

Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales
Departamento de Ingeniería Energética y Fluidomecánica

FEBRERO 2017



ESTUDIO TEÓRICO Y NUMÉRICO DEL COMPORTAMIENTO
ACÚSTICO DE LA DISOLUCIÓN Y CRECIMIENTO DE NUBES DE
BURBUJAS

Autor : Jaime Sañudo Babío

Tutor: Miguel Ángel Parrales Borrero

Índice

1. Agradecimientos	3
2. Resumen	4
3. Objetivo y metodología	5
4. Introducción teórica	6
4.1. Dinámica de una burbuja frente a una excitación acústica: Ecuación de Rayleigh-Plesset	6
4.2. Dinámica de una burbuja transferencia de masa: Ecuación de Epstein-Plesset	9
5. Dinámica colectiva: Nube de burbujas frente a una excitación acústica	12
5.1. Dinámica acoplada	12
5.2. Dispersión múltiple	13
5.3. Sección eficaz de dispersión	15
6. Dinámica colectiva con transferencia de masa	18
6.1. Evolución temporal de la sección eficaz	18
6.2. Influencia de la posición de las burbujas en la nube	20
7. Conclusiones y líneas futuras	25
8. Planificación temporal	27
9. Bibliografía	28

Índice de figuras

1.	Burbuja en un líquido sometida a excitación acústica	6
2.	Burbuja en un líquido con gas disuelto, y gradiente de concentraciones. . .	9
3.	Se muestra la disolución de 3 burbujas de radios iniciales $100\mu m$, $200\mu m$ y $300\mu m$	11
4.	Crecimiento de tres burbujas de radios iniciales $100\mu m$, $200\mu m$ y $300\mu m$. . .	11
5.	Onda acústica plana se propaga en la dirección z, excitando a la nube de burbujas. Cada burbuja se posiciona según su correspondiente vector \vec{r} . . .	12
6.	Representación esquemática del fenómeno de Multiple Scattering. P_s es la presión total dispersada por la nube de burbujas, r_i es el vector que posiciona las burbujas con respecto a los ejes de referencia	14
7.	Espectro de secciones eficaces $\Sigma_s/N\pi R_0^2$ para una nube de $N=1000$ burbujas con el mismo radio inicial $R_0 = 100\mu m$	16
8.	Efecto de la polidispersión sobre la sección eficaz en nubes de burbujas con $N=1000$ burbujas con radio medio $\overline{R_0} = 100\mu m$	17
9.	Cálculo de la variación de la fracción de vacío β con la disolución de las burbujas en una nube monodispersa.	18
10.	Cálculo de las curvas $\Sigma_s/N\pi R_0^2$ -Tiempo para frecuencias de excitación subresonantes ($\omega_0 < \omega_n$).	19
11.	Representación de los picos de sección eficaz (Izquierda) y tiempo en el que se alcanzan (Derecha) correspondientes a frecuencias de excitación ω_0 subresonantes.	19
12.	Cálculo de las curvas $\Sigma_s/N\pi R_0^2$ -Tiempo para frecuencias de excitación superresonantes ($\omega_0 > \omega_n$).	20
13.	Representación de los picos de sección eficaz (Izquierda) y tiempo en el que se alcanzan (Derecha) correspondientes a frecuencias de excitación ω_0 superresonantes	20
14.	Dinámica de disolución de $N= 20$ burbujas para: a) Modelo desacoplado (curva negra), b) Modelo con corrección lineal (curvas azules) y c) Modelo con corrección exponencial (curvas rojas).	21
15.	Variación temporal de la fracción de vacío para los 3 modelos de disolución de la nube.	22
16.	Evolución temporal de la sección eficaz de la nube a frecuencia 0.2 para los distintos modelos de disolución.	22
17.	Evolución temporal de la sección eficaz de la nube a frecuencia 0.4 para los distintos modelos de disolución.	23
18.	Evolución temporal de la sección eficaz de la nube a frecuencia 0.6 para los distintos modelos de disolución.	23
19.	Evolución temporal de la sección eficaz de la nube a frecuencia 0.8 para los distintos modelos de disolución.	23
20.	Evolución temporal de la sección eficaz de la nube a frecuencia 1 para los distintos modelos de disolución.	24
21.	Diagrama de Gantt	27

1. Agradecimientos

A mi familia que me ha apoyado y ha aguantado mis ratos de mal humor cuando las cosas no salían bien en la universidad.

A mi grupo de amigos de la ETSII ya que los mejores momentos aquí han sido junto a ellos, en especial a Antonio, Usano y Garnacho.

Por último a Miguel Ángel, cuya ayuda y paciencia conmigo ha sido inestimable.

2. Resumen

El proyecto trata sobre el estudio teórico y la resolución numérica de una serie de ecuaciones derivadas de las ecuaciones fundamentales de Mecánica de Fluidos. Dichas ecuaciones aplican al estudio del comportamiento o respuesta de burbujas gaseosas que se encuentran en el seno de un líquido. A lo largo del proyecto las propiedades seleccionadas para los cálculos corresponden a burbujas de CO₂ sumergidas en agua, y el tamaño de las burbujas estudiado se encuentra en torno a las 100 micras.

En el cuarto capítulo, se realiza una explicación teórica a modo de introducción de las ecuaciones generales de partida, a las cuales se les imponen una serie de condiciones de contorno para que se adapten al problema a tratar. En primera instancia se explica el desarrollo seguido para deducir la Ecuación de Rayleigh-Plesset, la cual modela la dinámica de una sola burbuja en respuesta a un campo acústico incidente, obteniendo la respuesta del radio de la burbuja a tal perturbación.

A continuación se estudia el comportamiento de una burbuja cuando el líquido que la rodea contiene gas disuelto (el mismo gas que forma la burbuja). El gradiente de concentraciones gaseosas provocará un proceso de difusión másica produciendo un aumento o disminución del tamaño de la burbuja según corresponda. El citado comportamiento es descrito por la Ecuación de Epstein-Plesset, la cual se deduce a partir de ecuaciones generales, y se realiza un sencillo cálculo y representación de un ejemplo.

Una vez expuestos los comportamientos individuales de las burbujas sometidas a dos perturbaciones distintas (acústica y un fenómeno de difusión), en el quinto capítulo se procede a analizar el comportamiento colectivo de las nubes de burbujas, formadas por miles de ellas. En primer lugar se tratan los modos de oscilación acoplados, generados por la excitación que resulta de la respuesta de burbujas vecinas.

Además, se explica y propone un sistema algebraico para el cálculo de la presión total que dispersa una nube de burbujas excitada.

Por último, se expone el concepto de sección eficaz de dispersión de la nube y se procede a su cálculo numérico y representación para una nube determinada.

En el sexto capítulo del proyecto se pone fin al círculo, modelando el comportamiento de las nubes de burbujas, cuando son sometidas a la acción conjunta de un campo de presiones acústicas y un gradiente de concentraciones gaseosas. Al igual que en el tercer capítulo, la sección eficaz de dispersión es el principal objeto de estudio. El proceso de difusión másica ya explicado en el capítulo 4 se introduce como agente perturbador ya que alterará el tamaño de las burbujas con el paso del tiempo (siguiendo la Ecuación de Rayleigh-Plesset). Además, se diseña una pequeña corrección a dicha ecuación, inicialmente calculada para una sola burbuja, plasmando de manera más cercana a la realidad el fenómeno cuando sucede en una nube de burbujas. Esta corrección consiste en la adición de un factor a la ecuación, que establece una relación entre la posición de una burbuja en la nube y el grado en el que se ve afectada por la diferencia de concentraciones gaseosas.

3. Objetivo y metodología

El objetivo del presente proyecto se basa en el estudio del comportamiento y la eficiencia acústica de una nube formada por burbujas presente en un líquido. En un escenario realista para las aplicaciones de interés, estas nubes experimentan una variación en su contenido gaseoso debido al efecto de la transferencia de masa. Se pretende que uno de los resultados de este proyecto esté relacionado con la medida mediante ultrasonidos de las propiedades de los flujos bifásicos presentes tanto en aplicaciones industriales como médicas.

En la industria naval, alimentaria e incluso en la petroquímica, la presencia de nubes de burbujas en los líquidos de interés es de gran importancia para el estudio de diferentes efectos dinámicos. Se hace de especial relevancia cuantificar la composición gaseosa de estas nubes mediante métodos no invasivos como los ultrasonidos, que tienen un coste relativamente bajo. La variación temporal del contenido gaseoso debido a fenómenos de disolución o crecimiento están por tanto fuertemente conectados con las propiedades de presión y composición del líquido donde está presente la nube. En el caso de la industria alimentaria y petroquímica, el control y la monitorización de la transferencia de masa que ocurre entre el gas y el líquido se hace crítico para optimizar los procesos relacionados, como el de carbonatación.

Por otro lado, el uso de ultrasonidos para diagnosis médica se apoya en la presencia de microburbujas con un alto poder ecogénico introducidas de manera artificial en el cuerpo del paciente. Esta interacción ultrasonido-burbujas permite una precisión lo suficientemente alta para llevar a cabo estudios o diagnósticos médicos de gran calidad.

Para desarrollar el proyecto y encontrar la relación existente entre la eficiencia ecogénica de una nube de burbujas y su composición gaseosa (la cual puede variar en el tiempo), se ha seguido una metodología que parte de formulaciones teóricas basadas en la dinámica de burbujas aisladas. Estas formulaciones se han ampliado con el fin de tener en cuenta el acoplamiento dinámico naturalmente presente en las nubes de burbujas.

Los modelos y correcciones planteados convierten al problema objetivo en una tarea muy compleja de abordar de forma analítica, por lo que se han diseñado distintos algoritmos de resolución numérica de las ecuaciones completas.

Este Trabajo de Fin de Grado queda enmarcado en los campos de Ultrasonidos y Mecánica de Fluidos, cuyos códigos UNESCO son 220109 y 220404 respectivamente.

4. Introducción teórica

Para comprender bien los propósitos de este proyecto, es necesario introducir una serie de ecuaciones que describen la dinámica de las burbujas al verse perturbadas por un campo de presión acústica o por un gradiente de concentraciones.

4.1. Dinámica de una burbuja frente a una excitación acústica: Ecuación de Rayleigh-Plesset

En primer lugar, para analizar la respuesta de una burbuja ante una onda acústica, se considera una burbuja aislada de radio inicial de equilibrio R_0 , que se encuentra en el seno de un líquido de volumen infinitamente grande en comparación con el tamaño de la burbuja. En el interior de la misma, se encuentra un gas a una presión P_g . El líquido, a una distancia lo suficientemente grande en comparación con la burbuja, se encuentra a una presión hidrostática P_∞ , y se le aplica exteriormente una presión acústica conocida a priori, $P_{ac}(t)$, dependiente del tiempo (una senoidal por ejemplo), como se muestra en la Figura 1.

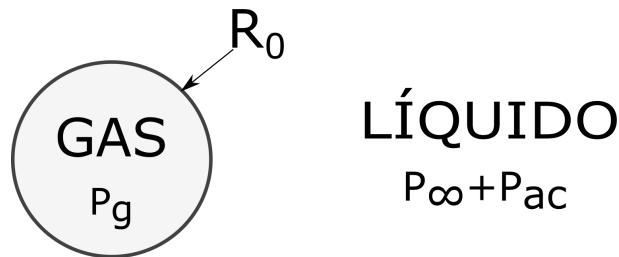


Figura 1: Burbuja en un líquido sometida a excitación acústica

Como el objetivo es hallar la respuesta de la burbuja, $R(t)$ antes una perturbación acústica, se procede a hallar características del líquido, tales como velocidad, presión y densidad, en un punto situado a una distancia r del centro de la burbuja, ya que estas están directamente relacionados con la variación de su radio.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (1)$$

Partiendo de ecuaciones de la Mecánica de Fluidos aplicadas al volumen del líquido para hallarlas:

Ec. continuidad

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0} \quad (4.1)$$

Suponiendo la densidad constante, ya que el líquido se considera incompresible, los términos $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ y $\nabla \cdot \vec{v}$ se anulan, quedando la ecuación en coordenadas esféricas:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 v)}{\partial r} = 0 \quad (1,2)$$

Integrando la ecuación (4.2), e imponiendo la condición de contorno $v(r = R) = \dot{R}$:

$$R^2 \dot{R} = CTE$$

Sustituyendo el valor de dicha constante y despejando v, se obtiene :

$$v(r) = \frac{R^2 \dot{R}}{r^2} \quad (4.3)$$

Ec. cantidad de movimiento

$$\boxed{\frac{\partial v}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla \rho + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \bar{\bar{\tau}}} \quad (4.4)$$

El término de esfuerzos viscosos $\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \bar{\bar{\tau}} = 0$, por ser considerado el flujo radial, quedando la ecuación:

$$\frac{\partial v(r)}{\partial t} + v(r) \frac{\partial v(r)}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} \quad (4.5)$$

Derivando la ecuación 4.3, respecto de t y de r, e introduciéndolo en la ecuación 4.5 se obtiene:

$$\frac{2R\dot{R}^2 + R^2\ddot{R}}{r^2} - \frac{R^2\dot{R}}{r^2} \frac{2R^2\dot{R}}{r^3} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r}$$

Integrando mediante separación de variables, entre P_R y $P_\infty + P_{ac}$ la presión, y entre R e infinito el radio, se alcanza la ecuación de Rayleigh:

Ec. Rayleigh

$$\boxed{\frac{3\dot{R}^2}{2} + R\ddot{R} = \frac{1}{\rho}[P_R - (P_\infty + P_{ac})]} \quad (4.6)$$

Esta ecuación revela cómo responde la burbuja ante una perturbación en la presión circundante. Fue formulada por Rayleigh para explicar la violencia en los fenómenos de colapso de burbujas (cavitación).

Con todo este desarrollo, se pretende hallar R(t), es decir, como se comporta R al variar P_{ac} con el tiempo. Para ello, es necesario calcular el valor de P_R , e introducirlo en (4.6). La presión P_g en el interior de la burbuja, debe ser igual a la presión P_R , más el término de presión debido a la presión de Laplace $\frac{2\sigma}{R}$, donde σ es la tensión superficial, más un término de pérdida de carga debido a la viscosidad del líquido, $4\mu\frac{\dot{R}}{R}$, quedando:

$$P_g = P_R + \frac{2\sigma}{R} + 4\mu\frac{\dot{R}}{R} \quad (4.7)$$

En estado de equilibrio, esta ecuación pasa a ser:

$$P_{g0} = P_\infty + \frac{2\sigma}{R_0} \quad (4.8)$$

Para obtener P_R , se puede asumir que el proceso de crecimiento o decrecimiento del radio, es isoterma, por transcurrir lentamente. Entonces se puede escribir $P_g \frac{4}{3}\pi R^3 = P_{g0} \frac{4}{3}\pi R_0^3 = CTE$; y despejando:

$$P_g = P_{g0} \left(\frac{R_0}{R}\right)^3. \text{ Introduciendo (2.8), } P_g = (P_\infty + \frac{2\sigma}{R_0}) \left(\frac{R}{R_0}\right)^{-3}, \text{ y se despeja } P_R \text{ en (4.7)}$$

Ahora, sustituyendo en la Ecuación de Rayleigh (4.6), se obtiene:

Ec. Rayleigh-Plesset

$$\boxed{\frac{3\dot{R}^2}{2} + R\ddot{R} = \frac{1}{\rho}[(P_\infty + \frac{2\sigma}{R_0})(\frac{R}{R_0})^{-3} - \frac{2\sigma}{R} - 4\mu\frac{\dot{R}}{R} - P_\infty - P_{ac}]} \quad (4.9)$$

Para resolverla, al tratarse de una ecuación diferencial no lineal, hay que proceder a linealizarla. Por ser la presión acústica $|P_{ac}| \ll P_\infty$, si se expresa el radio como $R(t) = R_0(1 + X(t))$ con $|X(t)| \ll 1$.

Realizando el siguiente cambio:

$$\begin{aligned} \dot{R} &= R_0\dot{X} \\ \ddot{R} &= R_0\ddot{X} \end{aligned}$$

De esta manera, el término cuadrático \dot{R}^2 , puede despreciarse, llegando a la ecuación diferencial linealizada en torno al radio de equilibrio R_0 :

$$\boxed{\ddot{X} + 2d\dot{X} + \omega_n^2 X = \frac{-P_{ac}(t)}{\rho R_0^2}} \quad (4.10)$$

$$\text{Con } d = \frac{2\mu}{\rho R_0^2} \text{ y } \omega_n^2 = \frac{P_{g0}}{\rho R_0^2} \left(3 - \frac{2\sigma}{P_{g0}R_0}\right)$$

El término $\frac{2\sigma}{P_{g0}R_0}$ se puede despreciar para casos en los que el radio inicial R_0 de la burbuja sea elevado ($R_0 \gg 10\mu m$). De esta manera, $\omega_n^2 = \frac{3P_{g0}}{\rho R_0^2}$, que se conoce como frecuencia de Minnaert.

Si la onda acústica es del tipo $P_{ac} = p_{ac}e^{i\omega_0 t}$, las variaciones radiales de la burbuja serán ondulatorias, de amplitud \hat{X} , del tipo: $X = \hat{X}e^{i\omega_0 t}$, $\dot{X} = i\omega_0\hat{X}e^{i\omega_0 t}$, $\ddot{X} = -\omega_0^2\hat{X}e^{i\omega_0 t}$, $P_{ac} = P e^{i\omega_0 t}$

Sustituyendo en (4.10), y despejando la amplitud \hat{X} :

$$\boxed{\hat{X} = \frac{\frac{-P}{\rho R_0^2}}{(\omega_n^2 - \omega_0^2) + 2di\omega_0}}$$

Conviene remarcar que si no fuera por el amortiguamiento o término disipativo $2di\omega$, para el caso resonante ($\omega_0 = \omega_n$), el radio de la burbuja se dispararía al infinito.

Por otro lado, la burbuja se comportará como una fuente de emisión acústica tras recibir el estímulo externo. La presión acústica radiada o dispersada se relaciona con la dinámica de las oscilaciones y se puede expresar como:

$$P_s = \frac{\rho R_0^3 \ddot{X}}{r}$$

A partir de esta expresión, y asumiendo unas oscilaciones armónicas, se puede obtener la conocida función de dispersión f_s la cual viene dada por:

$$f_s = \frac{R_0}{(\omega_n/\omega_0)^2 - 1 - 2id/\omega_0} \quad (4.11)$$

Esta función está ligada a la llamada sección eficaz de dispersión de la burbuja σ_s , definida por:

$$\sigma_s = 4\pi |f_s|^2$$

la cual representa la eficiencia ecogénica de la misma.

Este fenómeno se analizará con mayor profundidad en el siguiente capítulo, en el cual se analiza la respuesta total e interacción entre burbujas en una nube de burbujas, en lugar de una sola aislada.

4.2. Dinámica de una burbuja transferencia de masa: Ecuación de Epstein-Plesset

Una vez estudiada la respuesta de la burbuja frente a una onda acústica externa conocida, en este apartado se analiza la evolución de la burbuja debido a gradientes de concentración gaseosa que existe entre la burbuja y el líquido. Como consecuencia de ello, mediante el fenómeno de difusión másica, habrá un flujo de moles \dot{n} que tenderá a igualar las concentraciones. Suponemos igual que en el primer caso, una burbuja de radio inicial R_0 , inmersa en un fluido compuesto por un líquido y un gas, igual al del interior de la burbuja, infinito en comparación con ella. En el interior de la misma, se encuentra un gas a una presión P_g . En este caso, consideramos una concentración gaseosa en la superficie de la burbuja c_s igual a la concentración de saturación. El líquido, a una distancia grande, se encuentra a una presión hidrostática P_∞ , y la concentración gaseosa es c_∞ .

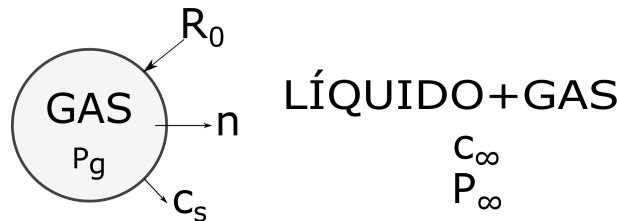


Figura 2: Burbuja en un líquido con gas disuelto, y gradiente de concentraciones.

Como en el apartado anterior, se procede a estudiar las propiedades del problema a una distancia r del centro de la burbuja, ya que estarán ligadas al comportamiento de su radio.

Ley Fick: $\dot{n} = 4\pi R^2(t)D\frac{\partial c}{\partial r}|_R$ (4.12)

Donde D es la difusividad másica del gas en el líquido.

Por las condiciones del caso supuesto, el gas se puede considerar un gas ideal:

Ley Gases Ideales: $n = \frac{P_g \frac{4}{3}\pi R^3}{R_g T_\infty}$ (4.13)

Derivando (4.13): $\dot{n} = \frac{P_g 4\pi R^2 \dot{R}}{R_g T_\infty}$

Igualando a (4.12) se obtiene:

$$\boxed{\dot{R} = \frac{R_g T_\infty}{P_g} D \frac{\partial c}{\partial r}|_R} \quad (4.14)$$

Ec. difusión de masa: $\frac{\partial c}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla c = D \nabla^2 c$

El término $\vec{v} \cdot \nabla c$ es despreciable debido a que la disolución se espera que sea lo suficientemente lenta. Expresando esta ecuación en coordenadas esféricas :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial c}{\partial r}) \quad (4.15)$$

Para conseguir condiciones de contorno homogéneas, se hace el cambio de variable: $C = \frac{c-c_\infty}{c_s-c_\infty}$. De esta manera, $C \in [0, 1]$, ya que $C(\infty, t) = 0$ y $C(R_0, t) = 1$.

La ecuación (4.15) queda:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial C}{\partial r});$$

Para resolver esta ecuación diferencial de manera más cómoda, se puede hacer el cambio $C = \frac{1}{r} \phi(r, t)$. Las condiciones de contorno pasan a ser: $\phi(R, t) = R$ y $\phi(\infty, t) < \infty$.

Sustituyendo:

$$\boxed{\frac{\partial \phi}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}} \quad (4.16)$$

La expresión (4.16), conviene resolverla haciendo uso de la transformada de Laplace, ya que el radio es un dominio semiacotado. Transformando, $\phi(r, t) \rightarrow \hat{\phi}(r, s)$. Usando las propiedades de la transformada, se obtiene:

$$\boxed{\hat{\phi}'' - \frac{s}{D} \hat{\phi} = 0} \quad (4.17)$$

Fijando las condiciones de contorno: $\hat{\phi}(R, s) = \frac{R}{s}$ y $\hat{\phi}(\infty, s) < \infty$.

La solución será del tipo: $\hat{\phi}(r, s) = A e^{\sqrt{\frac{s}{D}} r} + B e^{-\sqrt{\frac{s}{D}} r}$.

Por la segunda condición de contorno, $A = 0$. Aplicando la primera, $B = \frac{R}{s} e^{\sqrt{\frac{s}{D}} R}$.

$$\boxed{\hat{\phi}(r, s) = \frac{R}{s} e^{-\sqrt{\frac{s}{D}}(r-R)}} \quad (4.18)$$

$$\hat{C}(r, s) = \frac{\hat{\phi}(r, s)}{r} = \frac{1}{r} \frac{R}{s} e^{-\sqrt{\frac{s}{D}}(r-R)}$$

$$\frac{\partial \hat{C}}{\partial r} \Big|_R = \frac{1}{R} \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \sqrt{\frac{s}{D}} = -\left(\frac{1}{R s} + \frac{1}{\sqrt{s D}}\right)$$

Antitransformando, para volver al dominio temporal:

$$\frac{\partial C}{\partial r} \Big|_R = -\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{\sqrt{\pi D t}}\right)$$

Deshaciendo el cambio de variable:

$$\boxed{\frac{\partial c}{\partial r} \Big|_R = -(c_s - c_\infty) \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{\sqrt{\pi D t}}\right)} \quad (4.19)$$

Sustituyendo la ecuación (4.19) en (4.14):

Ec. Epstein-Plesset

$$\boxed{\dot{R} = -\frac{R_g T_\infty}{P_g} D (c_s - c_\infty) \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{\sqrt{\pi D t}}\right) = -\frac{1}{\rho_g} D (c_s - c_\infty) \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{\sqrt{\pi D t}}\right)} \quad (4.20)$$

Esta ecuación se resuelve numéricamente dada su complejidad. A continuación se muestra un gráfico que simula el comportamiento de una burbuja de CO₂ en agua. Para estos análisis se ha supuesto que c_s es la concentración de saturación del CO₂ en agua, dada por la ley de Henry, y que $c_\infty = 0$, es decir, lejos de la superficie de la burbuja el líquido es agua pura sin CO₂ disuelto. D , es el coeficiente de difusión de CO₂ en agua a temperatura y presión ambiental.

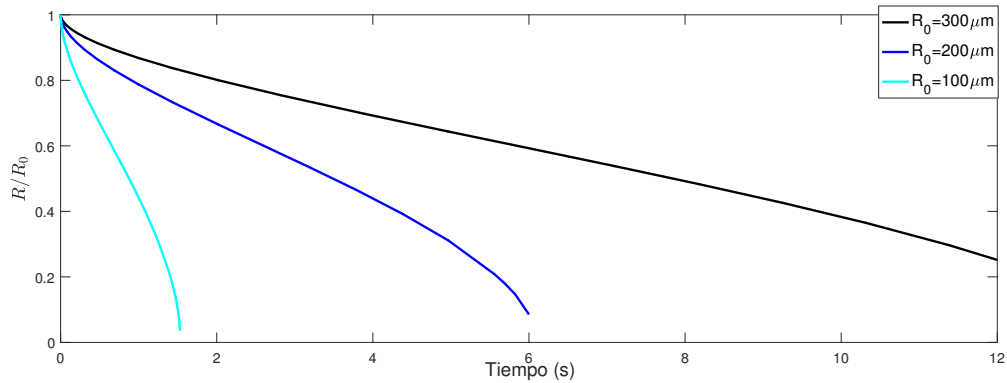


Figura 3: Se muestra la disolución de 3 burbujas de radios iniciales $100\mu m$, $200\mu m$ y $300\mu m$.

Como cabría esperar, cuanto mayor es el tamaño inicial de la burbuja, más tarda en disolverse en el líquido.

También se puede calcular el caso del crecimiento de la burbuja por enriquecimiento gaseoso en el caso de un líquido sobresaturado, siendo el valor de c_∞ el doble que c_s , como se muestra en la figura:

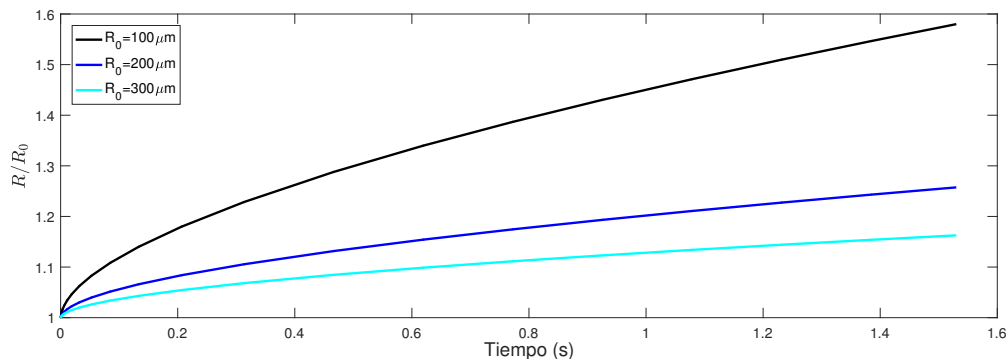


Figura 4: Crecimiento de tres burbujas de radios iniciales $100\mu m$, $200\mu m$ y $300\mu m$.

5. Dinámica colectiva: Nube de burbujas frente a una excitación acústica

En la introducción teórica se analiza y se alcanza el resultado de la respuesta de una burbuja aislada en un líquido infinito, como respuesta al estímulo de una presión acústica impuesta. En este capítulo se pretende ir un paso más allá, analizando el comportamiento colectivo de una nube de burbujas, la cual será sometida a una excitación acústica externa, y como consecuencia, análogamente al capítulo anterior, los radios de las burbujas experimentarán una variación oscilatoria en el tiempo, y se producirá una onda dispersada.

5.1. Dinámica acoplada

A la hora de analizar una nube de burbujas, clásicamente, se ha despreciado la interacción entre ellas. Sin embargo, esta hipótesis se aleja mucho de la realidad según va aumentando el llamado coeficiente de fracción de vacío de la nube β . Dicho coeficiente mide la relación entre el volumen total de burbujas y el volumen de la nube: $\beta = \frac{NR_0^3}{A^3}$. Siendo N la población de burbujas, y A el radio de la nube, la cual se considera esférica.

Para dar paso a un resultado numérico a esta cuestión, es necesario un análisis teórico previo.

La ecuación de Rayleigh-Plesset (4.9), puede corregirse, añadiendo un factor que contemple las ondas dispersadas por las burbujas vecinas en el interior de una nube. De esta manera, se tiene en cuenta el comportamiento global, añadiendo los factores de interacción entre burbujas. El comportamiento de una burbuja i, en el seno de una nube con N burbujas, puede modelarse con la siguiente ecuación:

$$R_i \ddot{R}_i + \frac{3}{2} \dot{R}_i^2 = -\frac{1}{\rho}(P_{aci} + P_\infty) + \frac{1}{\rho}[P_{g0i}(\frac{R_i}{R_{0i}})^{-3} - \frac{2\sigma}{R_i} - 4\mu\frac{\dot{R}_i}{R_i}] - \frac{1}{\rho} \sum_{j \neq i}^N \frac{\rho}{r_{ij}} [R_j^2(\tau_{ij}) \ddot{R}_j(\tau_{ij}) + 2R_j(\tau_{ij}) \dot{R}_j^2(\tau_{ij})] \quad (5.1)$$

Siendo r_{ij} la distancia entre los centros de las burbujas i y j, situadas en el espacio por su vector de posición $\vec{r}_i = [x_i, y_i, z_i]$ y $\tau_{ij} = t - \frac{r_{ij}}{c_\infty}$ el tiempo retardado.

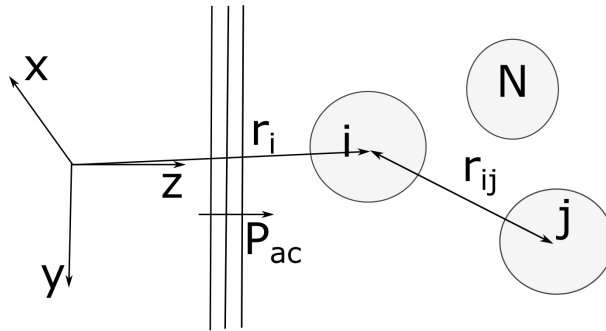


Figura 5: Onda acústica plana se propaga en la dirección z, excitando a la nube de burbujas. Cada burbuja se posiciona según su correspondiente vector \vec{r} .

Linealizando la expresión (5.1) en torno al radio de equilibrio R_0 , como se hizo con la ecuación de Rayleigh-Plesset (4.9), asumiendo que $R_i = R_0(1 + X_i)$, con $|X_i| \ll 1$ obtenemos la siguiente ecuación:

$$\ddot{X}_i + 2d_i\dot{X}_i + \omega_{ni}^2 X_i = -\frac{1}{\rho R_{0i}^2} [P_{aci} + \sum_{j \neq i}^N \rho R_{0j}^3 \frac{\ddot{X}_j(\tau_{ij})}{r_{ij}}] \quad (5.2)$$

Con $d_i = \frac{2\mu}{\rho R_{0i}^2}$ y $\omega_{ni}^2 = \frac{P_{g0i}}{\rho R_{0i}^2} (3 - \frac{2\sigma}{P_{g0i} R_{0i}})$.

Siendo la excitación acústica incidente una onda plana del tipo $P_{ac} = p_a e^{-i\omega t} e^{ikz}$, la reacción de las burbujas será ondulatoria del tipo $X_i = \hat{X}_i e^{-i\omega t} e^{ikz}$. De esta manera, la respuesta de la nube de burbujas se puede expresar mediante un sistema lineal de N ecuaciones de la forma:

$$\hat{X}_i = \frac{\frac{-1}{\rho \omega_0^2 R_{0i}^2}}{(\frac{\omega_{ni}}{\omega_0})^2 - 1 - i2d_i/\omega_0} \left[p_a - \sum_{j \neq i}^N \rho \omega_0^2 R_{0j}^3 \hat{X}_j e^{ik(z_j - z_i) \frac{e^{ikr_{ij}}}{r_{ij}}} \right] \text{ con } i = 1, 2, \dots, N \quad (5.3)$$

Como se puede observar, la dinámica de oscilaciones en una nube de burbujas es similar a la de una burbuja aislada analizada en apartados anteriores, añadiendo un término asociado a las oscilaciones de las burbujas vecinas. Este término, se comporta como otra fuente de excitación acústica, variando las oscilaciones de las burbujas en fase y amplitud. Se puede comprobar fácilmente que cuanto mayor sea la distancia entre burbujas r_{ij} , menor influencia tendrá, quedando la solución reducida al término de la dinámica aislada cuando $r_{ij} \rightarrow \infty$, como cabía esperar. El sistema de ecuaciones (5.3) se puede expresar en notación matricial de la siguiente forma:

$$(K - \omega_0^2 M) \hat{X} = \Pi \quad (5.4)$$

Con $\hat{X} = [\hat{X}_1 \hat{X}_2 \dots \hat{X}_N]$ un vector cuyos elementos son las oscilaciones de cada burbuja, $\Pi = \frac{p_a}{\rho} [R_{01}^{-2} R_{02}^{-2} \dots R_{0N}^{-2}]$ el vector de excitación. K es la matriz de rigidez, la cual es una matriz diagonal cuyos elementos son las frecuencias naturales de cada burbuja $K_{ii} = \omega_{0ni}^2$. Por último, la matriz de inercia M se define como:

$$M_{ij} \begin{cases} 1 + i2d_i/\omega_0 & si & i = j \\ \frac{R_{0j}^3}{R_{0i}^2} e^{ik(z_j - z_i) \frac{e^{ikr_{ij}}}{r_{ij}}} & si & i \neq j \end{cases}$$

Se puede comprobar que los términos de las diagonales de ambas matrices corresponden a las dinámicas de las burbujas aisladas, conteniendo propiedades individuales tales como su frecuencia natural y amortiguamiento. Los términos relativos a la dinámica colectiva y acoplamiento se encuentran fuera de la diagonal, y contienen información propia de la nube, como las distancias entre pares de burbujas, relación entre tamaños, etc.

Como ya se ha comentado, si cuando el término $r_{ij} \rightarrow \infty$, ambas matrices serán diagonales, y el sistema quedará reducido a ecuaciones desacopladas que modelizan la dinámica individual y aislada de cada burbuja.

5.2. Dispersión múltiple

Todo el análisis sobre las oscilaciones de las burbujas de una nube realizado en el anterior apartado, permite analizar la presión dispersada o emitida por una nube de N

burbujas al ser excitada por una presión acústica P_{ac} .

Como es lógico, el hecho de que una burbuja, no solo reciba la excitación externa, sino estímulo por parte de las ondas dispersadas por burbujas vecinas, modificará en última instancia la onda que dispersará esta.

Es por ello, que en el contexto de la dinámica colectiva de burbujas se introduce el término de *Multiple Scattering*, o dispersión múltiple.

La onda total emitida por la nube se puede expresar como la suma de las presiones dispersadas por cada burbuja $P_s = \sum_{i=1}^N P_{si}$.

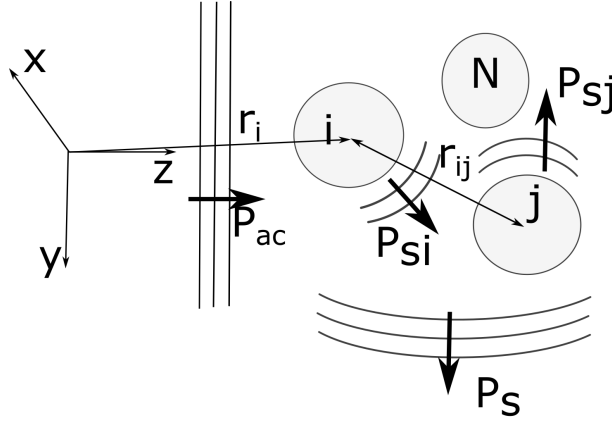


Figura 6: Representación esquemática del fenómeno de Multiple Scattering. P_s es la presión total dispersada por la nube de burbujas, r_i es el vector que posiciona las burbujas con respecto a los ejes de referencia

Siendo la excitación acústica $P_{ac} = p_a e^{-i\omega_0 t} e^{ikz}$, la presión de la onda emitida por la burbuja i será $P_{si} = p_{si} e^{-i\omega_0 t} e^{ikz}$, de igual manera que en el caso de una sola burbuja, salvo que en el término de amplitud, para cuantificar la influencia tanto de la excitación externa, como de las ondas emitidas por las burbujas vecinas, resultando:

$$p_{si}(\vec{r}) = f_{si} e^{-ikz_i} (p_a e^{ikz_i} + \xi_i) \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}_i|}}{|\vec{r}-\vec{r}_i|} \quad (5.5)$$

El término ξ_i representa el efecto de las ondas dispersadas por las burbujas vecinas, de tal forma que:

$$\xi_i = \sum_{j \neq i}^N p_{sj}(\vec{r}_i) e^{ikz_j}, \text{ que se puede reescribir como: } \xi_i = \sum_{j \neq i}^N f_{sj} (p_a e^{ikz_j} + \xi_j) \frac{e^{ikr_{ij}}}{r_{ij}} \quad (5.6).$$

Este término constituye un sistema lineal de N ecuaciones para las N burbujas de la nube. Reescribiendolo en forma matricial se tiene que:

$$\boxed{\xi = A(\Pi + \xi)} \quad (5.7)$$

siendo $\xi = [\xi_1, \xi_2 \dots \xi_N]$, el vector de presión emitida, y $\Pi = p_a [e^{ikz_1} \text{ y } e^{ikz_2} \dots e^{ikz_N}]$ el vector de presión incidente. A es la matriz de acoplamiento, y se define como:

$$A_{ij} \begin{cases} 0 & si \quad i = j \\ f_{sj} \frac{e^{ikr_{ij}}}{r_{ij}} & si \quad i \neq j \end{cases}$$

A será simétrica en caso de que las burbujas de la nube tengan el mismo radio, es decir, que sean monodispersas.

Si se reescribe la ecuación matricial (5.7) como $(I - A)\xi = A\Pi$, siendo I la matriz identidad, podremos hallar el vector de presión dispersada ξ invirtiendo matrices. Con los valores de ξ_i conocidos, entrando en la ecuación (5.5) se podrá obtener la onda dispersada por cada burbuja, y en consecuencia, la onda de dispersión total para cualquier punto, ya sea interior o exterior, de la nube:

$$p_s(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N p_{si}(\vec{r})e^{ikz_i} = \sum_{i=1}^N f_{si}(p_{ac}e^{ikz_i} + \xi_i) \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}_i|}}{|\vec{r}-\vec{r}_i|} \quad (5.8)$$

Con la onda dispersada, y el campo de presión acústica incidente, podemos obtener la presión total en un punto cualquiera (interior o exterior de la burbuja), por superposición:

$$p(\vec{r}) = p_{ac}e^{ikz} + \sum_{i=1}^N f_{si}(p_{ac}e^{ikz_i} + \xi_i) \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}_i|}}{|\vec{r}-\vec{r}_i|} \quad (5.9)$$

5.3. Sección eficaz de dispersión

Para concluir el análisis de la respuesta conjunta de la nube P_s , frente a la excitación P_{ac} , se define el parámetro $\Sigma_s = \int_{\Omega} r^2 \left(\frac{I_s}{I_a}\right) d\Omega$, siendo r la distancia al dentro de la nube, y Ω un ángulo sólido. $I_s = \frac{|p_s|^2}{2\rho c}$ es la intensidad de la onda total emitida y $I_a = \frac{p_a^2}{2\rho c}$ la intensidad de la onda acústica. Para distancias mucho mayores que el tamaño de nube, se puede aproximar $|\vec{r} - \vec{r}_i|$ por $r - \vec{r}_i \cdot \vec{u}_r$, con \vec{u}_r vector de dirección de \vec{r} , quedando la presión dispersada como $p_s = p_a F_s \frac{e^{ikr}}{r}$. F_s es el término de dispersión análogo a f_s (4.11) utilizado en el análisis para una sola burbuja, y para el caso de la nube se formula como:

$$F_s = \sum_{i=1}^N f_{si} \left[e^{ikz_i} + \frac{\xi_i}{p_a} \right] e^{-ik\vec{r}_i \cdot \vec{u}_r} \quad (5.10)$$

Como se puede observar, la onda dispersada es una onda esférica. Si la nube de burbujas es esférica, y teniendo en cuenta la simetría de la onda de excitación, se puede considerar que el término de dispersión colectiva F_s depende exclusivamente del ángulo polar θ , que fija el vector $\vec{u}_r = [\sin\theta, 0, \cos\theta]$. Así, la sección eficaz se puede expresar como:

$$\Sigma_s = \int_{\Omega} |F_s(\theta)|^2 d\Omega = 2\pi \int_0^{\pi} \left| \sum_{i=1}^N f_{si} \left[e^{ikz_i} + \frac{\xi_i}{p_a} \right] e^{-ik\vec{r}_i \cdot \vec{u}_r} \right|^2 \sin\theta d\theta \quad (5.11)$$

Una vez obtenido este resultado, se procede a calcular valores de la sección eficaz de dispersión en diferentes nubes de burbujas.

El algoritmo usado para el cálculo y representación genera una nube de burbujas distribuidas de manera homogénea, asignando a cada burbuja unas coordenadas esféricas aleatorias. Las posiciones individuales de cada burbuja se representan en un vector \vec{r}_i , y a continuación se calcula el vector de presiones ξ_i para cada frecuencia de excitación. Por último, se procede a calcular la función F_s para cada frecuencia, y se integra para obtener Σ_s . Para la resolución y representación, se ha adimensionalizado la sección eficaz mediante $\Sigma_s/N\pi R_0^2$, y la frecuencia de excitación ω_0/ω_n .

En primera instancia, se trabaja con una nube de burbujas sin polidispersión, es decir,

todas de igual radio inicial R_0 . Además se calculan los resultados para diferentes valores de fracción de vacío β .

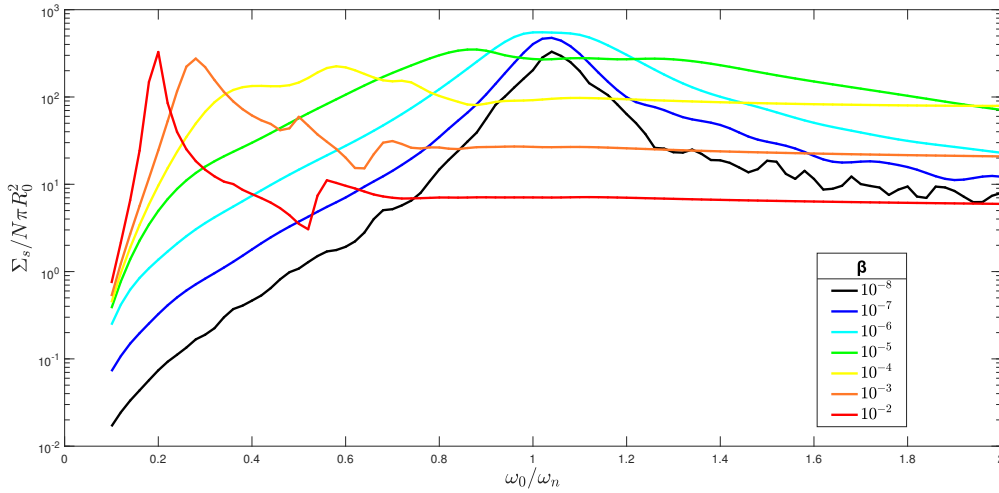


Figura 7: Espectro de secciones eficaces $\Sigma_s/N\pi R_0^2$ para una nube de $N=1000$ burbujas con el mismo radio inicial $R_0 = 100\mu m$.

Resalta de forma evidente un cambio de comportamiento al ir aumentando la fracción de vacío β . Como se puede observar, el pico de máxima sección eficaz se da para frecuencias de excitación ω_0 iguales a la frecuencia natural ω_n cuando la fracción de vacío es demasiado pequeña. Sin embargo, para la curva de fracción de vacío 10^{-5} ya se observa un cambio de tendencia, en la cual el pico comienza a desplazarse hacia la izquierda, obteniéndose para valores de frecuencia menores que la frecuencia natural. Este comportamiento concuerda con lo expuesto en este capítulo, ya que para valores en los que las burbujas se encuentran separadas entre si, los fenómenos de acoplamiento acústico y dispersión múltiple son débiles, y necesitamos una mayor excitación para obtener una buena respuesta acústica. Sin embargo, al ir aumentando β , la proximidad entre burbujas aumenta y las dinámicas acopladas empiezan a ser considerables, se obtiene la máxima energía dispersada para valores de excitación más bajos. Esto caracteriza el conocido fenómeno de resonancia colectiva.

A continuación, cabe preguntarse si habría diferencias significativas en el cálculo de una nube con índice de polidispersión distinto de 0, es decir, partiendo de una nube con burbujas de radios iniciales aleatorios, siguiendo una distribución de probabilidad normal, centrada en $\overline{R_0}$ y con desviación estándar igual al índice de polidispersión I :

$$f(R_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi I}} e^{-\frac{(R_0 - \overline{R_0})^2}{2I^2}} \quad (5.12)$$

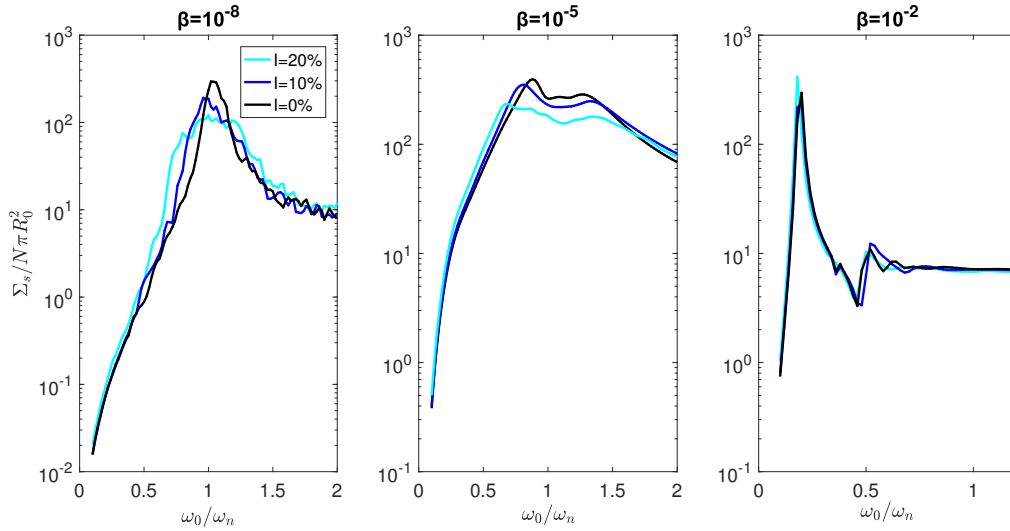


Figura 8: Efecto de la polidispersión sobre la sección eficaz en nubes de burbujas con $N=1000$ burbujas con radio medio $\overline{R_0} = 100\mu m$.

Como se puede observar, para fracciones de vacío pequeñas, es decir, nubes muy diluidas, el efecto de la polidispersión hace disminuir el pico de sección eficaz producida, lo ensancha y se produce antes (para una frecuencia de excitación menor que en el caso monodisperso). Esto es debido al espectro más amplio de tamaños de burbuja, lo que propicia que la nube presente una zona más ancha de resonancias. Sin embargo, a medida que la fracción de vacío aumenta, la sección eficaz de la nube se ve cada vez menos afectada por la polidispersión.

6. Dinámica colectiva con transferencia de masa

Como se explica y desarrolla en el segundo apartado del cuarto capítulo, el hecho de que una burbuja de un gas se encuentre en un líquido con ese mismo gas disuelto influye de manera notable en la variación del tamaño de dicha burbuja. La ecuación de Epstein-Plesset (4.20) modela la dinámica de las burbujas presentes en un medio con gradientes de concentración, con la consecuente caída o aumento del radio con el tiempo, debido al enriquecimiento o empobrecimiento de la burbuja.

En este capítulo el objetivo es el estudio de la dinámica de burbujas sometidas a la acción conjunta de una excitación acústica, y de un gradiente de concentraciones de gas disuelto en el líquido. Para comenzar a calcular los valores de sección eficaz se utiliza un algoritmo similar al del capítulo anterior, con la salvedad de que en este caso, el radio y por lo tanto la fracción de vacío va a tener una dependencia temporal debido a la disolución o al crecimiento de las burbujas. Para conseguirlo, el algoritmo ha sido modificado introduciendo el código usado en el primer capítulo para el cálculo numérico de la ecuación de Epstein-Plesset (4.20):

$$\dot{R} = -\frac{R_g T_\infty}{P_g} D(c_s - c_\infty) \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{\sqrt{\pi D t}} \right) = -\frac{1}{\rho_g} D(c_s - c_\infty) \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{\sqrt{\pi D t}} \right)$$

6.1. Evolución temporal de la sección eficaz

En este apartado, se va a obtener la variación en el tiempo de la sección eficaz de dispersión de una nube monodispersa, considerando que todas las burbujas están sometidas a un mismo gradiente de concentración. En otras palabras, las burbujas están lo suficientemente separadas entre sí, como para no notar la influencia de la disolución de las burbujas vecinas en cuanto al fenómeno de transferencia de masa.

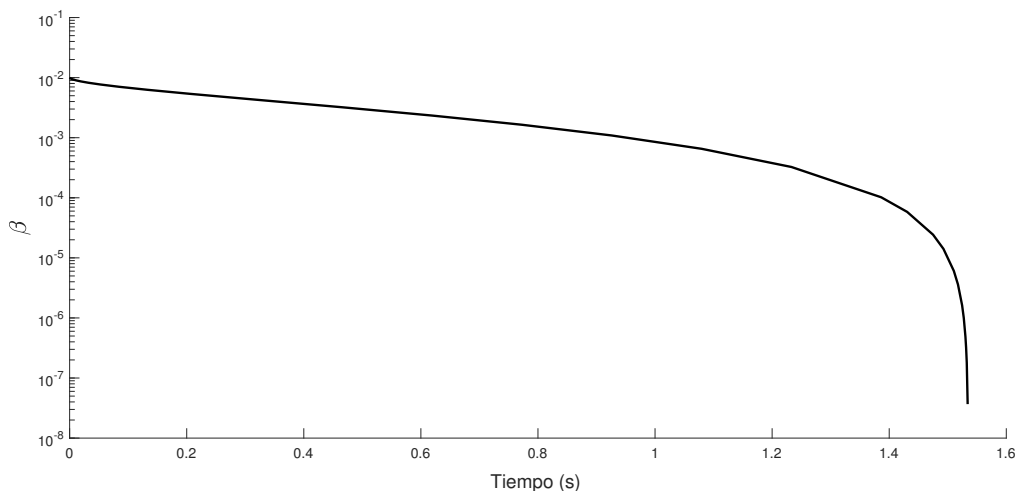


Figura 9: Cálculo de la variación de la fracción de vacío β con la disolución de las burbujas en una nube monodispersa.

Por conveniencia, cada curva calculada representa un valor de frecuencia $\omega = \omega_0/\omega_n = Cte$, y la fracción de vacío decae con el tiempo, como se ve en la Figura 9, al contrario

que en la Figura 7 en la cual las curvas correspondían a $\beta = Cte$ e íbamos variando ω .

En todas las simulaciones se ha utilizado una nube inicialmente monodispersa de $N=1000$ burbujas con un tamaño inicial $R_0 = 100\mu m$.

Se observa en la Figura 9, que la fracción de vacío de la nube decae lentamente durante la disolución de las burbujas. Solamente cuando las burbujas están próximas a su disolución completa, se observa una importante variación temporal en ella.

A continuación, se procede a representar la evolución temporal de la sección eficaz de dispersión de la nube para ciertas frecuencias de interés.

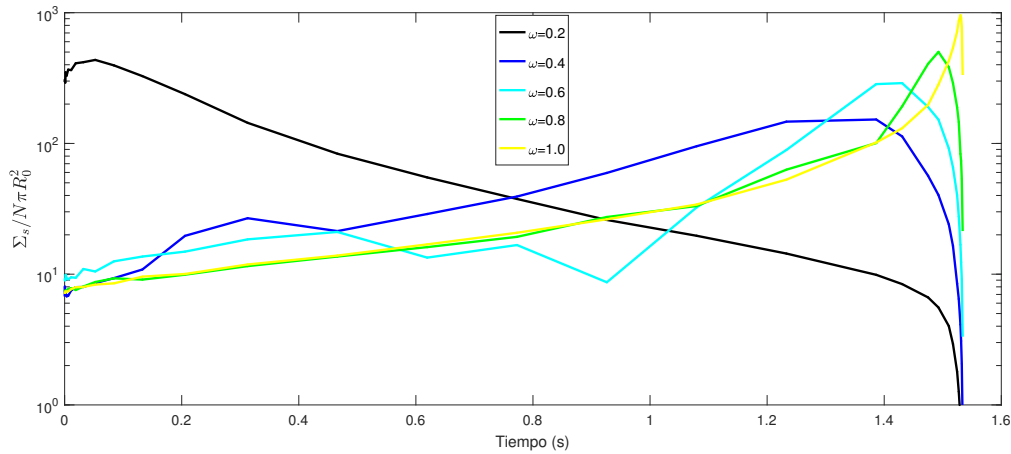


Figura 10: Cálculo de las curvas $\Sigma_s/N\pi R_0^2$ -Tiempo para frecuencias de excitación subresonantes ($\omega_0 < \omega_n$).

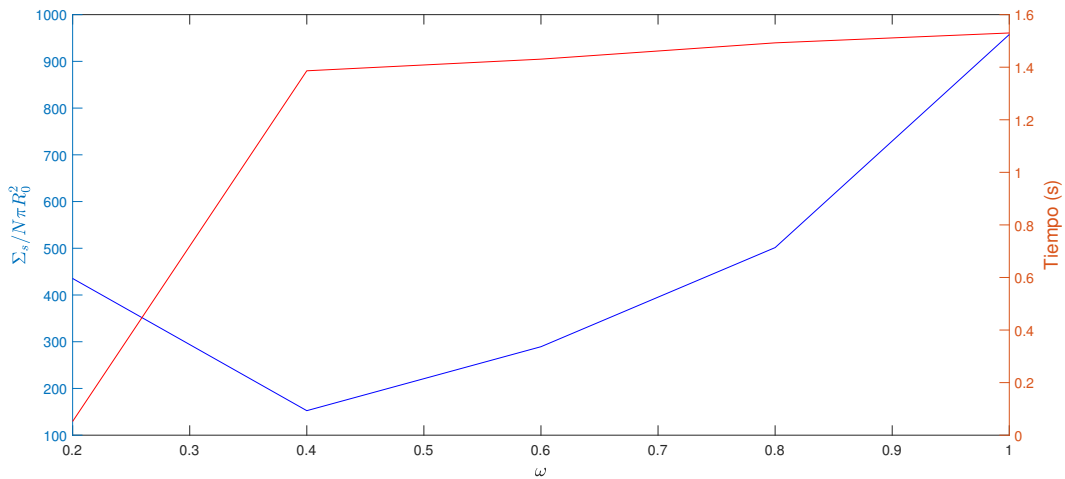


Figura 11: Representación de los picos de sección eficaz (Izquierda) y tiempo en el que se alcanzan (Derecha) correspondientes a frecuencias de excitación ω_0 subresonantes.

Como cabía esperar, a frecuencia $\omega = Cte$, la respuesta de la nube es coherente con el estudiado en el capítulo anterior, ya que el efecto de la disolución en realidad afecta

directamente a la fracción de vacío haciéndola disminuir como se muestra en la Figura 10. En la Figura 11 se observa claramente la tendencia que experimenta la nube de burbujas. Los picos de sección eficaz máxima van aumentando al aumentar la frecuencia de excitación, y se alcanzan más tarde.

Este comportamiento solo se obtiene cuando la excitación que recibe la nube es subresonante, es decir, $\omega_0 < \omega_n$. Al resolver el caso con $\omega_0 > \omega_n$ la respuesta es completamente diferente como se muestra a continuación:

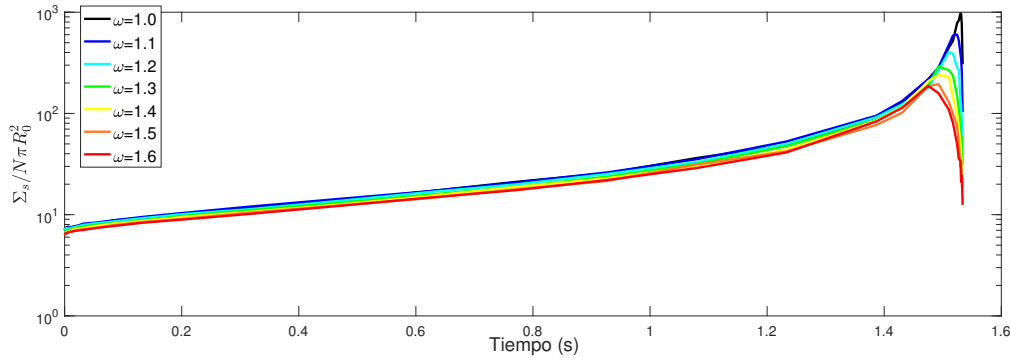


Figura 12: Cálculo de las curvas $\Sigma_s/N\pi R_0^2$ -Tiempo para frecuencias de excitación superresonantes ($\omega_0 > \omega_n$).

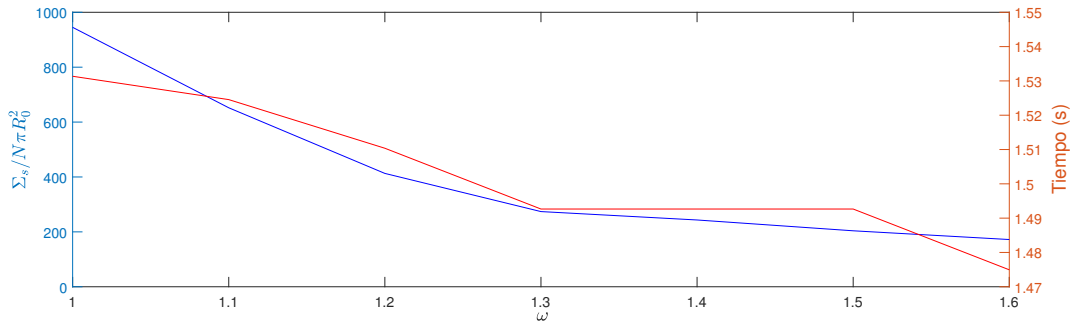


Figura 13: Representación de los picos de sección eficaz (Izquierda) y tiempo en el que se alcanzan (Derecha) correspondientes a frecuencias de excitación ω_0 superresonantes .

La Figura 12 muestra el nuevo comportamiento para el caso superresonante, en el cual, al contrario de lo que sucedía para $\omega < 1$, los picos de sección eficaz se alcanzan antes en el tiempo al ir aumentando la frecuencia de excitación, y su valor es menor.

6.2. Influencia de la posición de las burbujas en la nube

Durante todos los cálculos numéricos realizados y expuestos anteriormente, se ha considerado que todas las burbujas de la nube tienen la misma tendencia a disolverse o aumentar por efecto de la pérdida o enriquecimiento gaseoso, es decir, que todas las burbujas ven el mismo gradiente de concentración a su alrededor.

Esta suposición está alejada de la realidad, sobre todo, en el caso de nubes densas (con una alta fracción de vacío), ya que, como resulta evidente, las burbujas situadas en zonas

cercanas al centro de la nube estarán sometidas a un gradiente de concentración muy diferente de las burbujas cercanas a la superficie de la misma (Ref 8). Esto se explica por la distinta disponibilidad gaseosa en el contorno de la nube y el interior de la misma, ya que la disolución o crecimiento de las burbujas vecinas afectan a la concentración local de gas.

Para los cálculos realizados en este apartado, se propone una corrección a la ecuación de Epstein-Plesset (4.20).

$$\dot{R} = -\frac{1}{\rho_g} D(c_s - c_{ef}) \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{\sqrt{\pi D t}} \right) \quad (6.1)$$

El coeficiente c_{ef} corrige la ecuación original, introduciendo una dependencia entre la posición de la burbuja en la nube y su comportamiento frente a un gradiente de concentración. En primera instancia, se ha impuesto una dependencia lineal, siendo $c_{ef} = (c_\infty - c_s) \frac{r_n}{A} + c_s$. De esta manera, si una burbuja situada en el contorno de la nube, es decir $r_n = A$, el coeficiente c_{ef} tomará el valor de c_∞ , mientras que para una burbuja situada en el centro de la nube, $r_n = 0$, $c_{ef} = c_s$.

El comportamiento queda así más ajustado a la realidad, ya que el entorno de las burbujas del interior de la nube, inicialmente, verá una concentración c_s y no comenzará a disolverse hasta que el contenido gaseoso de las burbujas más exteriores comience a difundirse hacia el exterior de la nube.

Como se observa en la Figura 14, al aplicar una corrección lineal, casi la mitad de las burbujas no logran disolverse completamente en el tiempo de la simulación. Esto hace que la dinámica de la disolución de la nube sea muy rígida y sus propiedades ecogénicas varíen poco en el tiempo.

Para solucionar esto, se propone corregir el modelo de disolución de Epstein-Plesset con una concentración efectiva que dependa exponencialmente de la distancia al centro de la nube. En este caso $c_{ef} = c_s - (1 - \exp(-\pi r_n/A))(c_s - c_\infty)/(1 - \exp(-\pi))$.

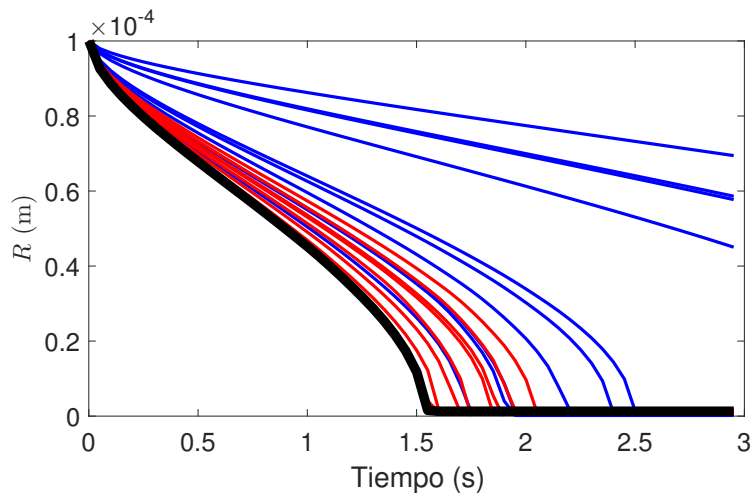


Figura 14: Dinámica de disolución de $N=20$ burbujas para: a) Modelo desacoplado (curva negra), b) Modelo con corrección lineal (curvas azules) y c) Modelo con corrección exponencial (curvas rojas).

En la Figura 15 se muestra cómo la fracción de vacío de la nube disminuye en el tiempo

a medida que las burbujas se disuelven siguiendo los modelos propuestos. Mientras que en el caso del modelo desacoplado, la nube alcanza su total disolución, en los casos más realistas propuestos, se ve que parte de las burbujas (sobre todo las cercanas al centro de la nube) se disuelven de una forma más lenta y por tanto la fracción de vacío decae mucho más suavemente en el tiempo.

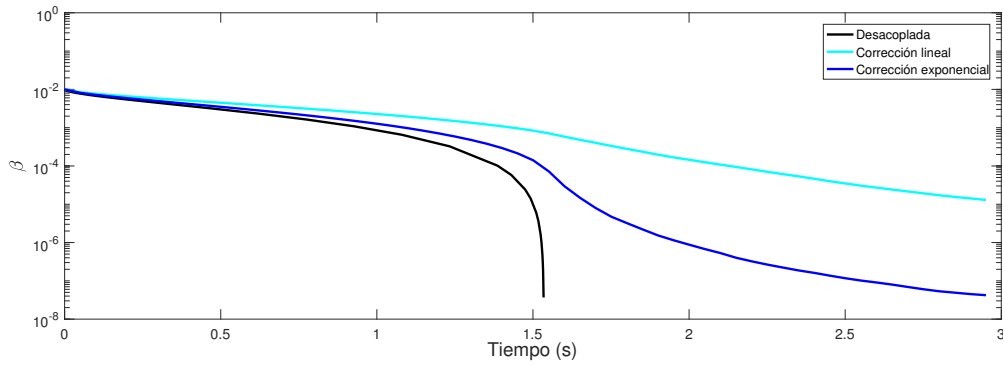


Figura 15: Variación temporal de la fracción de vacío para los 3 modelos de disolución de la nube.

A continuación se va a comparar la evolución de la sección eficaz de la nube cuando es excitada a una frecuencia ω fija.

Se observa que la sección eficaz para los casos de disolución que siguen modelos corregidos se mantiene en valores elevados durante más tiempo.

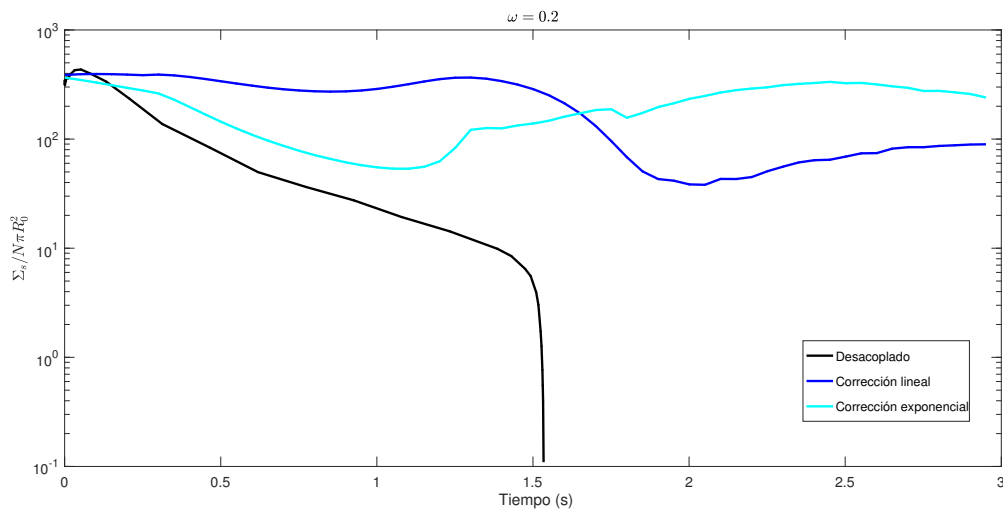


Figura 16: Evolución temporal de la sección eficaz de la nube a frecuencia 0.2 para los distintos modelos de disolución.

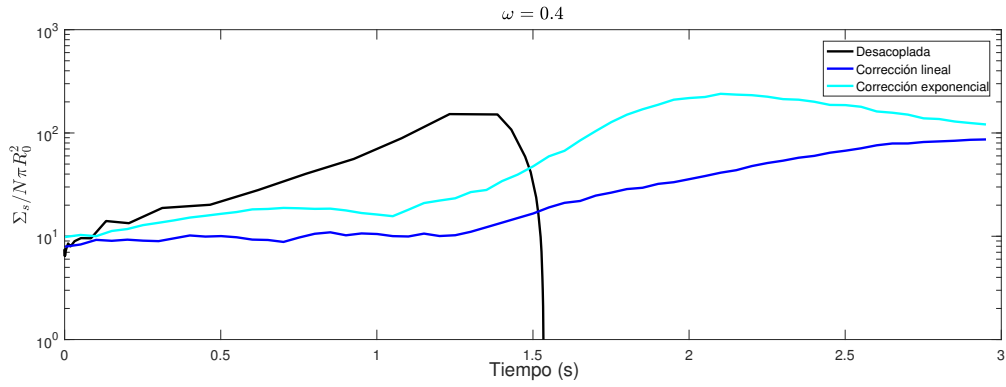


Figura 17: Evolución temporal de la sección eficaz de la nube a frecuencia 0.4 para los distintos modelos de disolución.

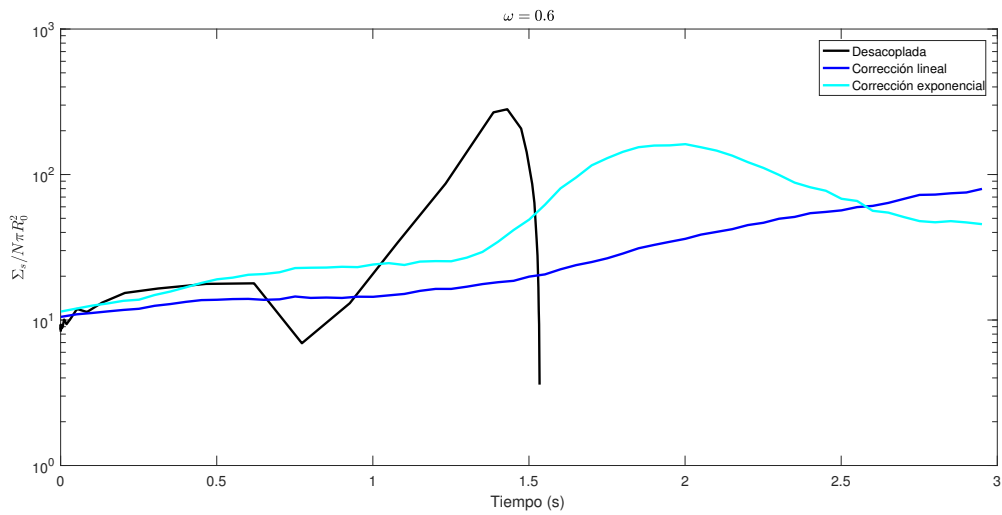


Figura 18: Evolución temporal de la sección eficaz de la nube a frecuencia 0.6 para los distintos modelos de disolución.

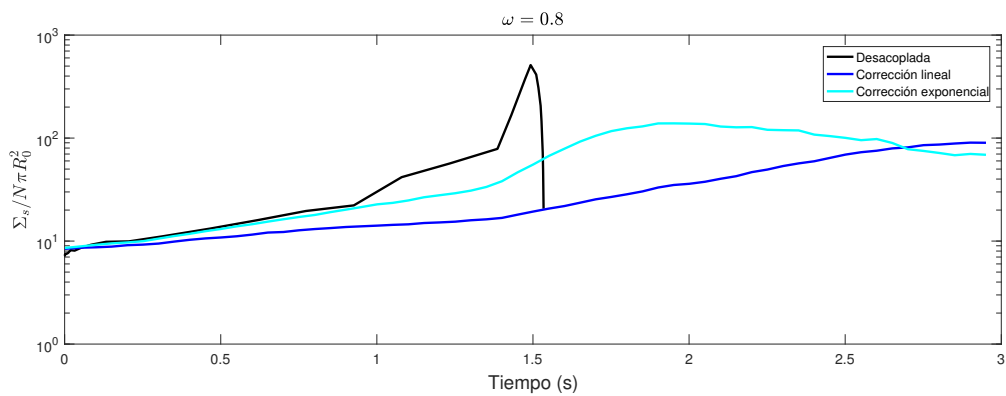


Figura 19: Evolución temporal de la sección eficaz de la nube a frecuencia 0.8 para los distintos modelos de disolución.

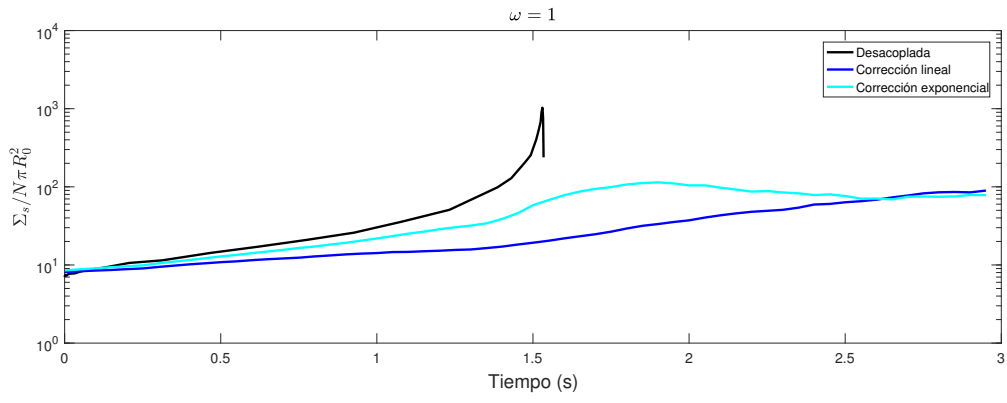


Figura 20: Evolución temporal de la sección eficaz de la nube a frecuencia 1 para los distintos modelos de disolución.

7. Conclusiones y líneas futuras

En primer lugar se ha planteado una formulación matemática rigurosa de la dinámica de burbujas ante una excitación acústica externa y ante una variación de la concentración gaseosa del líquido circundante. Esta formulación ha permitido analizar con una base científica los resultados obtenidos en las simulaciones.

Por otro lado, se ha desarrollado un modelo complejo basado en el Scattering Multiple con el objetivo de caracterizar la respuesta acústica colectiva de una nube de burbujas. Esto resulta de gran interés para multitud de aplicaciones tanto en la industria (naval, alimentaria) como en la medicina: el efecto colectivo de las burbujas oscilando sobre superficies o creciendo en un líquido supersaturado dan lugar a fenómenos muy interesantes para el estudio de la cavitación en las hélices de buques y en la producción de bebidas carbonatadas, así como el desarrollo de herramientas para diagnosis clínica mediante el uso de ultrasonidos.

Las simulaciones realizadas siguiendo el modelo de Scattering Multiple permiten cuantificar la eficiencia ecogénica de las nubes de burbujas según su contenido gaseoso o fracción de vacío. Se ha comprobado que cuanto mayor es esta, estas nubes dispersan el sonido a frecuencias de excitación relativamente bajas. Por el contrario, cuanto más diluidas están las nubes el sonido es dispersado con mas eficiencia cuando las burbujas son excitadas a su frecuencia de resonancia.

Se ha mostrado la influencia de la polidispersión en tamaños sobre la sección eficaz de un nube. Así pues, se observa que un incremento de la polidispersión en nubes diluidas hace que el espectro de la sección eficaz disminuya, se ensanche y se desplace hacia frecuencias inferiores, lo que supone una pérdida neta de eficiencia ecogénica.

Por el contrario, a medida que la nube se vuelve más densa, las resonancias colectivas a bajas frecuencias comienzan a dominar. En estos casos, la polidispersión prácticamente no afecta a la eficiencia ecogénica de la nube.

A continuación, se ha introducido el fenómeno de transferencia de masa en la nube de burbujas, permitiendo que la fracción de vacío varíe en el tiempo. Para ello, en primer lugar, se ha impuesto una dinámica de disolución desacoplada donde cada burbuja se disuelve de forma independiente siguiendo la ecuación de Epstein-Plesset.

Con el fin de desarrollar una herramienta técnica que nos permita cuantificar el contenido gaseoso de una nube en función del tiempo, se han construido las curvas que caracterizan los máximos de eficiencia ecogénica que alcanza la nube a medida que se disuelve.

Por último, para tener en cuenta el acoplamiento existente en la realidad entre la transferencia de masa existente en cada burbuja y sus vecinas, se han formulado dos modelos de disolución de nubes que corrigen al modelo desacoplado expuesto anteriormente.

La caracterización de la sección eficaz en estos casos, a parte de revelar el contenido gaseoso de la nube, permite la estimación de la estructura interna en cuanto a los tamaños de burbujas. Se ha comprobado que esta sección eficaz es robusta para frecuencias relativamente altas ($\omega > 0,4$), ya que no se observa influencia alguna sobre su variación temporal.

Como líneas de desarrollo futuras se plantea el montaje experimental con el fin de caracterizar acústicamente la composición y estructura de una nube de burbujas. Estos resultados permitirán desarrollar nuevos modelos para la disolución de nubes que contemple de una forma más realista los efectos colectivos.

8. Planificación temporal

Para detallar la planificación temporal se hace uso de un diagrama de Gantt. En él se descompone el proyecto en sus diferentes partes y se expone la duración de las mismas.

Actividad 1: Asignación de TFG y recomendación de bibliografía.

Actividad 2: Lectura de bibliografía recomendada.

Actividad 3: Lección magistral en pizarra a modo de introducción teórica.

Actividad 4: Elaboración del capítulo introductorio (Capítulo 4).

Actividad 5: Tutoría y aclaraciones del siguiente capítulo.

Actividad 6: Elaboración del capítulo 5 . Tutoría y aclaraciones del capítulo 6.

Actividad 7: Elaboración del capítulo 6 .

Actividad 8: Correcciones del contenido del TFG .

Actividad 9: Correcciones del formato del TFG con el tutor .

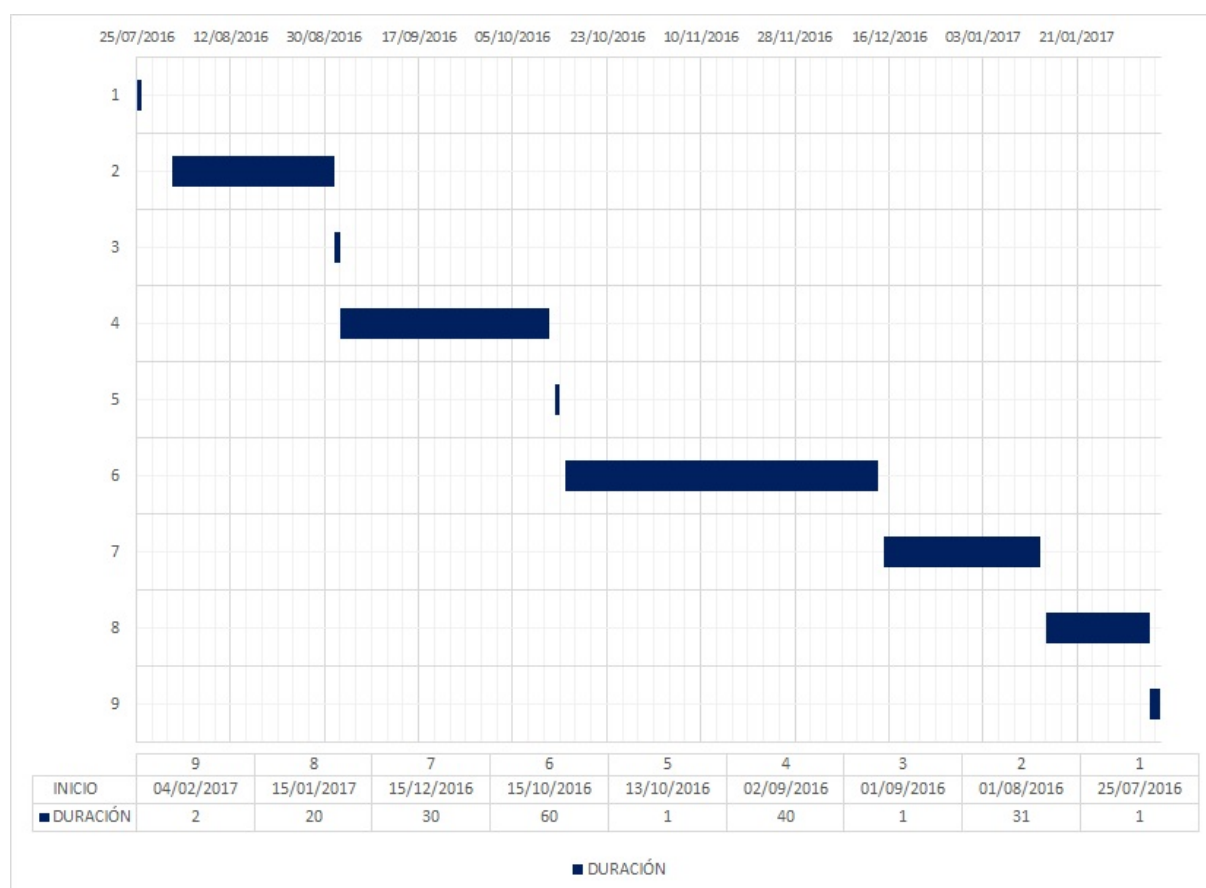


Figura 21: Diagrama de Gantt

El tiempo dedicado estimado a lo largo de los 6 meses es de 270 horas(180 días a una media de hora y media por día).

9. Bibliografía

- 1. 'The acoustic bubble.' T. Leighton, Academic Press, 1994.
- 2. 'Propagación y dispersión de ondas acústicas a través de nubes de microburbujas.' M.A.Parrales, Universidad de Sevilla, 2013.
- 3. 'On the pressure developed in a liquid during the collapse of a spherical cavity.' Lord Rayleigh, Phil. Mag., 1917
- 4. 'The dynamics of cavitation bubbles' M. Plesset, J. Appl. Mech., 1949
- 5. 'On musical air-bubbles and the sound of running water' M. Minnaert, Phil. Mag., 1933.
- 6. 'The multiple scattering of waves' L. Foldy, Phys. Rev., 1945
- 7. 'On the stability of gas bubbles in liquid-gas solutions' P. Epstein, J. Chem. Phys., 1950
- 8. 'Colletive effects in microbubble growth by solvent exchange' S. Peng, Langmuir, 2016