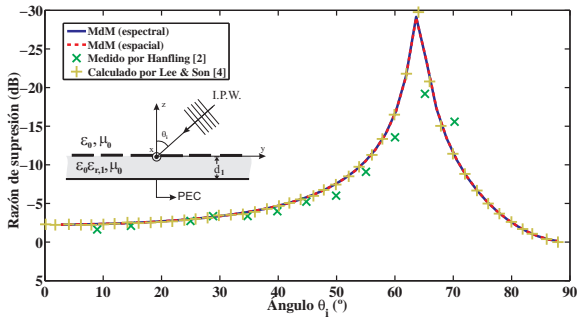


Fig. 3. Análisis de una RPTM sobre capa dieléctrica con plano de masa. Razón de supresión de la polarización en función del ángulo de incidencia θ_i . Nuestros resultados (línea azul y línea roja) se comparan con los obtenidos en [2] (\times) and [4] ($+$). Parámetros: $a/\lambda_0 = 0.228$, $w/a = 0.5$, $\epsilon_r = 2.57$, $d_1 = 0.164\lambda_0$, $\varphi_i = 66^\circ$, $\gamma = 90^\circ$.

funciones base que se requiere para que converja el MdM. Concretamente, mientras que la Fig. 4(a) muestra que sólo se necesitan 5 funciones base para obtener una precisión de cuatro cifras significativas cuando $w/a = 0.2$, la Fig. 4(b) muestra que se necesitan 15 funciones base para conseguir esa misma precisión cuando $w/a = 0.99$. Asimismo, en las Figs. 4(a) y 4(b) también se representa la razón entre el tiempo de CPU requerido por el MdM en el dominio espectral (ec. (3)) para obtener el coeficiente de reflexión de la RPTM con cuatro cifras significativas, y el que requiere el MdM en el dominio espacial (ecs. (4) a (6)) para obtener el coeficiente de reflexión con esa misma precisión. La razón de tiempos de CPU oscila entre 10 y 15, y es prácticamente independiente del número de funciones base N y de la razón w/a .

IV. CONCLUSIONES

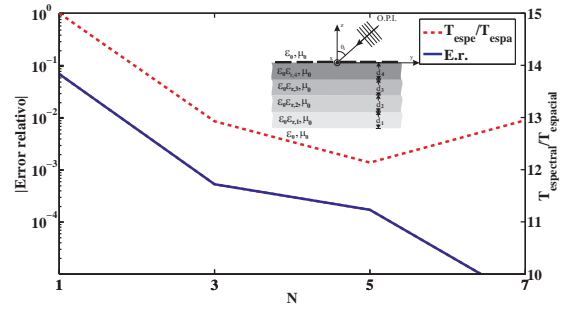
Se ha llevado a cabo una comparación entre la eficiencia del MdM en el dominio espectral y la eficiencia del MdM en el dominio espacial a la hora de analizar RPTM embutidas en medios multicapa. Los resultados obtenidos demuestran que si se calculan eficientemente las funciones de Green periódicas en el dominio espacial, y si se calculan en forma cerrada parte de las integrales que intervienen en los elementos de la matriz de coeficientes del MdM en el dominio espacial, se puede conseguir que el MdM en el dominio espacial sea un orden de magnitud más rápido que el MdM en el dominio espectral.

AGRADECIMIENTOS

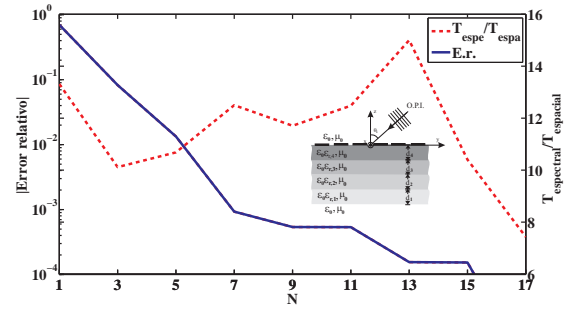
Este trabajo ha sido financiado por los proyectos CICYT TEC2010-16948 y CICYT TEC2010-17567 del Ministerio de Ciencia e Innovación, y por el proyecto de excelencia de la Junta de Andalucía P09-TIC-4595.

REFERENCIAS

- [1] K. Uchida, T. Nora, and T. Matsunaga, "Electromagnetic wave scattering by an infinite plane metallic grating in case of oblique incidence and arbitrary polarization," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 36, pp. 415-422, Mar. 1988.
- [2] J. D. Hanfling, G. Jerinic, and L. R. Lewis, "Twist reflector design using E -type and H -type modes," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-29, pp. 622-629, July 1981.



(a)



(b)

Fig. 4. Valor absoluto del error relativo en el coeficiente de reflexión de una RPTM impresa sobre un sustrato de cuatro capas frente al número de funciones base N utilizado al aproximar la densidad de corriente (línea azul). Razón $T_{\text{espectral}}/T_{\text{espacial}}$ entre el tiempo de CPU requerido por el MdM en el dominio espectral y el requerido por el MdM en el dominio espacial para una precisión de cuatro cifras significativas (línea roja). Parámetros: (a) $w = 0.2a$; (b) $w = 0.99a$. Parámetros de (a) y (b): $f = 10$ GHz, $\theta_i = 45^\circ$, $\varphi_i = 90^\circ$, $\gamma = 90^\circ$, $a = 0.5\lambda_0$, $N_l = P = 4$, $d_4 = 0.7$ mm, $d_3 = 0.3$ mm, $d_2 = 0.5$ mm, $d_1 = 0.3$ mm, $\epsilon_{r,4} = 2.1$, $\epsilon_{r,3} = 12.5$, $\epsilon_{r,2} = 9.8$, $\epsilon_{r,1} = 8.6$.

- [3] S. Chen, M. Ando, and N. Goto, "Analytical expressions for reflection coefficient of artificially soft and hard surfaces: dielectric slab loaded with a periodic array of strips over a ground plane," *Proc. Inst. Elect. Eng.*, pt. H, Vol. 142, no. 2, pp. 145-150, April 1995.
- [4] C.-W. Lee, and H. Son, "Analysis of electromagnetic scattering by periodic strip grating on a grounded dielectric/magnetic slab for arbitrary plane wave incidence case," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 47, pp. 1386-1392, Sept. 1999.
- [5] J. R. Mosig, "Integral equation technique" in *Numerical Techniques for Microwave and Millimeter-Wave Passive Structures*, edited by T. Itoh. New York: Wiley, 1989, pp. 133-213.
- [6] F. Medina, M. Horno, and H. Baudrand, "Generalized spectral analysis of planar lines on layered media including uniaxial and biaxial dielectric substrates," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 37, pp. 504-511, March 1989.
- [7] F. Mesa, R. Marqués, and M. Horno, "A general algorithm for computing the bidimensional spectral Green's dyads in multilayered complex bianisotropic media: the equivalent boundary method," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 39, pp. 1640-1649, Sept. 1991.
- [8] M. J. Park and S. Nam, "Efficient calculation of the Green's function for multilayered planar periodic structures," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 46, pp. 1582-1583, Oct. 1998.
- [9] G. Valerio, P. Baccarelli, S. Paulotto, F. Frezza, and A. Galli, "Regularization of mixed-potential layered-media Green's functions for efficient interpolation procedures in planar periodic structures," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 57, pp. 122-134, Jan. 2009.
- [10] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery, *Numerical Recipes in FORTRAN - The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, 2nd Edition, 1992.